

4

O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno aplicado a problemas dependentes do tempo

Neste capítulo é mostrada a formulação do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno no domínio do tempo. Depois é encontrada uma solução fundamental no domínio da frequência. E finalmente é apresentada uma metodologia que faz uma análise no tempo a partir da formulação dependente da frequência.

4.1.

Equações básicas da elastodinâmica e solução fundamental

Introduzindo o efeito do tempo, na teoria apresentada no item 2.1, que se deve à inércia do corpo elástico. Tenta-se encontrar um campo u_i , correspondente às tensões σ_{ij} , que satisfaça a equação diferencial de equilíbrio dinâmico

$$\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (4.1)$$

A eq. (4.1) é definida no domínio Ω , para uma dada força de massa b_i e uma densidade de massa ρ . Os índices i e j podem assumir os valores 1, 2 e 3, correspondendo às coordenadas globais x , y e z , respectivamente. Um índice após uma vírgula indica uma derivada na direção correspondente. Índices repetidos representam a soma de três termos (para o caso mais geral de problemas tridimensionais). O ponto indica derivada no tempo.

O campo de deslocamentos deve satisfazer as condições de contorno

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_u, \quad (4.2)$$

Onde \bar{u}_i são os deslocamentos prescritos no contorno Γ_u . Tem-se também que o campo de tensões σ_{ij} deve estar em equilíbrio com as forças t_i prescritas no contorno Γ_σ . Conseqüentemente

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \text{ em } \Gamma_\sigma. \quad (4.3)$$

Encontrar uma solução que satisfaça exatamente as três condições impostas

só é possível em alguns casos particulares. Com a intenção de incluir o efeito do tempo supõe-se

$$u_i = u_{in} d_n(t) \text{ em } \Gamma \text{ sendo que } u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_u \quad (4.4)$$

que é um campo de deslocamentos conhecido em todo o contorno em termos da função de interpolação u_{in} , dados os parâmetros nodais dependentes do tempo $d_n(t)$, onde n representa o grau de liberdade do modelo discretizado.

Supõe-se também um outro campo de deslocamentos com seu campo de tensões correspondente, na forma:

$$u_i = u_i^* + u_i^p \text{ e} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p \text{ em } \Omega, \quad (4.6)$$

para todo o domínio, de forma que o equilíbrio dinâmico imposto na eq. (4.1) seja identicamente satisfeito.

A expressão acima sugere que se possa adotar uma solução particular arbitrária u_i^p , que corresponda ao campo σ_{ij}^p , que seja solução de

$$\sigma_{ij}^p{}_{,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i^p = 0 \text{ e } \Omega. \quad (4.7)$$

Analogamente, pode-se encontrar uma solução homogênea u_i^* , correspondente ao campo de tensões σ_{ij}^* , que seja solução da equação

$$\sigma_{ij}^*{}_{,j} - \rho \ddot{u}_i^* = 0 \text{ e } \Omega. \quad (4.8)$$

Esta solução caracteriza uma solução fundamental do tipo

$$u_i^* = u_{im}^*(t) p_m^*(t) \text{ e } \sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^*(t) p_m^*(t), \quad (4.9)$$

obtida em termos de alguns parâmetros nodais $p_m^*(t)$ que variam no tempo. Como conseqüência, esta função de interpolação satisfaz a propriedade

$$\sigma_{ijm}^*{}_{,j} - \rho \ddot{u}_{im}^* = 0 \text{ e } \Omega, \quad (4.10)$$

Entretanto, para um domínio Ω_0 que envolva a força concentrada $p_m^*(t)$,

$$\int_{\Omega_0} (\sigma_{ijm}^*{}_{,j} - \rho \ddot{u}_{im}^*) d\Omega = -\delta_{im}. \quad (4.11)$$

O índice m corresponde ao grau de liberdade do modelo discretizado.

Conforme as hipóteses dadas, procuram-se os campos de deslocamentos u_i definido na eq. (4.4), u_i^p , definido pela eq. (4.7), e u_i^* , definido pelas eqs. (4.8) e (4.9), de forma que a eq. (4.3) seja melhor satisfeita.

4.2. Equilíbrio de forças nodais

Uma relação de equilíbrio que envolva $\mathbf{p}^* \equiv p_m^*(t)$ da eq. (4.9) poderia ser obtida como um dos itens do Método Híbrido dos Elementos de Contorno, o qual tem hipóteses até aqui idênticas às consideradas neste capítulo. Porém, segundo Chaves [20], não é preciso lançar mão do potencial de Hellinger-Reissner.

Considere o princípio dos trabalhos virtuais aplicado num dado instante t ,

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} (b_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma, \quad (4.12)$$

para um campo de deslocamentos arbitrário δu_i definido como

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \text{ em } \Omega \text{ e} \quad (4.13)$$

$$\delta u_i = 0 \text{ em } \Gamma_u. \quad (4.14)$$

Substituindo o campo de deslocamentos e de tensões dados pela eq. (4.5) e (4.6), respectivamente, na eq. (4.12), de acordo com as eqs. (4.7) e (4.8), e que satisfaça a eq. (4.1), mas não atende à eq. (4.3), obtém-se

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} (b_i - \rho \ddot{u}_i^* - \rho \ddot{u}_i^p) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma, \quad (4.15)$$

Em virtude do campo de tensões adotado, o tensor de tensões é simétrico. Levando em conta essa simetria e de acordo com a eq. (4.13), pode-se reescrever o princípio dos trabalhos virtuais da eq. (4.15) como

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \delta u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} (b_i - \rho \ddot{u}_i^* - \rho \ddot{u}_i^p) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma, \quad (4.16)$$

Integrando-se por partes o termo do lado esquerdo da equação acima e aplicando o Teorema de Green resulta em

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}^* - \rho \ddot{u}_i^*) \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_j \delta u_i d\Gamma \quad (4.17)$$

Promovendo-se a discretização numérica de σ_{ij}^* , como uma série de soluções fundamentais para forças $p_m^*(t)$ aplicadas no contorno, e de δu_i em termos de funções de interpolação polinomial no contorno, de acordo com a eq. (4.4), obtém-se

$$\delta d_n \left(\int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{im} u_{in} \right) p_m^* = \delta d_n \left(\int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_j u_{in} d\Gamma \right). \quad (4.18)$$

que, para quaisquer valores de $\delta \mathbf{d} \equiv \delta d_n$, resulta na equação matricial de equilíbrio

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (4.19)$$

onde

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{im} u_{in} \quad (4.20)$$

é uma matriz de transformação cinemática entre os deslocamentos nodais \mathbf{d} e os deslocamentos nodais \mathbf{d}^* relacionados com as forças singulares \mathbf{p}^* ,

$$\mathbf{p} \equiv p_n = \int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma \quad (4.21)$$

é um vetor de forças nodais equivalentes, em termos energéticos, as forças de superfície t_i para o campo de deslocamentos adotado no contorno, e

$$\mathbf{p}^b \equiv p_n^b = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (4.22)$$

é um vetor de forças nodais energeticamente equivalentes às forças de massa b_i .

A eq. (4.19), como já mostrado, também aparece na formulação do Método Híbrido dos Elementos de Contorno, que tem como base o potencial de Hellinger-Reissner. Observa-se que a matriz definida na eq. (4.20) é singular e deve ser obtida em termos de valor principal de Cauchy, como soma da parte finita com o termo descontínuo no local. Uma vez que esta singularidade só afeta os termos da diagonal da matriz \mathbf{H} (para $p_m^*(t)$ e $d_n(t)$ coincidentes no mesmo nó), estes termos podem ser obtidos indiretamente através de uma propriedade de ortogonalidade.

Pensando a solução fundamental como uma soma de uma parte estática e uma parte dependente do tempo, propõe-se a divisão de \mathbf{H} em duas matrizes, uma dependente do tempo e outra não:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}(t), \quad (4.23)$$

onde, $\mathbf{H}(t)$ é completamente determinada e \mathbf{H}_0 corresponde à matriz da formulação estática. Portanto a seguinte propriedade de ortogonalidade é válida:

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (4.24)$$

onde \mathbf{W} é uma base, por conveniência normalizada, dos deslocamentos de corpo rígido. Da mesma forma, a ortogonalidade da eq. (2.52) pode ser demonstrada para as componentes do carregamento nodal equivalente da eq. (4.19) que independem do tempo

$$\mathbf{W}^T (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^b) = \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

Isto quer dizer que embora a matriz \mathbf{H}_0 seja singular, o sistema da eq.

(4.19) é consistente e tem solução única, mesmo quando particularizado para problemas estáticos. Como consequência da ortogonalidade em (4.24), deve haver uma base normalizada \mathbf{V} que atenda a

$$\mathbf{H}_0^T \mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

Desta forma, conforme as propriedades de ortogonalidade das eqs. (4.24) e (4.26), as forças singulares \mathbf{p}_0^* da eq. (4.19) satisfazem a

$$\mathbf{V}^T \mathbf{p}_0^* = \mathbf{0}. \quad (4.27)$$

4.3. Compatibilidade de deslocamentos

Os deslocamentos no domínio de um corpo elástico em equilíbrio dinâmico podem ser descritos, de acordo com as eqs. (4.5) e (4.9), como:

$$u_i = u_{im}^* p_m^* + u_i^p \quad \text{em } \Omega, \quad (4.28)$$

onde u_{im}^* é a solução fundamental dependente do tempo, em termos de deslocamentos, correspondente às forças singulares p_m^* , e u_i^p corresponde a uma solução particular.

A eq. (4.28) é válida para todo Ω , como consequência do campo de tensões considerado, para a eq. (4.4) satisfeita em todo o contorno Γ . Contudo, é possível forçar que essas duas hipóteses sejam satisfeitas nos pontos nodais, ou seja,

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^b, \quad (4.29)$$

considerando que \mathbf{U}^* são deslocamentos da solução fundamental medidos nos pontos nodais e \mathbf{d}^b os da solução particular. A matriz $\mathbf{U}^* \equiv U_{mn}^*$ correspondente à solução fundamental é simétrica por construção. Como os termos que se referem a deslocamento medido no mesmo ponto de aplicação da força não podem ser calculados diretamente, para que a eq. (4.29) tenha qualquer utilidade os valores da diagonal principal de \mathbf{U}^* devem ser obtidos indiretamente através de propriedades a ser definidas.

De fato, seguindo a hipótese de uma solução fundamental dividida em duas parcelas, pode-se dividir a matriz \mathbf{U}^* em uma parte estática e outra dependente do tempo:

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}_0^* + \mathbf{U}^*(t), \quad (4.30)$$

na qual, $\mathbf{U}^*(t)$ é completamente determinada e \mathbf{U}_0^* corresponde à matriz da formulação estática.

A matriz \mathbf{U}_0^* nesta equação é a mesma definida no item 2.5, com a mesma forma de determinar os elementos de sua diagonal principal. Isto significa que se faz necessário determinar a base ortonormal de forças desequilibradas do sistema interno $\mathbf{V} \equiv V_{ms}$ e a matriz de constantes $\mathbf{C} \equiv C_{sm}$ ambas do problema estático, para que a propriedade de ortogonalidade

$$(\mathbf{U}_0^* + \mathbf{WC})\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

determine os termos da diagonal principal de \mathbf{U}_0^* .

4.4. Determinação da matriz de rigidez

As eqs. (4.29) e (4.19) definem a formulação do Método Híbrido Simplificado dos Elementos com solução fundamental dependente do tempo:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{cases} \quad (4.32)$$

onde \mathbf{H}^T e \mathbf{U}^* são matrizes não-singulares.

Então, calculada a diagonal principal de \mathbf{U}_0^* , obtém-se o valor de \mathbf{p}^* na primeira equação do sistema (4.32) e substitui-se o resultado na segunda equação obtendo:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}^b = \mathbf{H}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b), \quad (4.33)$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} \quad (4.34)$$

é uma matriz de rigidez.

Como foi apresentado, o Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno não é desenvolvido em uma base variacional. Por este motivo, a matriz de rigidez não é necessariamente simétrica. Observa-se, entretanto, que quando há o aumento da discretização a matriz tende a ser simétrica.

Esta falta de simetria da matriz de rigidez \mathbf{K} da eq. (4.34) está dentro da tolerância dos erros cometidos em virtude da discretização, conforme se verifica numericamente. Além disso, o termo estático \mathbf{K}_0 implícito em \mathbf{K} é, por

construção, ortogonal a movimentos de corpo rígido. Todavia, devido à metodologia empregada na solução de problemas dinâmicos (que será mostrada mais à frente), esta matriz de rigidez precisa ser simetrizada, o que não se aplica a discretizações grosseiras da malha de elementos de contorno. Supõe-se portanto que, ao invés da expressão (4.34), pode-se usar

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{H}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} + (\mathbf{U}^*)^{-1} \mathbf{H} \right]. \quad (4.35)$$

4.5. Formulação no domínio da frequência

A fim de elaborar uma formulação dependente da frequência, adotam-se os campos u_i da eq. (4.4) e u_i^* da eq. (4.9), como o produto de funções dependentes do tempo e das variáveis espaciais, para um dado valor de frequência ω (uma constante de separação), o que resulta em:

$$u_i = u_{in} d_n(\omega) \tau(t, \omega) \text{ em } \Gamma, \quad (4.36)$$

$$u_i^* = u_{im}^*(\omega) p_m^*(\omega) \tau(t, \omega) \text{ e} \quad (4.37)$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^*(\omega) p_m^*(\omega) \tau(t, \omega) \text{ em } \Omega. \quad (4.38)$$

Esta formulação leva à determinação de uma solução fundamental que, por definição, satisfaz a equação de equilíbrio dinâmico da eq. (4.8), para $\tau(t, \omega)$ definido de tal forma que

$$\frac{\partial^2 \tau(t, \omega)}{\partial t^2} = -\omega^2 \tau(t, \omega). \quad (4.39)$$

Após a separação de variáveis e para uma dada frequência circular ω a eq (4.8) torna-se:

$$\sigma_{ijm}^* + \omega^2 \rho u_{im}^* = 0 \text{ e } \Omega. \quad (4.40)$$

que em termos de deslocamentos se expressa:

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{jm}^* + c_2^2 u_{im}^* + \omega^2 u_{im}^* = 0 \quad (4.41)$$

onde $c_1 = \sqrt{2G(1-\nu)/\rho(1-2\nu)}$ é a velocidade de propagação de uma onda irrotacional e $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ é a velocidade de propagação de uma onda de cisalhamento no meio elástico.

A solução da equação diferencial acima já é conhecida na literatura ([21],

[22], [23], [24] e [33]). Para problemas bidimensionais, por exemplo, a solução é uma combinação linear das equações de Bessel de ordem zero de primeiro e segundo tipo:

$$u_{im}^* = \left[-\frac{k_1^2}{k_2^2} \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{2}{rk_2^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) \right] r_{,i} r_{,m} + \left[\frac{1}{rk_2^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \Phi_2 \right] \delta_{im} \quad (4.42)$$

onde $k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$,

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi G} \left\{ \frac{\pi}{2} Y_0(k_1 r) - \left[\ln\left(\frac{k_1}{2}\right) + \gamma + \frac{1}{2(3-4\nu)} \right] J_0(k_1 r) \right\} \quad e \quad (4.43)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\pi G} \left\{ \frac{\pi}{2} Y_0(k_2 r) - \left[\ln\left(\frac{k_2}{2}\right) + \gamma + \frac{1}{2(3-4\nu)} \right] J_0(k_2 r) \right\}. \quad (4.44)$$

Nas eqs. (4.43) e (4.44), J_0 e Y_0 são funções de Bessel de ordem zero do primeiro e segundo tipo, respectivamente e r é a distância entre o ponto m e o ponto de aplicação da fonte singular p_m^* .

Uma imposição conhecida como condição de radiação de Sommerfeld diz que a velocidade proveniente da solução fundamental deve tender a zero ($\dot{u}_i^* \rightarrow 0$) no infinito.

Isso força que a solução seja expressa como uma função complexa. Segundo Dumont & Oliveira [21], essa necessidade só existe no Método dos Elementos de Contorno convencional, onde não é considerado o balanço de forças adequadamente. Esta formulação simplificada baseia-se nas mesmas considerações da formulação híbrida, que é variacionalmente consistente, o que garante o equilíbrio das forças em regiões finitas e que elas se dissipem no infinito. Além disso, observa-se que as funções de Bessel, juntamente com as suas derivadas, tendem a zero com o aumento de seu argumento, o que satisfaz automaticamente a condição de Sommerfeld. Sendo assim, nesta formulação trabalha-se exclusivamente com variáveis reais, o que elimina os inconvenientes da formulação complexa. (Nada impede a utilização de uma solução fundamental complexa na formulação híbrida [34]). Em todo caso, este é um tema polêmico, que ainda está por ser investigado em profundidade.

Separando a solução fundamental em dois termos, pode-se expressar $u_{im}^*(\omega)$ da eq. (4.37) e $\sigma_{ijm}^*(\omega)$ da eq. (4.38), da seguinte forma:

$$u_{im}^*(\omega) \leftarrow u_{im}^*(0) + u_{im}^*(\omega) \quad \text{e} \quad \sigma_{ijm}^*(\omega) \leftarrow \sigma_{ijm}^*(0) + \sigma_{ijm}^*(\omega), \quad (4.45)$$

onde, $u_{im}^*(\omega)$ e $\sigma_{ijm}^*(\omega)$ correspondem à solução do problema estático, enquanto que os termos $u_{im}^*(\omega)$ e $\sigma_{ijm}^*(\omega)$, que não apresentam singularidade, correspondem à parcela da solução fundamental dependente da frequência.

De acordo com as eqs. (4.36) a (4.39), o sistema (4.32), para um dado valor de frequência ω , torna-se:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^*(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) \tau(t, \omega) = \mathbf{d}(\omega) \tau(t, \omega) - \mathbf{d}^b(t, \omega) \\ \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) \tau(t, \omega) = \mathbf{p}(t, \omega) - \mathbf{p}^b(t, \omega) \end{cases} \quad (4.46)$$

onde $\mathbf{d}^b(t, \omega)$, $\mathbf{p}(t, \omega)$ e $\mathbf{p}^b(t, \omega)$ são componentes harmônicos dependentes do tempo pertencentes aos vetores \mathbf{d}^b , \mathbf{p} e \mathbf{p}^b respectivamente.

Em conseqüência da forma da solução fundamental considerada na eq. (4.45), pode-se escrever as matrizes \mathbf{U}^* e \mathbf{H} formalmente como sendo:

$$\mathbf{U}^*(\omega) = \mathbf{U}_0^* + \mathbf{U}_\omega^* \quad \text{e} \quad \mathbf{H}(\omega) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega \quad (4.47)$$

Nas eqs. (4.46) e (4.47), os termos que dependem de ω são não-singulares e os que possuem subscrito (0) correspondem à formulação estática. Além disso, os termos da diagonal de \mathbf{U}_0^* podem ser calculados através da propriedade de ortogonalidade da eq. (4.31), que afeta exclusivamente a formulação estática.

Então, para um carregamento periódico, aplicado com uma dada frequência ω , a resposta estacionária da estrutura é obtida a partir do sistema

$$\begin{cases} \mathbf{U}^*(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) = \mathbf{d}(\omega) - \mathbf{d}_\omega^b \\ \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) = \mathbf{p}_\omega - \mathbf{p}_\omega^b \end{cases} \quad (4.48)$$

4.5.1. Solução fundamental para equações diferenciais hiperbólicas e parabólicas

A propagação de uma grandeza potencial ϕ em um meio isotrópico homogêneo é governada pela equação diferencial hiperbólica linear da onda (equação de Helmholtz da acústica, por exemplo):

$$\phi_{,ii} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (4.49)$$

onde, $c^2 = k/\rho$ é a velocidade de propagação da grandeza para a densidade ρ e a

constante k do meio. Nesta equação o potencial ϕ é função da posição e do tempo.

Supondo que ϕ pode ser expresso como uma função harmônica, segundo a eq. (4.37), onde a propriedade da eq. (4.39) é válida, pode-se escrever a eq. (4.49) na forma:

$$\phi_{,ii}^* = -\tilde{k}^2 \phi^*, \quad (4.50)$$

onde $\tilde{k} = \omega/c$ é o número de onda.

As soluções fundamentais da eq. (4.50) para problemas tridimensionais e bidimensionais valem:

$$\phi_m^* = \frac{C_1 \text{sen}(\tilde{k}r)}{r} + \frac{C_2 \text{cos}(\tilde{k}r)}{r} \quad \text{e} \quad (4.51)$$

$$\phi_m^* = C_1 J_0(\tilde{k}r) + C_2 Y_0(\tilde{k}r), \quad (4.52)$$

respectivamente. Onde J_0 e Y_0 são funções de Bessel de ordem zero do primeiro e segundo tipo, respectivamente, e r é a distância entre o ponto m e o ponto de aplicação da fonte singular p_m^* . As constantes C_1 e C_2 devem ser obtidas de modo que a solução fundamental corresponda a uma fonte unitária concentrada aplicada em $r=0$, sem levar em conta o valor de \tilde{k} , e recaia na solução estática quando a frequência for nula ($\omega=0$), sendo possível separar a solução dependente da frequência da solução estática. Então, as eqs (4.51) e (4.52) podem ser reescritas na forma:

$$\phi_m^* = -\frac{1}{4\pi k} + \frac{1}{4\pi k} [1 - \text{cos}(\tilde{k}r)] \quad \text{e} \quad (4.53)$$

$$\phi_m^* = -\frac{\ln(r)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi k} \left\{ \left[\ln\left(\frac{\tilde{k}}{2}\right) + \gamma \right] J_0(\tilde{k}r) - \frac{\pi}{2} Y_0(\tilde{k}r) + \ln(r) \right\}, \quad (4.54)$$

respectivamente, onde se separa explicitamente o termo dependente da frequência do termo da solução estática (γ é a constante de Euler).

A solução fundamental de uma equação diferencial do tipo parabólica (equação da difusão térmica, por exemplo):

$$\phi_{,ii} = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.55)$$

onde $c = k/c_p$ é a difusividade térmica do meio para o calor específico c_p e a condutividade térmica k do meio, é a mesma das eqs (4.53) e (4.54). Entretanto,

deve-se observar que para este tipo de problema a condição da eq. (4.39) é reescrita na forma:

$$\frac{\partial \tau(t, \omega)}{\partial t} = -\omega \tau(t, \omega) \quad (4.56)$$

e constante de separação (número de onda) é dada por $\tilde{k} = \sqrt{\omega/c}$.

4.5.2. Exemplos

Alguns exemplos acadêmicos serão mostrados a seguir para validar a exatidão e convergência deste método proposto. Todos os exemplos são do tipo “patch test”. O contorno escolhido da estrutura ou cavidade é bastante irregular com bordos salientes. Além disso, os campos aplicados representam, relativamente grandes gradientes, desta forma configurando testes rigorosos para a formulação.

4.5.2.1. Domínio irregular simplesmente conexo submetido a um campo potencial

A Figura 4.1 apresenta um domínio irregular simplesmente conexo submetido a um campo potencial originado por uma fonte aplicada no ponto indicado. Para um número de onda $\tilde{k} = 0.0379382$, aplica-se, primeiramente, um campo dado pela função $Y_0(\tilde{k} r)$, para simular condições de contorno de Dirichlet, resolve-se o sistema (4.48) e avaliam-se alguns resultados em pontos internos ao longo dos segmentos de reta indicados, mostrados nas Figura 4.2, Figura 4.3 e Figura 4.4. Num segundo exemplo, repetem-se todas as avaliações anteriores dos resultados, mas agora para um campo potencial dado por $J_0(\tilde{k} r)$, que é polinomial, com os resultados mostrados nas Figura 4.5, Figura 4.6 e Figura 4.7. Em ambos os casos, a discretização do contorno foi feita de modo a se ter de 2 a 6 elementos em cada lado do contorno irregular (iniciando na origem e seguindo no sentido anti-horário), para teste da convergência.

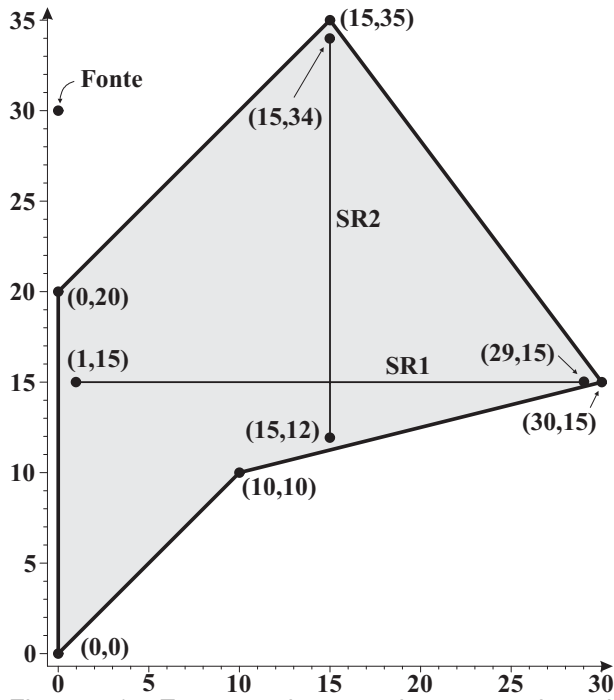


Figura 4.1 – Esquema do corpo de contorno irregular com a fonte indicada

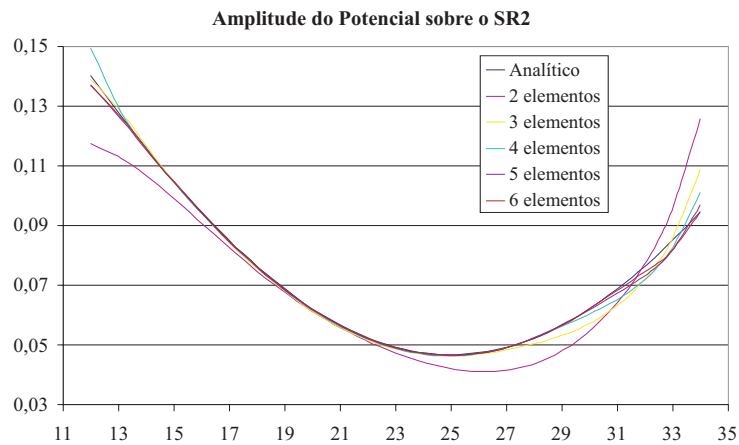
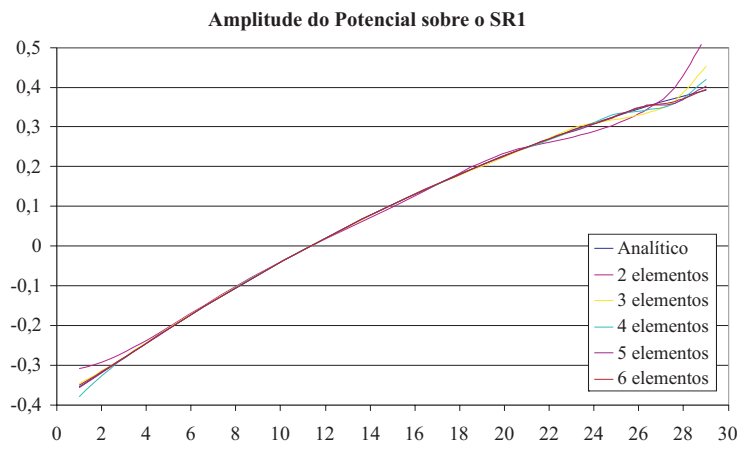


Figura 4.2 – Potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 4.1

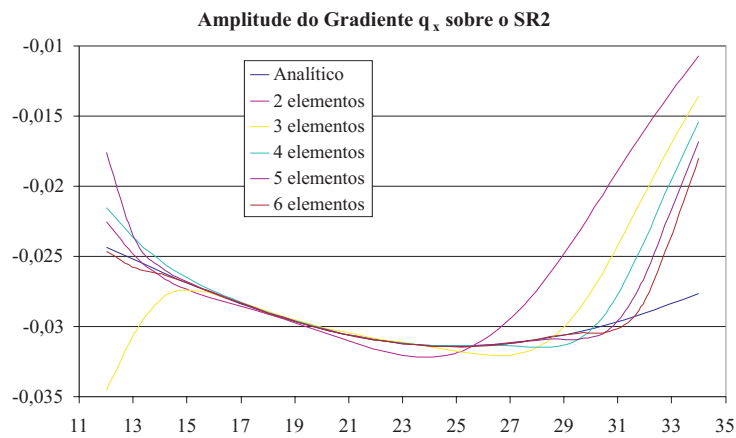
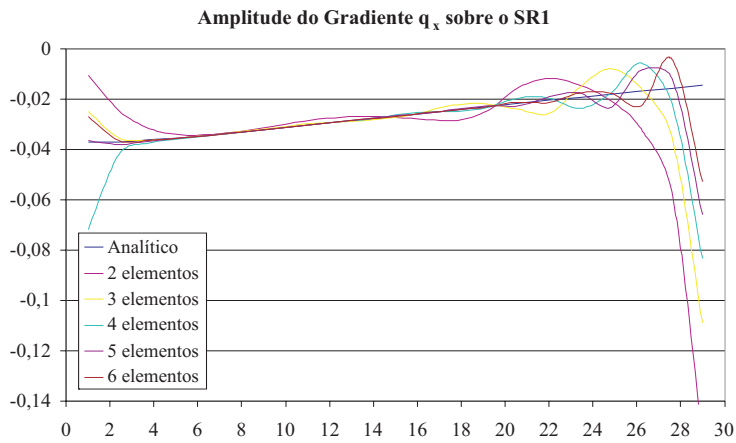


Figura 4.3 – Fluxo na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.1

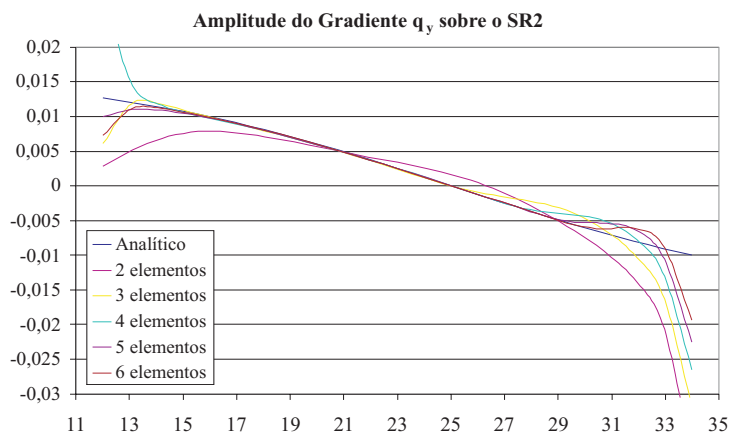
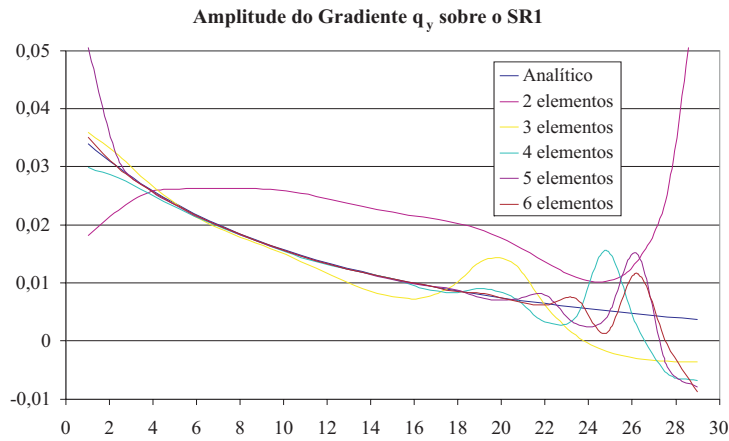


Figura 4.4 – Fluxo na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.1

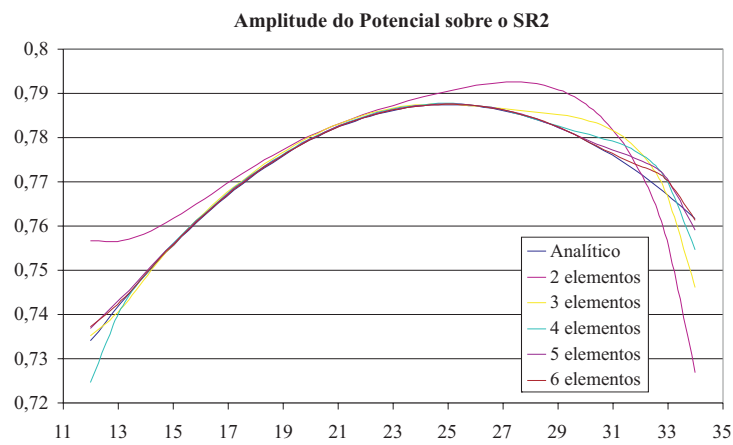
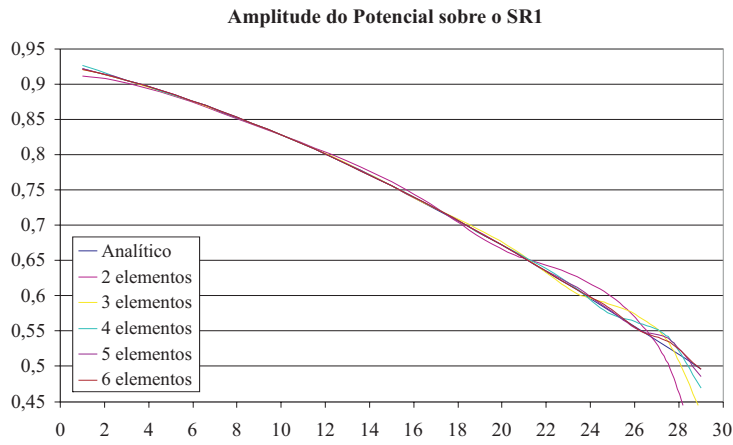


Figura 4.5 – Potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 4.1

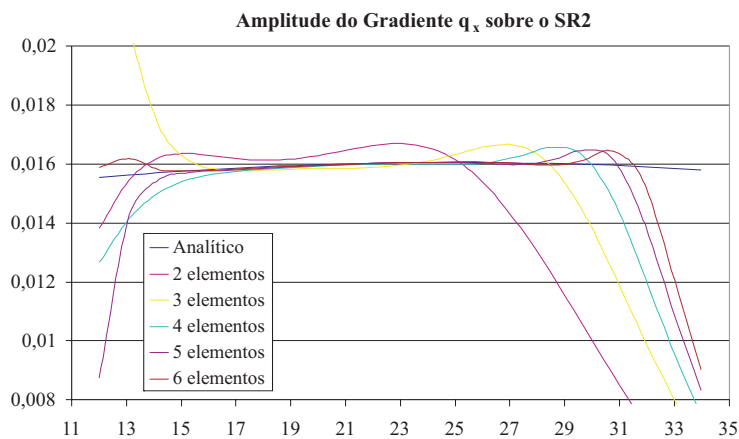
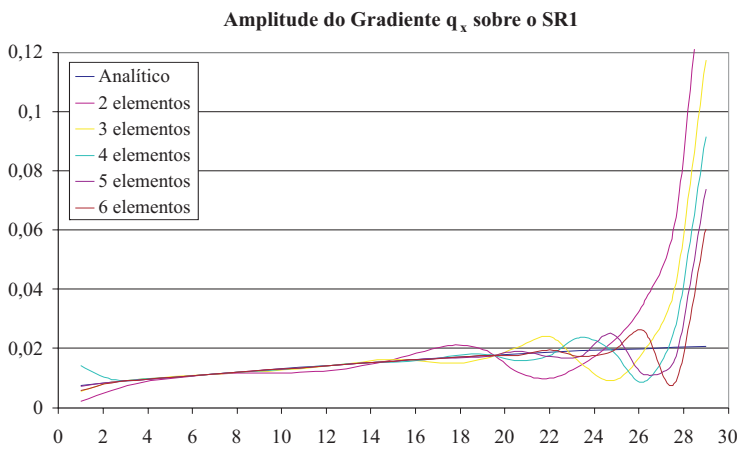


Figura 4.6 – Fluxo na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.1

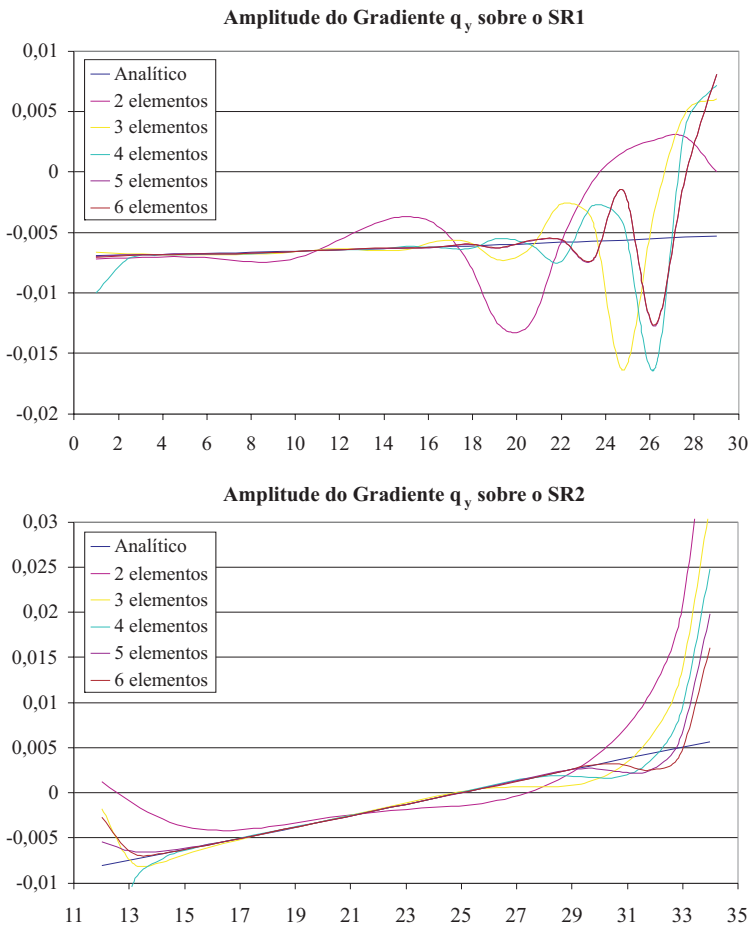


Figura 4.7 – Fluxo na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.1

4.5.2.2.

Cavidade irregular em domínio infinito submetido a um campo potencial

A Figura 4.8 mostra uma cavidade irregular em um domínio infinito submetido a um campo potencial originado por uma fonte aplicada no ponto indicado. Para um número de onda $\tilde{k} = 0.0379382$, aplica-se, um campo dado pela função

$$\phi = 2 \left[\ln(\tilde{k}/2) + \gamma \right] J_0(\tilde{k}r) - \pi Y_0(\tilde{k}r) , \quad (4.57)$$

para simular condições de contorno de Dirichlet, resolve-se o sistema (4.48) e avalia alguns resultados em pontos internos ao longo dos segmentos de reta indicados, mostrados nas Figura 4.10, Figura 4.10 e Figura 4.11. Num segundo exemplo, repetem-se todas as avaliações anteriores dos resultados, mas agora para um campo potencial com um número de onda cinco vezes maior $\tilde{k} = 5 \times 0.0379382$, com os resultados mostrados nas Figura 4.12, Figura 4.13 e

Figura 4.14. Novamente, em ambos os casos, a discretização do contorno foi feita de modo a se ter de 2 a 6 elementos em cada lado do contorno da cavidade (iniciando na origem e seguindo no sentido horário), para teste da convergência.

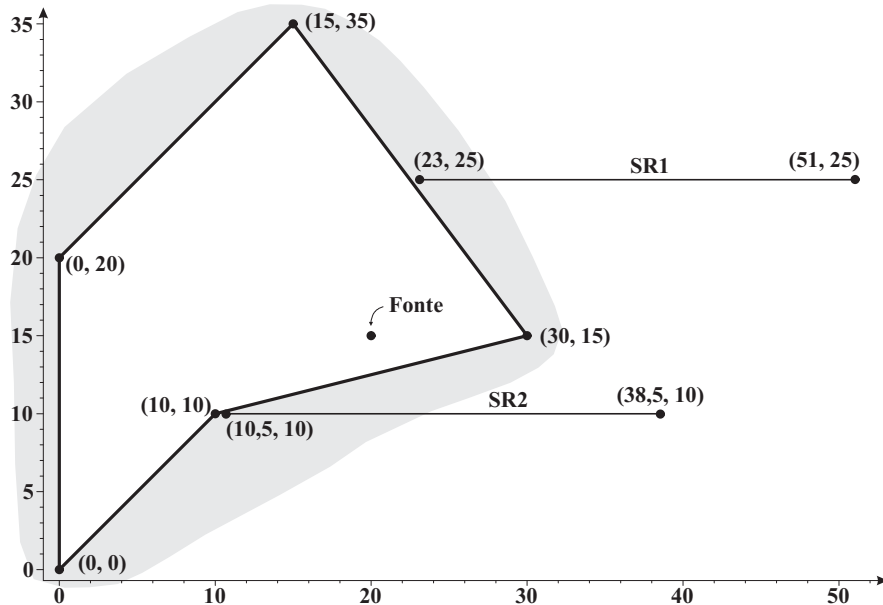


Figura 4.8 – Esquema da cavidade de contorno irregular com a fonte indicada

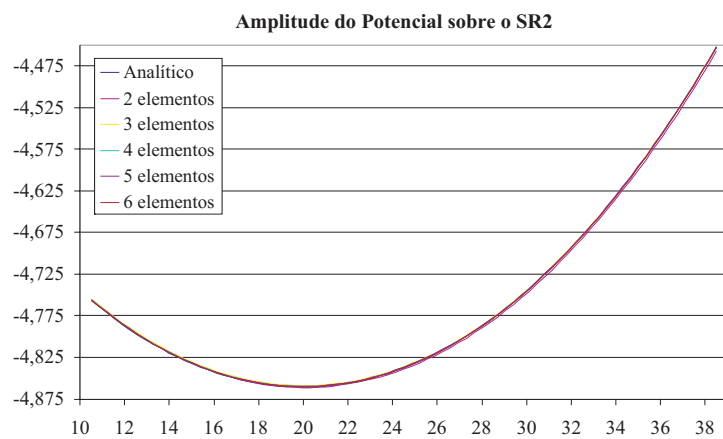
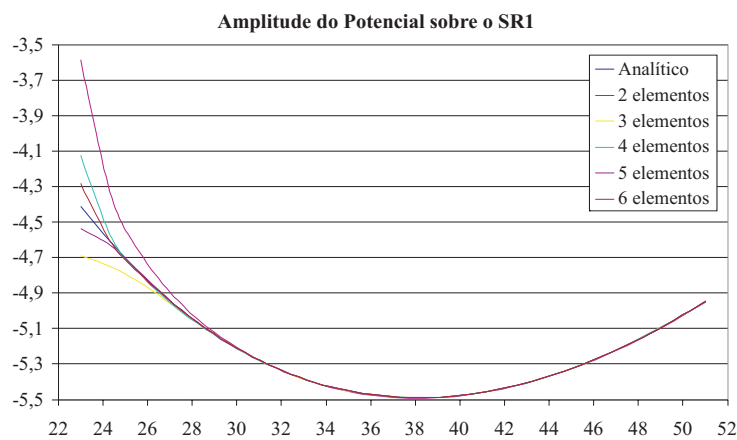


Figura 4.9 – Potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 4.8

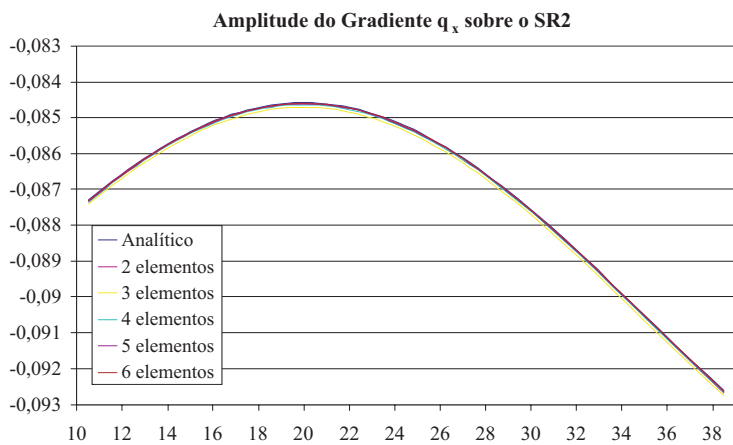
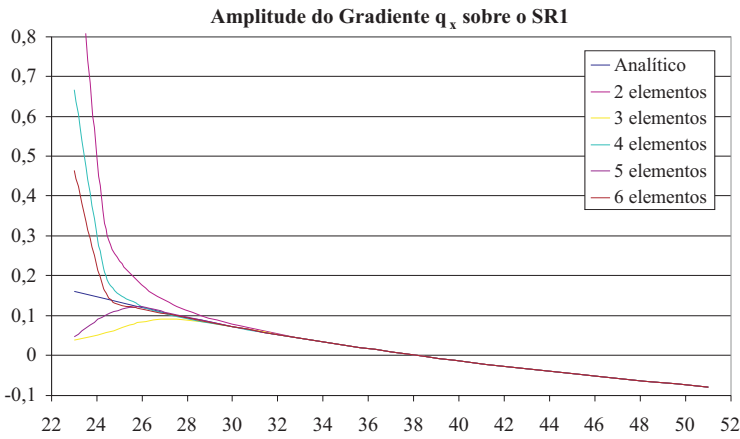


Figura 4.10 – Fluxo na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8

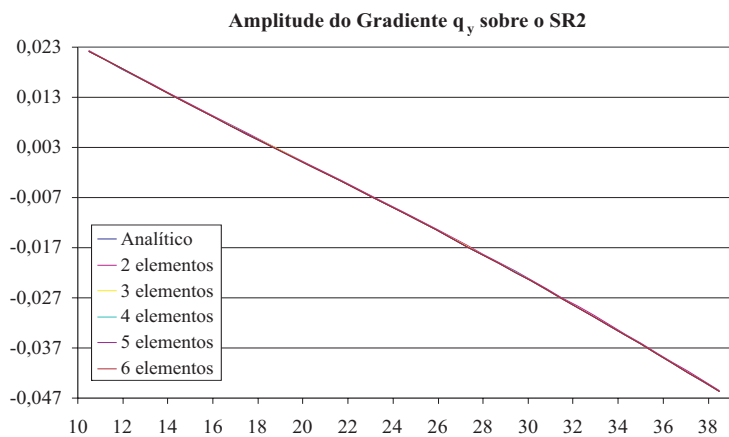
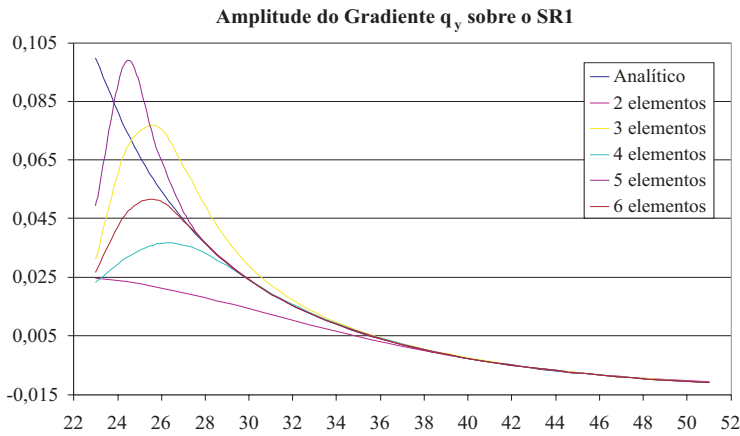


Figura 4.11 – Fluxo na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8

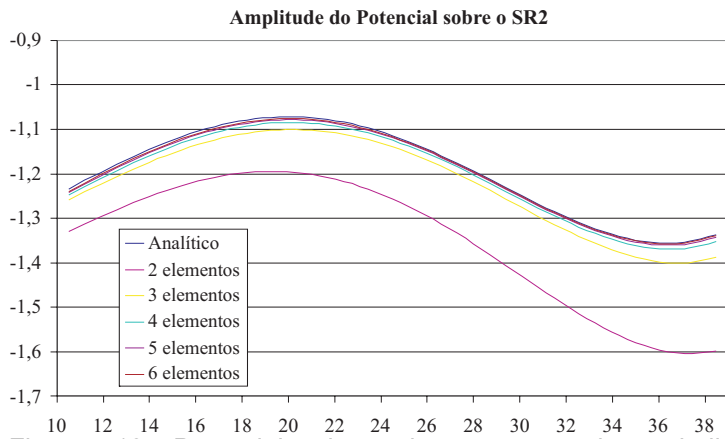
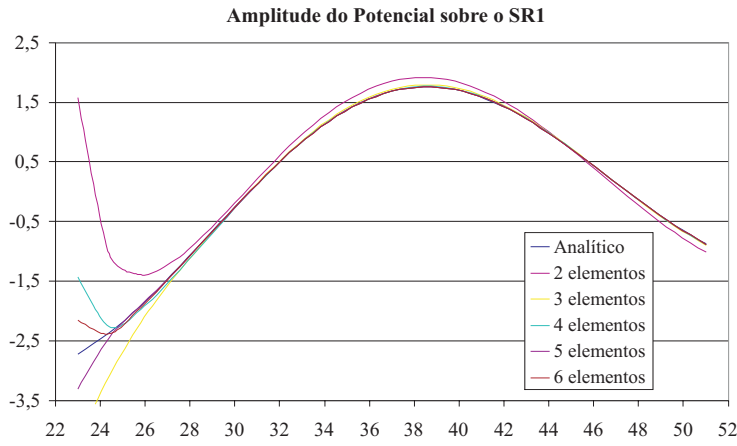


Figura 4.12 – Potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 4.8

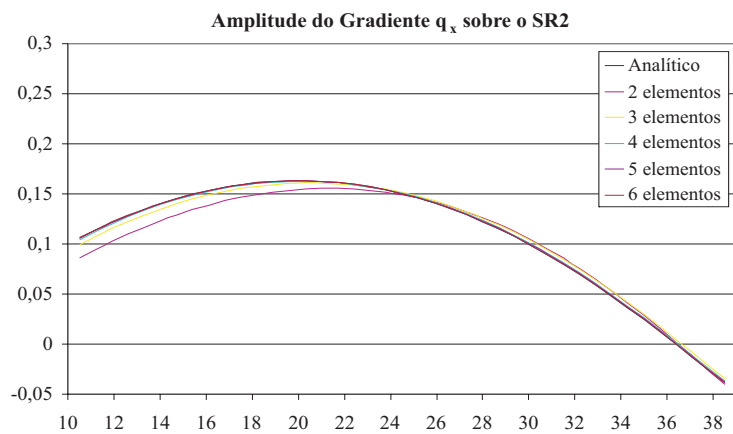
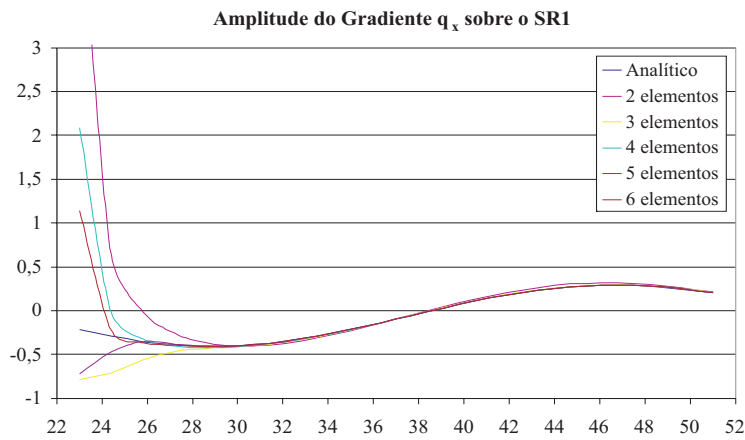


Figura 4.13 – Fluxo na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8

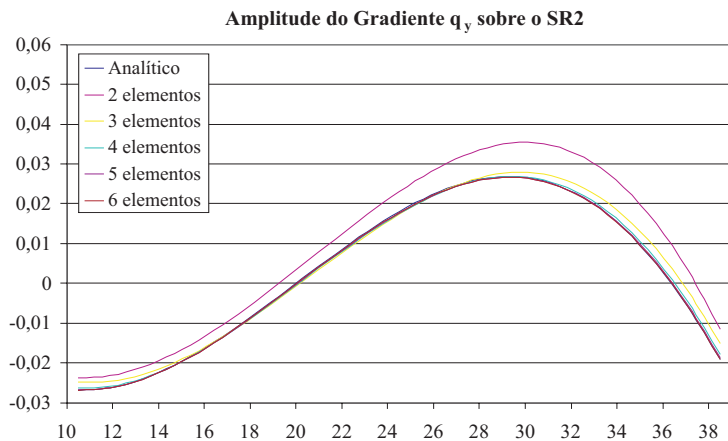
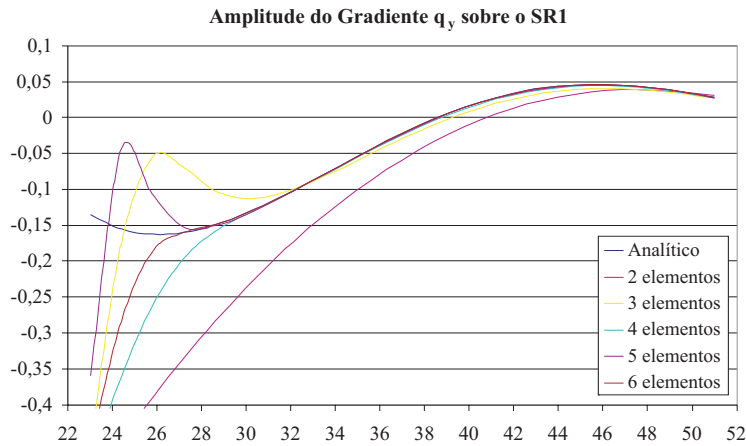


Figura 4.14 – Fluxo na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8

4.5.2.3.

Corpo elástico com contorno irregular submetido a um campo de deslocamentos

A Figura 4.15 apresenta um corpo elástico irregular submetido a um campo de deslocamentos u_i originado por uma força unitária aplicada na direção x no ponto indicado. O módulo de elasticidade transversal, o coeficiente de Poisson e a densidade do material valem, respectivamente: $G = 9640 \text{ KN/cm}^2$, $\nu = 0.30$ e $\rho = 1.0 \text{ Kg/cm}^3$.

Para uma frequência $\omega = 0.05$, aplica-se, um campo de deslocamentos de acordo com a eq. (4.42), para simular condições de contorno de Dirichlet, resolve-se o sistema (4.48) e avalia alguns resultados em pontos internos ao longo dos segmentos de reta indicados. Esses resultados estão mostrados nas Figura 4.16, Figura 4.17, Figura 4.18, Figura 4.19 e Figura 4.20.

As Figura 4.21 e Figura 4.22 mostram, para cada discretização, o carregamento nodal equivalente avaliado ao longo dos nós do contorno como o

vetor \mathbf{p} da eq. (4.33). Os valores analíticos são obtidos como o vetor \mathbf{p} da eq. (4.21), para forças no contorno t_i correspondentes ao campo de deslocamentos u_i aplicado. As linhas verticais separam cada um dos cinco lados do domínio recortado.

A discretização do contorno foi feita com 24, 44 e 73 elementos lineares, de mesmo comprimento, (iniciando na origem e seguindo no sentido anti-horário), para teste da convergência.

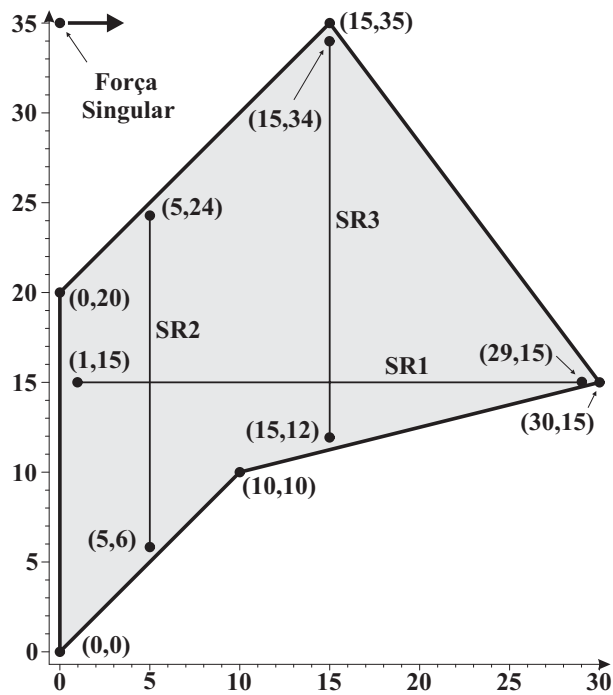


Figura 4.15 – Esquema da estrutura de contorno irregular com a força singular indicada

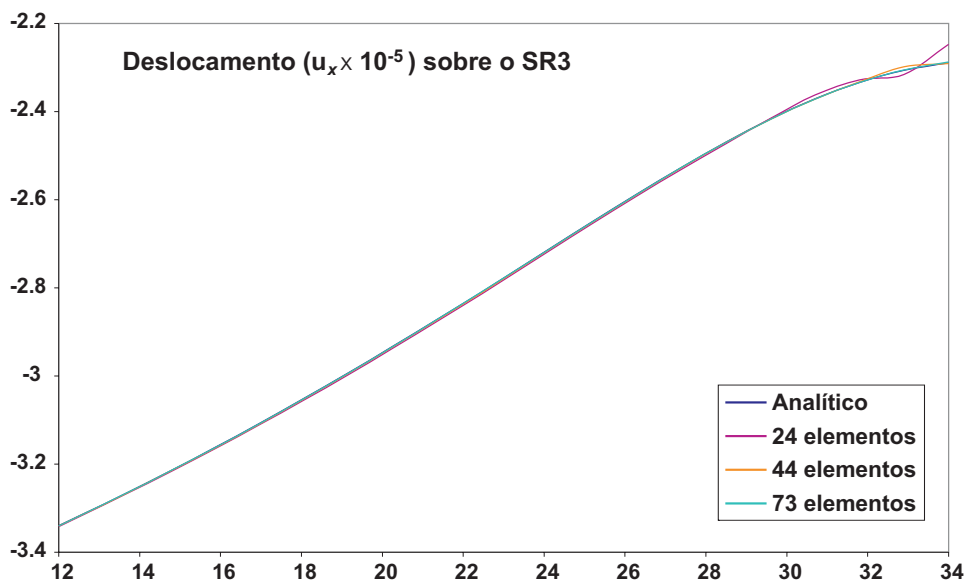
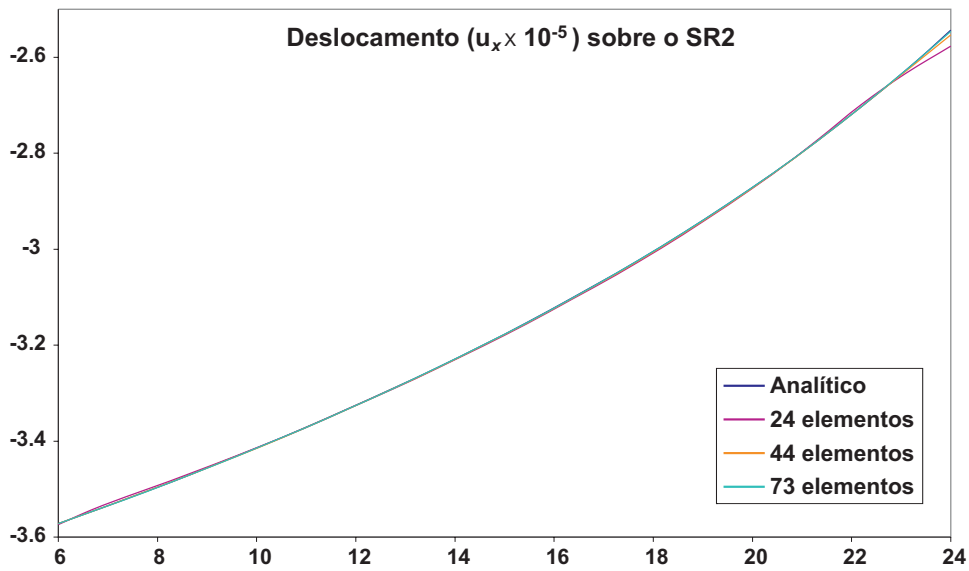
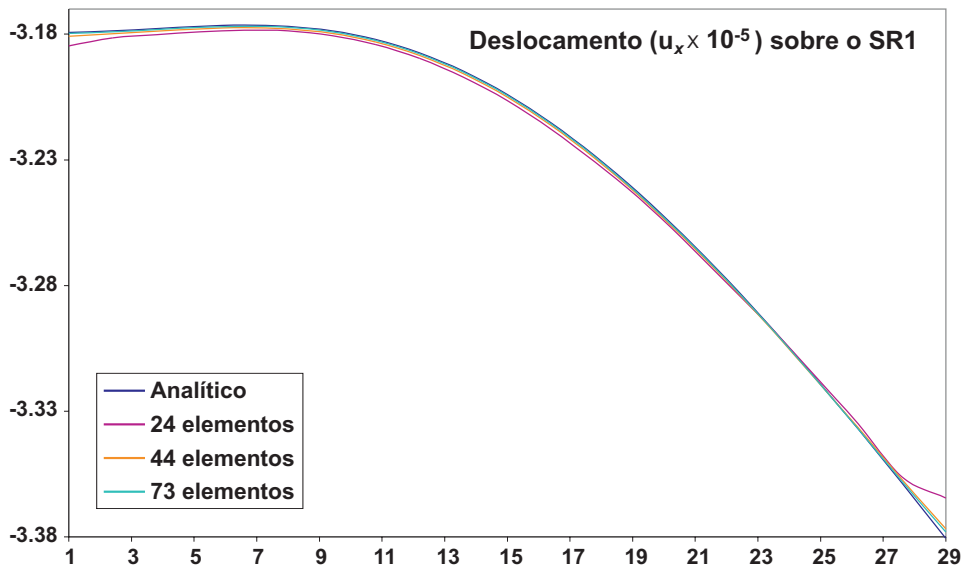


Figura 4.16 – Amplitude do deslocamento na direção x sobre os segmentos de reta indicados na Figura 4.15

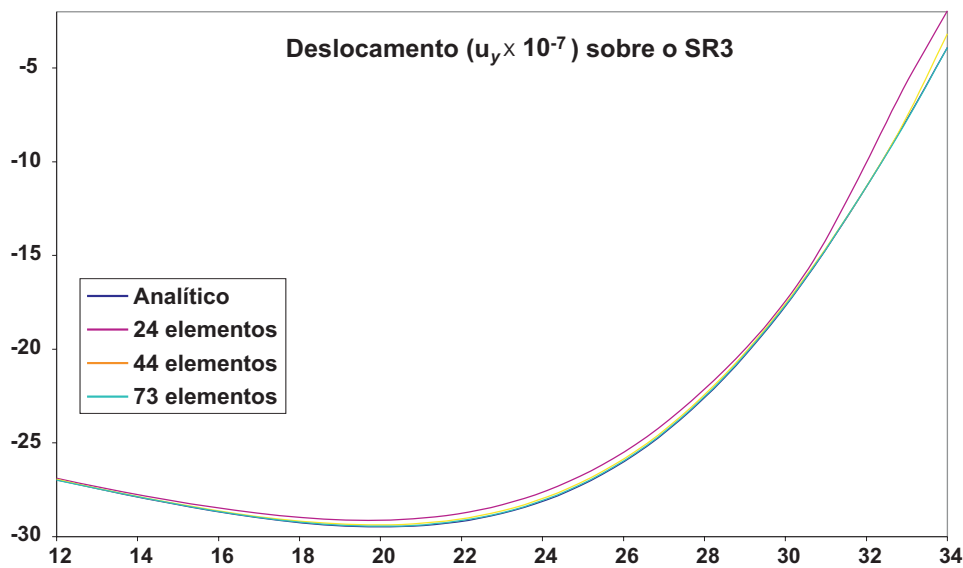
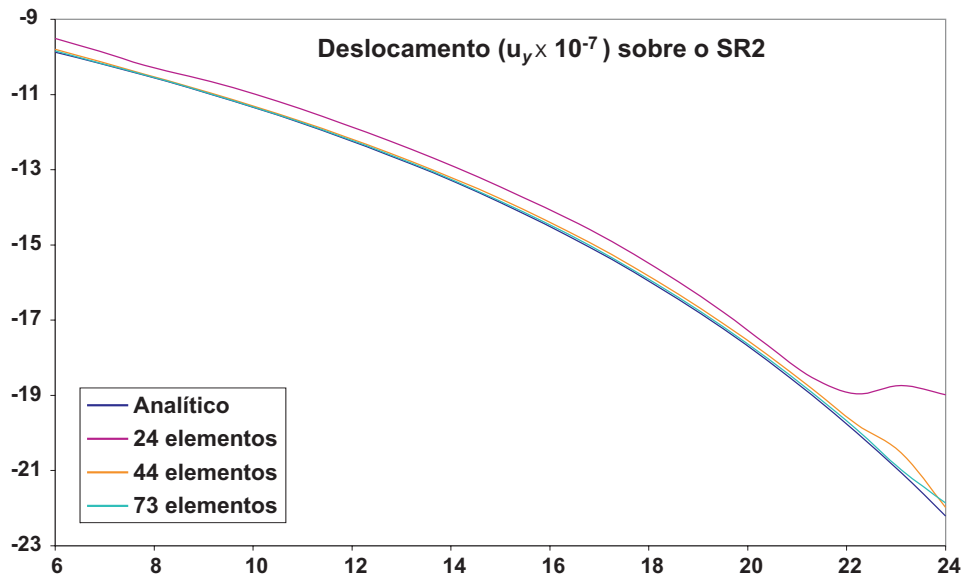
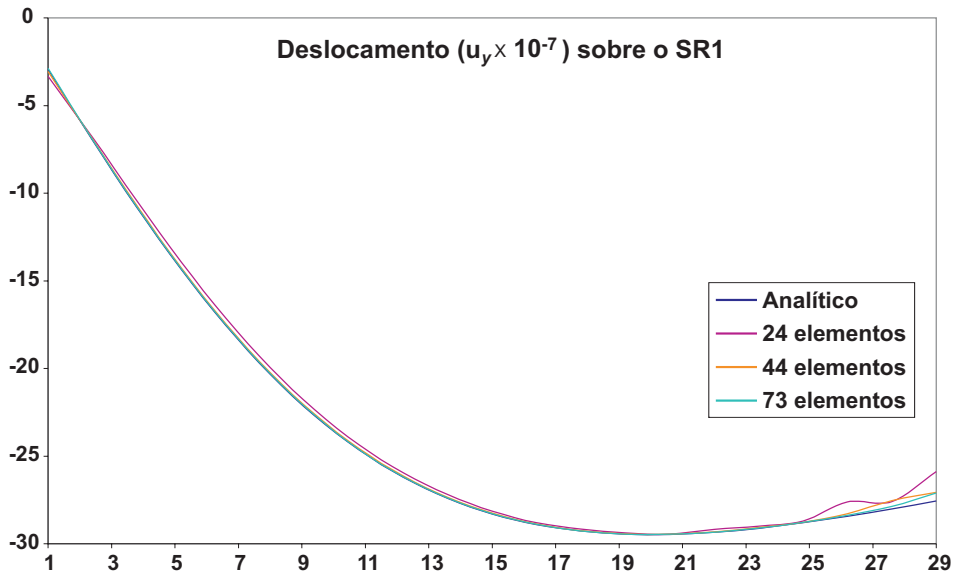


Figura 4.17 – Amplitude do deslocamento na direção y sobre os segmentos de reta indicados na Figura 4.15

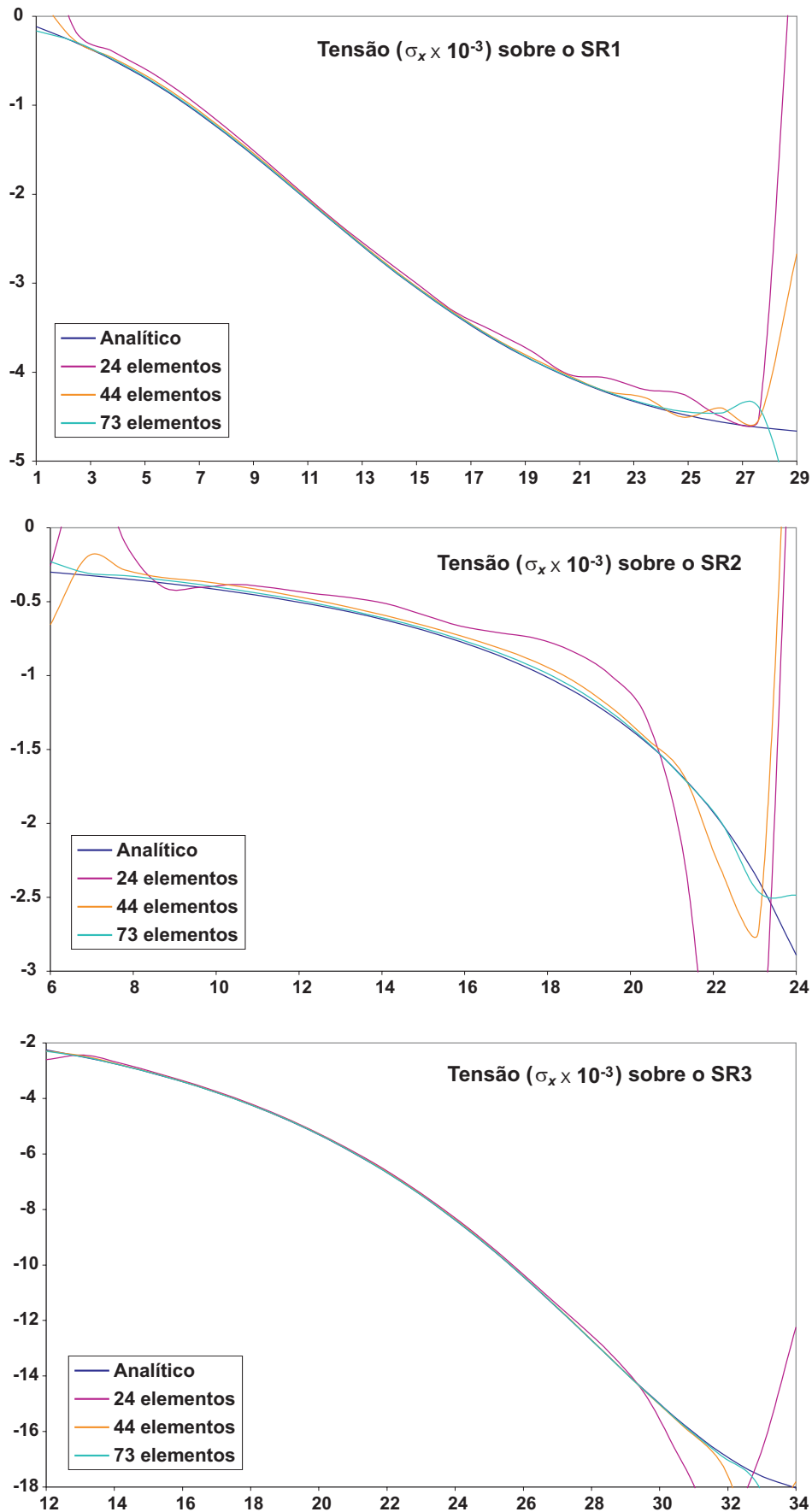


Figura 4.18 – Amplitude da tensão σ_x sobre os segmentos de reta da Figura 4.15

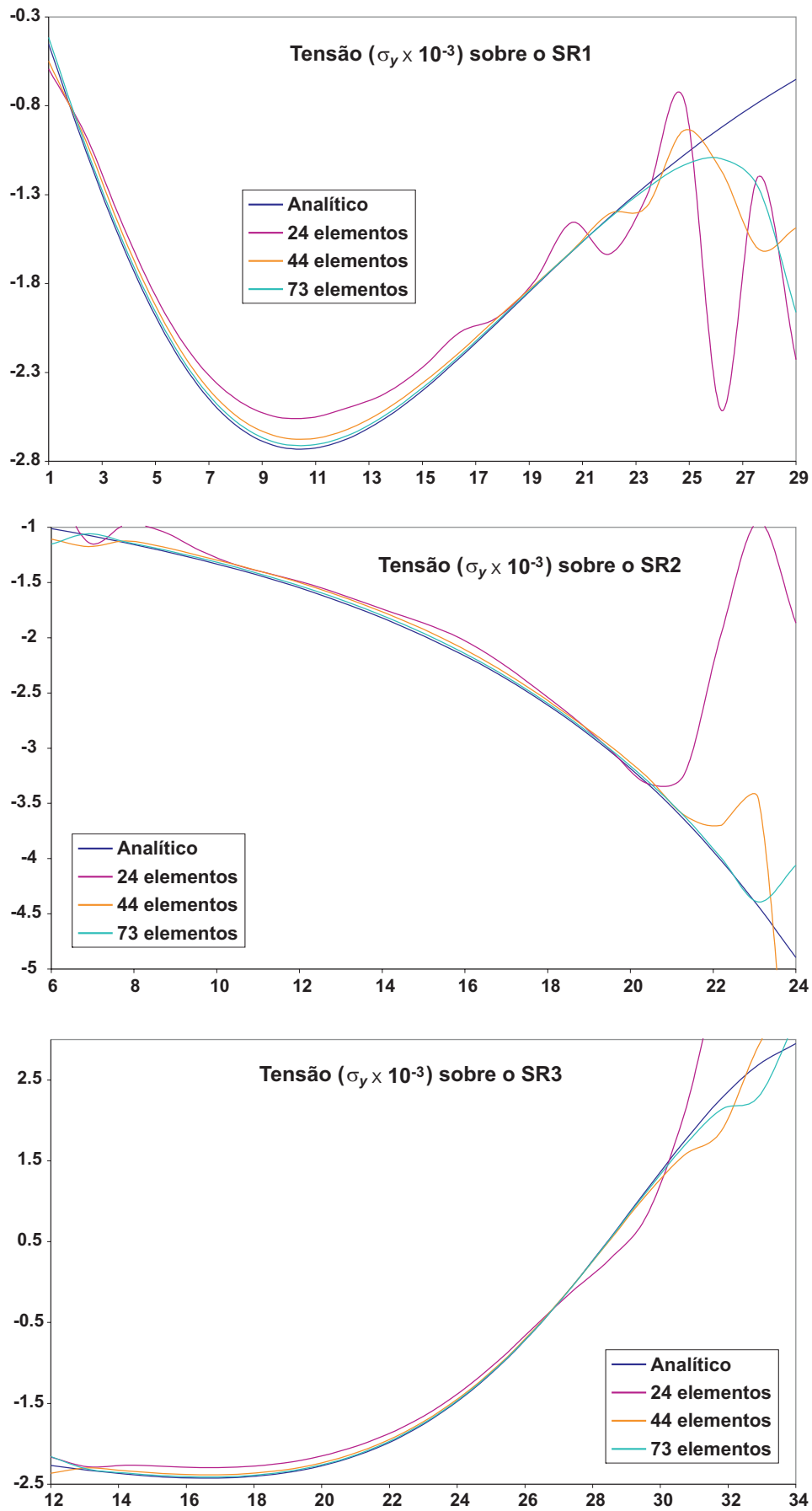


Figura 4.19 – Amplitude da tensão σ_y sobre os segmentos de reta da Figura 4.15

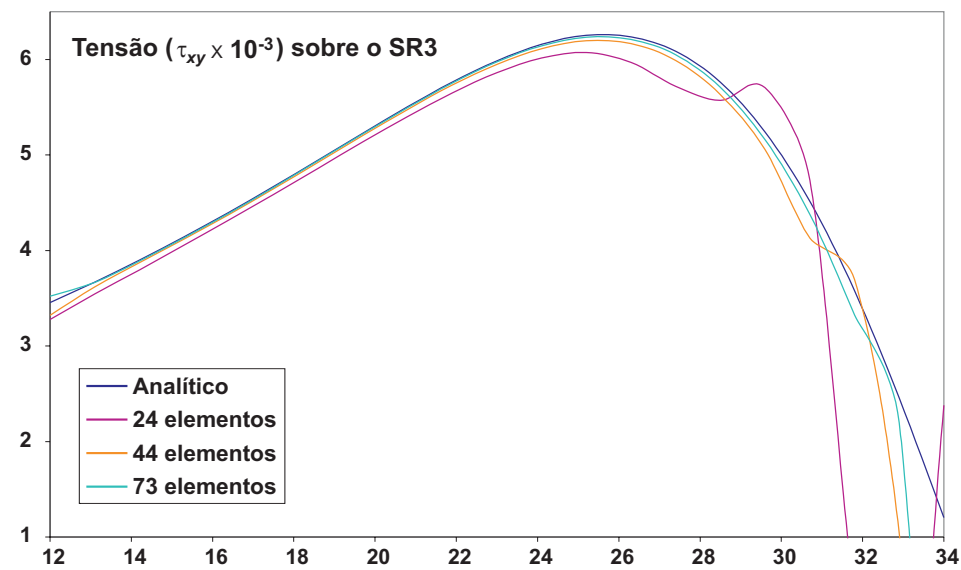
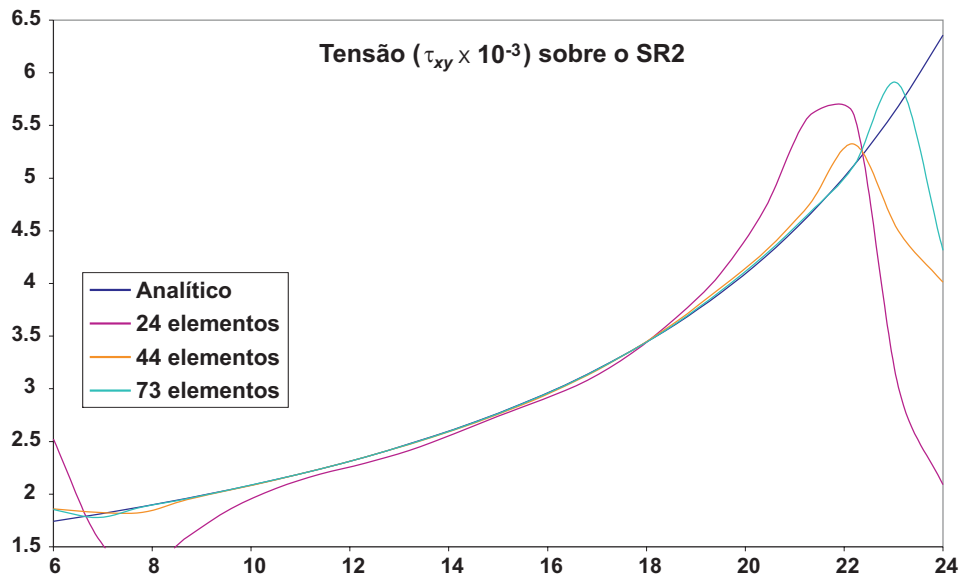
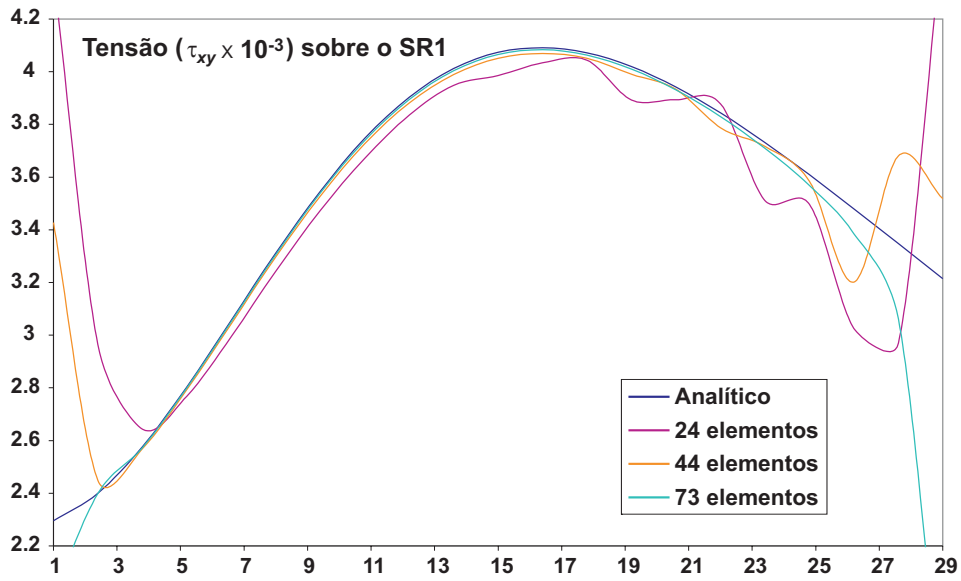


Figura 4.20 – Amplitude da tensão τ_{xy} sobre os segmentos de reta da Figura 4.15

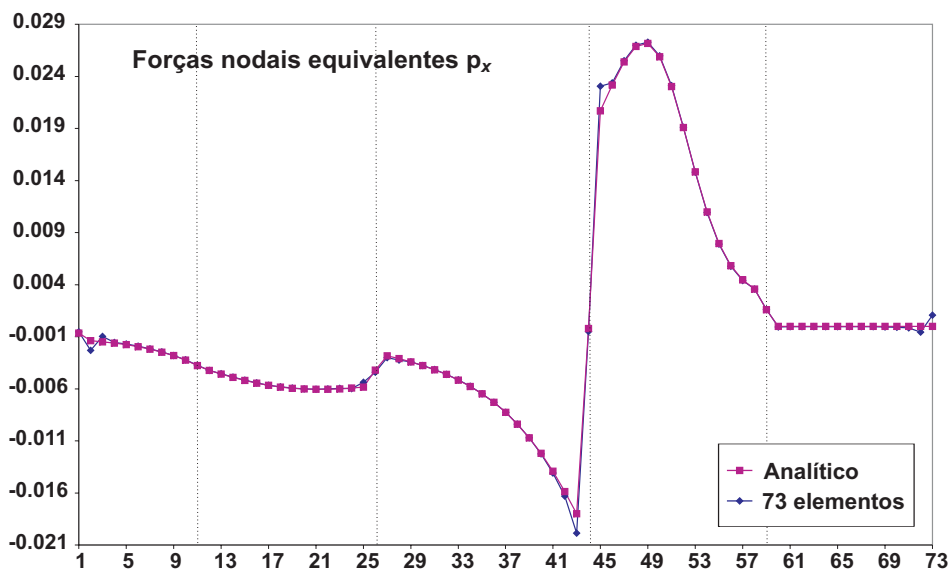
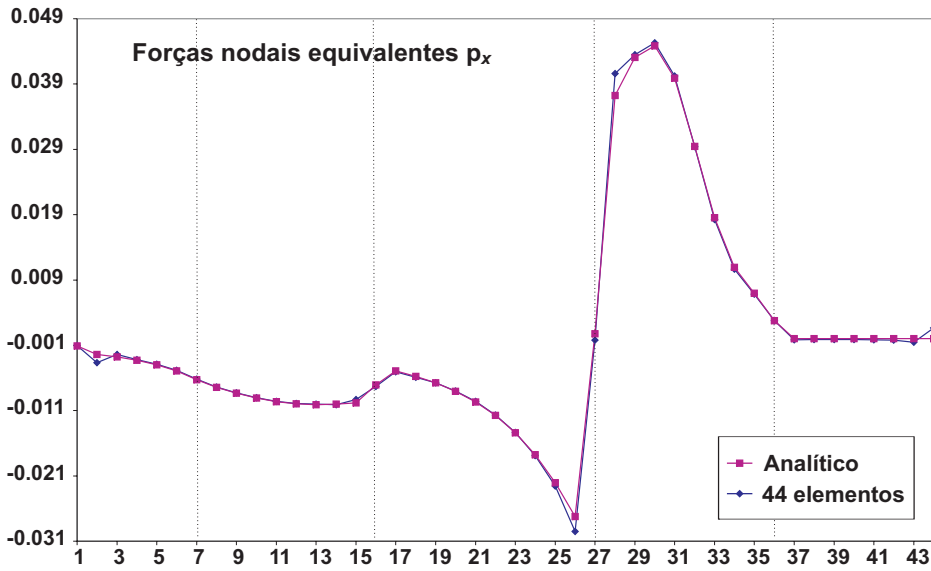
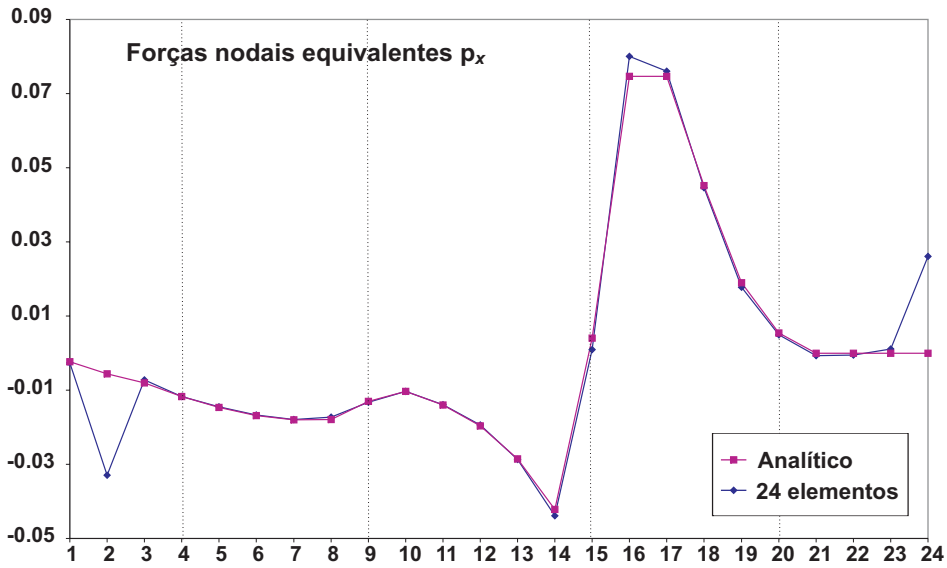


Figura 4.21 – Carregamento nodal equivalente na direção x para as três discretizações

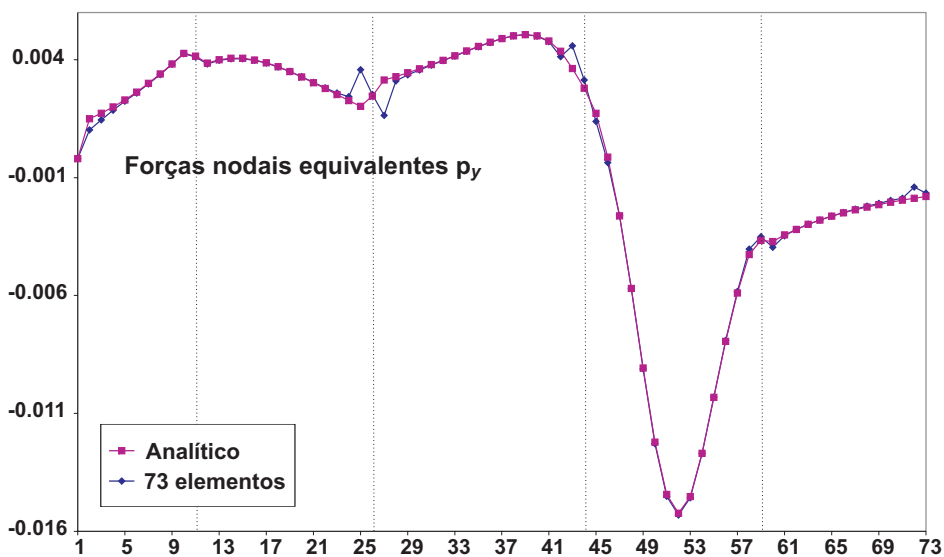
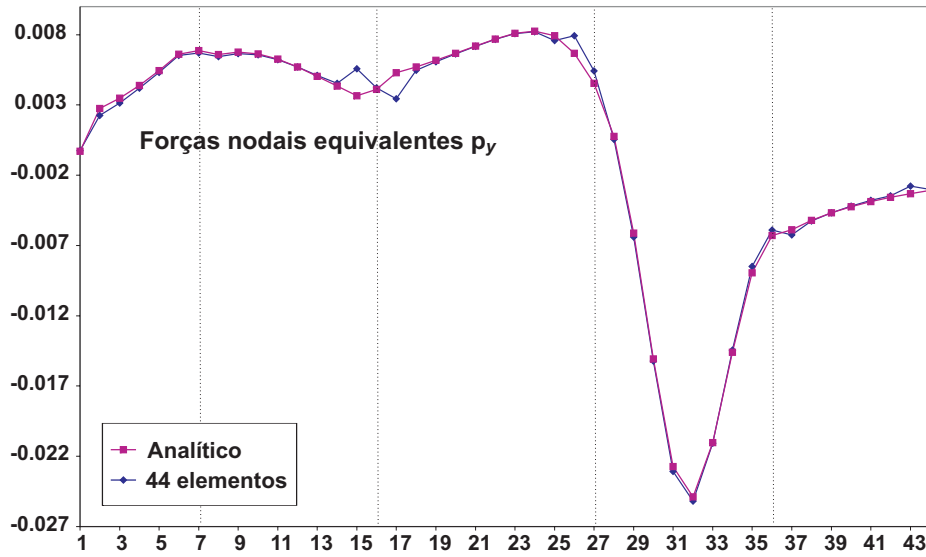
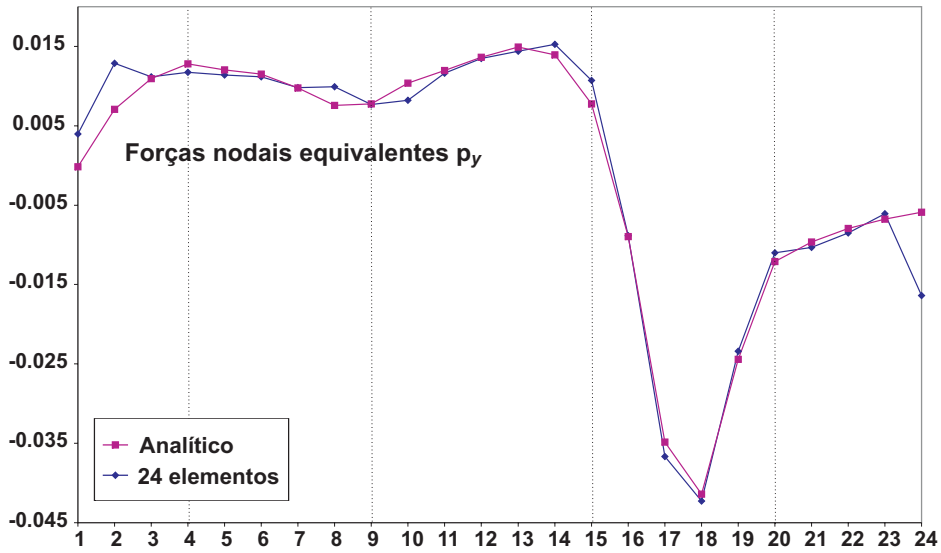


Figura 4.22 – Carregamento nodal equivalente na direção y para as três discretizações

Como o Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno considera condições de contorno de Neumann em termos de carregamento nodal equivalente obtido por trabalhos virtuais, podem ser observadas discrepâncias entre os valores numérico e analítico do carregamento nodal equivalente sobre os nós de canto e vizinhança, como nas Figura 4.21 e Figura 4.22.

4.6.

Análise transiente a partir da formulação no domínio da freqüência

A formulação apresentada no item 4.5 baseia-se na existência de uma solução fundamental, introduzida pelas eqs. (4.37) e (4.38), que por definição satisfaz a eq. (4.40) para uma dada freqüência circular ω . Entretanto, ao invés de formular o problema para um dado valor de freqüência circular, pode-se expressar a solução fundamental como uma série infinita de freqüências. Por exemplo, expandindo a eq. (4.54) em série de ω resulta em

$$\begin{aligned} \phi_m^* = & -\frac{\ln(r)}{2\pi k} + \left[\frac{r^2 \rho (\ln(r) - 1)}{8\pi k^2} \right] \omega^2 + \left[\frac{r^4 \rho^2 (3 - 2 \ln(r))}{256\pi k^3} \right] \omega^4 + \\ & + \left[\frac{r^6 \rho^3 (6 \ln(r) - 11)}{27648\pi k^4} \right] \omega^6 + \left[\frac{r^8 \rho^4 (25 - 12 \ln(r))}{3538944\pi k^5} \right] \omega^8 + O(\omega^{10}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Conseqüentemente, as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{U}^* do sistema (4.48), bem como a matriz de rigidez \mathbf{K} , são também definidas em termos de séries de freqüências para um número n arbitrário de termos, na forma:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{H}_i, \quad \mathbf{U}^* = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{U}_i^* \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^n \omega^{2i} \mathbf{M}_i \quad (4.59)$$

onde, \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez do problema estático e os outros termos da expansão de \mathbf{K} , que não apresentam singularidade na integral, são aqui chamados de matrizes de massa generalizada \mathbf{M}_i .

Para obter a matriz de rigidez \mathbf{K} como uma expansão em série de freqüências, a partir da eq. (4.34), é necessário calcular a inversa de \mathbf{U}^* também como série de freqüências.

Uma vez que as matrizes \mathbf{U}_i^* de \mathbf{U}^* não são singulares pode-se obter sua inversa de forma trivial, já que, para um número n arbitrário de termos

$$(\mathbf{U}^*)^{-1} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{X}_i + O(\omega^{2n+2}), \quad (4.60)$$

onde a primeira matriz da série é obtida invertendo-se diretamente a matriz \mathbf{U}_0^* do problema estático

$$\mathbf{X}_0 = (\mathbf{U}_0^*)^{-1}, \quad (4.61)$$

e as matrizes seguintes são obtidas de acordo com a fórmula de recorrência:

$$\mathbf{X}_i = -\mathbf{X}_0 \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_j^* \mathbf{X}_{i-j}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.62)$$

Finalmente, expressa-se a matriz de rigidez \mathbf{K} , de acordo com a eq. (4.34), como uma série de freqüências, como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sum_{j=0}^i \mathbf{H}_j^T \mathbf{X}_{i-j}. \quad (4.63)$$

Deve-se, ainda, considerar a simetrização da matriz de rigidez, então:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0^T) + \sum_{i=1}^n \frac{\omega^{2i}}{2} (\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i^T). \quad (4.64)$$

Uma vez obtida a matriz de rigidez \mathbf{K} em série de freqüências deve-se procurar uma metodologia para obter a solução do problema novamente no tempo.

De acordo com a definição da função $\tau(t, \omega)$ na eq. (4.39), dependente do tempo, pode-se compor um vetor \mathbf{d} de deslocamentos onde se procura uma série de Fourier:

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{d}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}_j \tau(t, \omega_j) \quad (4.65)$$

onde, $\omega_j = 2\pi j / T$ é a freqüência definida em função do número j em um intervalo de tempo $T = t_1 - t_0$.

Na formulação dependente da freqüência, dado um vetor de forças $\mathbf{p}(t)$ dependente do tempo atuando em um corpo elástico, o comportamento da estrutura sem amortecimento pode ser modelado como

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n \omega_j^{2i} \mathbf{M}_i \right) (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_j^b) \tau(t, \omega_j) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t). \quad (4.66)$$

Nesta equação expressa-se \mathbf{K}_0 como a matriz de rigidez do problema

estático. Os demais termos na série de \mathbf{K} vistos na eq. (4.63) são aqui chamados matrizes de massa generalizada \mathbf{M}_i , (Dumont e de Oliveira [22]). A matriz \mathbf{M}_1 corresponde exatamente à matriz de massa obtida na formulação clássica de dinâmica, onde a série é truncada para termos maiores que ω^2 . Convém observar que, conforme proposto por Przemieniecki [36] para problemas de vibração livre, o desenvolvimento de \mathbf{K} segundo a equação eq. (4.63) dá origem a uma matriz de rigidez e outra de massa, ambas dependentes da frequência. Na formulação presente, chama-se, de maneira conceitualmente indevida, matriz de rigidez apenas ao termo \mathbf{K}_0 .

Os vetores \mathbf{d}_j são as incógnitas do problema, determinados como função dos carregamentos nodais equivalentes $\mathbf{p}(t)$ aplicados, bem como velocidades e deslocamentos nodais iniciais. O número de termos n da série é arbitrário.

De acordo com Dumont e de Oliveira [22], a vantagem de uma formulação que utiliza série de frequências é a maior precisão no cálculo da equação diferencial de equilíbrio do corpo elástico.

De acordo com a eq. (4.65), pode-se expressar a eq. (4.66) alternativamente como:

$$\left(\mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (4.67)$$

que é um sistema acoplado, com equações diferenciais de movimento de alta ordem que faz uso das matrizes obtidas na formulação dependente da frequência.

Deve-se, agora, procurar uma solução para a eq. (4.67). Para começar, é preciso resolver um problema não-linear de autovalores relacionados com a equação (4.66), que pode ser escrito como

$$\mathbf{K}_0 \Phi - \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i \Phi \Omega^{2i} = \mathbf{0} \quad (4.68)$$

que, para $n = 3$, por exemplo, resultaria em

$$(\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - \omega^4 \mathbf{M}_2 - \omega^6 \mathbf{M}_3) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

Este problema não-linear de autovalores é difícil de resolver, uma vez que a convergência numérica não é facilmente garantida. Admitindo-se que se pode resolver esse problema adequadamente, observa-se que sua solução é parte da solução de um problema maior (expandido),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \dots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \dots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \vdots & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \dots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \dots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega^2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_1^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Omega_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.70)$$

onde

$$\Phi_{00} \equiv \Phi, \quad \Omega_0^2 \equiv \Omega^2 \text{ e } \Phi_{ij} = \Phi_{0j} \Omega_j^{2i} \text{ com } i=1, \dots, n-1 \text{ e } j=0, \dots, n-1 \quad (4.71)$$

Os autovalores e autovetores do sistema expandido das eqs. (4.70) e (4.71) são em geral complexos. Entretanto, para uma aplicação prática, é requerida apenas a avaliação dos subconjuntos reais de Φ e Ω .

Sendo o problema de autovalor expresso através da eq. (4.70) linear em Ω_j^2 , os autovetores correspondentes constituem uma base ortogonal, porém ainda não ortonormal. Pode-se aplicar o seguinte critério de normalização para estes autovetores:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{00}^T & \Phi_{10}^T & \dots & \Phi_{n-1,0}^T \\ \Phi_{01}^T & \Phi_{11}^T & \dots & \Phi_{n-1,1}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{0,n-1}^T & \Phi_{1,n-1}^T & \dots & \Phi_{n-1,n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \vdots & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \dots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \dots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (4.72)$$

Calculando a submatriz (0,0) do sistema acima e levando em conta a eq. (4.71), segue que $\Phi_{00} \equiv \Phi$ é uma base ortonormal somente se

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j-2i} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2i-2} = \mathbf{I} \quad (4.73)$$

A expressão acima, quando $n = 3$, vale

$$\begin{aligned} & \Phi^T \mathbf{M}_1 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi + \\ & \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 + \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Deve-se trabalhar com Φ de forma que a equação acima seja verdadeira. Considerando $\tilde{\Phi}$ como sendo os autovetores não-normalizados que satisfazem as

eq. (4.68) e (4.70) pode-se normalizá-los a partir da matriz diagonal Λ

$$\Phi = \tilde{\Phi} \Lambda \quad (4.75)$$

Substituindo-se essa equação em (4.73) obtém-se

$$\Lambda = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j-2i} \tilde{\Phi}^T \mathbf{M}_j \tilde{\Phi} \Omega^{2i-2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.76)$$

Além disso, já que a eq. (4.72) normaliza os autovetores em relação à massa do sistema expandido, pré-multiplicando-se a eq. (4.70) pela base transposta de autovetores do sistema aumentado resulta em um conjunto de equações desacopladas em Ω_j^2 . Levando em conta a eq. (4.73), o subconjunto de equações relacionado com o subscrito 0, o único de interesse, resulta em

$$\left(\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \Omega^{2i} \Phi^T \mathbf{M}_{j+i} \Phi \Omega^{2j} \right) = \Omega^2. \quad (4.77)$$

que, para $n = 3$, se escreve

$$\begin{aligned} & \left(\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 \right) - \\ & \left(\Phi^T \mathbf{M}_1 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi + \right. \\ & \left. \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 + \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 \right) \Omega^2 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Em virtude da ortogonalidade fica, para $n = 3$,

$$\left(\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 \right) = \Omega^2. \quad (4.79)$$

4.6.1. Técnica de superposição modal

Independentemente da forma do vetor de deslocamentos $\mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^b(t)$ na eq (4.67), pode-se introduzir um conjunto auxiliar de vetores de deslocamentos $\mathbf{d}_{(i)}(t)$, nos quais o subscrito entre parênteses indica que eles constituem um conjunto diferente dos apresentados nas eqs (4.65) e (4.66), tal que

$$\mathbf{d}_{(i)} = (-1)^i \frac{\partial^{2i} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)}{\partial t^{2i}} \quad \text{com } i = 1, \dots, n-1 \quad (4.80)$$

Assim, a eq. (4.67) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \mathbf{d}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{array} \right\} + \\
& \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \vdots & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{d}}^b \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(1)} \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(2)} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(n-1)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad (4.81)
\end{aligned}$$

sendo os pontos derivadas em relação ao tempo.

Agora, a partir da eq. (4.80), aproximam-se os deslocamentos $\mathbf{d}(t)$ e $\mathbf{d}_{(i)}(t)$, dependentes do tempo, através de uma soma finita de termos que resultam do produto dos modos da primeira coluna dos autovetores do sistema e das amplitudes $\boldsymbol{\eta} \equiv \boldsymbol{\eta}(t)$, vetor que passa a ser a incógnita do problema:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \end{array} \right\} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) \quad (4.82)$$

De acordo com isso, a equação (4.81) se torna

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \end{array} \right\} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) + \\
& \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \vdots & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \end{array} \right\} (\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \ddot{\boldsymbol{\eta}}^b) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4.83)
\end{aligned}$$

Finalmente, pré-multiplicando esta equação por $\boldsymbol{\Phi}_{i0}^T$, levando em conta a eq. (4.71) e considerando que os autovetores são normalizados de acordo com equação (4.73), de tal forma que a eq. (4.77) seja satisfeita, chega-se a uma

expressão, para a submatriz (0,0), dada por:

$$\mathbf{\Omega}^2(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) + \ddot{\boldsymbol{\eta}} - \ddot{\boldsymbol{\eta}}^b = \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b). \quad (4.84)$$

Esta equação constitui um sistema desacoplado, com tantas equações diferenciais de segunda ordem no tempo quanto o número de autovalores que está sendo considerado, e pode ser integrada por qualquer procedimento conhecido. Esta equação é equivalente a

$$\mathbf{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} + \ddot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{\Phi}^T \left[(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) + \left(\mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) \mathbf{d}^b \right]. \quad (4.85)$$

4.6.2.

Consideração de condições iniciais não-homogêneas

Para problemas em que as condições iniciais não são homogêneas, precisa-se expressar $\boldsymbol{\eta}(t=t_0)$ e $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t=t_0)$ em função de $\mathbf{d}(t=t_0)$ e $\dot{\mathbf{d}}(t=t_0)$. Para isso, deve-se resolver o sistema geralmente retangular da eq. (4.82), levando em conta valores desconhecidos de $\boldsymbol{\eta}$. Pré-multiplicando a matriz de rigidez aumentada da eq. (4.81) na eq. (4.82), depois pré-multiplicando-se o resultado por $\mathbf{\Omega}_{i0}^T$ obtém-se:

$$\left\langle \mathbf{\Phi}^T \quad \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{\Phi}^T \quad \dots \quad \mathbf{\Omega}^{2n-2} \mathbf{\Phi}^T \right\rangle \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(n-1)} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta}, \quad (4.86)$$

já que os autovetores satisfazem a eq. (4.77). Fazendo os produtos matriciais e considerando a eq. (4.80) obtém-se

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{\Omega}^{-2} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{\Omega}^{2i-2} \mathbf{\Phi}^T \sum_{j=1}^{n-i} (-1)^j \mathbf{M}_{j+i} \frac{\partial^{2j} \mathbf{d}}{\partial t^{2j}} \quad (4.87)$$

Contudo, esta equação só é aplicada se os deslocamentos \mathbf{d} e suas derivadas até a ordem $2n-1$ forem conhecidos no início do intervalo. Em geral apenas os deslocamentos e velocidades (e não suas derivadas) são conhecidos no início do intervalo. Por isso deve-se encontrar uma expressão alternativa.

Substituindo os valores de $\mathbf{d}_{(i)}(t)$ da eq. (4.82) na eq. (4.86), obtém-se

$$\left\langle \Phi^T \quad \Omega^2 \Phi^T \quad \dots \quad \Omega^{2n-2} \Phi^T \right\rangle \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Phi \\ \Phi \Omega^2 \\ \vdots \\ \Phi \Omega^{2n-2} \end{array} \right\} \boldsymbol{\eta} = \Omega^2 \boldsymbol{\eta}. \quad (4.88)$$

Realizando as operações matriciais, chega-se a

$$\left[\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi \right] \boldsymbol{\eta} = \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} \quad (4.89)$$

uma vez que de acordo com a eq. (4.77) os produtos matriciais que envolvem $\boldsymbol{\eta}$ simplificam para o termo entre colchetes. Conclui-se que, sem nenhuma hipótese suplementar, se a eq. (4.82) é válida, então

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi \right]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} \quad (4.90)$$

também é válida e, conseqüentemente,

$$\boldsymbol{\eta}(t = t_0) = \left[\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi \right]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d}(t = t_0) \quad \text{e} \quad (4.91)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t = t_0) = \left[\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi \right]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \dot{\mathbf{d}}(t = t_0). \quad (4.92)$$

Estas são as relações desejadas para expressar as condições iniciais nodais de um problema transiente.

4.6.3. Avaliação de resultados em pontos do domínio

O campo de deslocamentos em todo o domínio é dado pela eq. (4.9), que em termos de frequência vale

$$u_i^* = u_{im}^*(\omega) p_m^*(\omega) \tau(t, \omega) \quad \text{ou} \quad u_i^* = \sum_{j=0}^n \omega^{2j} u_{im}^{j*} p_m^*(\omega) \tau(t, \omega). \quad (4.93)$$

Sendo $u_{im}^*(\omega)$ uma função conhecida, resta calcular o produto $p_m^*(\omega) \tau(t, \omega)$.

Sabe-se que, da primeira equação do sistema (4.32), $\mathbf{p}^* \equiv p_m^*(\omega) \tau(t, \omega)$ é dado por

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{U}^*)^{-1} \mathbf{d}. \quad (4.94)$$

onde a inversa de \mathbf{U}^* é definida na expressão (4.60) e \mathbf{d} é definido na eq. (4.82). Substituindo-se essas duas definições na equação acima resulta em:

$$\mathbf{p}^* = \left(\sum_{k=0}^n \omega^{2k} \mathbf{U}_k^{*-1} \right) \Phi \boldsymbol{\eta}. \quad (4.95)$$

Assim, tem-se genericamente que

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{\Phi}^* \boldsymbol{\eta} \quad (4.96)$$

De onde se supõe que

$$\mathbf{\Phi}^* = \left(\sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{U}_i^{*-1} \right) \mathbf{\Phi}, \quad (4.97)$$

ou, para $n=3$

$$\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{U}_0^{*-1} \mathbf{\Phi} + \mathbf{U}_1^{*-1} \mathbf{\Phi} \Omega^2 + \mathbf{U}_2^{*-1} \mathbf{\Phi} \Omega^4 + \mathbf{U}_3^{*-1} \mathbf{\Phi} \Omega^6. \quad (4.98)$$

Substituindo a expressão de \mathbf{p}^* da eq. (4.95) na eq (4.93) chega-se a uma expressão para avaliação de resultados em pontos internos

$$u_i^* = \left\{ \sum_{j=0}^n \left[\sum_{k=0}^j \mathbf{u}_i^{k*} (\mathbf{U}_{j-k}^*)^{-1} \right] \mathbf{\Phi} \Omega^{2j} \right\} \boldsymbol{\eta} \quad (4.99)$$

ou, para $n=3$

$$u_i^* = \left[\mathbf{u}_i^{0*} \mathbf{U}_0^{*-1} \mathbf{\Phi} + \left(\mathbf{u}_i^{0*} \mathbf{U}_1^{*-1} + \mathbf{u}_i^{1*} \mathbf{U}_0^{*-1} \right) \mathbf{\Phi} \Omega^2 + \left(\mathbf{u}_i^{0*} \mathbf{U}_2^{*-1} + \mathbf{u}_i^{1*} \mathbf{U}_1^{*-1} + \mathbf{u}_i^{2*} \mathbf{U}_0^{*-1} \right) \mathbf{\Phi} \Omega^4 + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{u}_i^{0*} \mathbf{U}_3^{*-1} + \mathbf{u}_i^{1*} \mathbf{U}_2^{*-1} + \mathbf{u}_i^{2*} \mathbf{U}_1^{*-1} + \mathbf{u}_i^{3*} \mathbf{U}_0^{*-1} \right) \mathbf{\Phi} \Omega^6 \right] \boldsymbol{\eta}. \quad (4.100)$$

4.6.4. Exemplos

4.6.4.1. Carregamento senoidal aplicado ao recorte irregular de um elemento de treliça 1

Como um exemplo acadêmico simples, considera-se uma elemento de treliça elástica de dimensões $30 \times 35 \times 1$ (elemento tracejado), mostrado na Figura 4.23, submetido a uma carga pulsante de intensidade total $P(t) = 10 \sin(1.35 \omega_0 t)$, onde $\omega_0 = 0.048$ é a primeira freqüência natural da treliça. Um recorte irregular é feito no elemento de treliça e na seqüência submetido a forças nodais equivalentes dependentes do tempo aplicadas ao longo das linhas recortadas, que correspondem à resposta analítica do problema inicial. O recorte é discretizado com 94 elementos lineares com quase o mesmo comprimento.

Devido ao caráter unidimensional da sollicitação (o coeficiente de Poisson é igual a zero), este problema pode ser resolvido como problema de potencial.

A Figura 4.24 mostra as quarenta primeiras freqüências naturais do corpo formado pelo contorno irregular, obtidas pela solução do problema não-linear de autovalores da eq. (4.68), para as quatro primeiras matrizes de massa generalizadas. As quarenta primeiras freqüências naturais analíticas do elemento de treliça também são mostradas, para efeito de comparação.

Na Figura 4.25 é mostrado o deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.23, normalizado em relação ao deslocamento estático para uma carga $P=10$, dentro de um intervalo de tempo de 300 a 1200 segundos.

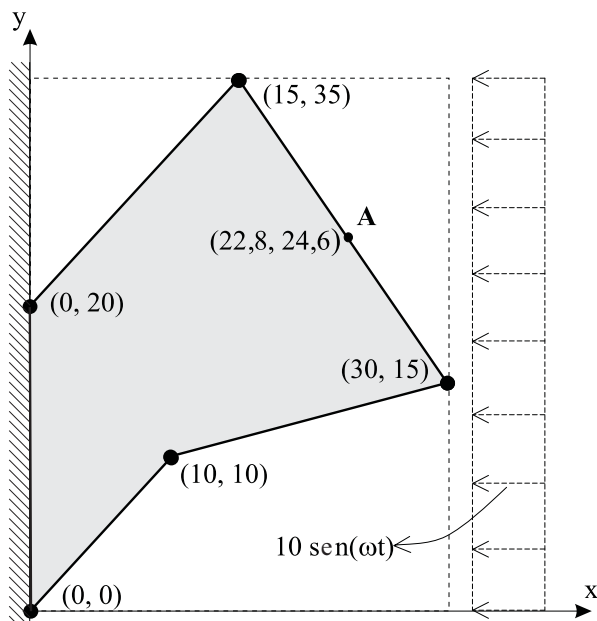


Figura 4.23 – Esquema do corpo com contorno irregular recortado do elemento de treliça

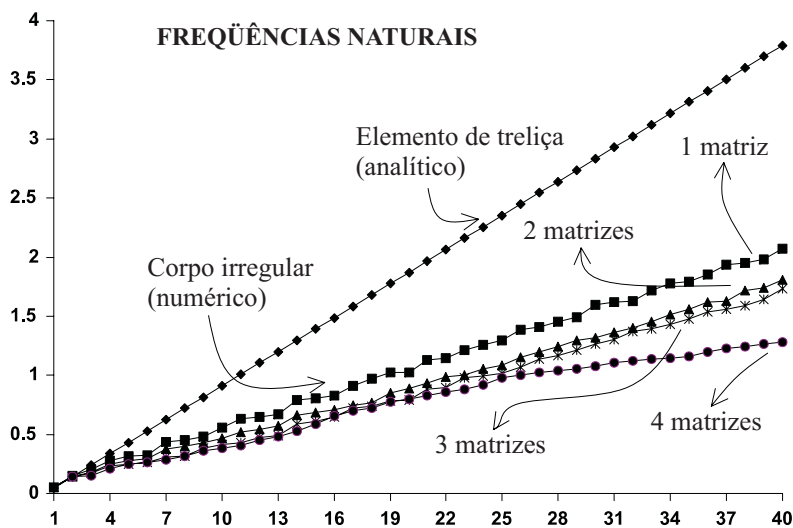


Figura 4.24 – As 40 primeiras freqüências naturais do corpo e do elemento de treliça

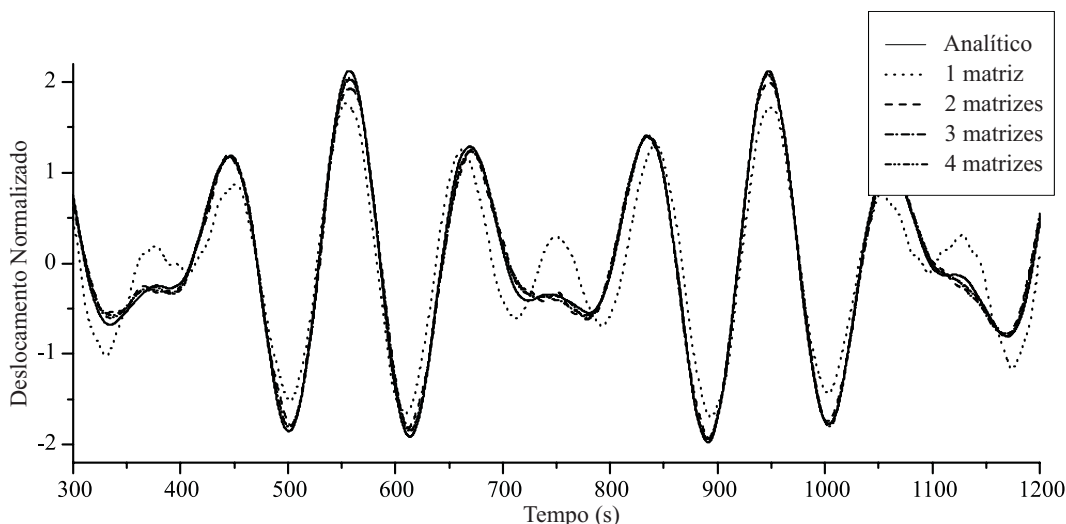


Figura 4.25 – Resposta do deslocamento no ponto A indicado na Figura 4.23

4.6.4.2.

Carregamento senoidal aplicado ao recorte irregular de um elemento de treliça 2

Considera-se, agora, uma treliça elástica de dimensões $50 \times 35 \times 1$ (elemento tracejado), mostrado na Figura 4.26, submetido a uma carga pulsante de intensidade total $P(t) = 10^8 \sin(1.35\omega_0 t)$, onde ω_0 é a primeira frequência natural da treliça. Um recorte irregular é feito no elemento de treliça e na seqüência submetido a forças nodais equivalentes dependentes do tempo aplicadas ao longo das linhas recortadas, que correspondem à resposta analítica do problema inicial. O recorte é discretizado com 59 elementos lineares com aproximadamente o mesmo comprimento. A expansão em série de frequência é feita para $n = 3$. As propriedades do material da estrutura estão mostradas na Figura 4.26.

Devido ao caráter unidimensional da sollicitação (o coeficiente de Poisson é igual a zero), este problema pode ser resolvido como problema de potencial.

Na Figura 4.27 é mostrado o deslocamento do ponto interno A indicado na Figura 4.26, a partir do instante inicial até 0.5 segundos. Já na Figura 4.28 é mostrado o deslocamento ao longo do segmento de reta tracejado indicado na Figura 4.26 em alguns intervalos de tempo. Em todas as figuras com resultados deste exemplo tomou-se como resposta analítica a solução em série de Fourier do problema de treliça.

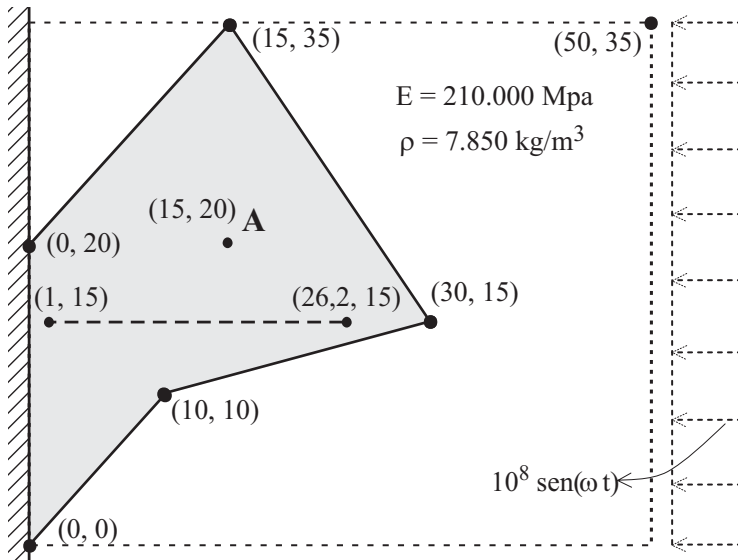


Figura 4.26 – Esquema do corpo com contorno irregular recortado do elemento de treliça

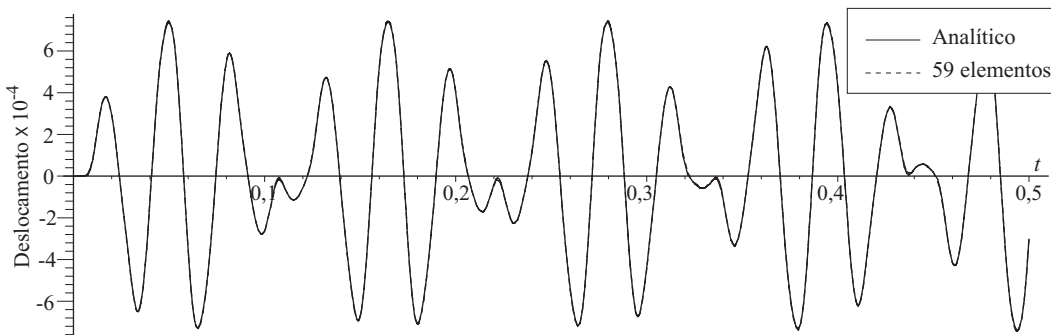


Figura 4.27 – Resposta do deslocamento no ponto A indicado na Figura 4.26

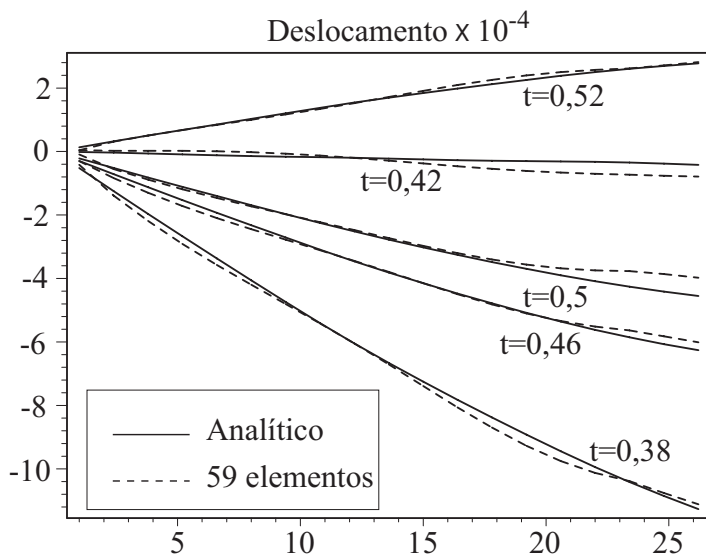


Figura 4.28 – Resposta do deslocamento ao longo do segmento de reta da Figura 4.26

4.6.4.3.

Aplicação súbita da aceleração da gravidade sobre corpo irregular

Este exemplo utiliza a mesma estrutura do exemplo anterior, com as mesmas propriedades do material e com a mesma discretização do contorno, entretanto, um outro conjunto de solicitações é aplicado. Agora se considera a aplicação súbita da aceleração da gravidade com condições iniciais homogêneas, como ilustrado na Figura 4.29. Então, o corpo é submetido instantânea e simultaneamente a forças de superfície, correspondentes à solução analítica da resposta da treliça sobre as linhas recortadas, bem como a forças de massa, correspondentes ao peso do material.

Uma solução particular da eq. (4.7) é

$$\sigma_y^b = -\rho g(\ell - y), \quad \text{obtendo} \quad u_y^b = \frac{-\rho g(\ell - y)^2}{2E}, \quad (4.101)$$

onde ℓ é o comprimento da treliça, g é a aceleração da gravidade e E é o módulo de elasticidade do material.

A Figura 4.30 ilustra os deslocamentos nodais ao longo do contorno irregular em alguns instantes de tempo. A resposta no tempo do deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.29 está mostrada na Figura 4.31. A Figura 4.32 mostra o resultado dos deslocamentos ao longo do segmento de reta tracejado indicado na Figura 4.29.

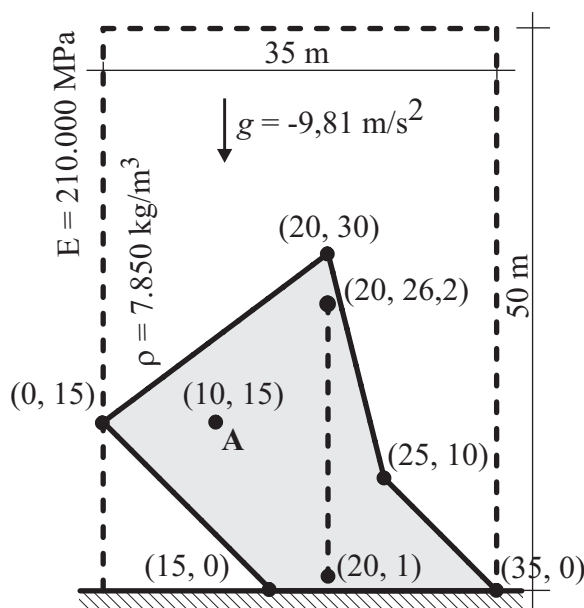


Figura 4.29 – Esquema do corpo com contorno irregular recortado do elemento de treliça

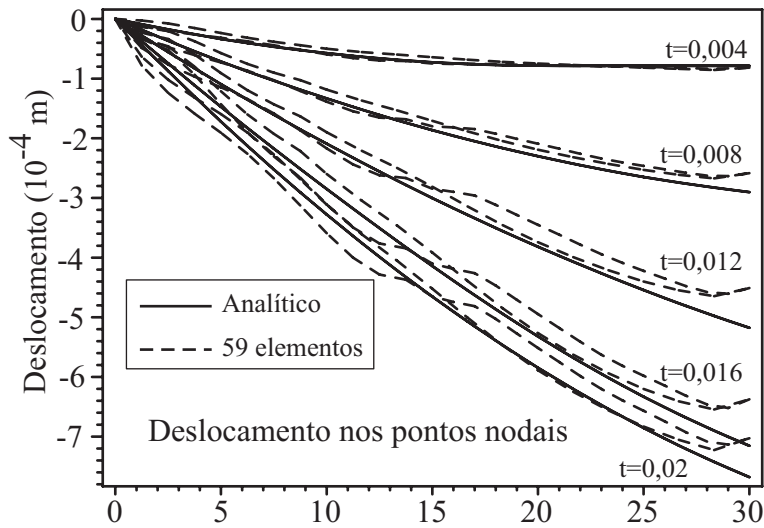


Figura 4.30 – Deslocamentos nodais ao longo do contorno

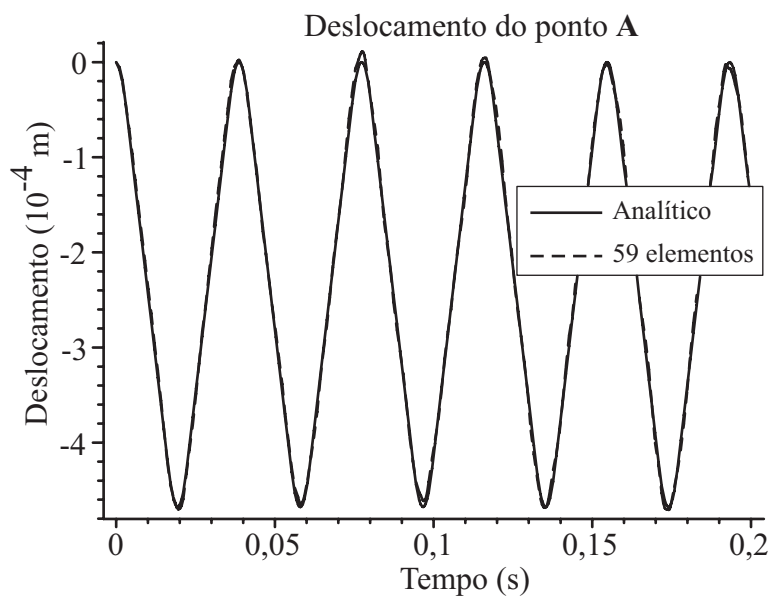


Figura 4.31 – Deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.29

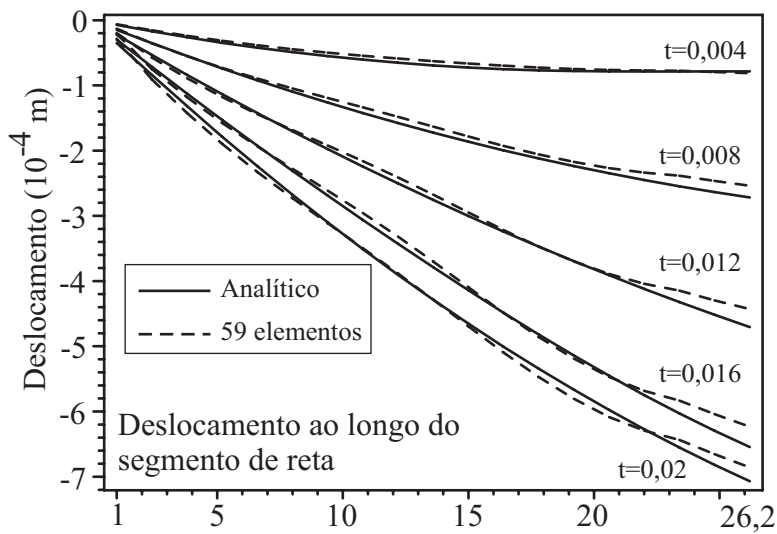


Figura 4.32 – Deslocamento ao longo do segmento de reta traçado da Figura 4.29

4.6.4.4.

Velocidade inicial constante aplicada a um elemento de treliça

Considera-se um elemento de treliça, engastado e livre, que não está submetido a nenhum carregamento externo, mas apenas a uma velocidade inicial constante v_0 em todo o domínio (Figura 4.33). Novamente, este problema pode ser resolvido como um problema de potencial. Um total de 34 elementos quadráticos, de mesmo comprimento, foi usado para discretizar o contorno. A expansão em série de frequência é feita para $n = 3$.

A Figura 4.34 ilustra os deslocamentos nodais ao longo do contorno da estrutura em alguns instantes de tempo. A resposta no tempo do deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.33 está mostrada na Figura 4.35. A Figura 4.36 mostra o resultado dos deslocamentos ao longo do segmento de reta tracejado também indicado na Figura 4.33.

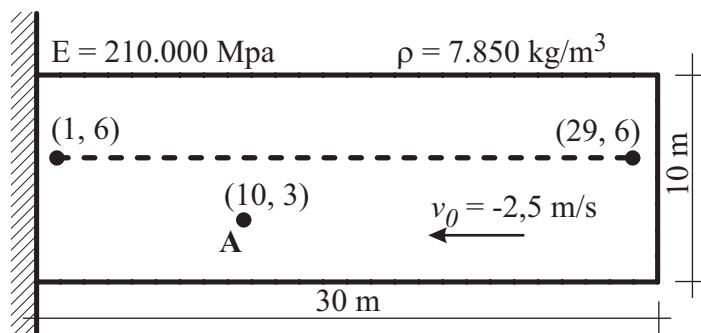


Figura 4.33 – Elemento de treliça submetido a velocidade inicial constante

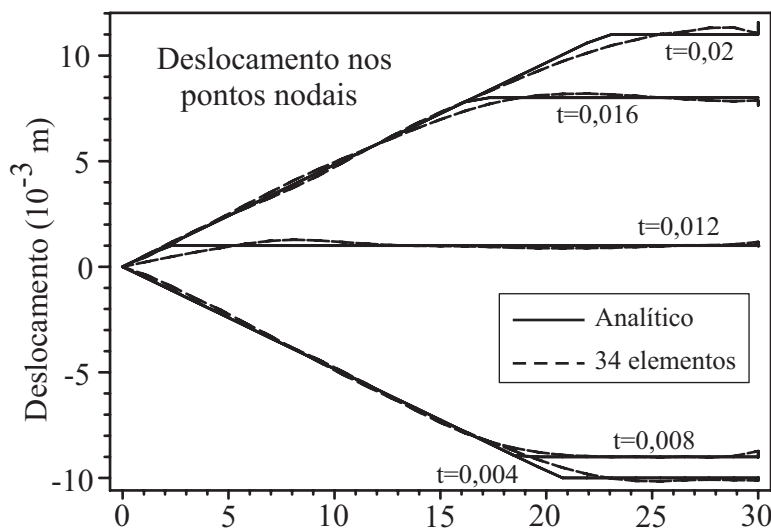


Figura 4.34 – Deslocamentos nodais ao longo do contorno

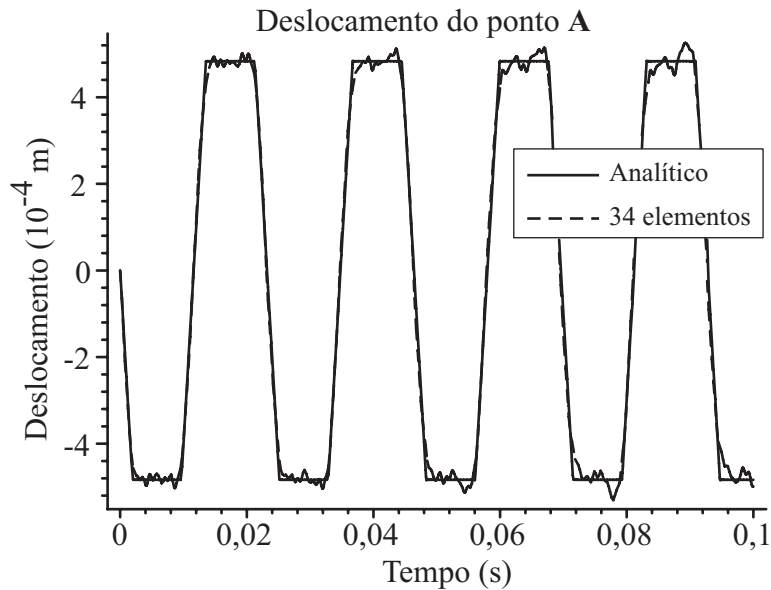


Figura 4.35 – Deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.33

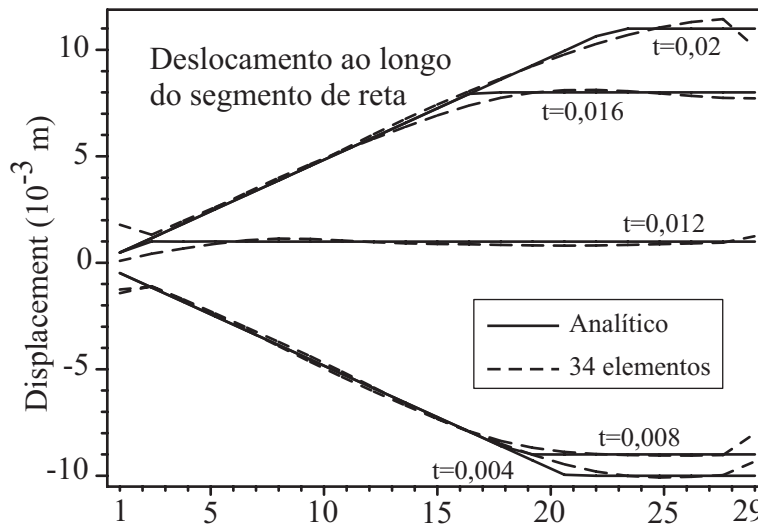


Figura 4.36 – Deslocamento ao longo do segmento de reta tracejado da Figura 4.33

4.6.4.5.

Recorte numa membrana circular submetida a velocidade inicial constante

Considera-se a avaliação do campo de deslocamentos de uma membrana circular, como mostrado na Figura 4.38, submetida a velocidade inicial dada por

$$v_0 = (r-1)\text{sen}(\theta). \quad (4.102)$$

Este problema pode ser resolvido no escopo da teoria de potencial [52], como ilustrado num instante de tempo na Figura 4.37. Como um exercício acadêmico,

recorta-se uma parte da membrana e discretiza-se o contorno com 34 elementos quadráticos, como ilustrado na Figura 4.37. Prescreve-se deslocamento zero na extremidade circular da membrana, e em seguida um carregamento nodal equivalentes dependente do tempo, avaliado como solução do problema da membrana completa é aplicado no restante do contorno recortado.

A resposta do deslocamento no ponto A, indicado na Figura 4.37, é mostrada na Figura 4.39 em função do tempo, e comparada com o resultado analítico obtido da análise da membrana completa. Esta solução analítica é obtida como séries de funções de Bessel [52]. A expansão em série de frequência é feita para $n = 3$.

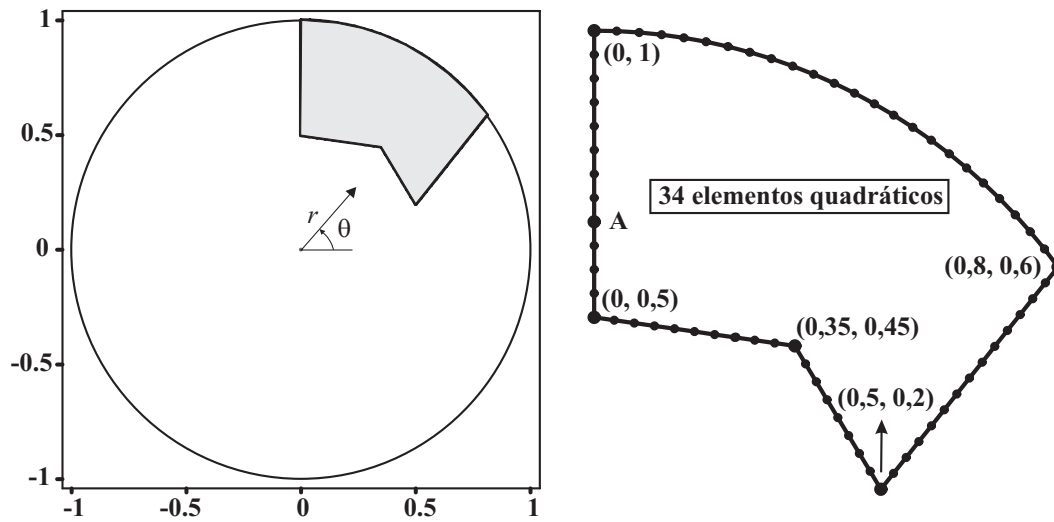


Figura 4.37 – Esquema do recorte na membrana e detalhe da discretização do contorno

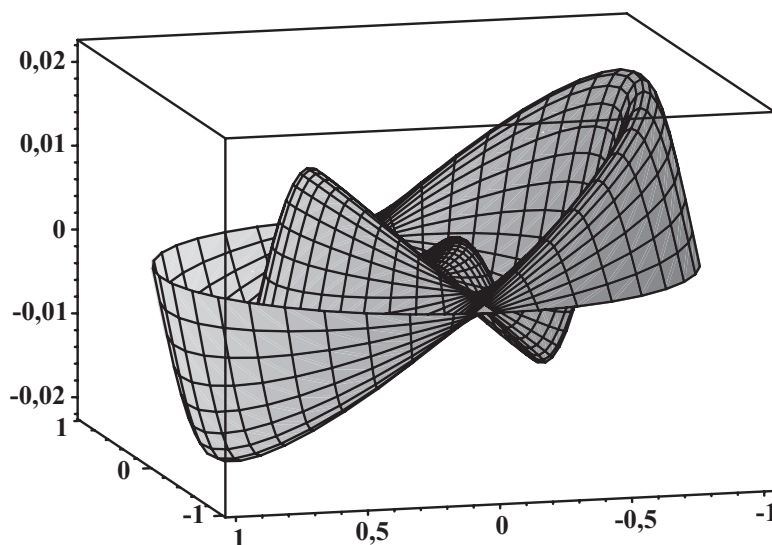


Figura 4.38 – Esquema do campo de deslocamentos num Instante de tempo

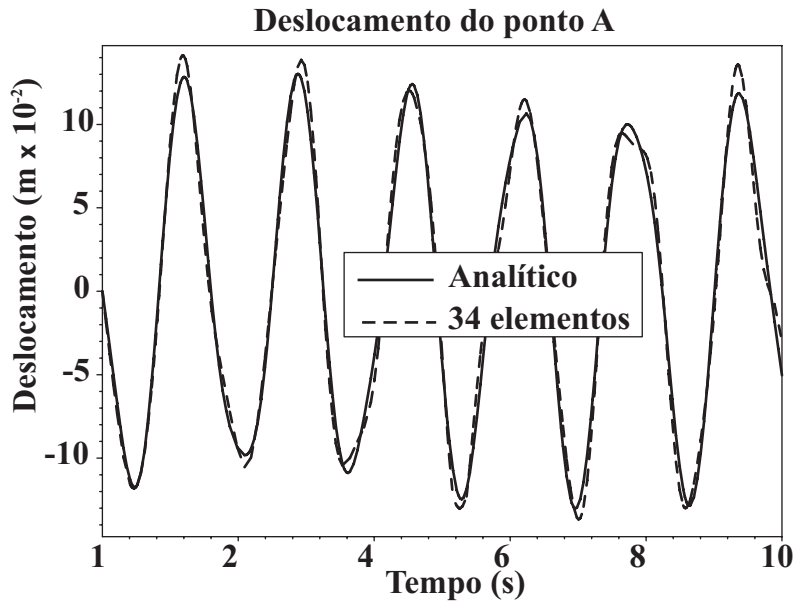


Figura 4.39 – Resposta do deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.37

4.6.4.6.

Condução de calor em uma placa quadrada

Este problema foi proposto por Bruch e Zyvoloski [45] e consiste na condução de calor num domínio quadrado, ilustrado na Figura 4.40. As condições de contorno são de valores prescritos da temperatura:

$$\phi(1,Z,t)=1.0 \text{ e } \phi(X,1,t)=1.0$$

e de fluxo:

$$q_x(0,Z,t)=0.0 \text{ e } q_z(X,0,t)=0.0.$$

A condição inicial é

$$\phi(X,Z,0)=0.0.$$

Tem-se o calor específico $c_p=1$ e a condutividade térmica isotrópica do meio $k=1$.

Este problema foi modelado com 80 elementos lineares distribuídos de acordo com a Figura 4.40, como maior refinamento da malha em torno dos cantos $(X=1, Z=0)$ e $(X=0, Z=1)$, onde há uma mudança abrupta do valor inicial da temperatura de 0.0 para 1.0, gerando um gradiente de temperatura infinito no local para o instante $t=0$.

A Figura 4.41 e a Figura 4.42 mostram os resultados ao longo do lado $Z=0$, que são os mesmos ao longo do lado AB $(X=0)$, pois o problema é simétrico em relação ao eixo $Z=X$; para alguns instantes de tempo comparados

com a solução analítica:

$$\phi(X, Z, t) = 1.0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi X}{2}\right] \cos\left[\frac{(2j-1)\pi Z}{2}\right] e^{-\left\{\left[\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} + \frac{(2j-1)^2 \pi^2}{4}\right] t\right\}} \quad (4.103)$$

onde

$$C_{nj} = \frac{-16(-1)^{n+1}(-1)^{j+1}}{\pi^2(2n-1)(2j-1)}. \quad (4.104)$$

Na Figura 4.42, a variação da temperatura é mostrada numa escala pequena para melhor visualizar os resultados.

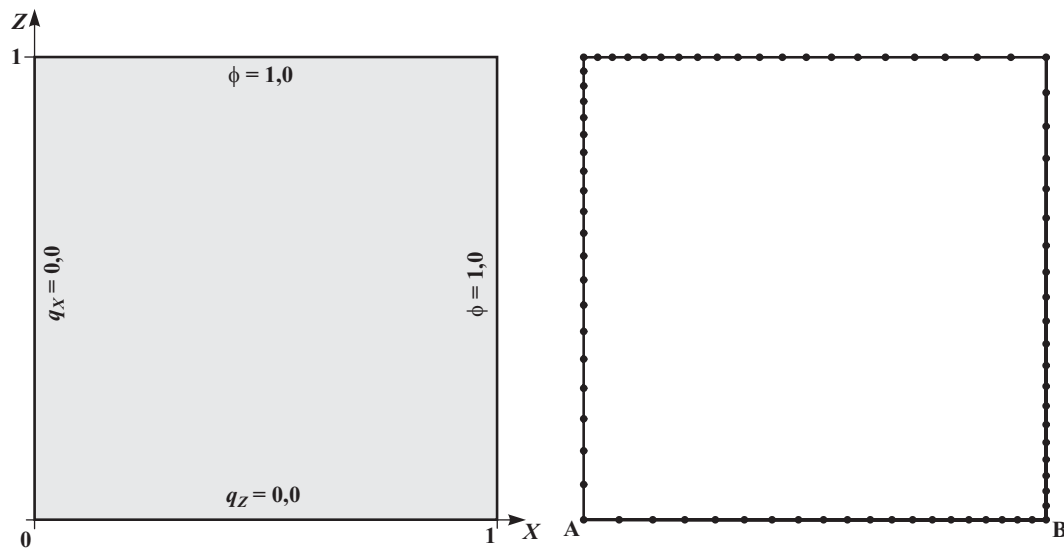


Figura 4.40 – Esquema da estrutura e discretização do contorno

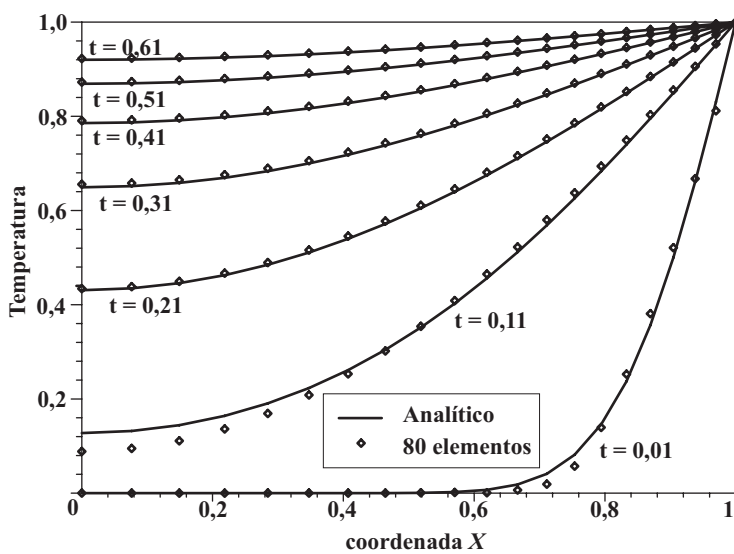


Figura 4.41 – Variação da temperatura ao longo do lado AB

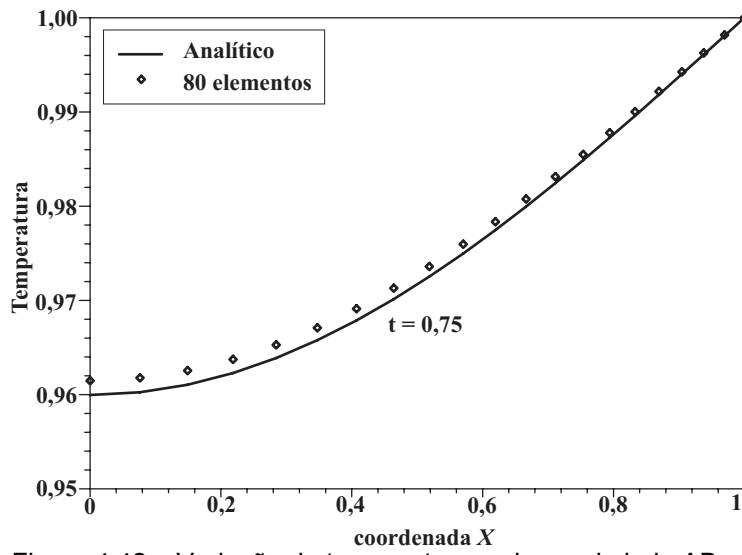


Figura 4.42 – Variação da temperatura ao longo do lado AB em escala menor