

2

O Método Híbrido dos Elementos de Contorno e sua formulação simplificada aplicados a problemas estáticos

Desenvolve-se neste capítulo a formulação do método híbrido dos elementos de contorno e também de sua formulação simplificada, aplicados a problemas da elastostática em domínios simplesmente conexos, além de serem abordados os requisitos teóricos básicos necessários ao seu desenvolvimento.

Inicialmente define-se o potencial de Hellinger-Reissner [7] através da expressão generalizada da energia potencial total de um meio elástico. A partir do potencial de Hellinger-Reissner, faz-se o desenvolvimento do método híbrido dos elementos de contorno, inicialmente sem a consideração de forças de massa. A presente formulação também poderia ser deduzida a partir do princípio da energia potencial total estacionária (de Carvalho [10]) que, no entanto, por ser mais restritivo, forneceria as relações de uma maneira menos direta.

Posteriormente, são feitas considerações físicas sobre as relações obtidas. São discutidos aspectos relativos às transformações lineares entre os dois sistemas de coordenadas, necessários para o estabelecimento do método. Faz-se uma exposição também das características inerentes à matriz de flexibilidade.

Em seguida é apresentada a expressão para a obtenção dos valores dos deslocamentos no domínio através de considerações de deslocamentos de corpo rígido. Mostra-se ainda que a equação de equilíbrio nodal no contorno, decorrente do potencial de Hellinger-Reissner, pode ser obtida diretamente por meio do princípio dos trabalhos virtuais. Este procedimento dá origem ao Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno.

Finalmente é feita uma particularização do método para problemas de potencial.

2.1. Equações básicas da elasticidade linear

Seja um corpo elástico sujeito apenas a pequenos deslocamentos. Os

deslocamentos de um elemento infinitesimal deste corpo são descritos, na teoria da elasticidade, segundo dois sistemas de coordenadas:

- Um sistema global ou externo, onde se têm deslocamentos absolutos u_i . Sobre estes deslocamentos realizam trabalho forças externas que podem ser classificadas em dois tipos: forças de massa b_i , definidas por unidade de volume e que atuam no domínio Ω , ou seja, no interior do corpo; e forças de superfície t_i , definidas por unidade de área e que atuam no contorno Γ .
- Um sistema local ou interno, em que se têm deslocamentos relativos (deformações) ε_{ij} , referidos a um elemento infinitesimal $d\Omega$, sobre os quais realizam trabalho as forças de superfície (tensões) σ_{ij} .

O contorno do corpo é conceitualmente dividido em duas partes $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u$, onde se têm em Γ_σ forças prescritas e em Γ_u deslocamentos prescritos \bar{u}_i , conforme representado na Figura 2.1. Seja um conjunto de forças externas conhecidas, atuando sobre o corpo elástico, e que são descritas no sistema global por b_i , atuando em Ω e t_i atuando em Γ_σ . A análise deste corpo consiste na determinação dos deslocamentos u_i que ocorrem em Ω e em Γ_σ , das reações de apoio que surgem em Γ_u e das tensões σ_{ij} em Ω , causados pelas solicitações externas. É necessário, então, o estabelecimento de relações de transformação entre forças e deslocamentos entre os dois sistemas descritos.

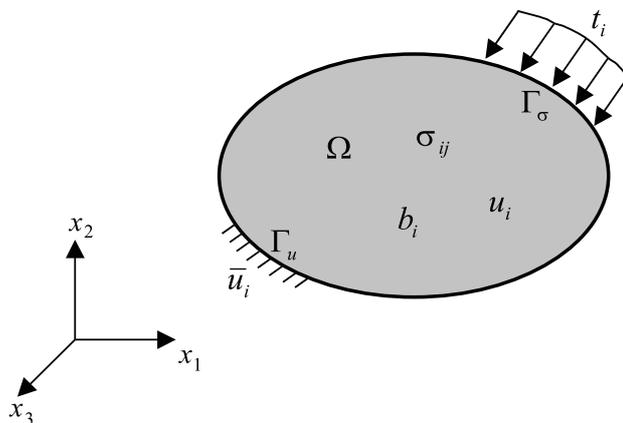


Figura 2.1 - Corpo elástico em equilíbrio

Entre as forças descritas no sistema global e as tensões do sistema local há as relações de transformação estática (equilíbrio), que são:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ em } \Omega \text{ e} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} \eta_j = t_i \text{ em } \Gamma_\sigma, \quad (2.3)$$

onde η_j são os cossenos diretores de um elemento de superfície $d\Gamma$.

Entre os deslocamentos descritos no sistema global e as deformações do sistema local existem as relações de transformação cinemática:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } \Omega \text{ e} \quad (2.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_u. \quad (2.5)$$

No sistema local existe também a relação entre tensões e deformações (relação constitutiva):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \text{ em } \Omega \quad (2.6)$$

onde C_{ijkl} , para um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, vale

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.7)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento e δ_{ij} é o delta Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (2.8)$$

A eq. (2.6) pode ser expressa, de acordo com a eq. (2.4), para este tipo de material, na forma

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

Utilizando-se desta relação, a eq. (2.1) também pode ser expressa em termos de deslocamentos, resultando na equação de Navier

$$G u_{i,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,ki} + b_i = 0. \quad (2.10)$$

2.2. Solução fundamental

O campo de tensões e de deslocamentos no domínio, este último a menos de uma constante, podem ser pensados como uma superposição de uma solução

particular arbitrária σ_{ij}^p e uma solução homogênea σ_{ij}^* da eq. (2.1) na forma

$$u_i = u_i^* + u_i^p \text{ e} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p \text{ em } \Omega, \quad (2.12)$$

em que

$$\sigma_{ij,j}^p + b_i = 0 \text{ e} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{ij,j}^* = 0 \text{ em } \Omega. \quad (2.14)$$

Supõe-se como uma aproximação para σ_{ij}^* a expressão em série em termos de parâmetros nodais de força p_m^* a se determinar, dada por

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^*, \quad (2.15)$$

na qual a função de interpolação das tensões σ_{ijm}^* é chamada de solução fundamental em termos de tensões. Como consequência, esta função de interpolação satisfaz a propriedade

$$\sigma_{ijm,j}^* = 0 \text{ em } \Omega. \quad (2.16)$$

Entretanto, para um domínio Ω_0 que abranja o ponto de aplicação de uma força concentrada p_m^* ,

$$\int_{\Omega_0} \sigma_{ijm,j}^* d\Omega = -\delta_{im}. \quad (2.17)$$

O campo dos deslocamentos correspondente ao campo de tensões σ_{ij}^* também é obtido, de forma aproximada e a menos de uma constante, a partir de uma expressão em série em termos de parâmetros nodais de força p_m^* , na forma

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* + u_{is}^r \tilde{r}_s \equiv (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) p_m^* + u_{is}^r r_s, \quad (2.18)$$

onde u_{im}^* é chamada solução fundamental em termos de deslocamentos.

Na eq. (2.18), u_{is}^r é um conjunto de funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido, que aparecem multiplicadas por parâmetros arbitrários \tilde{r}_s . No termo mais à direita da eq. (2.18), está apresentada uma forma alternativa de se expressar os deslocamentos u_i^* . Isto será melhor explicado no item 2.5.

Uma expressão para a solução fundamental em termos de deslocamentos pode ser obtida a partir da equação de Navier (eq. (2.10)). Essa expressão é amplamente conhecida da literatura e para problemas da elastostática em estado

plano de deformação vale

$$u_{im}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} [(3-4\nu)\ln(r)\delta_{im} - r_{,i}r_{,m}] + Const.\delta_{im} \quad (2.19)$$

onde r é a distância entre o ponto de aplicação da força p_m^* e o ponto onde se quer medir o valor da função. O termo $r_{,i}$ denota a derivada do raio na direção i . Essa função é também chamada de solução fundamental de Kelvin.

A expressão da solução fundamental em termos de tensões correspondente a função do campo de deslocamentos da eq. (2.19) é dada por

$$\sigma_{ijm}^* = \frac{-1}{4\pi r(1-\nu)} [(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{jm} + r_{,j}\delta_{im} - r_{,m}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,m}]. \quad (2.20)$$

A partir das tenções σ_{ij}^* da eq. (2.15) pode-se definir um campo de forças t_i^* no contorno, dado por

$$t_i^* = \sigma_{ij}^* \eta_j = p_{im}^* p_m^* \quad (2.21)$$

onde p_{im}^* é chamada solução fundamental em termos de forças. A expressão de p_{im}^* correspondente à função do campo de tensões da eq. (2.20) é

$$p_{im}^* = \frac{-1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{im} + r_{,i}r_{,m}] \frac{\partial r}{\partial \eta} - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_m - r_{,m}\eta_i) \right\}. \quad (2.22)$$

2.3. O Potencial de Hellinger-Reissner

A expressão da energia potencial total de um corpo elástico sujeito a pequenos deslocamentos é dada por

$$\Pi = \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} t_i u_i d\Gamma \quad (2.23)$$

a menos de uma constante. Neste funcional, o primeiro termo corresponde à energia total interna de deformação, onde

$$U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.24)$$

e os demais referem-se ao potencial das forças externas b_i e t_i que atuam no corpo. Este potencial foi estabelecido sob as condições restritivas de compatibilidade geométrica dadas pelas eqs. (2.4) e (2.5).

Pode-se, no entanto, formular um potencial de forma independente destas

restrições, de forma que estas não sejam atendidas previamente. Isto pode ser proporcionado através do acréscimo, no funcional, destas condições de restrição por intermédio de multiplicadores de Lagrange. O novo funcional resulta então em uma forma generalizada da energia potencial total:

$$\begin{aligned} \Pi_g = & \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right] \lambda_{ij} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_\sigma} t_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_i - u_i) \lambda_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde λ_{ij} e λ_i são os multiplicadores de Lagrange. Os novos termos que surgem nesta equação compensam a eliminação feita previamente das condições restritivas.

Este novo potencial é função das variáveis ε_{ij} , u_i , λ_{ij} e λ_i , completamente independentes entre si, a princípio, sem qualquer relação direta com as forças prescritas b_i e t_i e com os deslocamentos prescritos \bar{u}_i .

Pode-se reconhecer nos multiplicadores de Lagrange um sentido mecânico: a variável λ_{ij} corresponde às tensões no domínio, enquanto λ_i refere-se a forças no contorno. Além disso, observa-se que a imposição da estacionariedade do potencial de eq. (2.25) estabelece que as variáveis presentes devem ser relacionadas entre si através das eqs. (2.1) a (2.6).

A expressão de Π_g na eq. (2.25) é, para finalidades práticas, excessivamente geral. Pode-se supor que o tensor das tensões seja simétrico, como na eq. (2.2), que as condições de contorno em termos de deslocamentos estejam previamente satisfeitas, como na eq. (2.5), e que a densidade de energia interna seja expressa em termos de tensões, isto é, define-se

$$U_0^c(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U_0(\varepsilon_{ij}). \quad (2.26)$$

Para materiais linearmente elásticos, os valores dos termos $U_0^c(\sigma_{ij})$ e $U_0(\varepsilon_{ij})$ na verdade são iguais. A diferença existente consiste na forma como estas duas parcelas são descritas, conforme representado na Figura 2.2.

Além disso, a partir da consideração da simetria de σ_{ij} , pode-se escrever um dos integrandos da eq. (2.25) na forma

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega, \quad (2.27)$$

que, após a aplicação do teorema de Green e posterior integração por partes, pode ser reescrito como

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \sigma_{ij} \, d\Omega = \int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij} \eta_j \, d\Gamma - \int_{\Omega} u_i \sigma_{ij,j} \, d\Omega. \quad (2.28)$$

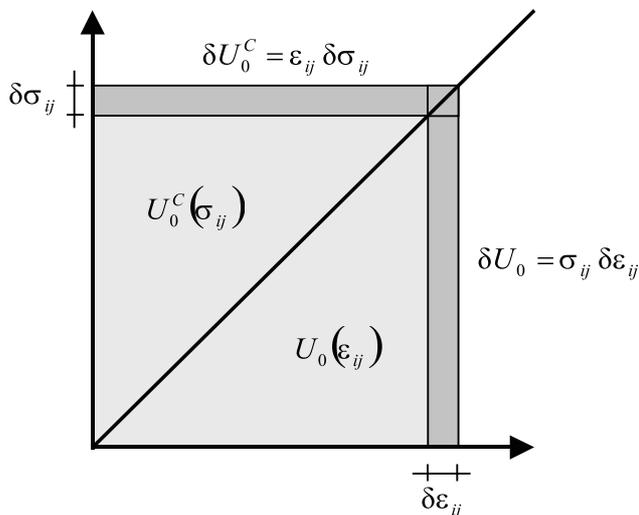


Figura 2.2 - Gráfico da energia interna de deformação

Com isto, recai-se, a partir da eq. (2.25), no potencial de Hellinger-Reissner [10]:

$$-\Pi_R = \int_{\Omega} [U_0^c(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i] \, d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \eta_j u_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} t_i u_i \, d\Gamma, \quad (2.29)$$

função unicamente dos deslocamentos u_i e das tensões σ_{ij} (independentes entre si).

Supondo-se também que as tensões estejam em equilíbrio com as forças de massa no domínio, como na eq. (2.1), chega-se à origem da formulação híbrida dos elementos finitos, desenvolvida por Pian [8], em que se tem um campo de tensões no domínio e um campo de deslocamentos no contorno. Esta mesma formulação foi estendida ao Método Híbrido dos Elementos de Contorno, conforme será apresentado a seguir.

2.4.

Formulação do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC)

Na formulação híbrida dos elementos de contorno, a descrição do comportamento da estrutura deve ser feita através do estabelecimento de dois sistemas de coordenadas.

Tem-se um sistema global ou externo, que descreve no contorno Γ um

campo de deslocamentos u_i aproximados da seguinte forma

$$u_i = u_{in} d_n \text{ em } \Gamma, \quad (2.30)$$

onde d_n são parâmetros nodais de deslocamentos de determinados pontos do contorno, a se determinar. Nesta equação, o subscrito n varia de 1 ao número de parâmetros de deslocamentos utilizados para discretizar o contorno, ou seja, o número de graus de liberdade.

Na eq. (2.30), u_{in} são funções de interpolação de deslocamentos, as mesmas geralmente usadas nos métodos de elementos de contorno, escolhidas de tal forma que coincidam identicamente com os deslocamentos prescritos \bar{u}_i em Γ_u , isto é,

$$\bar{u}_i = u_{in} \bar{d}_n \text{ ao longo de } \Gamma_u \quad (2.31)$$

para alguns parâmetros nodais de deslocamentos \bar{d}_n conhecidos.

Tem-se também um sistema local ou interno, que descreve no domínio Ω um campo de tensões σ_{ij} , em equilíbrio, como a superposição de uma solução particular arbitrária σ_{ij}^p , referente a forças de massa, e uma solução homogênea σ_{ij}^* . Este último campo de tensões é descrito por intermédio de parâmetros nodais p_m^* , correspondentes à solução fundamental, como visto na seção 2.2. No caso de uma solução fundamental singular, como adotado aqui, os parâmetros nodais p_m^* correspondem a forças concentradas aplicadas fora do domínio Ω , porém infinitamente próximas do contorno e coincidentes com os pontos de aplicação dos parâmetros nodais de deslocamentos d_n da eq.(2.30).

A utilização destes dois sistemas de coordenadas, para a descrição do comportamento da estrutura, tem como base a idéia de que o domínio Ω da estrutura está contido no domínio de dimensões infinitas Ω^* , onde a solução fundamental foi estabelecida, conforme está representado na Figura 2.3.

Estes dois sistemas de coordenadas, somados a parcela de forças de massa, podem ser relacionados através do potencial de Hellinger-Reissner

$$-\Pi_R = \int_{\Omega} [U_0^C(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) + \sigma_{ij}^*, j u_i] d\Omega - \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) n_j u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_o} t_i u_i d\Gamma, \quad (2.32)$$

onde

$$U_0^C(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p)(u_{i,j}^* + u_{i,j}^p) \quad (2.33)$$

é a densidade de energia complementar, ou seja, expressa em termos de tensões.

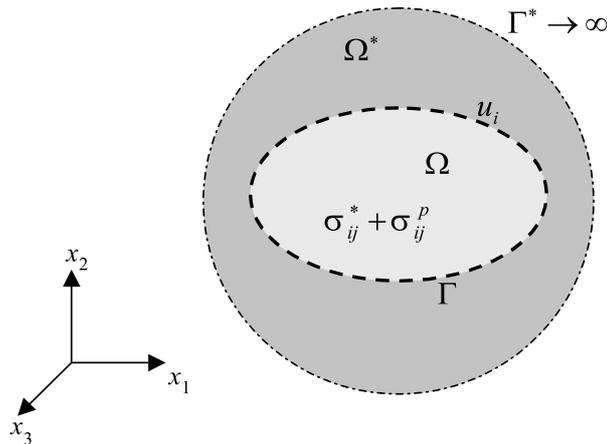


Figura 2.3 - Sistema de coordenadas (interno e externo), para descrição do comportamento da estrutura.

No desenvolvimento que se segue, considerar-se-á $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ já que se tem garantido a priori que os deslocamentos u_i satisfazem sempre a condição de compatibilidade no contorno da eq. (2.5).

A condição de estacionariedade do funcional Π_R , para as considerações feitas, resulta em

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = 0 &= \delta\int_{\Omega} [U_0^C(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) + \sigma_{ij}^*,{}_j u_i] d\Omega \\ &\quad - \delta\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \eta_j u_i d\Gamma + \delta\int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A variação do termo da energia interna é dada por

$$\delta\int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) d\Omega = \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij}^* u_i^*,{}_j d\Omega + \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij}^* u_i^p,{}_j d\Omega, \quad (2.35)$$

que, após integração por partes e aplicação do teorema de Green, recai em

$$\begin{aligned} \delta\int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) d\Omega &= \int_{\Gamma} \delta\sigma_{ij}^* \eta_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij}^*,{}_j u_i^* d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} \delta\sigma_{ij}^* \eta_j u_i^p d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\sigma_{ij}^p,{}_j u_i^p d\Omega. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A substituição de u_i^* , $\sigma_{ij}^*,{}_j$ e $\sigma_{ij}^* \eta_j$ das eqs. (2.18), (2.17) e (2.21), respectivamente, nesta equação, resulta finalmente em

$$\begin{aligned} \delta\int_{\Omega} U_0^{*C}(\sigma_{ij}^*) d\Omega &= \delta p_m^* \left[\left(\int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in}^* d\Gamma + \delta_{im} u_{in}^* \right) p_n^* + \int_{\Gamma} p_{im}^* u_i^p d\Gamma + \delta_{im} u_i^p \right] + \\ &\quad + \delta p_m^* \left[\int_{\Gamma} p_{im}^* d\Gamma + \delta_{im} \right] C_{in} p_n^* \end{aligned} \quad (2.37)$$

que pode ser escrita como

$$\delta\int_{\Omega} U_0^C(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) d\Omega = \delta p_m^* (F_{mn} p_n^* + b_m^b) \quad (2.38)$$

onde

$$\mathbf{F} \equiv F_{mn} = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in}^* d\Gamma + \delta_{im} u_{in}^* \quad (2.39)$$

é uma matriz de flexibilidade simétrica que relaciona forças e deslocamentos do sistema interno de coordenadas, e

$$\mathbf{b}^b \equiv b_m^b = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_i^p d\Gamma + \delta_{im} u_i^p \quad (2.40)$$

é um vetor de deslocamentos nodais do sistema interno de coordenadas equivalente ao campo de deslocamentos referentes às forças de massa. A segunda expressão em colchetes da eq. (2.37) desaparece, já que a condição de equilíbrio

$$\int_{\Gamma} p_{im}^* d\Gamma + \delta_{im} = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \eta_{j,i} d\Omega + \delta_{im} = 0 \quad (2.41)$$

é satisfeita para qualquer valor de $C_{in} p_n^*$, pela própria definição da solução fundamental.

A integral do segundo termo em colchetes da eq. (2.34) pode ser escrita, depois da substituição de σ_{ij}^* e de u_i através das eqs. (2.17) e (2.30), respectivamente, como

$$\delta \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \eta_{j,i} u_i d\Omega = -\delta p_m^* \delta_{im} u_{in} d_n - \delta d_n \delta_{in} u_{im} p_m^*. \quad (2.42)$$

A variação da primeira integral de contorno da eq. (2.34) é dada por

$$-\delta \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \eta_{j,i} u_i d\Gamma = -\delta \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_{j,i} u_i d\Gamma - \delta \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_{j,i} u_i d\Gamma, \quad (2.43)$$

que pode ser expressa, depois das substituições de $\sigma_{ij}^p \eta_{j,i}$ e u_i das eqs. (2.21) e (2.30), como

$$\delta \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_{j,i} u_i d\Gamma = -\delta p_m^* \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in} d\Gamma d_n - \delta d_n \left(\int_{\Gamma} p_{in}^* u_{im} d\Gamma p_m^* + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_{j,i} u_{in} d\Gamma \right). \quad (2.44)$$

Somando-se as eqs (2.42) e (2.44), chega-se a

$$\delta \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \eta_{j,i} u_i d\Omega - \delta \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_{j,i} u_i d\Gamma = -\delta p_m^* H_{mn} d_n - \delta d_n (H_{nm} p_m^* + p_n^b), \quad (2.45)$$

onde

$$\mathbf{p}^b \equiv p_n^b = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_{j,i} u_{in} d\Gamma \quad (2.46)$$

é um vetor de forças nodais do sistema externo de coordenadas, energeticamente equivalente às forças de massa b_i , e

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{im} u_{in} \quad (2.47)$$

é uma matriz de transformação cinemática entre deslocamentos dos sistemas externo e interno de coordenadas. Esta matriz corresponde à mesma matriz \mathbf{H}

obtida na formulação convencional dos elementos de contorno (Brebbia et al [11]), sendo que neste contexto, geralmente não lhe é atribuído nenhum significado físico.

Finalmente, a última integral da eq. (2.34) resulta, após a substituição de u_i , dado na eq. (2.30), em

$$\delta \int_{\Gamma} t_i u_i \, d\Gamma = \delta d_n p_n, \quad (2.48)$$

onde

$$\mathbf{p} \equiv p_n = \int_{\Gamma} t_i u_{in} \, d\Gamma \quad (2.49)$$

é um vetor de forças nodais equivalentes, em termos energéticos, às forças de superfície t_i para o campo de deslocamentos adotado no contorno, segundo a eq.(2.30). Este vetor é obtido de modo completamente análogo ao que é feito no Método dos Elementos Finitos.

A partir das eqs. (2.38), (2.45) e (2.48), é possível reescrever a variação do potencial de Hellinger-Reissner, dado pela eq. (2.34), na forma discretizada:

$$\delta p_m^* (F_{mn} p_n^* + b_m^b - H_{mn} d_n) - \delta d_n (H_{nm} p_m^* + p_n^b - p_n) = 0. \quad (2.50)$$

A matriz de incidência cinemática \mathbf{H} permite escrever que

$$\mathbf{b}^b = \mathbf{H} \mathbf{d}^b \quad (2.51)$$

onde \mathbf{d}^b é um vetor de deslocamentos nodais do sistema externo de coordenadas equivalente ao campo de deslocamentos referentes às forças de massa (Dumont [51]).

Então, substituindo a eq. (2.51) na eq. (2.50) e para valores arbitrários de δp_m^* e δd_n , a eq. (2.50) resulta no sistema de equações

$$\begin{cases} \mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{cases} \quad (2.52)$$

Este sistema de equações tem exatamente a mesma forma do sistema proveniente da formulação híbrida do Método dos Elementos Finitos.

Pode-se observar de imediato que, para a obtenção das matrizes de flexibilidade \mathbf{F} e de incidência cinemática \mathbf{H} é requerida apenas a integração no contorno Γ da estrutura. Esta característica intrínseca dos métodos de contorno advém da natureza da solução fundamental adotada, a qual atende à equação (2.16) de equilíbrio no domínio Ω .

2.4.1. Obtenção da matriz de rigidez

Em relação à obtenção de uma solução única para o sistema (2.52) existem dois aspectos de fundamental importância a serem considerados. O primeiro diz respeito à integração das matrizes de incidência cinemática \mathbf{H} e de flexibilidade \mathbf{F} , obtidas pelas eqs. (2.47) e (2.39), respectivamente, que, por causa da natureza da solução fundamental, envolvem integrandos singulares nos termos sobre suas diagonais principais. O segundo aspecto refere-se à inversibilidade de \mathbf{F} .

No caso da matriz de incidência cinemática \mathbf{H} , a singularidade na integral é avaliada em termos de valor principal de Cauchy, como uma soma de partes finitas, mais um termo descontínuo local (Dumont [2]). Esta integração singular pode, no entanto, ser avaliada por consideração de movimentos de corpo rígido. Na formulação convencional dos elementos de contorno esta singularidade é tratada usualmente deste mesmo modo (Brebbia et al [11]).

Por outro lado, a matriz de flexibilidade \mathbf{F} , que não existe na formulação convencional, apresenta uma singularidade que não pode ser calculada por nenhuma técnica de integração. Desta forma, os termos de sua diagonal principal devem ser obtidos através do estabelecimento de relações de transformação entre os dois sistemas de coordenadas usados na formulação deste método (Dumont [2]).

No sistema externo ou global, os deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ descrevem um campo de deslocamentos compatível em todo o contorno Γ . A estes deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ correspondem as forças nodais $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ energeticamente equivalentes às solicitações externas que atuam no contorno. Os deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ podem assumir valores arbitrários, porém as forças equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ devem ser sempre auto-equilibradas. Logo, se estes deslocamentos corresponderem a movimento de corpo rígido, as forças nodais equivalentes devem ser nulas. Em termos de trabalho virtuais, isto significa que

$$\mathbf{W}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{0}, \quad (2.53)$$

onde \mathbf{W} é uma matriz cujas colunas formam uma base ortonormal do espaço dos deslocamentos de corpo rígido. De fato, os deslocamentos de corpo rígido em um corpo elástico podem ser descritos de infinitas formas. Por conveniência, escolhe-

se um conjunto de funções de deslocamentos corpo rígido u_{ir}^r que, quando medidas nos pontos nodais do contorno, construa uma matriz $\mathbf{W} \equiv W_{mr}$ cujas colunas formam uma base ortonormal do espaço dos deslocamentos de corpo rígido. Então,

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}, \quad (2.54)$$

onde, \mathbf{I} é a matriz identidade. Embora seja possível conceber um número infinito de combinações lineares de um conjunto normalizado de deslocamentos de corpo rígido u_{ir}^r , pode-se demonstrar que a eq. (2.54) implica que

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \text{matriz idempotente única (Chaves [20])}. \quad (2.55)$$

Pode-se ainda definir um projetor ortogonal aos deslocamentos de corpo rígido $(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)$, onde,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)\mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (2.56)$$

De fato, não é difícil obter um conjunto de funções de deslocamentos de corpo rígido normalizado u_{ir}^r a partir de um conjunto de deslocamentos de corpo rígido arbitrário \tilde{u}_{ir}^r (Chaves [20]).

No sistema interno ou local, as forças nodais \mathbf{p}^* definem um campo de tensões em equilíbrio no domínio Ω . A partir deste campo de tensões obtém-se um campo de deslocamentos definido em todo o domínio, exceto no ponto de aplicação das forças concentradas \mathbf{p}^* , onde ocorre uma singularidade, e a menos de uma constante. A estas forças nodais \mathbf{p}^* correspondem deslocamentos nodais \mathbf{d}^* que podem ser definidos a partir do princípio dos trabalhos como

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{F}\mathbf{p}^*. \quad (2.57)$$

em termos da matriz de flexibilidade \mathbf{F} previamente definida. Estes deslocamentos nodais equivalentes não existem fisicamente, de modo a serem diretamente mensuráveis, mas são grandezas mecanicamente equivalentes, em termos de deslocamentos, ao campo de deslocamentos correspondente às forças singulares aplicadas.

Da primeira equação do sistema (2.52), juntamente com a eq. (2.57), conclui-se que \mathbf{H} é uma matriz de incidência cinemática que relaciona os deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ do sistema externo com os deslocamentos nodais equivalentes \mathbf{d}^* do sistema interno de coordenadas

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b). \quad (2.58)$$

Da segunda equação do sistema (2.52) advém que a matriz \mathbf{H}^T realiza uma transformação de equilíbrio entre forças nodais \mathbf{p}^* do sistema interno e as forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ do sistema externo de coordenadas

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* \quad (2.59)$$

que equivale ao princípio da contragradiência.

A condição de ortogonalidade de $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ ao espaço de deslocamentos de corpo rígido, como visto na eq. (2.53), leva a

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (2.60)$$

ou seja, a matriz de incidência cinemática \mathbf{H} é singular, e seu espaço nulo é \mathbf{W} , o que permite concluir que deslocamentos de corpo rígido $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ não podem ser transformados em deslocamentos nodais equivalentes \mathbf{d}^* .

Baseado no fato de que as forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ são nulas para os deslocamentos de corpo rígido $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$, além de que \mathbf{H}^T é uma matriz singular que realiza a transformação de equilíbrio entre as forças nodais $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ e \mathbf{p}^* , conclui-se que devem existir forças \mathbf{p}^* que não podem ser transformadas em forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$, referentes a deslocamentos de corpo rígido. Logo,

$$\mathbf{H}^T \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (2.61)$$

onde \mathbf{V} é uma matriz cujas colunas formam uma base ortonormal do espaço de forças \mathbf{p}^* que correspondem a forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ desequilibradas, ou seja, correspondem apenas aos deslocamentos de corpo rígido, de tal modo que

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}. \quad (2.62)$$

De fato, a matriz \mathbf{V} é um conjunto de autovetores correspondentes aos autovalores nulos da matriz \mathbf{H}^T e deve ser obtida neste contexto. Entretanto, tal procedimento pode encontrar problemas de mau condicionamento. Uma solução para este problema é considerar que, se ambos os conjuntos de deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ e \mathbf{d}^* são fisicamente os mesmos grau de liberdade, então as bases \mathbf{V} e \mathbf{W} são linearmente dependentes. Como consequência, há uma base não-normalizada

$\tilde{\mathbf{V}}$ cuja normalização produz a base ortonormal \mathbf{V} , que pode ser projetada em \mathbf{W} na forma

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^T\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \quad (2.63)$$

Então, $\tilde{\mathbf{V}}$ pode ser obtida como solução do sistema

$$(\mathbf{H}^T + \mathbf{W}\mathbf{W}^T)\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}. \quad (2.64)$$

Como a matriz $(\mathbf{H}^T + \mathbf{W}\mathbf{W}^T)$ é não-singular por construção, $\tilde{\mathbf{V}}$ tem solução única na equação acima. Conseqüentemente, a normalização da matriz $\tilde{\mathbf{V}}$ leva à base \mathbf{V} que satisfaz a eq. (2.61).

A partir da eq. (2.57) pode-se concluir, pelo princípio dos deslocamentos virtuais que caso as forças nodais \mathbf{p}^* pertençam ao espaço coberto pela base \mathbf{V} , estas realizarão trabalho nulo sobre qualquer configuração virtual de deslocamentos relacionados a deformações, ou seja,

$$\mathbf{F}\mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Isto significa que a matriz de flexibilidade \mathbf{F} do sistema interno é singular, e o espaço nulo desta matriz é o mesmo da matriz \mathbf{H}^T . Tem-se assim a condição necessária e suficiente para a completa determinação dos termos da diagonal principal de \mathbf{F} . Observa-se ainda que esta determinação pressupõe que os sistemas interno e externo de coordenadas sejam energeticamente equivalentes.

A singularidade de \mathbf{H}^T significa que certas forças \mathbf{p}^* não podem ser transformadas em forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$. Isto implica a não-existência de uma solução única para o sistema (2.52). Esta unicidade da solução deve então ser provida, adicionando-se a condição de ortogonalidade

$$\mathbf{V}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

para completar, então, o sistema (2.52). Em outras palavras, o vetor \mathbf{p}^* correspondente à solução desejada do sistema deve ser ortogonal às forças pertencentes ao espaço coberto pela base \mathbf{V} .

A partir da eq. (2.66), pode-se resolver a primeira equação do sistema (2.52) para as forças concentradas \mathbf{p}^* formalmente como:

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) [\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.67)$$

onde $(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) [\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1}$ é chamada de inversa de Bott-Duffin da

matriz de flexibilidade \mathbf{F} e $(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T)$ é o projetor ortogonal ao espaço coberto pela base \mathbf{V} (Bem-Israel e Greville [13]).

Considerando a eq. (2.65), a eq. (2.67) pode ser simplificada para

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) [\mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b). \quad (2.68)$$

Agora, substituindo a eq. (2.68) na segunda equação do sistema (2.52) e considerando a eq. (2.61), obtém-se a expressão final:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}^b = \mathbf{H}^T [\mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b), \quad (2.69)$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T [\mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H} \quad (2.70)$$

é uma matriz de rigidez. Esta matriz é simétrica positiva semi-definida por construção ortogonal a deslocamentos de corpo rígido:

$$\mathbf{W}^T \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (2.71)$$

2.5.

Avaliação de deslocamentos em pontos do domínio considerando deslocamentos de corpo rígido

No processo de solução de um problema geral de elastostática, pelo Método Híbrido dos Elementos de contorno, um vetor de deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ e um vetor de forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ são completamente definidos em termos das solicitações estáticas: forças de massa aplicadas no domínio Ω , forças de superfície aplicadas ao longo da parte Γ_σ do contorno e deslocamentos prescritos ao longo da parte complementar Γ_u do contorno. Na seqüência, um vetor \mathbf{p}^* é também obtido, no qual, por meio das eqs. (2.12) a (2.15), pode-se finalmente expressar a solução completa do estado de tensões em todo o domínio. Todavia, o campo de deslocamentos no domínio é avaliado a menos de uma constante que deve ser obtida a partir de considerações de deslocamentos de corpo rígido.

O campo de deslocamentos no domínio de um corpo elástico pode ser expresso, a partir de um campo de tensões definido pelas eqs. (2.12) a (2.15) e considerando deslocamentos de corpo rígido, como

$$u_i = u_{im}^* p_m^* + u_i^p + u_{is}^r \tilde{r}_s \quad \text{em } \Omega, \quad (2.72)$$

ou de uma forma alternativa

$$u_i = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) p_m^* + u_i^p + u_{is}^r r_s \text{ em } \Omega, \quad (2.73)$$

onde:

- u_{im}^* é a solução fundamental expressa em termos de deslocamentos, que pode ou não ser singular em algum ponto fora do domínio Ω ;
- u_{is}^r é um conjunto normalizado de deslocamentos de corpo rígido obtido a partir de um conjunto arbitrário de deslocamentos de corpo rígido \tilde{u}_{is}^r (Chaves [20]);
- C_{sm} é uma matriz de constantes que será obtida para que o termo da eq. (2.73), referente à solução fundamental, seja ortogonal aos deslocamentos de corpo rígido;
- u_i^p é um campo de deslocamento relacionado à solução particular da equação diferencial (2.1);
- r_s é um conjunto de parâmetros de corpo rígido que estão relacionados aos deslocamentos nodais.

A solução fundamental u_{im}^* depende do tipo de problema em análise e consiste em um conjunto de funções conhecidas, com exceção de uma quantidade arbitrária de deslocamentos de corpo rígido, que será considerada em termos do produto $u_{is}^r C_{sm}$.

Para problemas bidimensionais de elasticidade pode-se expressar funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido \tilde{u}_{is}^r como

$$\tilde{u}_{is}^r \equiv \tilde{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

onde as colunas correspondem a diferentes deslocamentos de corpo rígido, que são translação na direção x , translação na direção y e rotação na direção z , respectivamente.

A matriz C_{sm} tem que ser avaliada de tal modo que o termo em parênteses da eq. (2.73) torne-se ortogonal a deslocamentos de corpo rígidos, deslocamentos estes que são considerados subseqüentemente por meio do produto $u_{is}^r r_s$.

Para que a matriz C_{sm} seja obtida segundo seu propósito introduz-se a

seguinte condição de ortogonalidade

$$\int_{\Omega} u_{ir}^r (u_{im}^* + u_{ir}^r C_{sm}) d\Omega p_m^* = 0, \quad (2.75)$$

válida para qualquer p_m^* . Para a avaliação da matriz de constantes $C \equiv C_{sm}$, deve-se considerar

$$C^* \equiv C_{rm}^* = \int_{\Omega} u_{ir}^r u_{im}^* d\Omega \quad (2.76)$$

uma matriz com tantas linhas quanto o número de deslocamentos de corpo rígido e tantas colunas quanto o número de graus de liberdade; e também

$$C^r \equiv C_{rs}^r = \int_{\Omega} u_{ir}^r u_{is}^r d\Omega \quad (2.77)$$

uma matriz quadrada simétrica positiva definida cuja ordem é o número de deslocamentos de corpo rígido.

Contanto que as matrizes C^r e C^* possam ser avaliadas, pode-se expressar a eq. (2.75), de acordo com as eqs. (2.76) e (2.77), como

$$C^* + C^r C = \mathbf{0}, \quad (2.78)$$

logo, a matriz de constantes C_{sm} será

$$C = -(C^r)^{-1} C^*. \quad (2.79)$$

Agora, deve-se descobrir como avaliar as matrizes C^r e C^* adequadamente.

Pode-se proceder considerando um campo de tensões auxiliar σ_{ijr}^a , tal que

$$\sigma_{ijr}^a \equiv \tilde{u}_{ir}^r. \quad (2.80)$$

Um conjunto adequado de tensões σ_{ijr}^a que corresponde a um estado plano de tensões, tal que a eq. (2.80) seja satisfeita, pode ser expresso pela matriz

$$\sigma_{ijr}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -xy \\ 0 & 0 & xy \\ y & x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

na qual as linhas correspondem as tensões σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} , respectivamente, e as colunas correspondem aos diferentes deslocamentos de corpo rígido, de acordo com as colunas de \tilde{u}_{is}^r na eq. (2.74).

Substituindo a eq. (2.80) na eq. (2.77) e aplicando integração por partes, obtém-se

$$C^r \equiv C_{rs}^r = \int_{\Omega} \sigma_{ijr}^a u_{is}^r d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ijr}^a u_{is}^r)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ijr}^a u_{is,r} d\Omega. \quad (2.82)$$

Aplicando o teorema de Green à primeira integral da eq. (2.82) e substituindo o campo de tensões auxiliar σ_{ijr}^a pelo gradiente de deslocamentos u_{kr}^a correspondente na segunda integral eq. (2.82), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^r &\equiv C_{rs}^r = \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{is}^r d\Gamma - \int_{\Omega} u_{kr}^a \sigma_{ijkl} u_{is}^r \eta_j d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{is}^r d\Gamma - \int_{\Omega} u_{kr}^a \sigma_{kls}^r d\Omega. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Finalmente, sabendo que a integral que contém as tensões σ_{kls}^r correspondentes ao deslocamento de corpo rígido u_{is}^r é obviamente nula, a expressão para a determinação da matriz \mathbf{C}^r é encontrada, utilizando somente uma integral de contorno

$$\mathbf{C}^r \equiv C_{rs}^r = \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{is}^r d\Gamma. \quad (2.84)$$

O mesmo procedimento usado na matriz \mathbf{C}^r pode ser aplicado à matriz \mathbf{C}^* , de acordo com a eq. (2.76)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* &\equiv C_{rm}^* = \int_{\Omega} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{im}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ijr}^a u_{im}^*) \eta_j d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ijr}^a u_{im}^* \eta_j d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{im}^* d\Gamma \\ &- \int_{\Omega} u_{kr}^a \sigma_{ijkl} u_{im}^* \eta_j d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{kr}^a \sigma_{k\ell m}^* d\Omega. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Diferentemente do que acontece na eq. (2.83), a última integral da eq. (2.85) não é nula, já que $\sigma_{k\ell m}^*$ é um campo de tensões relacionado à solução fundamental. Então, deve-se aplicar integração por partes na última integral da eq. (2.85)

$$\mathbf{C}^* \equiv C_{rm}^* = \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Omega} (u_{kr}^a \sigma_{k\ell m}^*) \eta_{\ell} d\Omega + \int_{\Omega} u_{kr}^a \sigma_{k\ell m}^* \eta_{\ell} d\Omega. \quad (2.86)$$

Aplicando o teorema de Green à segunda integral da eq. (2.86), encontra-se a expressão final para a determinação da matriz \mathbf{C}^* , utilizando somente integrais de contorno, que é

$$\mathbf{C}^* \equiv C_{rm}^* = \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^a \eta_j u_{im}^* d\Gamma - \left(\int_{\Omega} u_{kr}^a \sigma_{k\ell m}^* \eta_{\ell} d\Omega - u_{kr}^a \delta_{km} \right). \quad (2.87)$$

A partir da eq. (2.81) pode-se obter os deslocamentos u_{kr}^a na forma

$$u_{kr}^a = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} y^2 & 0 & -\frac{x^2 y}{4} - \frac{y^3}{12} \\ 0 & x^2 & \frac{xy^2}{4} + \frac{x^3}{12} \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Uma outra forma de se obter a matriz \mathbf{C}^* é considerar um outro campo de

tensões auxiliar σ_{ijm}^{a*} relacionado com a solução fundamental u_{im}^* , tal que

$$\sigma_{ijm}^{a*}, j \equiv u_{im}^*. \quad (2.89)$$

Um conjunto apropriado de tensões σ_{ijm}^{a*} para estado plano de tensão é, para força p_m^* aplicada na direção x

$$\sigma_{xx}^{a*} = \frac{x \{ r^2 [(32\nu - 16\nu^2 - 14) \ln(r) + 24\nu^2] + (13 - 36\nu)x^2 + (7 - 28\nu)y^2 \}}{64 G \pi (\nu - 1)^2 r^2} \quad (2.90)$$

$$\sigma_{yy}^{a*} = \frac{x \{ r^2 [(16\nu^2 - 16\nu + 6) \ln(r) + 24\nu^2] + (1 - 20\nu)x^2 + (7 - 28\nu)y^2 \}}{64 G \pi (\nu - 1)^2 r^2} \quad (2.91)$$

$$\sigma_{xy}^{a*} = \frac{y \{ r^2 [(24\nu - 16\nu^2 - 10) \ln(r) + 8(1 - \nu - \nu^2)] + (1 + 4\nu)x^2 - (5 - 12\nu)y^2 \}}{64 G \pi (\nu - 1)^2 r^2} \quad (2.92)$$

Para força p_m^* aplicada na direção y , tem-se

$$\sigma_{xx}^{a*} = \frac{y \{ r^2 [(16\nu^2 - 16\nu + 6) \ln(r) + 24\nu^2] + (7 - 28\nu)x^2 + (1 - 20\nu)y^2 \}}{64 G \pi (\nu - 1)^2 r^2} \quad (2.93)$$

$$\sigma_{yy}^{a*} = \frac{y \{ r^2 [(32\nu - 16\nu^2 - 14) \ln(r) + 24\nu^2] + (7 - 28\nu)x^2 + (13 - 36\nu)y^2 \}}{64 G \pi (\nu - 1)^2 r^2} \quad (2.94)$$

$$\sigma_{xy}^{a*} = \frac{x \{ r^2 [(24\nu - 16\nu^2 - 10) \ln(r) + 8(1 - \nu - \nu^2)] - (5 - 12\nu)x^2 + (1 + 4\nu)y^2 \}}{64 G \pi (\nu - 1)^2 r^2} \quad (2.95)$$

Substituindo a eq. (2.89) na eq. (2.76) e aplicando integração por partes, obtém-se

$$\mathbf{C}^* \equiv C_{rm}^* = \int_{\Omega} u_{ir}^r \sigma_{ijm}^{a*}, j \, d\Omega = \int_{\Omega} (u_{ir}^r \sigma_{ijm}^{a*}), j \, d\Omega - \int_{\Omega} u_{ir}^r, j \sigma_{ijm}^{a*} \, d\Omega. \quad (2.96)$$

Aplicando o teorema de Green à primeira integral da eq. (2.96) e substituindo o campo de tensões auxiliar σ_{ijm}^{a*} pelo gradiente de deslocamentos u_{km}^{a*} correspondente na segunda integral da eq. (2.96), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \equiv C_{rm}^* &= \int_{\Gamma} u_{ir}^r \sigma_{ijm}^{a*} \eta_j \, d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ir}^r, j C_{ijk\ell} u_{km}^{a*}, \ell \, d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} u_{ir}^r \sigma_{ijm}^{a*} \eta_j \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{k\ell r}^r u_{km}^{a*}, \ell \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Igualmente ao que acontece na eq. (2.83), a integral que contém as tensões $\sigma_{k\ell r}^r$ correspondentes ao deslocamento de corpo rígido u_{ir}^r é obviamente nula.

Então, uma outra expressão para a determinação da matriz \mathbf{C}^* é

$$\mathbf{C}^* \equiv C_{rm}^* = \int_{\Gamma} u_{ir}^r \sigma_{ijm}^{a*} \eta_j \, d\Gamma. \quad (2.98)$$

Contanto que uma expressão analítica de σ_{ijm}^{a*} esteja disponível, de tal modo que a eq. (2.89) seja satisfeita, a eq. (2.98) pode ser um modo mais conveniente de avaliar a matriz \mathbf{C}^* que o matematicamente equivalente dado pela eq. (2.87).

Finalmente, resta determinar um modo de avaliar os parâmetros de corpo rígido r_s , introduzidos na eq. (2.73), em termos dos deslocamentos de corpo rígido contidos nos deslocamentos nodais $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$. Para isto, sejam \mathbf{W} e \mathbf{U}^* matrizes cujas colunas representam os valores de u_{is}^r e u_{im}^* avaliados nos pontos nodais ao longo do contorno Γ , respectivamente, e seja \mathbf{r} um vetor que contenha os parâmetros de corpo rígido r_s . Então, avaliando a eq. (2.73) nos pontos nodais ao longo do contorno Γ , obtém-se a equação matricial

$$\mathbf{d} = (\mathbf{U}^* + \mathbf{WC})\mathbf{p}^* + \mathbf{d}^b + \mathbf{Wr}. \quad (2.99)$$

Deve-se observar que, para uma solução fundamental baseada em funções singulares (a essência dos métodos dos elemento de contorno), os valores dos termos da diagonal principal de \mathbf{U}^* são indeterminados, desde que eles correspondam a deslocamentos medidos no mesmo ponto de aplicação das forças singulares. A obtenção dos termos da diagonal principal de \mathbf{U}^* será mostrada mais adiante. Para o momento, admite-se que a matriz \mathbf{U}^* pode ser determinada completamente. Pré-multiplicando a eq. (2.99) pela matriz \mathbf{W}^T e isolando \mathbf{r} , resulta em

$$\mathbf{r} = \mathbf{W}^T [\mathbf{d} - \mathbf{d}^b - (\mathbf{U}^* + \mathbf{WC})\mathbf{p}^*]. \quad (2.100)$$

2.6.

Equilíbrio de forças nodais em termos de trabalhos virtuais

Seja o princípio dos trabalhos virtuais aplicado ao corpo elástico estudado no item 2.1:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} t_i \delta u_i \, d\Gamma \quad (2.101)$$

para um campo virtual arbitrário de deslocamentos δu_i tal que

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \text{ em } \Omega \text{ e} \quad (2.102)$$

$$\delta u_i = 0 \text{ em } \Gamma_u. \quad (2.103)$$

formulado para que se possa determinar um campo de tensões σ_{ij} em equilíbrio com as forças de massa b_i e as forças externas aplicadas no contorno t_i .

O campo de tensões pode ser pensado como uma superposição de uma solução particular arbitrária σ_{ij}^p e uma solução homogênea σ_{ij}^* da eq. (2.1), de acordo com as eqs. (2.12) a (2.15), deste modo satisfazendo automaticamente as eqs. (2.1) a (2.3).

A partir das condições de compatibilidade dadas pelas eqs. (2.102) e (2.103) e da hipótese a cerca do campo de tensões dada pelas eqs. (2.2) e (2.12), pode-se reescrever a eq. (2.101) na forma

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \delta u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma. \quad (2.104)$$

Fazendo integração por partes e aplicando o teorema de Green no primeiro termo da eq. (2.104), resulta em

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \delta u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_j \delta u_i d\Gamma. \quad (2.105)$$

Promovendo-se a discretização numérica de σ_{ij}^* , como uma série de soluções fundamentais para forças p_m^* aplicadas no contorno, e de δu_i em termos de funções de interpolação polinomial no contorno, conforme já foi desenvolvido para o Método Híbrido dos Elementos de Contorno no item 2.4, obtém-se

$$\delta d_n \left(\int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{im} u_{in} \right) p_m^* = \delta d_n \left(\int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_j u_{in} d\Gamma \right). \quad (2.106)$$

que, para quaisquer valores de $\delta \mathbf{d} \equiv \delta d_n$, resulta na equação matricial de equilíbrio

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.107)$$

onde

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} p_{im}^* u_{in} d\Gamma + \delta_{im} u_{in} \quad (2.108)$$

é uma matriz de transformação cinemática entre os deslocamentos nodais \mathbf{d} e os deslocamentos nodais \mathbf{d}^* relacionados com as forças singulares \mathbf{p}^* ,

$$\mathbf{p} \equiv p_n = \int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma \quad (2.109)$$

é um vetor de forças nodais equivalentes, em termos energéticos, às forças de superfície t_i para o campo de deslocamentos adotado no contorno, e

$$\mathbf{p}^b \equiv p_n^b = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^p \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (2.110)$$

é um vetor de forças nodais energeticamente equivalente às forças de massa b_i .

A eq. (2.107) é um subconjunto das equações obtidas no Método Híbrido dos Elementos de Contorno, todavia, ela foi obtida aqui sem fazer qualquer referência ao potencial de Hellinger-Reissner.

2.7.

Formulação do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno (MHSEC)

Na formulação híbrida simplificada dos elementos de contorno, a descrição do comportamento da estrutura também é estabelecida através de dois sistemas de coordenadas:

- Um sistema global ou externo, que descreve no contorno Γ um campo de deslocamentos u_i aproximados de acordo com as eqs. (2.30) e (2.31).
- Um sistema local ou interno, que descreve no domínio Ω um campo de tensões σ_{ij} , em equilíbrio, como uma superposição de uma solução particular arbitrária σ_{ij}^p , referente a forças de massa, e uma solução homogênea σ_{ij}^* . Este último campo de tensões é descrito por intermédio de parâmetros nodais p_m^* , correspondentes à solução fundamental, de acordo com as eqs. (2.12) a (2.15). No caso de uma solução fundamental singular, como adotado aqui, os parâmetros nodais p_m^* correspondem a forças singulares aplicadas fora do domínio Ω , porém infinitamente próximas do contorno e coincidentes com os pontos de aplicação dos parâmetros nodais de deslocamentos d_m da eq.(2.30).

Como visto no item 2.5, o campo de deslocamentos no domínio de um corpo elástico pode ser expresso, a partir de um campo de tensões definido pelas eqs. (2.12) a (2.15) e considerando deslocamentos de corpo rígido, como

$$u_i = u_{im}^* p_m^* + u_i^p + u_{is}^r \tilde{r}_s \quad \text{em } \Omega. \quad (2.111)$$

Avaliando a eq. (2.111) nos pontos nodais ao longo do contorno Γ ; e escolhendo um conjunto de funções de deslocamentos corpo rígido u_{ir}^r de forma que, quando medidas nos pontos nodais do contorno, resulte na base ortonormal \mathbf{W} ; obtém-se a equação matricial

$$\mathbf{d} = \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* + \mathbf{d}^b + \mathbf{W} \tilde{\mathbf{r}}. \quad (2.112)$$

Pré-multiplicando a eq. (2.112) pelo projetor ortogonal a deslocamentos de corpo rígido $(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)$, obtém-se

$$(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b), \quad (2.113)$$

já que $(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Esta equação de compatibilidade nodal de deslocamentos juntamente com a equação de equilíbrio nodal de forças dada pela eq. (2.107), formam o Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno:

$$\begin{cases} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{cases} \quad (2.114)$$

Pode-se observar de imediato que, para a obtenção da matriz de incidência cinemática \mathbf{H} é requerida apenas a integração no contorno Γ da estrutura, por outro lado, a matriz \mathbf{U}^* requer somente a avaliação da solução fundamental em termos de deslocamento diretamente nos pontos nodais, restando determinar apenas os valores de sua diagonal principal, que será mostrado no próximo item.

2.7.1.

Obtenção da matriz de rigidez

Para um domínio finito, um problema geral da elastostática com condições de contorno mistas pode ser formulado considerando o sistema de equações (2.114), com condições de ortogonalidade já conhecidas:

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}^T \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{0}. \quad (2.115)$$

Então, para que o sistema (2.114) seja consistente, a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (2.116)$$

deve ser satisfeita. Esta propriedade deveria fornecer os subsídios para a determinação dos termos da diagonal principal da matriz \mathbf{U}^* , que não podem ser diretamente obtidos para uma solução fundamental singular. Entretanto, o produto $(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^*$ é por construção singular, que faz com que a eq. (2.116) seja impraticável.

Para determinar os termos da diagonal principal de \mathbf{U}^* deve-se considerar a forma alternativa da eq. (2.111):

$$u_i = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) p_m^* + u_i^p + u_{is}^r r_s, \quad (2.117)$$

que quando avaliada nos pontos nodais do contorno e considerando um conjunto de funções de deslocamentos corpo rígido u_{ir}^r de forma que, quando medidas nos pontos nodais do contorno, resulte na base ortonormal \mathbf{W} , recai em

$$\mathbf{d} = (\mathbf{U}^* + \mathbf{WC})\mathbf{p}^* + \mathbf{d}^b + \mathbf{W}\mathbf{r}. \quad (2.118)$$

Esta equação possibilita a determinação dos termos da diagonal principal de \mathbf{U}^* . De fato, a eq. (2.118) foi estabelecida sob a premissa de que as parcelas do campo de deslocamentos no domínio relativas a solução fundamental e a solução particular são ortogonais a deslocamentos de corpo rígido. Como consequência, a matriz de deslocamentos nodais $(\mathbf{U}^* + \mathbf{WC})$ da eq. (2.118) tem que ser ortogonal a qualquer conjunto de forças \mathbf{p}^* desequilibradas. Visto que um conjunto de forças desequilibradas é representado pela base ortonormal \mathbf{V} , obtida de acordo com a eq. (2.66), chega-se a seguinte condição de ortogonalidade:

$$(\mathbf{U}^* + \mathbf{WC})\mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (2.119)$$

Com a equação acima torna-se possível determinar um único conjunto de termos da diagonal principal de \mathbf{U}^* .

Pré-multiplicando a eq. (2.119) pelo projetor ortogonal a deslocamentos de corpo rígido $(\mathbf{I} - \mathbf{WW}^T)$, obtém-se, desde que $(\mathbf{I} - \mathbf{WW}^T)\mathbf{W} = \mathbf{0}$, que também

$$(\mathbf{I} - \mathbf{WW}^T)\mathbf{U}^*\mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (2.120)$$

Esta condição de ortogonalidade demonstra que na eq. (2.113) somente forças \mathbf{p}^* auto-equilibradas são transformadas em deslocamentos $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$. Como consequência, o sistema proposto (2.114) do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno é completamente consistente com as propriedades espectrais dadas pelas eqs. (2.115) e (2.116).

Pode-se resolver a eq. (2.113) para se obter as forças singulares \mathbf{p}^* , com base na propriedade espectral da eq. (2.66), de acordo com a teoria das matrizes inversas generalizadas (Bem-Israel e Greville [13]), como:

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{VV}^T) [(\mathbf{I} - \mathbf{WW}^T)\mathbf{U}^*(\mathbf{I} - \mathbf{VV}^T) + \mathbf{VV}^T]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{WW}^T)(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.121)$$

onde a expressão $(\mathbf{I} - \mathbf{VV}^T) [(\mathbf{I} - \mathbf{WW}^T)\mathbf{U}^*(\mathbf{I} - \mathbf{VV}^T) + \mathbf{VV}^T]^{-1}$ é a inversa de Bott-Duffin da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{WW}^T)\mathbf{U}^*$.

Considerando a condição de ortogonalidade da eq. (2.120), a eq. (2.121) pode ser simplificada para

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) \left[(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* + \mathbf{V}\mathbf{V}^T \right]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b). \quad (2.122)$$

Substituindo a expressão de \mathbf{p}^* da eq. (2.122) na eq. (2.107), e considerando a condição de ortogonalidade da eq. (2.61), obtém-se uma expressão final:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{H}^T \left[(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* + \mathbf{V}\mathbf{V}^T \right]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.123)$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \left[(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* + \mathbf{V}\mathbf{V}^T \right]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \quad (2.124)$$

é uma matriz de rigidez. Nota-se que esta matriz é por construção ortogonal a deslocamentos de corpo rígido:

$$\mathbf{W}^T \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (2.125)$$

Como a eq. (2.113) foi formulada sem uma base variacional, a matriz de rigidez \mathbf{K} resultante não é simétrica, apesar de \mathbf{U}^* ser simétrica. Entretanto, \mathbf{K} tende a ser simétrica com o refinamento da malha de elementos de contorno.

Neste ponto se encerra toda a teoria do Método Híbrido dos elementos de contorno e de sua formulação simplificada aplicados a problemas da elastostática em meio simplesmente conexo homogêneo e isotrópico.

2.8.

Particularização para problemas de potencial (Equação diferencial de Laplace e Poisson)

A solução numérica da equação de Laplace e Poisson pelo Método Híbrido dos elementos de Contorno e sua formulação simplificada, segue a mesma metodologia da apresentada para problemas de elasticidade até aqui. Todavia, alguns conceitos precisam ser reapresentados no escopo da teoria dos problemas de potencial.

Considera-se um corpo submetido a fontes de energia b em seu domínio Ω e a fontes de energia \bar{q} ao longo da parte Γ_q do contorno. Além disso, o potencial $\bar{\phi}$ é conhecido na parte complementar Γ_ϕ de Γ . Procura-se por uma aproximação adequada do campo dos fluxos que satisfaça ambas as equações de equilíbrio no domínio,

$$q_{i,i} = b \text{ em todo } \Omega, \quad (2.126)$$

e ao longo da parte Γ_q do contorno,

$$q_i \eta_i = -\bar{q} \text{ em } \Gamma_q. \quad (2.127)$$

O campo potencial correspondente tem que satisfazer a condição de contorno

$$\phi = \bar{\phi} \text{ ao longo de } \Gamma_\phi. \quad (2.128)$$

Como já desenvolvido anteriormente, nestas formulações híbridas assume-se que o campo potencial

$$\phi = \phi_n d_n, \text{ de modo que, } \phi = \bar{\phi} \text{ ao longo de } \Gamma_\phi \quad (2.129)$$

é conhecido ao longo de todo o contorno Γ em termos de funções de interpolação polinomiais ϕ_n e alguns parâmetros nodais de potencial d_n . Assume-se também um campo de fluxos q_i , com seu correspondente campo de potencial ϕ ,

$$q_i = q_i^* + q_i^p \text{ e } \phi = \phi^* + \phi^p \quad (2.130)$$

em todo o domínio Ω , de modo que a equação de equilíbrio (2.126) é identicamente satisfeita. Isto significa que pode-se definir uma solução particular arbitrária q_i^p , na qual satisfaz a equação

$$q_{i,i}^p = b \text{ em todo } \Omega, \quad (2.131)$$

e, mais importante, significa que pode-se determinar uma solução homogênea q_i^* que satisfaça identicamente a equação

$$q_{i,i}^* = 0 \text{ em todo } \Omega. \quad (2.132)$$

Isto caracteriza uma solução fundamental a ser determinada em termos de alguns parâmetros nodais de fontes de energia p_m^* , na forma:

$$q_i^* = q_{im}^* p_m^* \text{ e } \phi^* = \phi_m^* p_m^* + \phi^c c, \quad (2.133)$$

em que o subscrito m refere-se a cada um dos graus de liberdade do modelo discretizado.

A solução fundamental em termos de potencial para a equação de Laplace:

$$\phi_{,ii}^* = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.134)$$

para problemas bidimensionais em meio homogêneo e isotrópico é

$$\phi_m^* = -\frac{1}{2\pi k} \ln(r) + Const. \quad (2.135)$$

onde k é a constante do meio e r é a distância entre o ponto de aplicação da fonte

p_m^* e o ponto m onde se quer medir o valor da função.

Feitas estas considerações, relaciona-se o campo potencial no contorno, definido pela eq. (2.129), com o campo de fluxos no domínio, dado pelas eqs (2.130) a (2.133), através de um princípio variacional em termos do potencial de Hellinger-Reissner:

$$-\delta\Pi_R = \delta\int_{\Omega} [U_0^C(q_i^* + q_i^p) + q_{i,i}^* \phi] d\Omega - \delta\int_{\Gamma} (q_i^* + q_i^p) \eta_i \phi d\Gamma + \delta\int_{\Gamma} \bar{q} \phi d\Gamma. \quad (2.136)$$

Após a interpolação das variáveis ϕ , de acordo com a eq. (2.129), bem como q_i^* , de acordo com a eq. (2.133), chega-se a expressão matricial já conhecida:

$$\delta\mathbf{p}^{*T} (\mathbf{F}\mathbf{p}^* - \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{b}^b) - \delta\mathbf{d}^T (\mathbf{H}^T\mathbf{p}^* + \mathbf{p}^b - \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (2.137)$$

onde; \mathbf{p}^* e \mathbf{d} são vetores contendo os parâmetros nodais p_m^* e d_n ; a matriz simétrica do tipo “flexibilidade” \mathbf{F} , a matriz do tipo “transformação cinemática” \mathbf{H} e o vetor \mathbf{b}^b de potenciais nodais equivalentes a fontes no domínio são definidos em termos de integrais de contorno, na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{b}^b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{mn} \\ H_{mn} \\ b_m^b \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_n^* \\ \phi_n \\ \phi^p \end{bmatrix} \left\langle -q_{im}^* \eta_i \right\rangle d\Gamma + \begin{bmatrix} \phi_n^* \\ \phi_n \\ \phi^p \end{bmatrix} \left\langle \delta_{nm} \right\rangle; \quad (2.138)$$

e \mathbf{p}^b e \mathbf{p} são vetores de fluxos nodais equivalentes as fontes no domínio b e as fontes \bar{q} no contorno, respectivamente, definidos como

$$[\mathbf{p}^b \quad \mathbf{p}] \equiv [p_n^b \quad p_n] = \int_{\Gamma} \phi_n \left\langle -q_i^p \eta_i \quad \bar{q} \right\rangle d\Gamma \quad (2.139)$$

Então, para valores arbitrários de $\delta\mathbf{p}^*$ e $\delta\mathbf{d}$, de acordo com a eq. (2.51), a eq. (2.137) recai no sistema de equações do Método Híbrido dos Elementos de Contorno

$$\begin{cases} \mathbf{F}\mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \mathbf{H}^T\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{cases} \quad (2.140)$$

no qual são válidas todas as propriedades de ortogonalidade já mostradas que torna o sistema consistente.

O conceito de deslocamentos de corpo rígido, no contexto de problemas de potencial, pode ser pensado como um campo potencial constante e a matriz \mathbf{W} torna-se um vetor normalizado de potenciais nodais constantes, onde $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = 1$.

Da mesma forma deve-se pensar a então matriz e agora vetor \mathbf{V} no sistema interno de coordenadas.

O campo potencial no domínio levando-se em consideração um campo potencial constante normalizado ϕ^c , obtido a partir de um campo potencial constante arbitrário $\tilde{\phi}^c$, é determinado na forma

$$\phi = (\phi_m^* + \phi^c C_m) p_m^* + \phi^p + \phi^c c. \quad (2.141)$$

Avaliando a equação acima nos pontos nodais, obtém-se a eq. (2.118). Pré multiplicando a eq. (2.118) por \mathbf{W}^T recai em

$$(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T)(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b). \quad (2.142)$$

Para problemas de potencial uma função arbitrária de potencial constante pode ser expressa na forma

$$\tilde{\phi}^c = 1. \quad (2.143)$$

Então, um conjunto adequado de funções de fluxo q_i^a necessário para a determinação das matrizes \mathbf{C}^r e \mathbf{C}^* vale

$$q_i^a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.144)$$

Além disso, pode-se representar o potencial ϕ^a requerido na definição de \mathbf{C}^* como

$$\phi^a = \frac{1}{4}(x^2 + y^2). \quad (2.145)$$

Finalizando, um conjunto apropriado de funções de fluxo q_{im}^{a*} relacionadas a solução fundamental ϕ_m^* , pode ser expresso na forma

$$q_x^{a*} = -\frac{1}{8\pi} [x \ln(r^2) - 2x + y \operatorname{arctg}(x/y)] \quad (2.146)$$

$$q_y^{a*} = -\frac{1}{8\pi} [y \ln(r^2) - 2y + x \operatorname{arctg}(y/x)] \quad (2.147)$$

Aplicando a condição de contorno da eq. (2.127), a partir da formulação de Galerkin

$$R = \int_{\Omega} (q_{i,i} - b) \delta\phi \, d\Omega \quad (2.148)$$

onde, $(q_{i,i} - b)$ é a função ponderadora e $\delta\phi$ são os coeficientes de ponderação, chega-se a seguinte expressão

$$\int_{\Omega} (q_i^* + q_i^p) \delta \phi_{,i} d\Omega = - \int_{\Omega} b \delta \phi d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta \phi d\Gamma. \quad (2.149)$$

Após a interpolação das variáveis ϕ , de acordo com a eq. (2.129), bem como q_i^* , de acordo com a eq. (2.133), chega-se a expressão já conhecida:

$$\delta d_n \left(\int_{\Gamma} -q_{im}^* \eta_i \phi_n d\Gamma + \delta_{nm} \phi_n \right) p_m^* = \delta d_n \left(- \int_{\Gamma} \bar{q} \phi_n d\Gamma - \int_{\Gamma} q_i^p \eta_i \phi_n d\Gamma \right). \quad (2.150)$$

que, para um conjunto arbitrário de potenciais nodais $\delta \mathbf{d} \equiv \delta d_n$, obtém-se equação matricial de equilíbrio de fluxos nodais

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b. \quad (2.151)$$

A eq. (2.142) juntamente com a eq. (2.151) formam o sistema de equações do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno

$$\begin{cases} (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{W}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{cases}, \quad (2.152)$$

no qual são válidas todas as propriedades de ortogonalidade já mostradas que torna o sistema consistente.

2.9. Exemplos

2.9.1. Corpo elástico com contorno irregular (problema de elasticidade)

Neste primeiro “patch test”, uma força unitária singular é aplicada na direção x no ponto indicado na Figura 2.4 de coordenadas globais $(0, 30)$, gerando um campo de deslocamentos u_i dado por:

$$u_x = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[\frac{x^2}{r^2} - (3-4\nu)\ln(r) \right] e \quad (2.153)$$

$$u_y = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \frac{x(y-30)}{r^2}, \quad (2.154)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + (y-30)^2}$, para o coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e o módulo de elasticidade transversal $G = 9640 \text{ KN/cm}^2$. Agora, recorta-se o contorno indicado e aplica-se os efeitos do campo de deslocamentos u_i , considerando uma malha de discretização, iniciando na origem e seguindo no sentido anti-horário, de modo a se ter de 2 a 6 elementos em cada lado do contorno irregular.

Neste exemplo foram impostas condições de contorno de Dirichlet, com os deslocamentos nodais \mathbf{d} avaliados diretamente do campo de deslocamentos u_i aplicado, que permitem avaliar os parâmetros \mathbf{p}^* , de acordo com a eq. (2.122), e expressar diretamente os resultados em pontos do domínio, de acordo com as eqs. (2.15) e (2.72).

Para efeito de verificação da convergência dos resultados, os deslocamentos nas direções x e y e as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , avaliados ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4 são respectivamente mostrados nas Figura 2.5, Figura 2.6, Figura 2.7, Figura 2.8 e Figura 2.9, numa comparação com os valores analíticos.

Embora, neste exemplo, tenham sido consideradas apenas condições de contorno de Dirichlet, condições de contorno de Neumann e também condições de contorno mistas podem ser facilmente simuladas como um novo “patch test”, chegando a um padrão de convergência similar. Nota-se ainda que, apesar de que para condições de contorno de Dirichlet a segunda equação do sistema (2.114) não é necessária, já que se está interessado apenas nos resultados em pontos do domínio, a avaliação da matriz \mathbf{H} está implícita na eq. (2.113), visto que a base \mathbf{V} tem que ser obtida de acordo com a eq. (2.64) de modo a ser possível determinar os termos da diagonal principal da matriz \mathbf{U}^* .

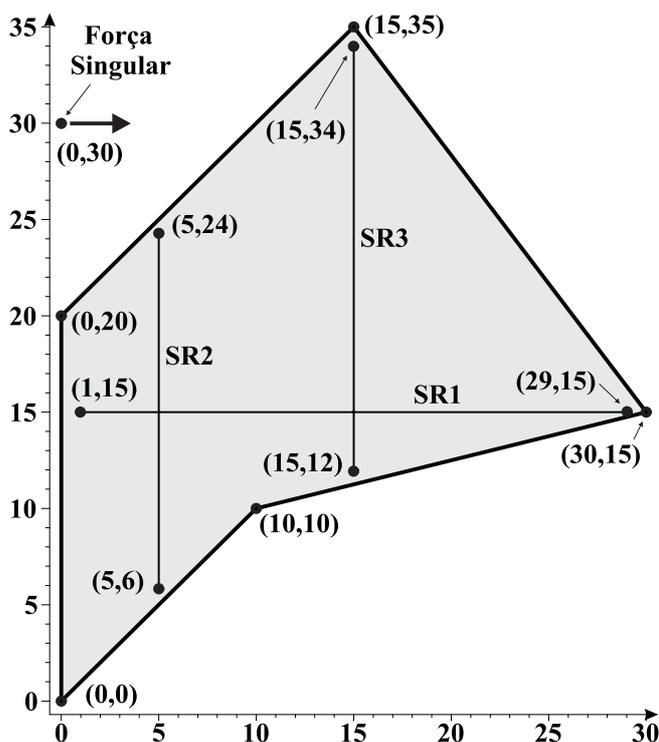


Figura 2.4 – Esquema da estrutura de contorno irregular com a força singular indicada

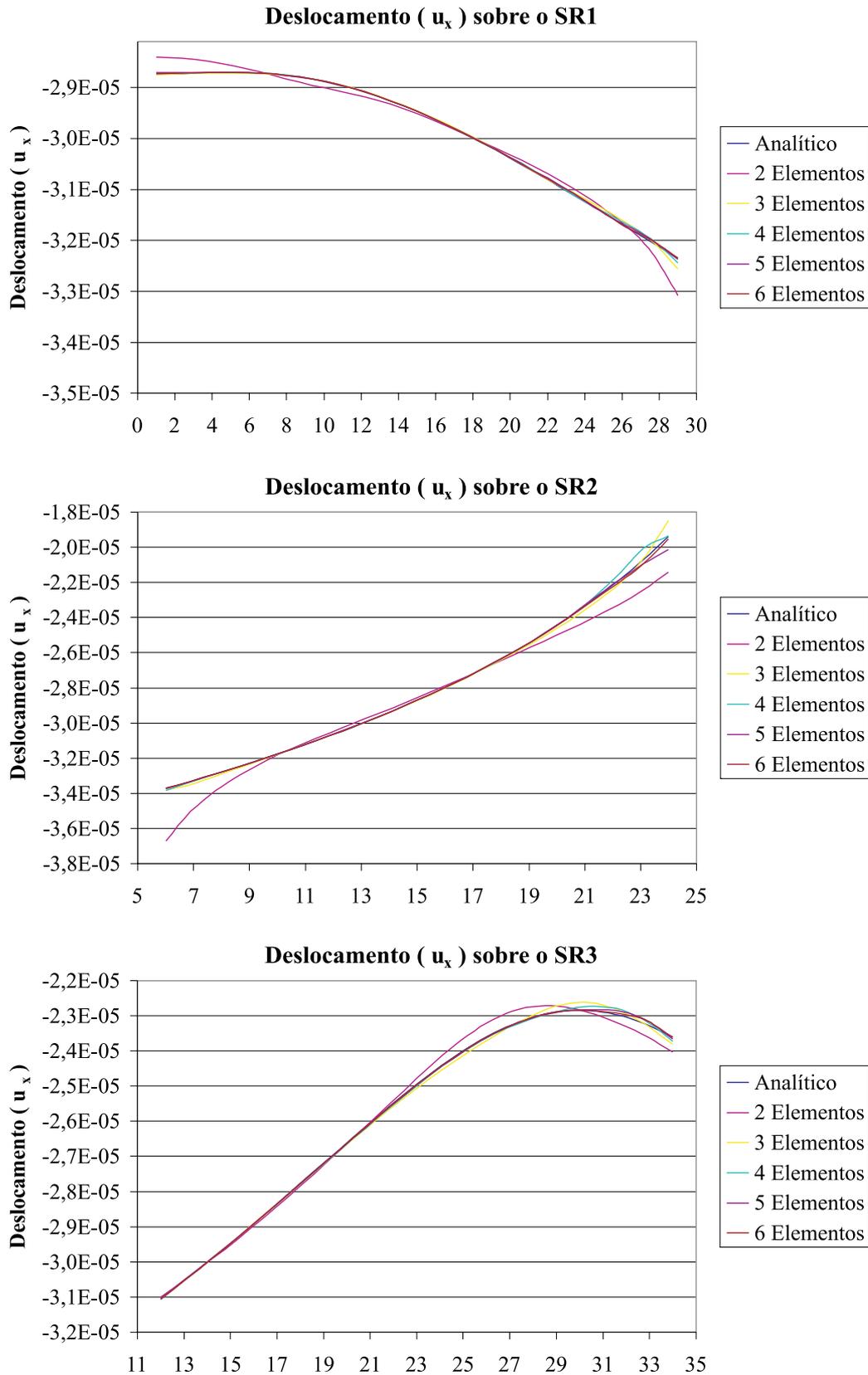


Figura 2.5 – Deslocamento na direção x ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4

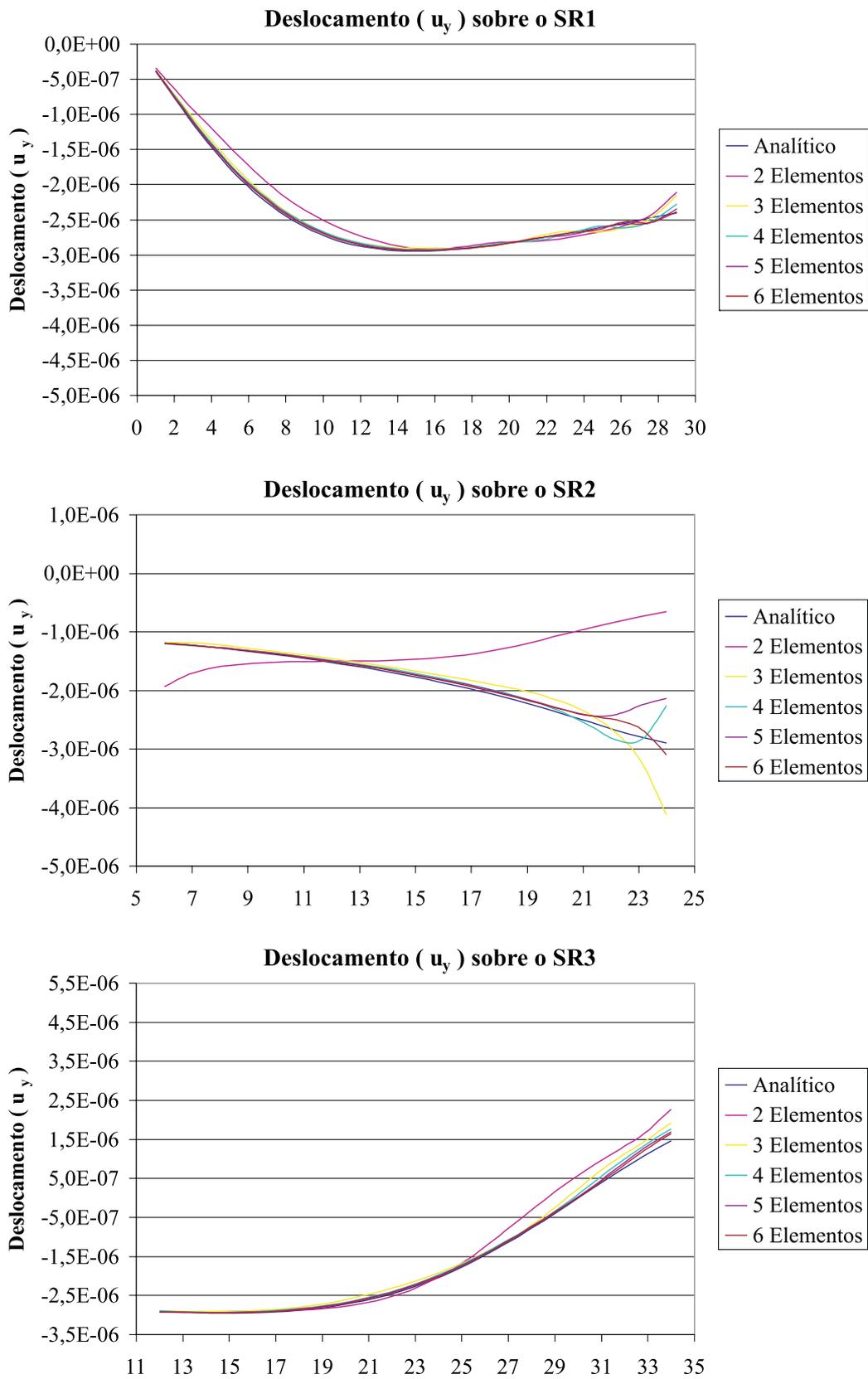


Figura 2.6 – Deslocamento na direção y ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4

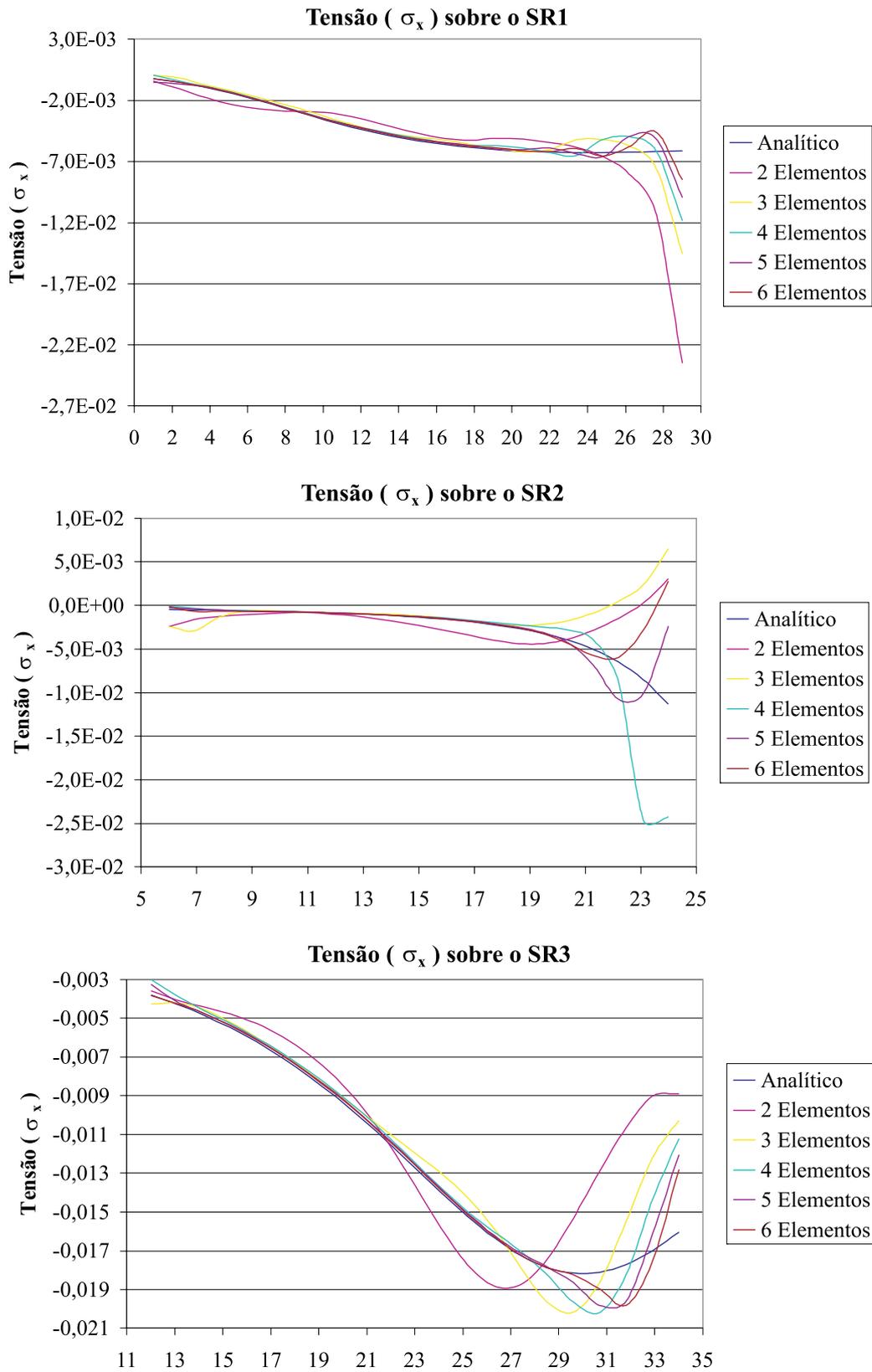


Figura 2.7 – Valores da tensão σ_x ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4

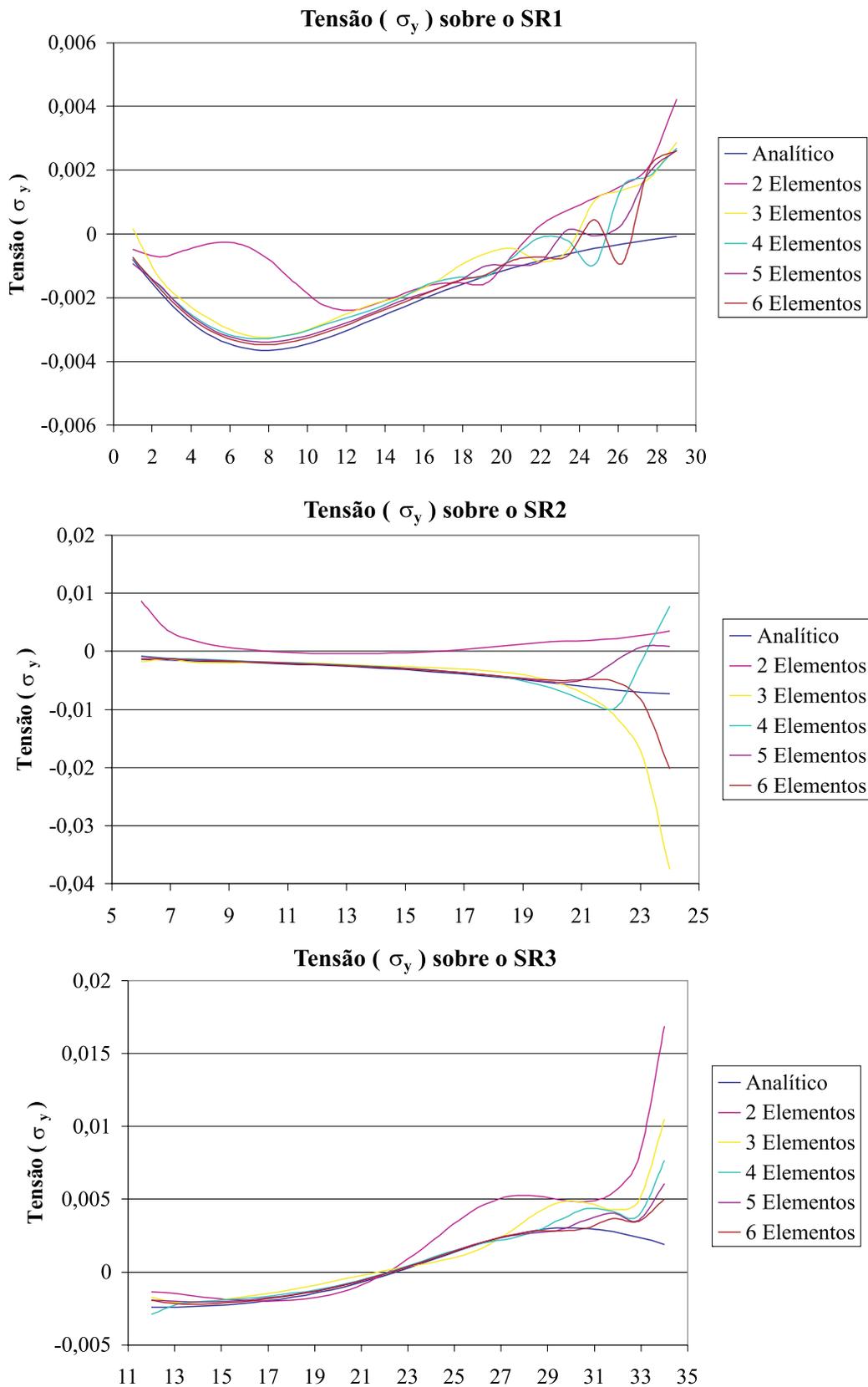


Figura 2.8 – Valores da tensão σ_y ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4

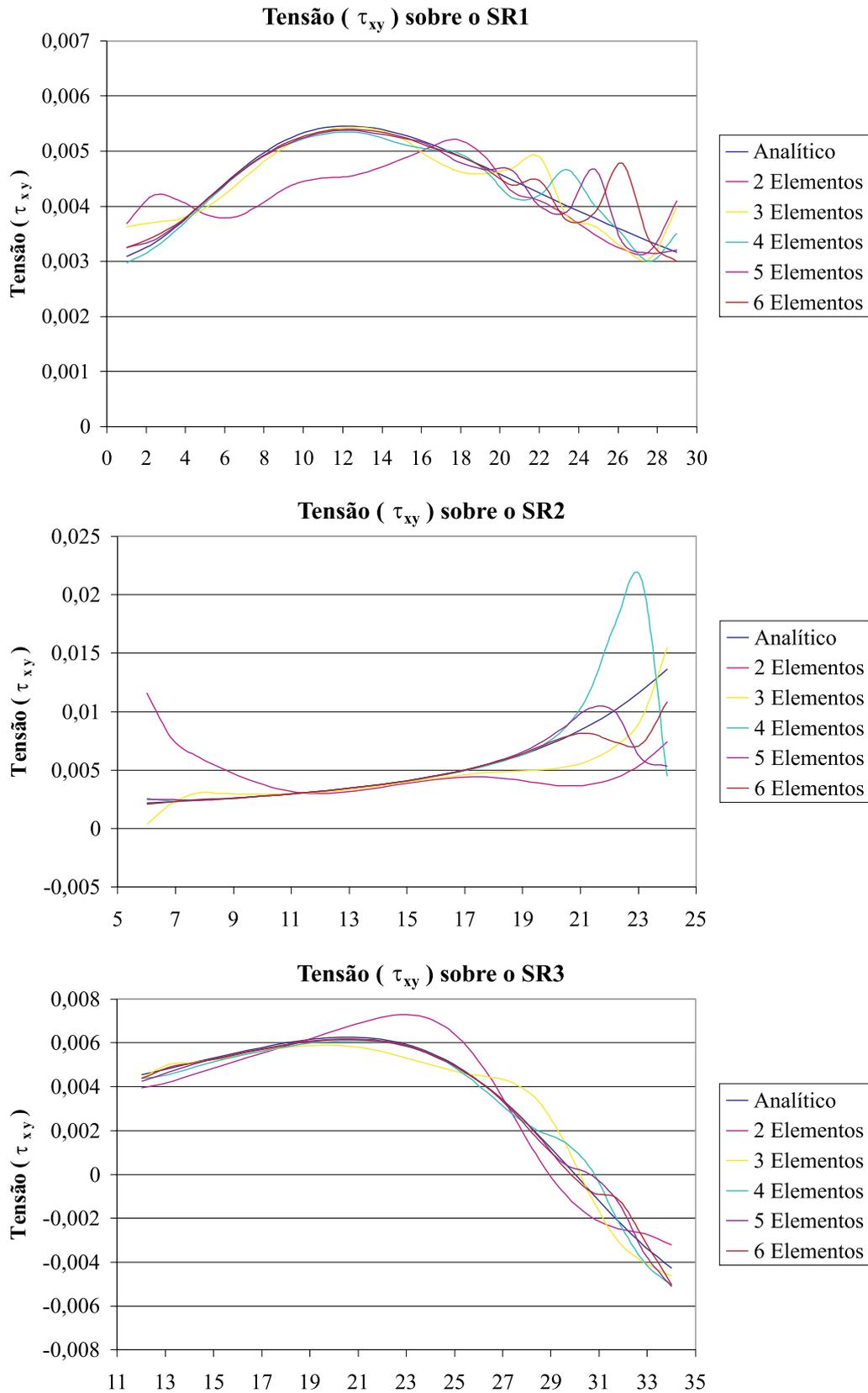


Figura 2.9 – Valores da tensão τ_{xy} ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4

2.9.2. Domínio simplesmente conexo irregular sujeito a um campo potencial

Como um segundo exemplo acadêmico, a Figura 2.10 apresenta um domínio simplesmente conexo irregular de constante $k=1$, submetido a um campo potencial

$$\phi = -\frac{1}{4\pi k} \ln[(x+10)^2 + (y-25)^2] \quad (2.155)$$

originado por uma fonte aplicada no ponto indicado de coordenadas $(-10, 25)$.

Neste exemplo foram impostas condições de contorno de Dirichlet, com o potencial nodal \mathbf{d} avaliados diretamente do campo potencial ϕ aplicado, que permitem avaliar os parâmetros \mathbf{p}^* , de acordo com a eq. (2.142), e expressar diretamente os resultados do potencial e dos gradientes nas direções x e y em pontos do domínio, de acordo com as eqs. (2.141) e (2.133), respectivamente. Estes resultados estão mostrados nas Figura 2.11, Figura 2.12 e Figura 2.13, respectivamente.

A discretização do contorno foi feita de modo a se ter de 2 a 6 elementos em cada lado do contorno irregular (iniciando na origem e seguindo no sentido anti-horário), para teste da convergência.

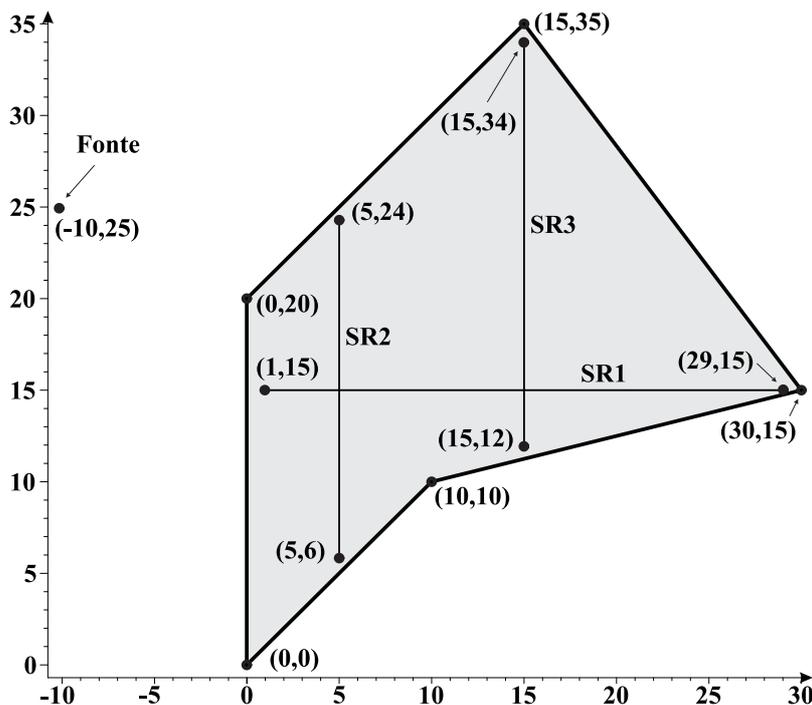


Figura 2.10 – Esquema do domínio de contorno irregular com a fonte singular indicada

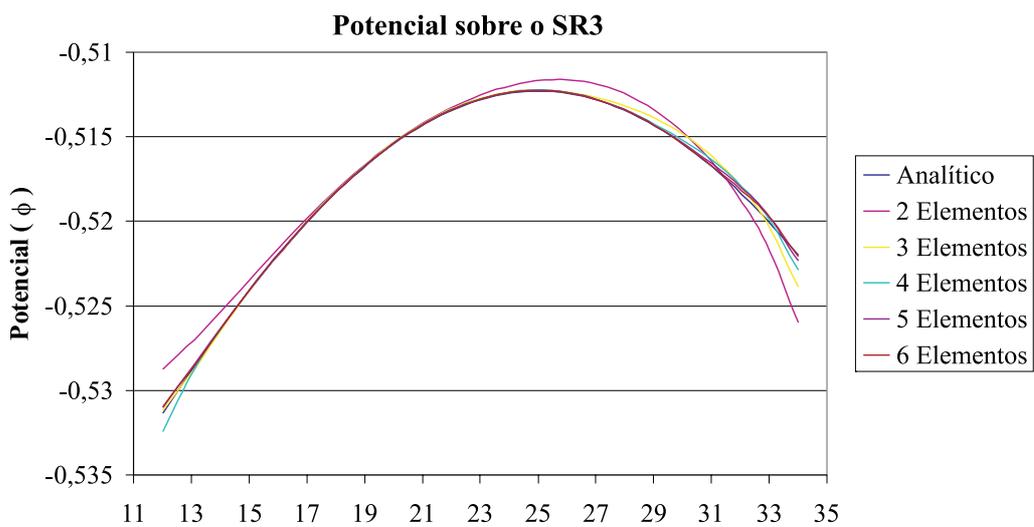
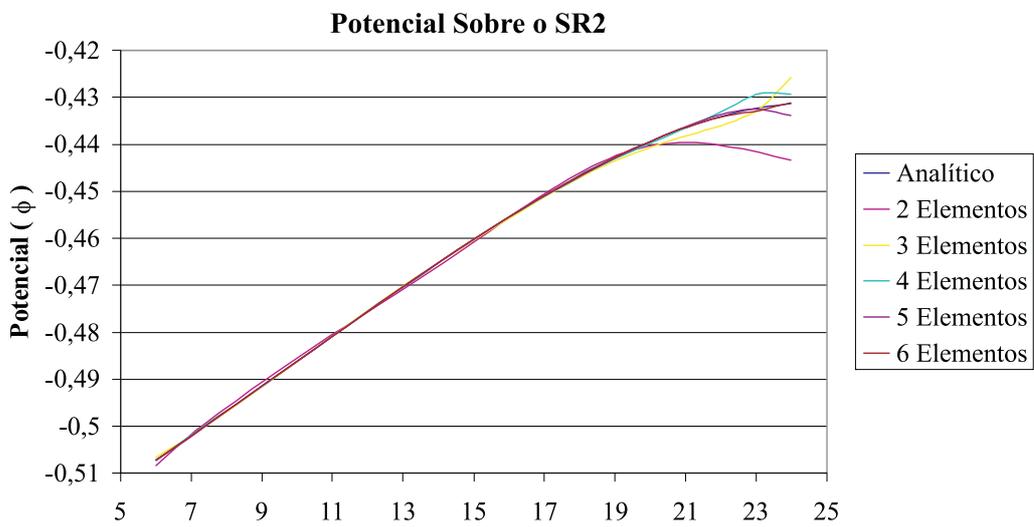
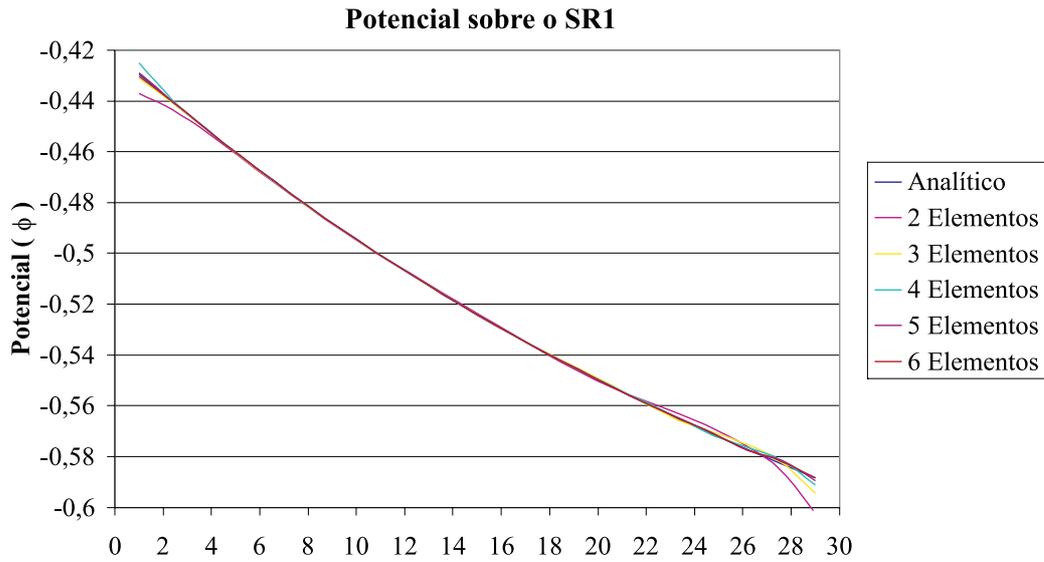


Figura 2.11 – Valores do potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.10

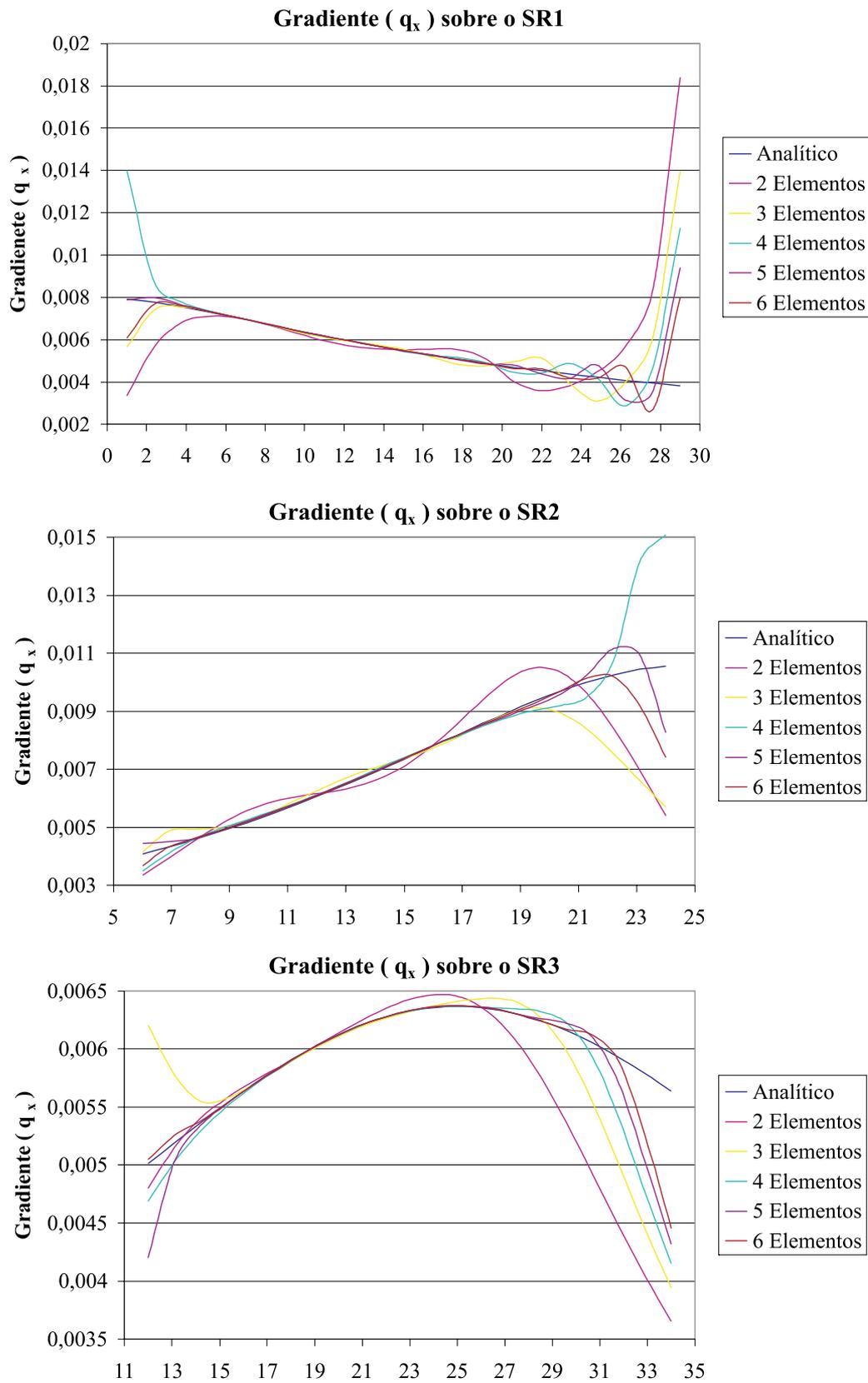


Figura 2.12 – Valores do gradiente na direção x ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.10

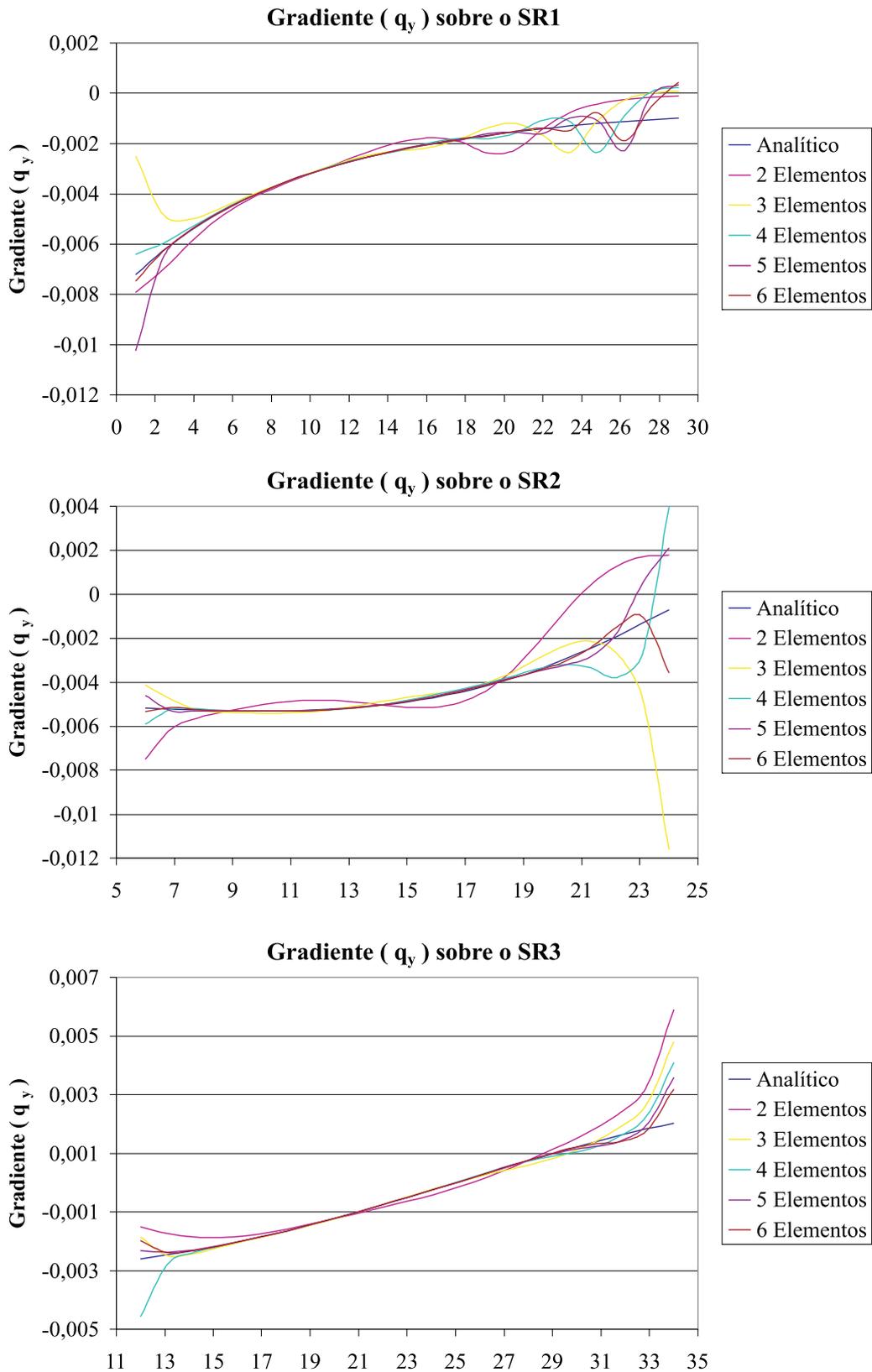


Figura 2.13 – Valores do gradiente na direção y ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.10