

### 3

## O Método Híbrido dos Elementos de Contorno e sua formulação simplificada aplicados a problemas estáticos em domínio infinito e multiplamente conexo

A viabilidade de ambas as formulações híbridas apresentadas no capítulo anterior está na possibilidade de avaliar os elementos da diagonal principal das matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{U}^*$ , de acordo com as propriedades de ortogonalidade das eqs. (2.69) e (2.143), respectivamente. Porém, isto só é possível se todos os elementos da base  $\mathbf{V}$  forem diferentes de zero. Isto é sempre verificado no caso de problemas em domínio simplesmente conexo em meio homogêneo. Por outro lado, na consideração de domínios infinitos estas equações de ortogonalidade não são diretamente aplicáveis, haja visto que, não se pode excluir os deslocamentos de corpo rígido nem as forças desequilibradas das considerações de energia, ao lidar com este problema topologicamente diferente.

Felizmente, há algumas relações entre as matrizes obtidas para uma cavidade em um domínio infinito e as matrizes correspondentes obtidas para um domínio finito complementar, que proporcionam a determinação completa dos resultados.

Neste capítulo serão mostradas as metodologias para o tratamento de problemas em domínios infinitos pelo Método Híbrido dos Elementos de Contorno e sua formulação simplificada. E na seqüência, a metodologia para o tratamento de problemas em domínios multiplamente conexo apenas pelo Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno no qual é feita uma superposição dos efeitos dos problemas em meio simplesmente conexo e em meio infinito.

### 3.1.

#### Proposição do problema em domínio infinito

Seja um domínio infinito dividido em dois subdomínios, um subdomínio finito, simplesmente conexo  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$ , e o restante, ou complementar,

subdomínio  $\bar{\Omega}$  com contorno  $\bar{\Gamma}$ , como mostrado na Figura 3.1.

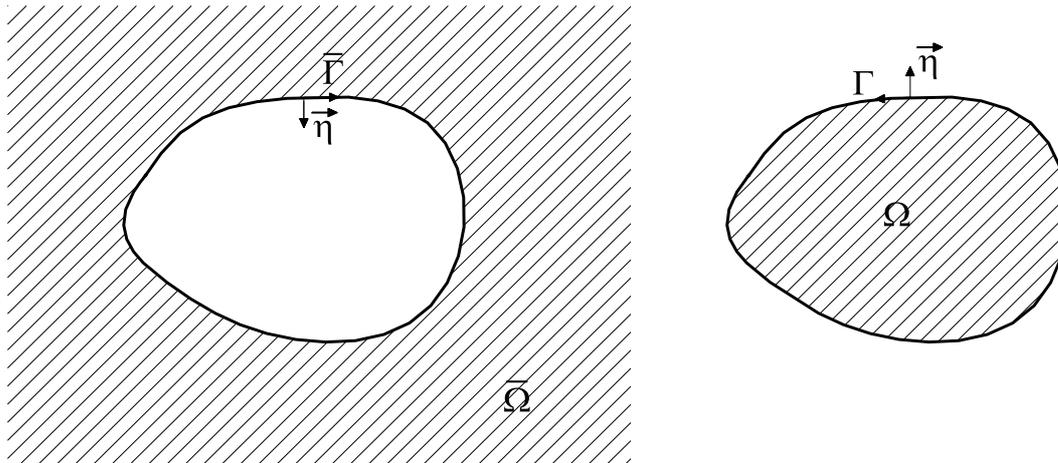


Figura 3.1 - Domínio infinito dividido em dois subdomínios.

Estes dois subdomínios representam problemas distintos, porém complementares. O segundo é um típico problema de meio finito simplesmente conexo, para o qual já foram apresentadas soluções numéricas baseadas nos métodos Híbrido e Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno. O primeiro é um problema de cavidade em meio infinito que precisa de tratamento semelhante, porém diferente, ao dado a problemas de meio finito.

### 3.2. Solução no Método Híbrido dos Elementos de Contorno

Para problemas de meio finito, o Método Híbrido dos Elementos de Contorno apresenta para determinação da matriz de incidência cinemática a expressão

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{im} u_{in}, \quad (3.1)$$

para a matriz de flexibilidade a expressão

$$\mathbf{F} \equiv F_{mn} = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in}^* d\Gamma + \delta_{im} u_{in}^* \quad (3.2)$$

e um sistema de equações matriciais dado por

$$\begin{cases} \mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{cases} \quad (3.3)$$

A singularidade nas integrais das eqs. (3.1) e (3.2) é avaliada em termos de valor principal de Cauchy, como uma soma de partes finitas, mais um termo descontínuo local. Desta forma, a eq. (3.1) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma_f} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \left( \int_{\Gamma_s} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{im} \right) u_{in}|_s \quad \text{ou} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_f + \mathbf{H}_s, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{H}_f$  é uma matriz cujos termos são os valores da parte finita da matriz  $\mathbf{H}$  e

$\mathbf{H}_s$  é uma matriz cujos termos são os valores da parte descontínua da matriz  $\mathbf{H}$ .

De modo semelhante, a eq. (3.2) pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{F} \equiv F_{mn} = \int_{\Gamma_f} p_{im}^* u_{in}^* d\Gamma + \left( \int_{\Gamma_s} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{im} \right) u_{in}^*|_s \quad \text{ou} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_f + \mathbf{H}_s \mathbf{U}^*, \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{F}_f$  é uma matriz cujos termos são os valores da parte finita da matriz  $\mathbf{F}$  e o

produto de matrizes  $\mathbf{H}_s \mathbf{U}^*$  representa a parte singular da matriz  $\mathbf{F}$ .

Para problemas de meio infinito, considerando o contorno  $\bar{\Gamma}$ , cuja normal  $\bar{n}$  aponta para dentro, significando dizer que as integrais de contorno devem ser feitas no sentido inverso, a eq. (3.1) pode ser reescrita na forma

$$\bar{\mathbf{H}} \equiv \bar{H}_{mn} = \int_{\bar{\Gamma}} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{im} u_{in}. \quad (3.6)$$

Separando-se a parte finita da parte descontínua, obtém-se:

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}_f + \bar{\mathbf{H}}_s, \quad (3.7)$$

onde, por construção,  $\bar{\mathbf{H}}_f = -\mathbf{H}_f$  e  $\bar{\mathbf{H}}_s = \mathbf{I} - \mathbf{H}_s$ . Então, somando-se as eqs. (3.4)

e (3.7), obtém-se uma relação entre  $\mathbf{H}$  e  $\bar{\mathbf{H}}$ , dada por:

$$\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{I}. \quad (3.8)$$

Desta forma pode-se obter a matriz  $\bar{\mathbf{H}}$  do problema em domínio infinito a partir da matriz  $\mathbf{H}$  do problema complementar em meio finito simplesmente conexo.

Como consequência da propriedade de ortogonalidade  $\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{0}$  conclui-se, a partir da eq. (3.8), que

$$\bar{\mathbf{H}}\mathbf{W} = \mathbf{W}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a base ortonormal de deslocamentos de corpo rígido do problema complementar em meio finito simplesmente conexo.

Na determinação da matriz  $\bar{\mathbf{F}}$  procede-se de modo semelhante. Então, a eq. (3.2) pode ser reescrita como

$$\bar{\mathbf{F}} \equiv \bar{F}_{mn} = \int_{\bar{\Gamma}} p_{im}^* u_{in}^* d\Gamma + \delta_{im} u_{in}^*. \quad (3.10)$$

Separando a parte finita e a parte descontínua de  $\bar{\mathbf{F}}$ , obtém-se:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_f + \bar{\mathbf{H}}_s \mathbf{U}^*, \quad (3.11)$$

onde, por construção,  $\bar{\mathbf{F}}_f = -\bar{\mathbf{F}}$ . Então, ao somar as eqs. (3.5) e (3.11), chega-se à relação entre as matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\bar{\mathbf{F}}$ , dada por:

$$\mathbf{F} + \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{U}^* . \quad (3.12)$$

Desta forma pode-se obter a matriz  $\bar{\mathbf{F}}$  a partir da matriz  $\mathbf{F}$  do problema complementar de meio finito e da matriz  $\mathbf{U}^*$ .

O fato de as diagonais principais das matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{U}^*$  terem sido obtidas a partir de considerações físicas permite a determinação da diagonal principal de  $\bar{\mathbf{F}}$  a partir da eq. (3.12). De fato, somando o produto  $\mathbf{WC}$ , do problema de meio finito à eq. (3.12) e pós-multiplicando pela base  $\mathbf{V}$  também do problema de meio finito, obtém-se:

$$(\mathbf{F} + \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{WC})\mathbf{V} = (\mathbf{U}^* + \mathbf{WC})\mathbf{V} . \quad (3.13)$$

Sabendo que  $\mathbf{FV} = \mathbf{0}$  e que  $(\mathbf{U}^* + \mathbf{WC})\mathbf{V} = \mathbf{0}$ , conclui-se que a determinação da diagonal principal da matriz  $\bar{\mathbf{F}}$  pode ser feita a partir da condição de ortogonalidade

$$(\bar{\mathbf{F}} + \mathbf{WC})\mathbf{V} = \mathbf{0} . \quad (3.14)$$

A partir das eqs. (3.6), (3.10) e (3.14) o sistema (3.3) pode ser reescrito, considerando o contorno  $\bar{\Gamma}$ , para solução de um problema de cavidade em meio infinito, na forma:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{p}^* = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{p}^* = \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^b \end{cases} , \quad (3.15)$$

onde  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}$  e  $\bar{\mathbf{H}}^T$  são matrizes não-singulares.

Este sistema de equações pode ser resolvido da seguinte forma

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^b = \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \mathbf{p}^* = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \end{cases} , \quad (3.16)$$

onde

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{H}} \quad (3.17)$$

é uma matriz de rigidez simétrica, que transforma deslocamentos  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  do sistema externo de coordenadas em forças nodais equivalentes  $(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^b)$ .

Diferentemente do que ocorre em problemas de meio finito, pode-se aplicar forças desequilibradas em uma cavidade e obter uma descrição completa do campo de tensões, com deslocamentos determinados com exceção de movimentos

de corpo rígidos. Em termos de trabalho virtuais, isto significa que

$$\mathbf{W}^T(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^b) \neq \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

Estas considerações implicam no fato de que a matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{K}}$ , que relaciona as forças e deslocamentos do sistema externo, não é singular, e por conseqüência não é ortogonal ao espaço nulo formado pela base do espaço de deslocamentos de corpo rígido do problema complementar de meio finito, ou seja,

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{W} \neq \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

### 3.3.

#### Solução no Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno

Como já visto no item 2.5, o campo de deslocamentos no domínio finito de um corpo elástico pode ser expresso, considerando deslocamentos de corpo rígido, como

$$u_i = u_{im}^* p_m^* + u_i^p + u_{is}^r \tilde{r}_s \text{ em } \Omega. \quad (3.20)$$

Entretanto, diferentemente do que ocorre em problemas de meio finito, pode-se aplicar forças desequilibradas em uma cavidade e obter uma descrição completa do campo de tensões, com deslocamentos determinados com exceção de movimentos de corpo rígidos. Por outro lado, tentar aplicar deslocamentos de corpo rígidos a uma cavidade é fisicamente sem sentido. Em conseqüência, desconsidera-se o parâmetro de corpo rígido  $\tilde{r}_s$  na eq. (3.20), que é reescrita na forma:

$$u_i = u_{im}^* p_m^* + u_i^p \text{ em } \Omega. \quad (3.21)$$

Avaliando a eq. (3.21) nos pontos nodais ao longo do contorno  $\Gamma$ , obtém-se a equação matricial

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^b. \quad (3.22)$$

Nota-se, entretanto, que a matriz de deslocamentos da solução fundamental  $\mathbf{U}^*$  nesta equação é a mesma definida no item 2.5, inclusive a forma de determinar os elementos de sua diagonal principal. Isto significa que a eq. (2.143) ainda é válida, e que se faz necessário determinar a base ortonormal de forças desequilibradas do sistema interno  $\mathbf{V} \equiv V_{ms}$  e a matriz de constantes  $\mathbf{C} \equiv C_{sm}$  ambas do problema complementar de domínio finito.

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais a um problema de cavidade em meio infinito, seguindo o mesmo procedimento do item 2.6, considerando agora o contorno  $\bar{\Gamma}$ , cuja normal  $\bar{\eta}$  aponta para dentro, ou seja, que as integrais de contorno devem ser avaliadas no sentido inverso, chega-se à seguinte equação matricial:

$$\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{p}^* = \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^b, \quad (3.23)$$

em que, por construção,

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{I} - \mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{p} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{p}}^b = -\mathbf{p}^b. \quad (3.24)$$

Então, para uma completa descrição e solução de problemas de cavidade com condições de contorno mistas, usam-se as equações (3.22) e (3.23) juntas:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{p}^* = \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^b \end{cases} \quad (3.25)$$

Eliminado  $\mathbf{p}^*$  do sistema de equações (3.25) chega-se à expressão

$$\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}^b = \bar{\mathbf{H}}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b), \quad (3.26)$$

onde

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{H}}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} \quad (3.27)$$

é a matriz de rigidez do problema. Nota-se ainda que ambas as matrizes  $\bar{\mathbf{H}}^T$  e  $\mathbf{U}^*$  são não-singulares, e que se verificam as propriedades dadas pelas eqs. (3.18) e (3.19).

### 3.4.

#### Aplicação do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno a problemas em domínios multiplamente conexos

Seja o corpo elástico mostrado na Figura 3.2, onde há um contorno externo  $\Gamma_e$  e uma cavidade  $\Gamma_i$  (contorno interno). Pretende-se, com base no que já foi estabelecido sobre as soluções da formulação simplificada do método híbrido dos elementos de contorno para problemas de meio finito e infinito, encontrar uma solução coerente para o campo de tensões e deslocamentos deste problema.

Propõe-se uma solução para este problema considerando inicialmente um problema geral de meio finito. De fato o problema proposto na Figura 3.2 é um corpo elástico de dimensões finitas. Para este problema é válido o sistema de

equações do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno aplicado a domínio finito simplesmente conexo, como segue:

$$\begin{cases} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)\mathbf{U}^*\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \mathbf{H}^T\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{cases}, \quad (3.28)$$

onde são válidas as condições de ortogonalidade:

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{H}^T\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{p}^* = \mathbf{0}, \quad (3.32)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)\mathbf{U}^*\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (3.33)$$

$$(\mathbf{U}^* + \mathbf{W}\mathbf{C})\mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

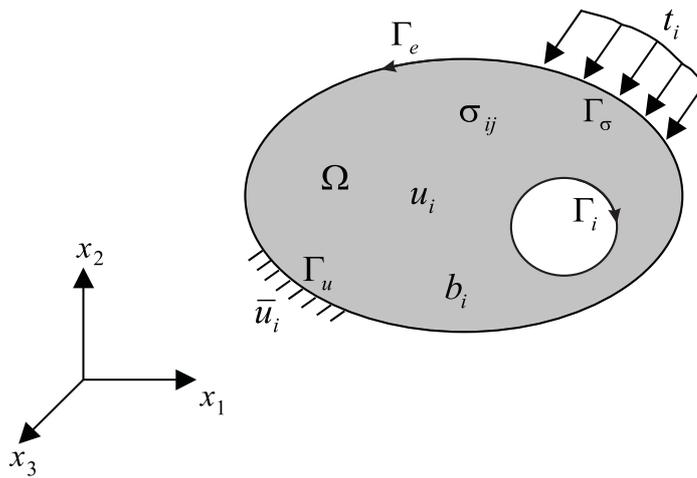


Figura 3.2 - Corpo elástico com domínio multiplamente conexo

No caso de um domínio multiplamente conexo, o sistema (3.28) e a eq. (3.34) não podem ser diretamente aplicados, pois inevitavelmente um mau condicionamento relacionado à determinação da base  $\mathbf{V}$ , a partir de  $\mathbf{H}^T$  e  $\mathbf{W}$ , acontece para os pontos nodais ao longo do contorno interno  $\Gamma_i$ . Este mau condicionamento da eq. (2.68) é fisicamente explicável como uma falta de correspondência topológica entre as bases  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{V}$ . Entretanto, com exceção dos elementos sobre a diagonal principal de  $\mathbf{U}^*$ , a determinação das matrizes e vetores que compõem o sistema de equações (3.28) é feita de forma idêntica ao proposto anteriormente.

A solução encontrada para determinar os elementos sobre a diagonal

principal de  $\mathbf{U}^*$  consiste em fazer uma superposição de efeitos entre dois problemas existentes: um problema de meio finito, considerando o contorno externo  $\Gamma_e$ , e outro problema de cavidade (meio infinito) considerando o contorno interno  $\Gamma_i$ . Para tanto deve-se primeiramente considerar a determinação da base ortonormal  $\mathbf{V}$  de forças desequilibradas avaliada no espaço de  $\mathbf{p}^*$ .

Considera-se, então, a matriz de transformação cinemática  $\mathbf{H}$ , mostrada no sistema de equações (3.28), escrita na forma

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ee} & \mathbf{H}_{ei} \\ \mathbf{H}_{ie} & \mathbf{H}_{ii} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

onde  $\mathbf{H}_{ee}$  é a matriz de transformação cinemática  $\mathbf{H}$  para o problema isolado de meio finito com contorno  $\Gamma_e$ , e  $\mathbf{H}_{ii}$  é a matriz de transformação cinemática  $\bar{\mathbf{H}}$  para o problema isolado de cavidade em meio infinito com contorno  $\Gamma_i$ .

Pode-se então obter a base ortonormal  $\mathbf{V}_e$ , do problema de meio finito, a partir da base  $\tilde{\mathbf{V}}_e$  determinada através da solução do sistema de equações lineares:

$$(\mathbf{H}_{ee}^T + \mathbf{W}_e \mathbf{W}_e^T) \tilde{\mathbf{V}}_e = \mathbf{W}_e. \quad (3.36)$$

De modo semelhante, de acordo com a eq. (3.8), pode-se determinar a base ortonormal  $\mathbf{V}_i$ , do problema complementar ao problema de meio infinito, a partir da base  $\tilde{\mathbf{V}}_i$  determinada através da solução do sistema de equações

$$[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{ii})^T + \mathbf{W}_i \mathbf{W}_i^T] \tilde{\mathbf{V}}_i = \mathbf{W}_i. \quad (3.37)$$

Considera-se, agora, a matriz de soluções fundamentais em deslocamentos avaliadas nos pontos nodais  $\mathbf{U}^*$  do sistema de equações (3.28), escrita na forma

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{ee}^* & \mathbf{U}_{ei}^* \\ \mathbf{U}_{ie}^* & \mathbf{U}_{ii}^* \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

onde os termos de  $\mathbf{U}_{ee}^*$  e  $\mathbf{U}_{ii}^*$  são obtidos avaliando a solução fundamental em termos de deslocamentos nos pontos nodais dos contornos  $\Gamma_e$  e  $\Gamma_i$ , caracterizando, respectivamente, o problema isolado de meio finito e o problema de cavidade em meio infinito.

De acordo com a eq. (3.34), pode-se finalmente determinar os termos sobre a diagonal principal de  $\mathbf{U}^*$ , através das bases ortonormais  $\mathbf{V}_e$  e  $\mathbf{V}_i$ , pelas

expressões abaixo:

$$(\mathbf{U}_{ee}^* + \mathbf{W}_e \mathbf{C}_e) \mathbf{V}_e = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (3.39)$$

$$(\mathbf{U}_{ii}^* + \mathbf{W}_i \mathbf{C}_i) \mathbf{V}_i = \mathbf{0}. \quad (3.40)$$

Nas eqs. (3.36) e (3.39),  $\mathbf{W}_e$  é a base ortonormal de deslocamentos de corpo rígido e  $\mathbf{C}_e$  é a matriz de constantes do problema de meio finito com contorno  $\Gamma_e$ . Nas eqs. (3.37) e (3.40),  $\mathbf{W}_i$  é a base ortonormal de deslocamentos de corpo rígido e  $\mathbf{C}_i$  é a matriz de constantes do problema complementar ao de cavidade em meio finito com contorno  $\Gamma_e$ .

É importante observar que as bases  $\mathbf{W}_e$ ,  $\mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{V}_e$  e  $\mathbf{V}_i$  devem ser obtidas apenas para a determinação da diagonal principal da matriz  $\mathbf{U}^*$ . Para a determinação da matriz de rigidez global da estrutura é necessário obter as bases  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{V}$  do problema global, que satisfazem as propriedades dadas pelas eqs. (3.29) a (3.32). Todavia, a propriedade de ortogonalidade da eq. (3.33) não é satisfeita.

A matriz de rigidez é então obtida determinando-se o valor do vetor das forças singulares  $\mathbf{p}^*$  através da primeira equação do sistema (3.28), de acordo com a teoria das matrizes inversas generalizadas (Ben-Israel e Greville [13]), como

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) [(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (3.41)$$

onde a expressão  $(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) [(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1}$  é a inversa de Bott-Duffin da matriz  $(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^*$ .

Substituindo-se a expressão de  $\mathbf{p}^*$  da eq. (3.41) na segunda equação do sistema (3.28), e considerando a condição de ortogonalidade da eq. (3.31), chega-se a uma equação de rigidez, dada por

$$\mathbf{H}^T [(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (3.42)$$

em que

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T [(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \quad (3.43)$$

é uma matriz de rigidez que, por construção, satisfaz as propriedades de ortogonalidade

$$\mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}^T \mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

### 3.5. Exemplos

#### 3.5.1. Cavidade em meio elástico infinito

Neste “patch test”, uma força singular, de valor  $P = 10000 \text{ KN}$ , é aplicada na direção  $x$  no ponto indicado na Figura 3.3 de coordenadas globais (15, 20), gerando um campo de deslocamentos  $u_i$  dado por:

$$u_x = \frac{10000}{8\pi(1-\nu)G} \left[ \frac{(x-15)^2}{r^2} - (3-4\nu)\ln(r) \right] \text{ e} \quad (3.45)$$

$$u_y = \frac{10000}{8\pi(1-\nu)G} \frac{(x-15)(y-20)}{r^2}, \quad (3.46)$$

onde  $r = \sqrt{(x-15)^2 + (y-20)^2}$ , para o coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  e o módulo de elasticidade transversal  $G = 9640 \text{ KN/cm}^2$ . Agora, recorta-se o contorno indicado e aplicam-se os efeitos do campo de deslocamentos  $u_i$ , considerando uma malha de discretização, iniciando na origem e seguindo no sentido horário, de modo a se ter de 2 a 6 elementos em cada lado do contorno irregular.

Neste exemplo foram impostas condições de contorno de Dirichlet, com os deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$  avaliados diretamente do campo de deslocamentos  $u_i$  aplicado, que permitem avaliar os parâmetros  $\mathbf{p}^*$ , de acordo com a primeira equação do sistema (3.25), e expressar diretamente os resultados em pontos do domínio, de acordo com as eqs. (3.21) e (2.15).

Para efeito de verificação da convergência dos resultados, os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  e as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , avaliados ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 3.3 são respectivamente mostrados nas Figura 3.4, Figura 3.5, Figura 3.6, Figura 3.7 e Figura 3.8, numa comparação com os valores analíticos.

Embora, neste exemplo, tenham sido consideradas apenas condições de contorno de Dirichlet, condições de contorno de Neumann e também condições de contorno mistas podem ser facilmente simuladas como um novo “patch test”, chegando a um padrão de convergência similar. Nota-se ainda que, apesar de que para condições de contorno de Dirichlet a segunda equação do sistema (3.25) não

é necessária, já que se está interessado apenas nos resultados em pontos do domínio, a avaliação da matriz  $\bar{\mathbf{H}}$  está implícita na eq. (3.22), visto que a base  $\mathbf{V}$  tem que ser obtida, de acordo com a eq. (2.68), de modo a ser possível determinar os termos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{U}^*$ .

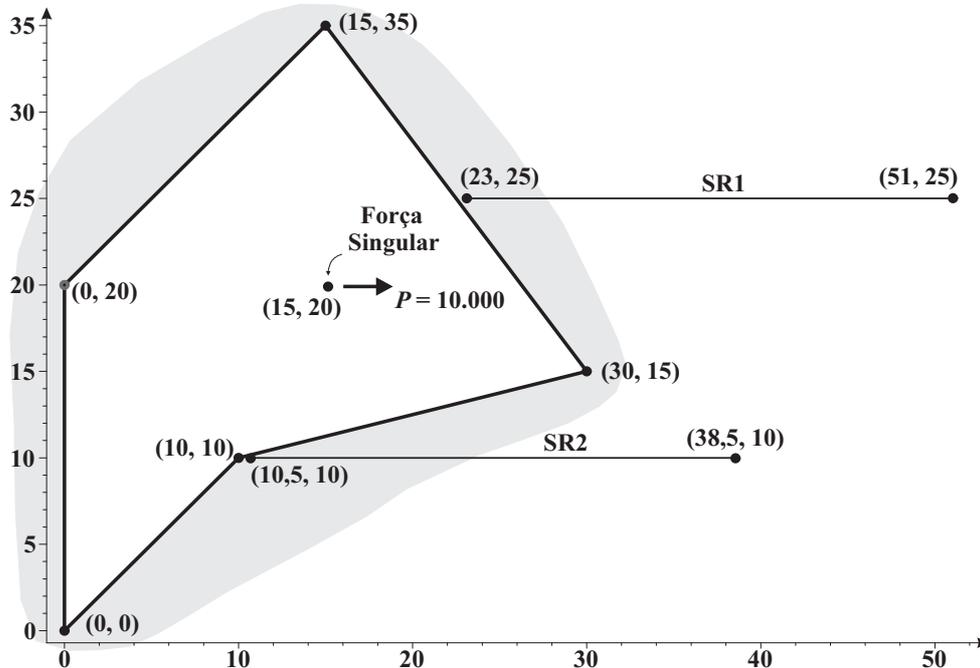


Figura 3.3 – Esquema da cavidade de contorno irregular com a força singular indicada

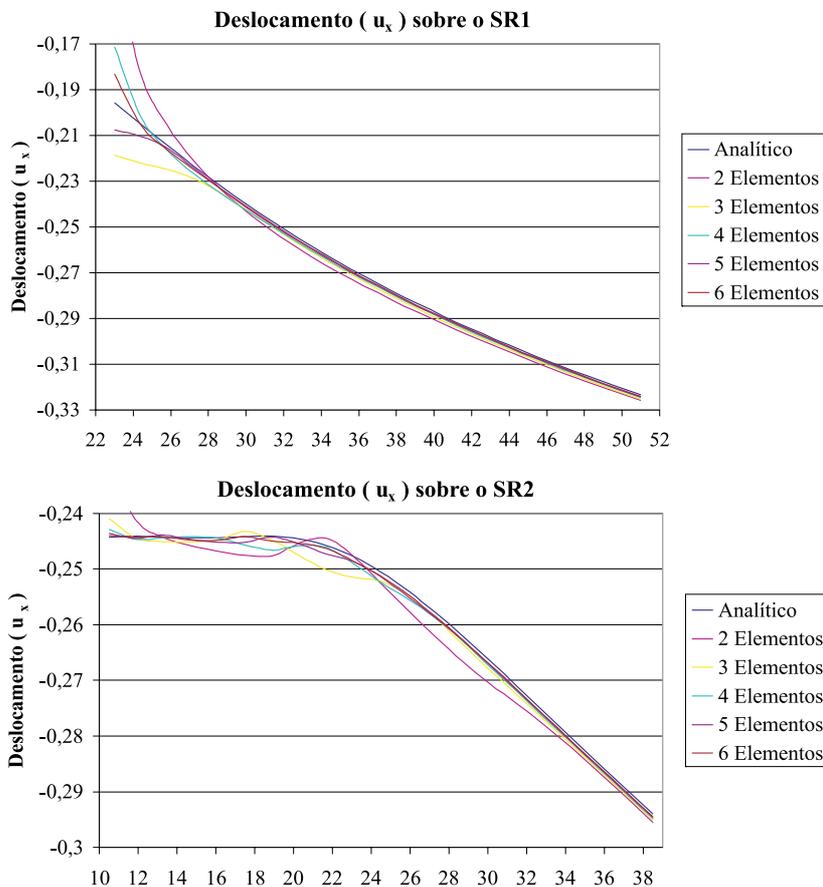


Figura 3.4 – Deslocamento na direção  $x$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3

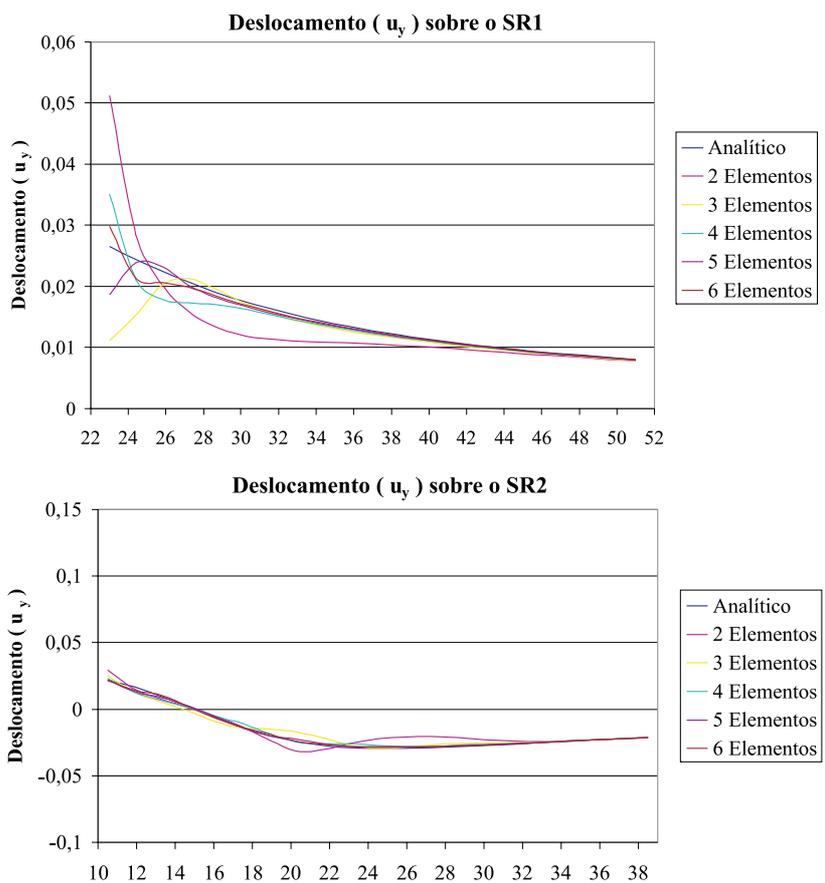


Figura 3.5 – Deslocamento na direção  $y$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3

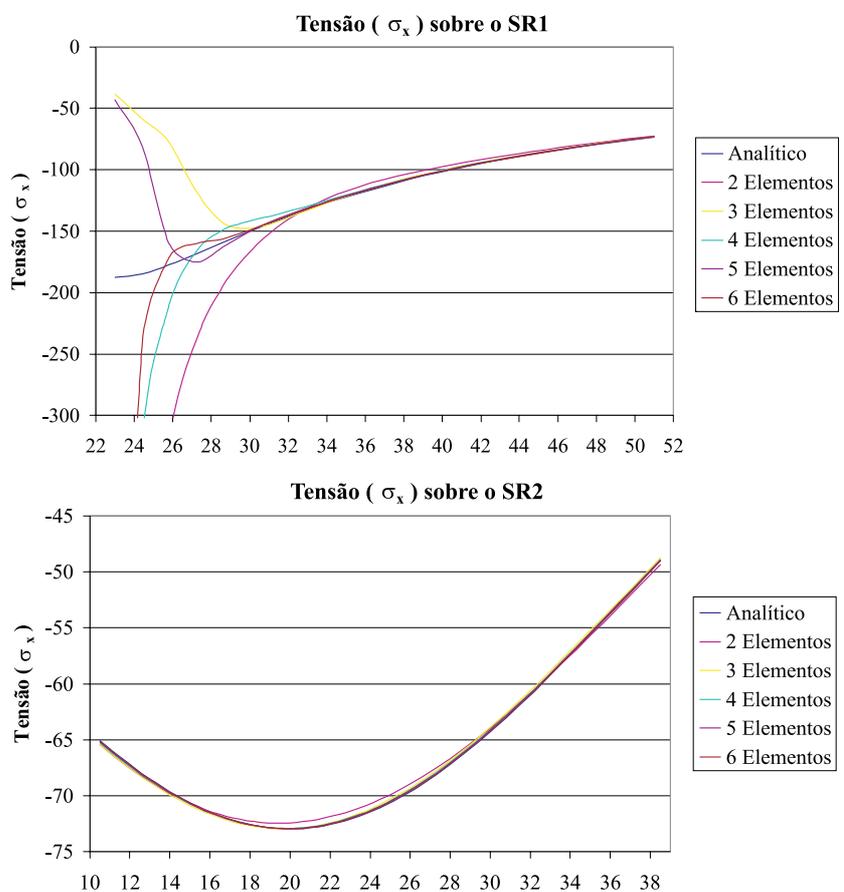


Figura 3.6 – Valores da tensão  $\sigma_x$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3

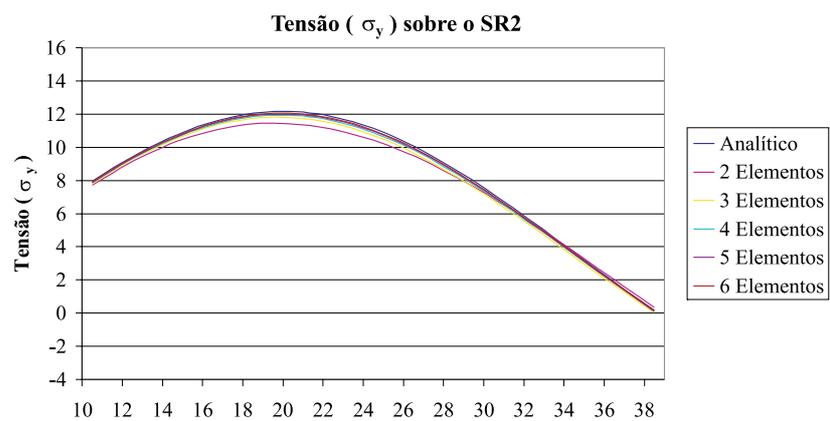
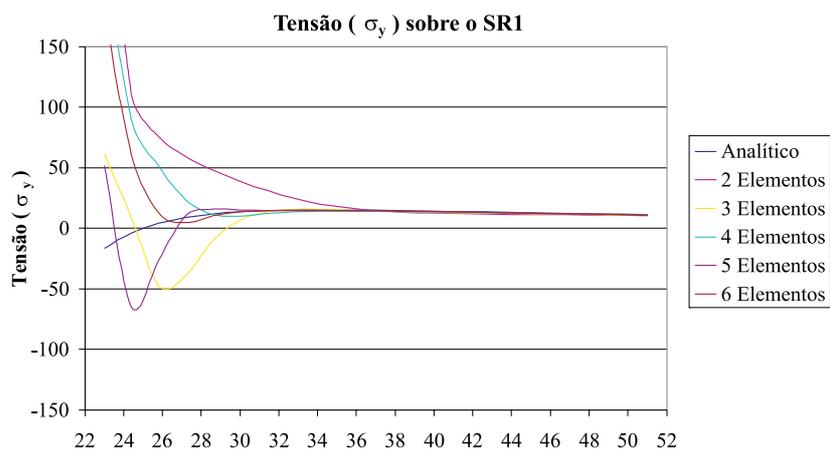


Figura 3.7 – Valores da tensão  $\sigma_y$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3

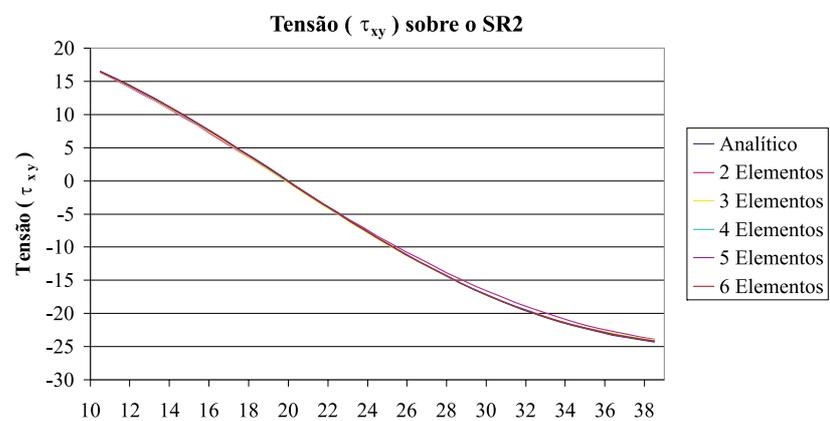
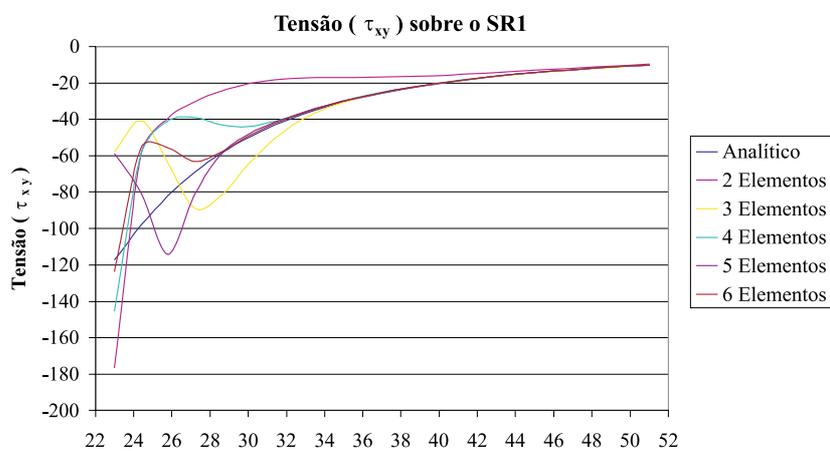


Figura 3.8 – Valores da tensão  $\tau_{xy}$  ao longo dos segmentos de reta Figura 3.3

### 3.5.2. Cavidade irregular em meio infinito submetida a um campo potencial

Neste segundo exemplo acadêmico, a Figura 3.9 apresenta um domínio simplesmente conexo irregular, submetido a um campo potencial

$$\phi = -\frac{1}{4\pi k} \ln[(x-20)^2 + (y-25)^2] \quad (3.47)$$

originado por uma fonte aplicada no ponto indicado de coordenadas (20, 15), com constante  $k = 1$ .

Novamente, neste exemplo foram impostas condições de contorno de Dirichlet, com o potencial nodal  $\mathbf{d}$  avaliado diretamente do campo potencial  $\phi$  aplicado, que permite avaliar os parâmetros  $\mathbf{p}^*$  e expressar diretamente os resultados do potencial e dos gradientes nas direções  $x$  e  $y$  em pontos do domínio respectivamente. Estes resultados estão mostrados nas Figura 3.10, Figura 3.11 e Figura 3.12, respectivamente.

A discretização do contorno foi feita de modo a se ter de 2 a 6 elementos em cada lado do contorno irregular (iniciando na origem e seguindo no sentido horário), para teste da convergência.

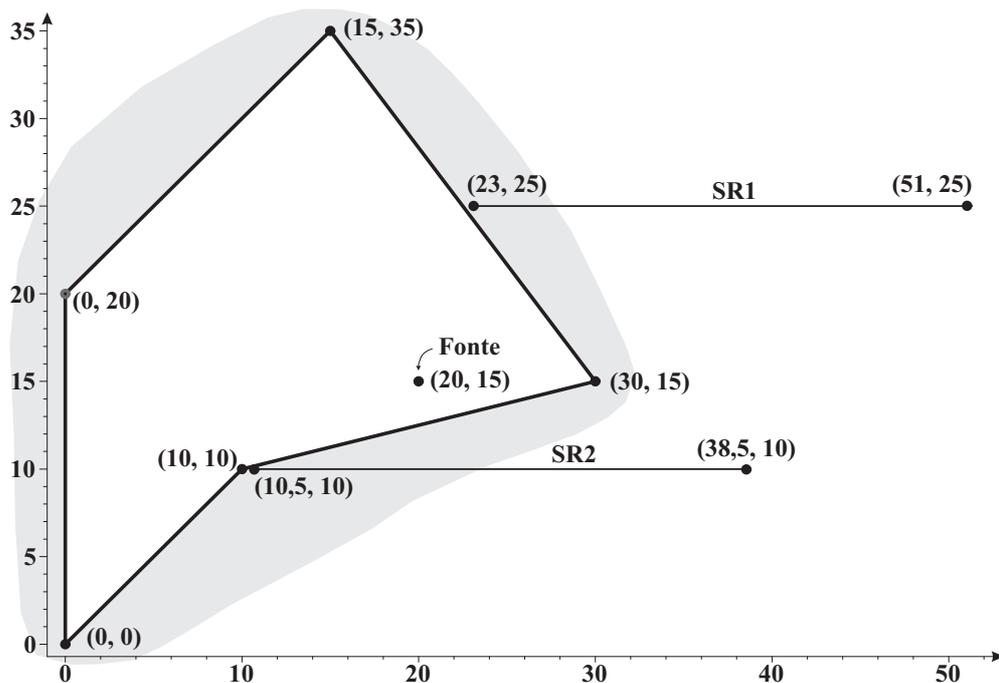


Figura 3.9 – Esquema da cavidade de contorno irregular com a fonte singular indicada

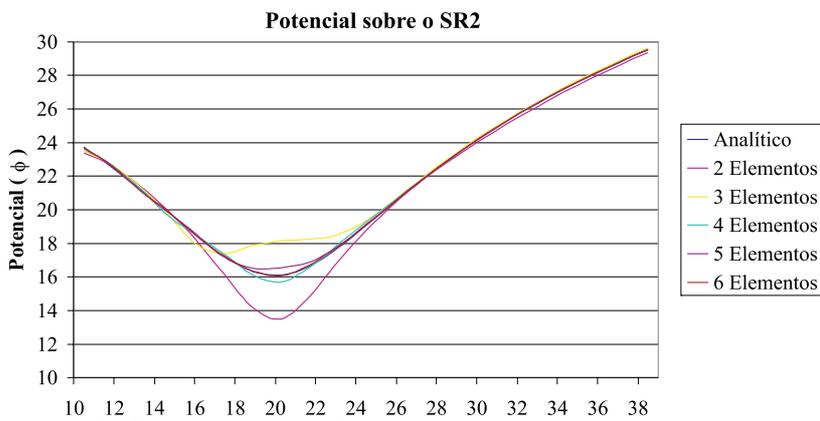
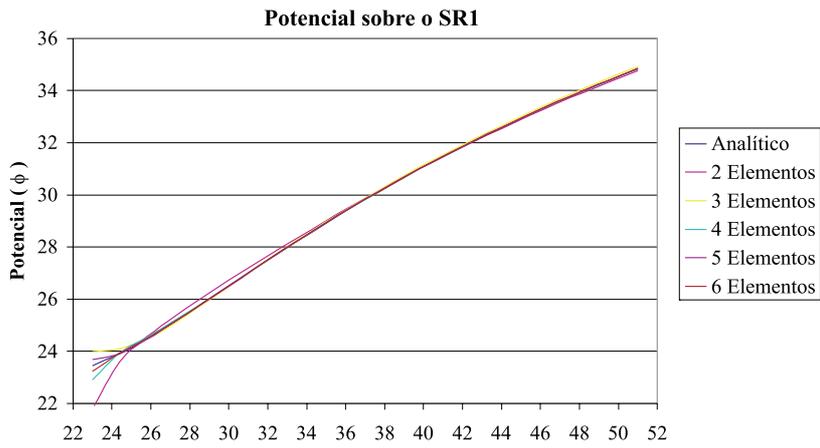


Figura 3.10 – Valores do potencial ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.9

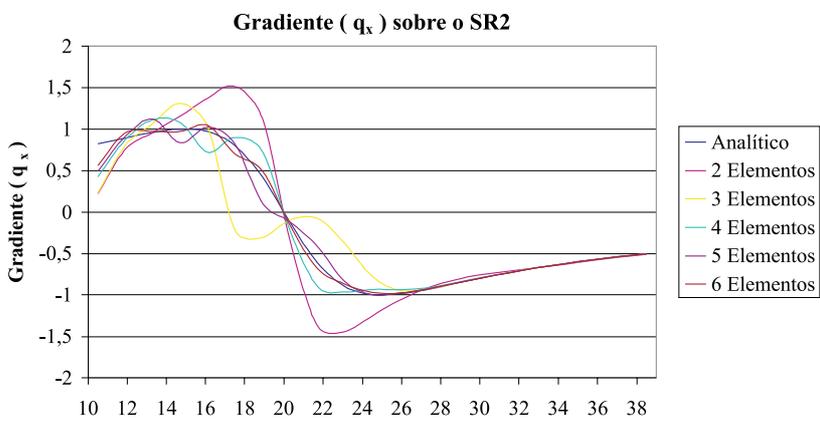
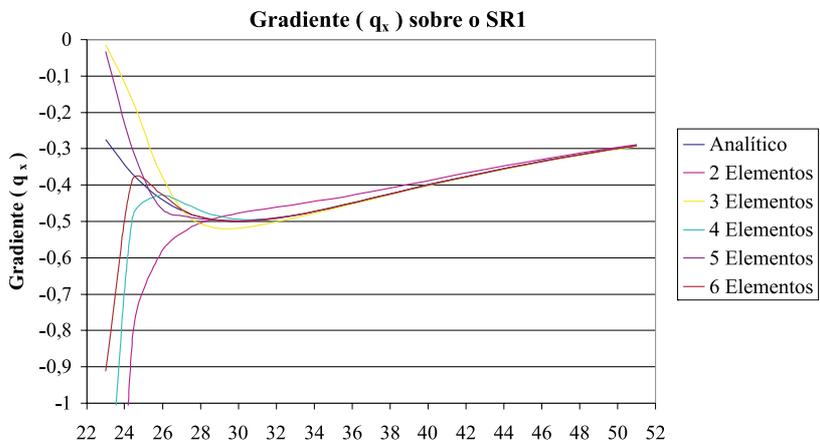


Figura 3.11 – Gradiente na direção  $x$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.9

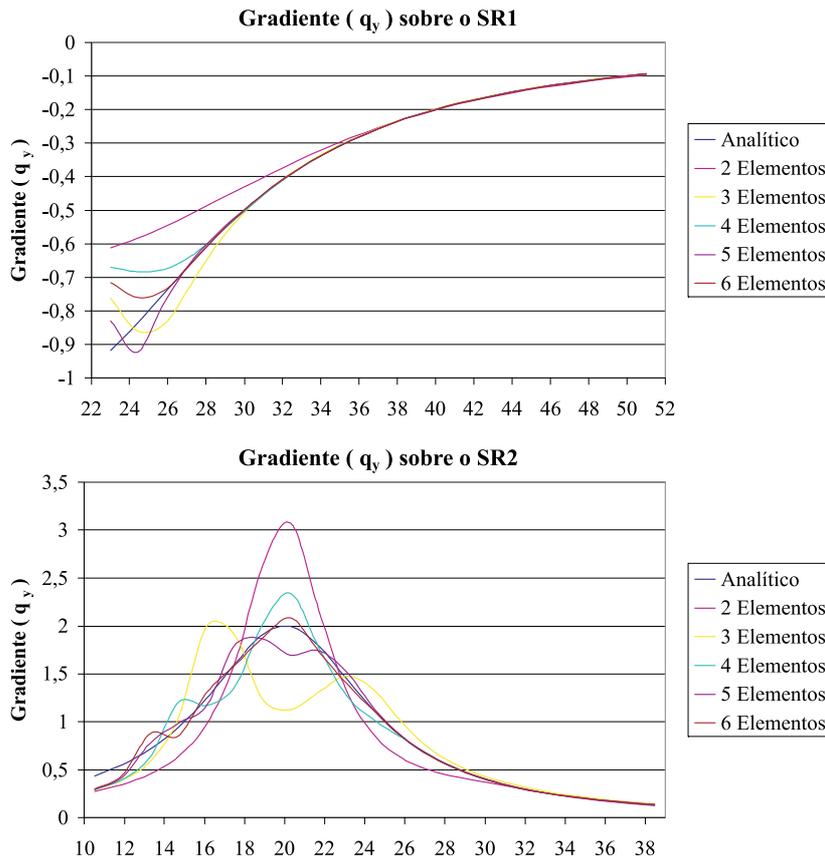


Figura 3.12 – Gradiente na direção  $y$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.9

### 3.5.3.

#### Meio multiplamente conexo irregular (problema de elasticidade)

Neste exemplo, um recorte multiplamente conexo é considerado, como ilustrado na Figura 3.13, para uma força singular unitária aplicada no ponto indicado de coordenadas globais (15, 20), dentro da cavidade retangular (fora do domínio), gerando um campo de deslocamentos  $u_i$  dado por:

$$u_x = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[ \frac{(x-15)^2}{r^2} - (3-4\nu)\ln(r) \right] e \quad (3.48)$$

$$u_y = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \frac{(x-15)(y-20)}{r^2}, \quad (3.49)$$

onde  $r = \sqrt{(x-15)^2 + (y-20)^2}$ , para o coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  e o módulo de elasticidade transversal  $G = 9640$ . As malhas de discretização iniciam na origem e seguem no sentido anti-horário (o contorno interno é discretizado no sentido horário), com um total de 24, 48 ou 72 elementos lineares com quase o mesmo comprimento, nos quais 6, 12 ou 18 elementos, respectivamente, aproximam a cavidade retangular.

Os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  bem como as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , são avaliados ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 3.13 e mostrados nas Figura 3.14, Figura 3.15, Figura 3.16, Figura 3.17 e Figura 3.18, respectivamente, numa comparação com os valores analíticos. A superposição dos efeitos de um problema com domínio simplesmente conexo e de um problema de cavidade em domínio infinito é usada.

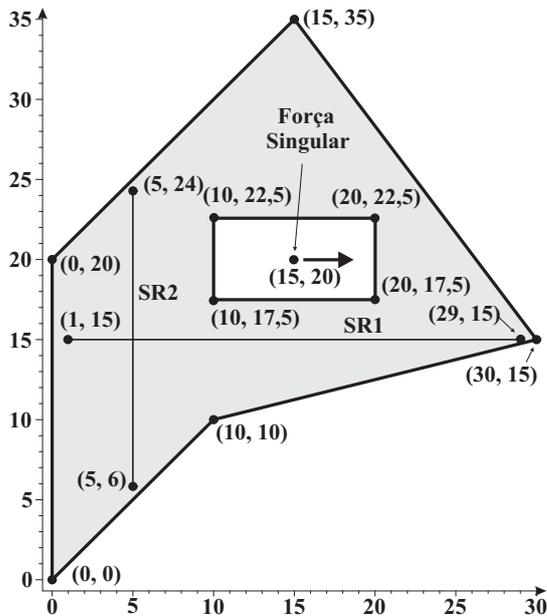


Figura 3.13 – Esquema da estrutura de contorno irregular com a força singular indicada

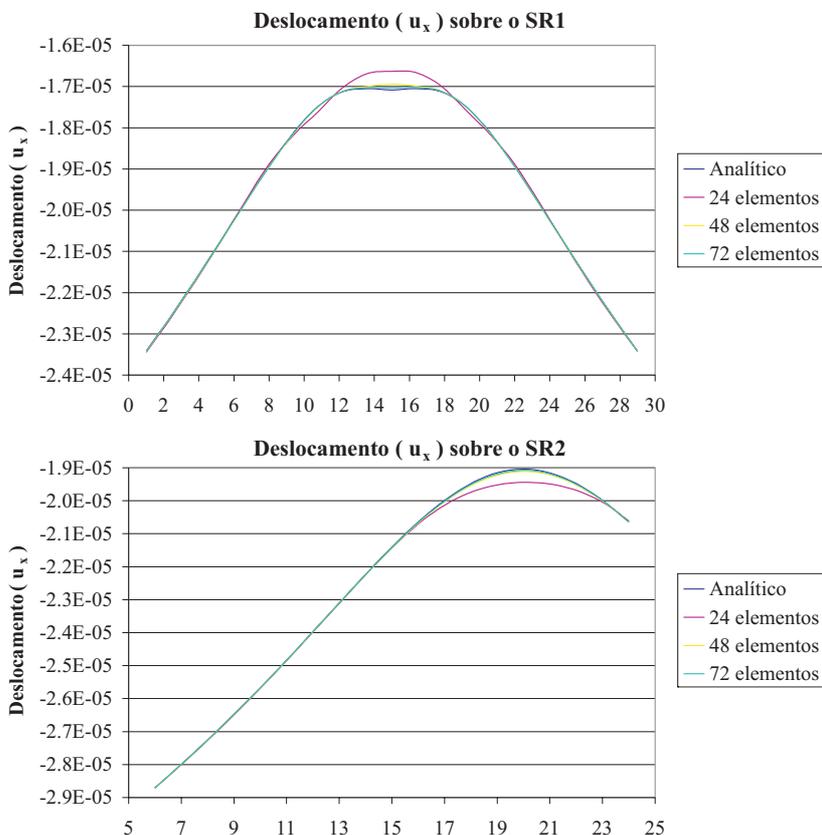


Figura 3.14 – Deslocamento na direção  $x$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13

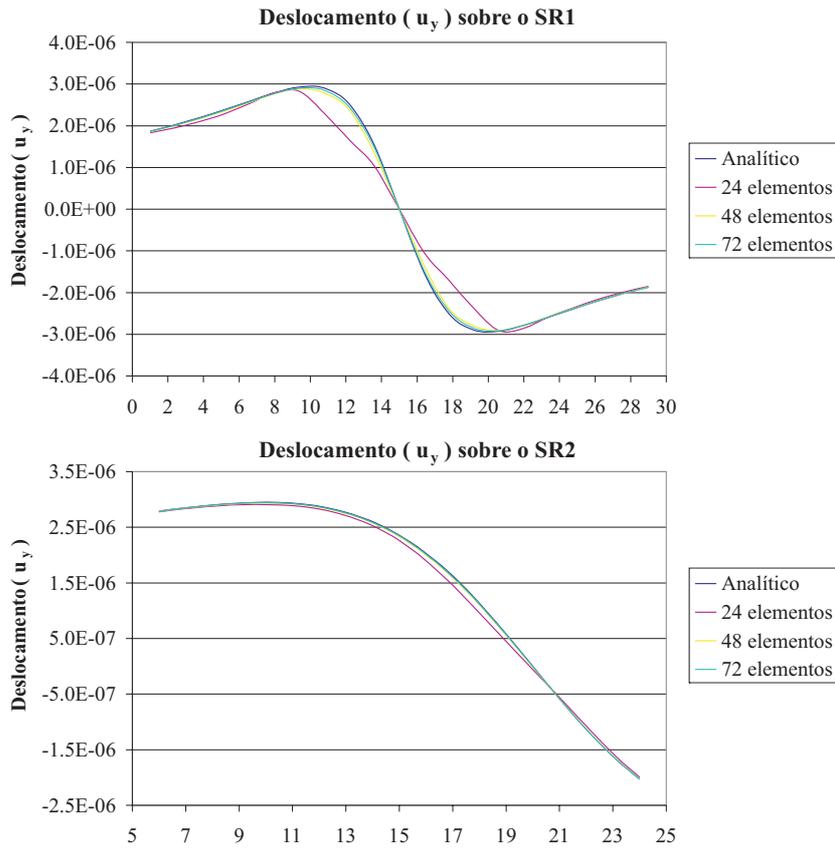


Figura 3.15 – Deslocamento na direção  $y$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13

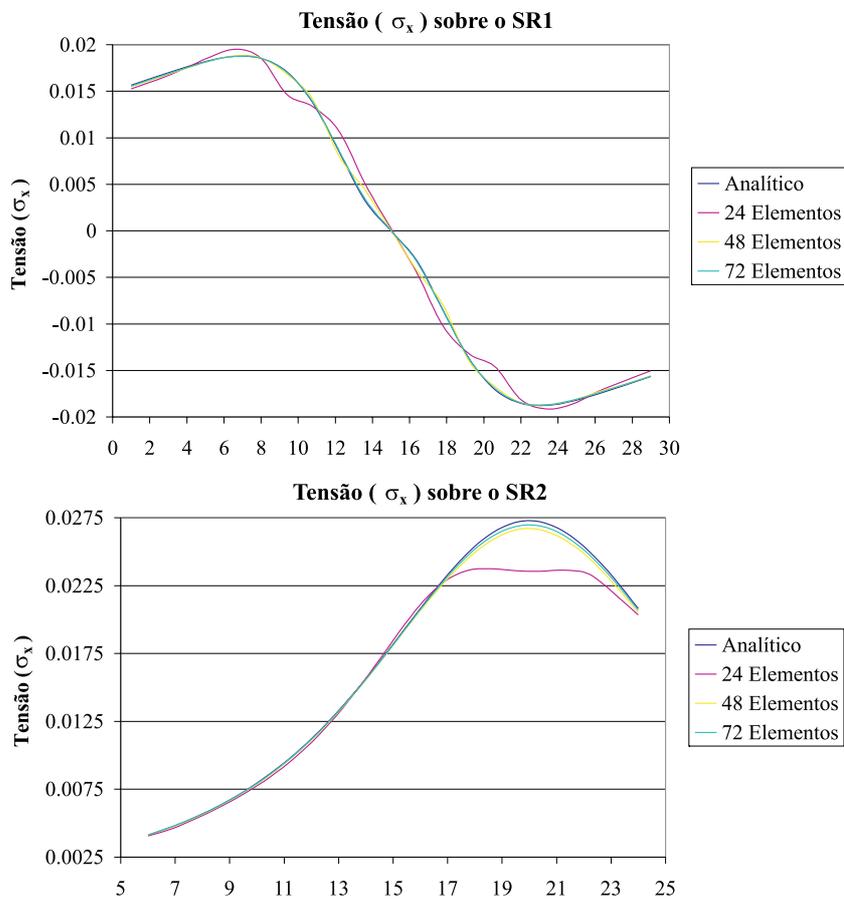


Figura 3.16 – Valores da tensão  $\sigma_x$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13

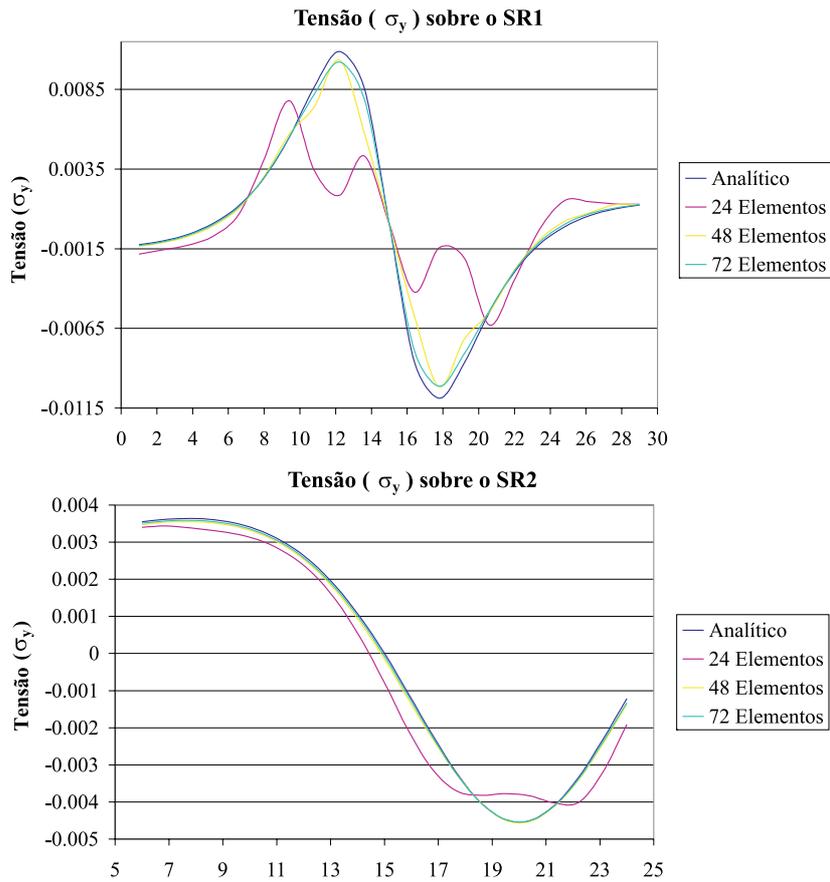


Figura 3.17 – Valores da tensão  $\sigma_y$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13

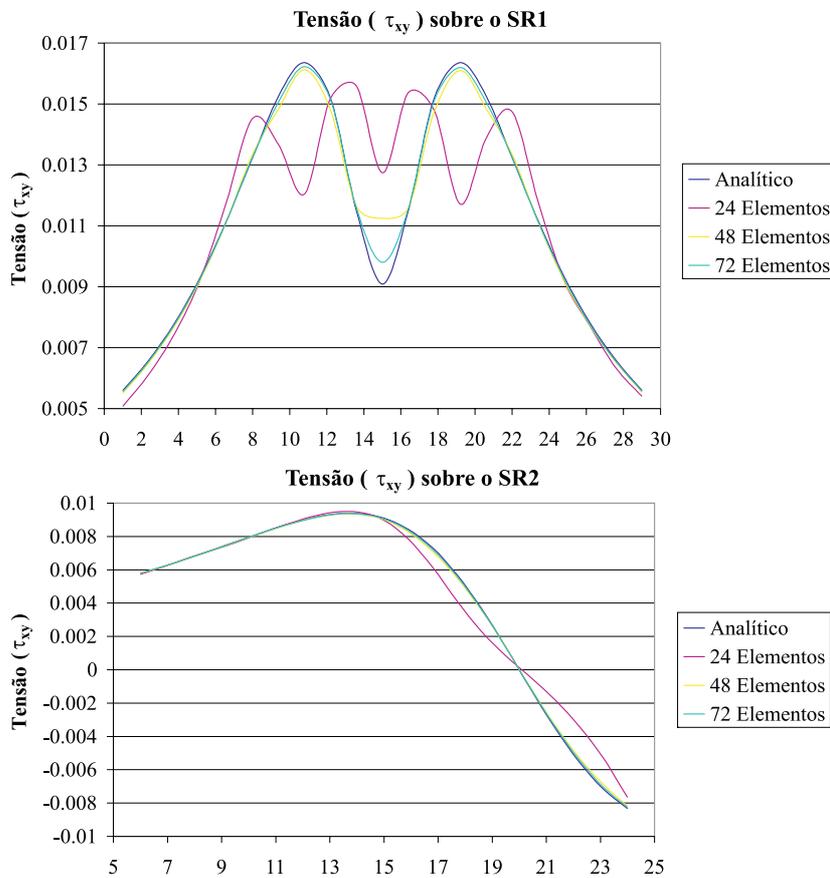


Figura 3.18 – Valores da tensão  $\tau_{xy}$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13

### 3.5.4. Domínio multiplamente conexo irregular submetido a um campo potencial

Neste exemplo, um domínio multiplamente conexo de constante  $k=1$  é considerado, como ilustrado na Figura 3.19, para uma fonte singular aplicada no ponto indicado de coordenadas globais  $(0, 30)$ , gerando um campo potencial  $\phi$  dado por:

$$\phi = 5 \ln[x^2 + (y-30)^2] \quad (3.50)$$

As malhas de discretização iniciam na origem e seguem no sentido anti-horário (o contorno interno é discretizado no sentido horário), com um total de 24, 48 ou 72 elementos lineares com aproximadamente o mesmo comprimento, nos quais 6, 12 ou 18 elementos, respectivamente, aproximam a cavidade retangular.

O potencial bem como os gradientes nas direções  $x$  e  $y$  são avaliados ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 3.19 e mostrados nas Figura 3.20, Figura 3.21 e Figura 3.22, respectivamente, numa comparação com os valores analíticos. A superposição dos efeitos de um problema com domínio simplesmente conexo e de um problema de cavidade em domínio infinito é usada.

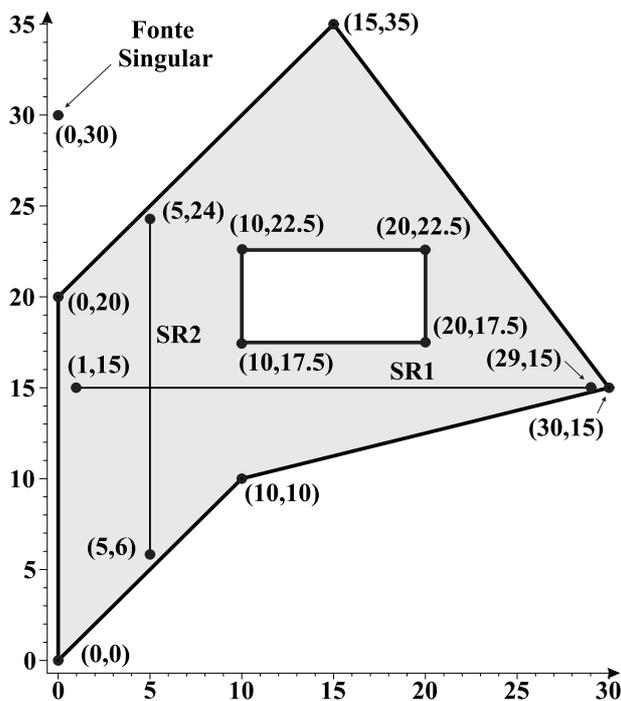


Figura 3.19 – Esquema do domínio multiplamente conexo de contorno irregular com a fonte singular indicada

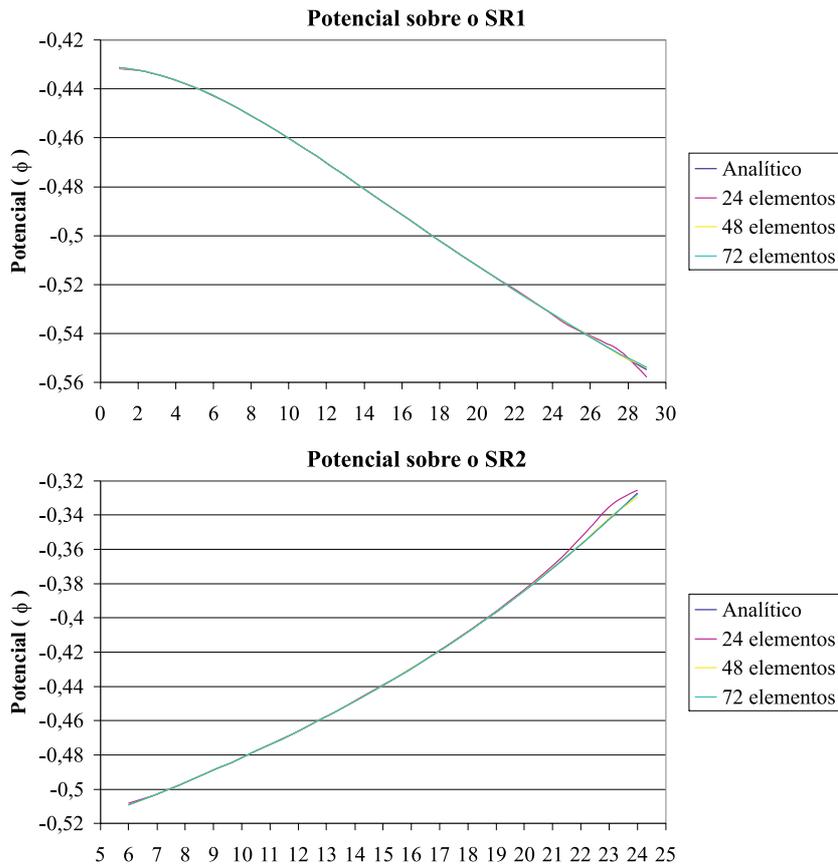


Figura 3.20 – Valores do potencial ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.19

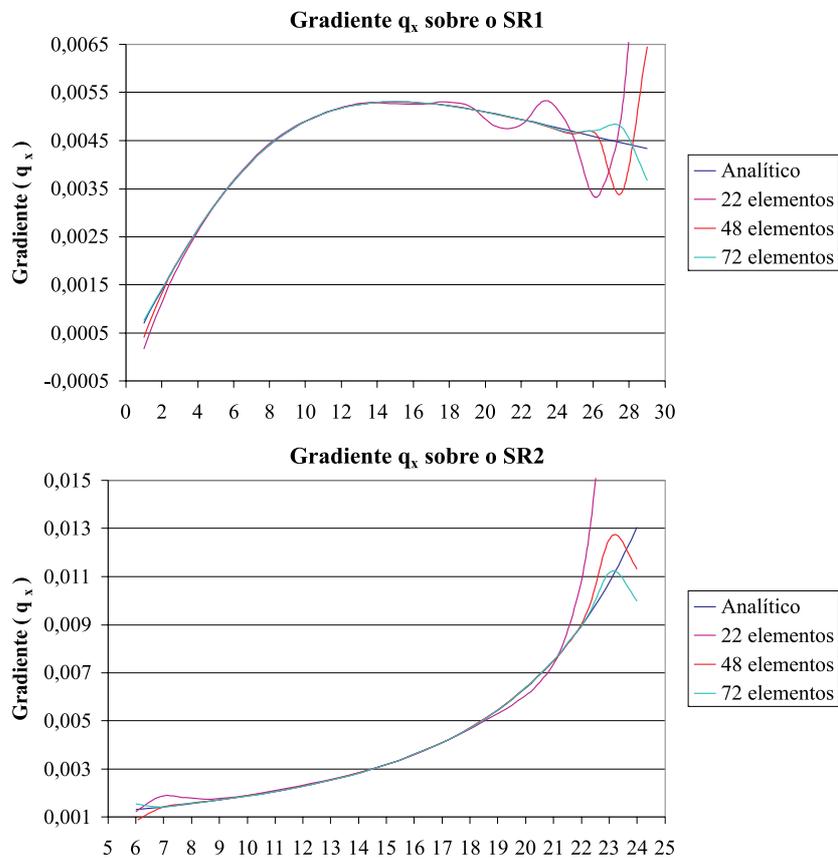


Figura 3.21 – Gradiente na direção  $x$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.19

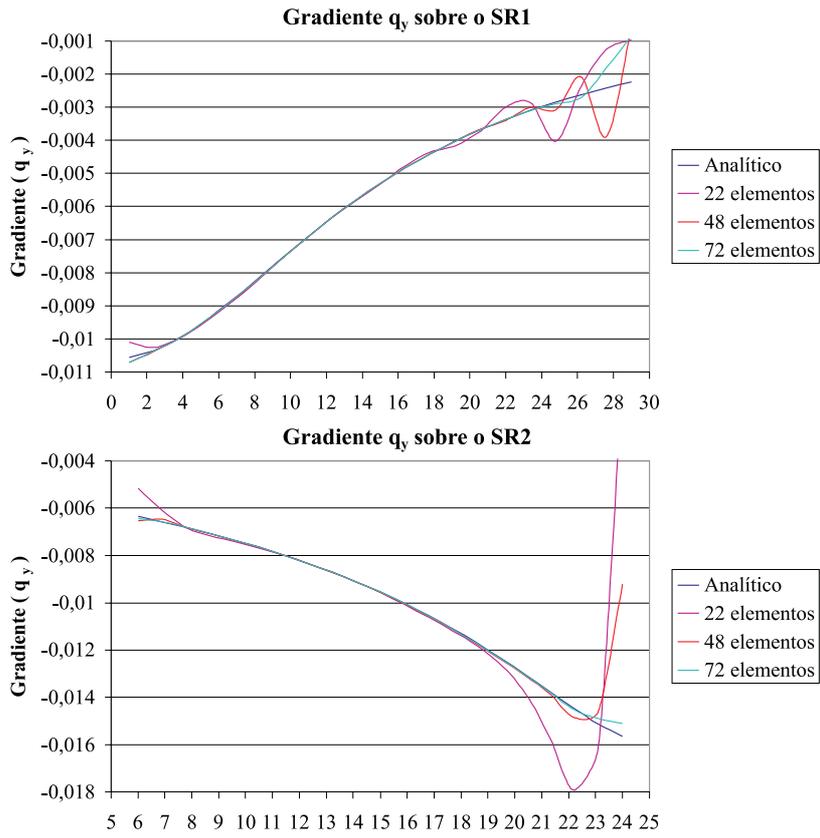


Figura 3.22 – Gradiente na direção  $y$  ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.19