



Ricardo Alexandre Passos Chaves

**O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno
Aplicado a Problemas Dependentes do Tempo**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências de Engenharia Civil: Estruturas.

Orientador: Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Setembro de 2003



Ricardo Alexandre Passos Chaves

**O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno
Aplicado a Problemas Dependentes do Tempo**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Euclides de Mesquita Neto

UNICAMP

Prof. João Luis P. Roehl

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Remo Magalhães de Souza

UFPA

Prof. Webe João Mansur

COPPE/UFRJ

Prof. Ney Augusto Dumont

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 19 de setembro de 2003

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Ricardo Alexandre Passos Chaves

Graduou-se em Engenharia Civil, pela Universidade Federal do Pará, em julho de 1997. Participou do programa especial de treinamento (PET/Civil.) nos anos de 1994 a 1997. Ingressou no curso de mestrado em Engenharia Civil da PUC-Rio no ano de 1997, atuando na área de Estruturas. Titulou-se Mestre em Ciências de Engenharia Civil: Estruturas pela PUC-Rio em abril de 1999. Participou do projeto PROBRAL/99 entre Brasil e Alemanha no ano de 1999.

Ficha Catalográfica

Chaves, Ricardo Alexandre Passos

O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas Dependentes do Tempo / Ricardo Alexandre Passos Chaves; orientador: Ney Augusto Dumont. Rio de Janeiro, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2003.

[20]., 179 f.: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Elementos de contorno. 3. Problemas dependentes do tempo. 4. Análise numérica. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Para minha amada esposa Ana Raquel
(Aninha), por acreditar nos meus sonhos e
por sonhar junto comigo.

Agradecimentos

A Deus que me permitiu concretizar mais este estudo. A quem dou graças por tudo em minha vida. À Ele toda honra, toda glória e todo o louvor.

A minha querida esposa Ana Raquel de Mello Chaves por sonhar os nossos sonhos e incentivar nossos projetos de vida como uma só carne e um só coração.

Aos meus pais Argemiro Pessoa Chaves e Nadir Passos Chaves, por serem os melhores pais do mundo, sem os quais este trabalho jamais poderia ser realizado. Aos meus irmãos José Ricardo Passos Chaves e Raquel Passos Chaves, que juntamente com meus pais, enviaram-me tanto amor e força de vontade, que mesmo tão longe de casa, nunca deixei de sentir a presença de todos em meu coração.

Ao professor Ney Augusto Dumont, pelo conhecimento transmitido e confiança depositada na orientação deste trabalho. Agradeço principalmente pela amizade, tolerância e tranquilidade transmitidas nos momentos mais complicados da tese.

Aos grandes amigos Antonio Miranda, Alan Wilter, e Anderson Pereira, companheiros de apartamento que conquistaram minha amizade por toda vida.

Aos grandes amigos Chan, Salete e Alexandre Lopes, que ajudaram a superar as dificuldades deste período.

A todos os meus amigos da PUC-Rio. A todos os meus amigos da Igreja Presbiteriana da Gávea.

Resumo

Chaves, Ricardo Alexandre Passos Chaves, Dumont, Ney Augusto. **O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas Dependentes do Tempo**. Rio de Janeiro, 2003. 179p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O Método Híbrido dos Elementos de Contorno foi introduzido em 1987. Desde então, o método foi aplicado com sucesso a diferentes tipos de problemas de elasticidade e potencial, inclusive problemas dependentes do tempo. Esta Tese apresenta uma tentativa para consolidar a formulação simplificada do Método Híbrido dos Elementos de Contorno para a análise geral da resposta dinâmica de sistemas elásticos. Baseado em um método de superposição modal, um conjunto acoplado de equações diferenciais de movimento de alta ordem é transformado em um conjunto desacoplado de equações diferenciais de segunda ordem que podem ser integradas normalmente por meio de procedimentos conhecidos. Este método também é uma extensão de uma formulação introduzida por J. S. Przemieniecki, para a análise de vibração livre de barras e elementos de viga baseada em uma série de frequências. O método trata estruturas restringidas, com condições iniciais não homogêneas dadas como valores nodais e também através de campos prescritos no domínio, assim como forças genéricas de massa (além de forças inerciais). Esta tese também tem por objetivo estabelecer a consolidação conceitual da aplicação da versão simplificada do Método Híbrido dos Elementos de Contorno a materiais com gradação funcional. São obtidas várias classes de soluções fundamentais para problemas de potencial dependentes e independentes do tempo, para a análise no domínio da frequência combinada com uma técnica avançada (mencionada acima) de superposição modal baseada em séries de frequências. Com isso, consegue-se a utilização de integrais somente no contorno mesmo para materiais heterogêneos. Apresenta-se um grande número de resultados numéricos de problemas bidimensionais, para validação dos desenvolvimentos teóricos realizados.

Palavras-chave

Elementos de contorno, elementos híbridos de contorno, problemas dependentes do tempo, materiais com gradação funcional

Abstract

Chaves, Ricardo Alexandre Passos Chaves, Dumont, Ney Augusto. **The Simplified Hybrid Boundary Element Method Applied to Time-Dependent Problems**. Rio de Janeiro, 2003. 179p. DSc. Thesis – Department of Civil Engineering, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The hybrid boundary element method was introduced in 1987. Since then, the method has been successfully applied to different problems of elasticity and potential, including time-dependent problems. This thesis presents an attempt to consolidate a formulation for the general analysis of the dynamic response of elastic systems. Based on a mode-superposition technique, a set of coupled, higher-order differential equations of motion is transformed into a set of uncoupled second order differential equations, which may be integrated by means of standard procedures. The first motivation for these theoretical developments is the hybrid boundary element method, a generalization of T. H. H. Pian's previous achievements for finite elements, which, requiring only boundary integrals, yields a stiffness matrix for arbitrary domain shapes and any number of degrees of freedom. The method is also an extension of a formulation introduced by J. S. Przemieniecki, for the free vibration analysis of bar and beam elements based on a power series of frequencies. It handles constrained and unconstrained structures, non-homogeneous initial conditions given as nodal values as well as prescribed domain fields and general domain forces (other than inertial forces). This thesis also focuses on establishing the conceptual framework for applying the simplified version of the hybrid boundary element method to functionally graded materials. Several classes of fundamental solutions for steady-state and time-dependent problems of potential are derived for a frequency-domain analysis combined with an advanced mode superposition technique based on a power series of frequencies. Thus, the boundary-only feature of the method is preserved even with such spatially varying material property. Several numerical examples are given in terms of an efficient patch test for irregular bounded, unbounded and multiply connected regions submitted to high gradients.

Keywords

Boundary element methods ; hybrid boundary element method, time-dependent problems, functionally graded materials.

Sumário

1 Introdução.....	21
2 O Método Híbrido dos Elementos de Contorno e sua formulação simplificada aplicados a problemas estáticos.....	24
2.1. Equações básicas da elasticidade linear.....	24
2.2. Solução fundamental.....	26
2.3. O Potencial de Hellinger-Reissner.....	28
2.4. Formulação do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC).....	30
2.4.1. Obtenção da matriz de rigidez.....	35
2.5. Avaliação de deslocamentos em pontos do domínio considerando deslocamentos de corpo rígido.....	39
2.6. Equilíbrio de forças nodais em termos de trabalhos virtuais.....	44
2.7. Formulação do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno (MHSEC).....	46
2.7.1. Obtenção da matriz de rigidez.....	47
2.8. Particularização para problemas de potencial (Equação diferencial de Laplace e Poisson).....	49
2.9. Exemplos.....	53
2.9.1. Corpo elástico com contorno irregular (problema de elasticidade).....	53
2.9.2. Domínio simplesmente conexo irregular sujeito a um campo potencial.....	60
3 O Método Híbrido dos Elementos de Contorno e sua formulação simplificada aplicados a problemas estáticos em domínio infinito e multiplamente conexo	64
3.1. Proposição do problema em domínio infinito.....	64
3.2. Solução no Método Híbrido dos Elementos de Contorno.....	65
3.3. Solução no Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno.....	68
3.4. Aplicação do Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno a problemas em domínios multiplamente conexos.....	69
3.5. Exemplos.....	73

3.5.1. Cavidade em meio elástico infinito	73
3.5.2. Cavidade irregular em meio infinito submetida a um campo potencial	77
3.5.3. Meio multiplamente conexo irregular (problema de elasticidade).....	79
3.5.4. Domínio multiplamente conexo irregular submetido a um campo potencial	83
4 O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno aplicado a problemas dependentes do tempo	86
4.1. Equações básicas da elastodinâmica e solução fundamental.....	86
4.2. Equilíbrio de forças nodais	88
4.3. Compatibilidade de deslocamentos	90
4.4. Determinação da matriz de rigidez.....	91
4.5. Formulação no domínio da frequência	92
4.5.1. Solução fundamental para equações diferenciais hiperbólicas e parabólicas	94
4.5.2. Exemplos	96
4.5.2.1. Domínio irregular simplesmente conexo submetido a um campo potencial	96
4.5.2.2. Cavidade irregular em domínio infinito submetido a um campo potencial	100
4.5.2.3. Corpo elástico com contorno irregular submetido a um campo de deslocamentos.....	104
4.6. Análise transiente a partir da formulação no domínio da frequência.....	113
4.6.1. Técnica de superposição modal	117
4.6.2. Consideração de condições iniciais não-homogêneas.....	119
4.6.3. Avaliação de resultados em pontos do domínio	120
4.6.4. Exemplos	121
4.6.4.1. Carregamento senoidal aplicado ao recorte irregular de um elemento de treliça 1	121
4.6.4.2. Carregamento senoidal aplicado ao recorte irregular de um elemento de treliça 2	123
4.6.4.3. Aplicação súbita da aceleração da gravidade sobre corpo irregular.....	125
4.6.4.4. Velocidade inicial constante aplicada a um elemento de treliça	127
4.6.4.5. Recorte numa membrana circular submetida a velocidade inicial constante	

.....	128
4.6.4.6. Condução de calor em uma placa quadrada	130
5 O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de potencial em materiais com gradação funcional	133
5.1. Solução fundamental para problemas de potencial em regime permanente (equação de Laplace)	133
5.1.1. Primeiro caso: solução exponencial	135
5.1.2. Segundo caso: solução parabólica	138
5.1.3. Terceiro caso: solução trigonométrica	140
5.1.4. Casos sem significado físico	142
5.1.5. Implementação numérica para problemas bidimensionais	146
5.2. Solução fundamental dependente da frequência	147
5.3. Exemplos	152
5.3.1. Domínio irregular simplesmente conexo com variação exponencial da propriedade do material	152
5.3.2. Domínio irregular simplesmente conexo com variação exponencial da propriedade do material e condições de contorno mistas	155
5.3.3. Cavidade irregular em domínio infinito com variação exponencial da propriedade do material	157
5.3.4. Domínio irregular multiplamente conexo com variação parabólica da propriedade do material	160
5.3.5. Domínio irregular multiplamente conexo com variação trigonométrica da propriedade do material	162
5.3.6. Fluxo sob uma barragem	165
5.3.7. Condução de calor transiente unidimensional em uma placa quadrada com FGM	167
5.3.8. Fluxo linear sobre um lado de uma placa quadrada com FGM.....	169
6 Conclusão	171
7 Referências Bibliográficas.....	174

Lista de figuras

Figura 2.1 - Corpo elástico em equilíbrio.....	25
Figura 2.2 - Gráfico da energia interna de deformação.....	30
Figura 2.3 - Sistema de coordenadas (interno e externo), para descrição do comportamento da estrutura.	32
Figura 2.4 – Esquema da estrutura de contorno irregular com a força singular indicada.....	54
Figura 2.5 – Deslocamento na direção x ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4.....	55
Figura 2.6 – Deslocamento na direção y ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4.....	56
Figura 2.7 – Valores da tensão σ_x ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4.....	57
Figura 2.8 – Valores da tensão σ_y ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4.....	58
Figura 2.9 – Valores da tensão τ_{xy} ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.4.....	59
Figura 2.10 – Esquema do domínio de contorno irregular com a fonte singular indicada.....	60
Figura 2.11 – Valores do potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.10.....	61
Figura 2.12 – Valores do gradiente na direção x ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.10.....	62
Figura 2.13 – Valores do gradiente na direção y ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 2.10.....	63
Figura 3.1 - Domínio infinito dividido em dois subdomínios.	65
Figura 3.2 - Corpo elástico com domínio múltiplamente conexo	70
Figura 3.3 – Esquema da cavidade de contorno irregular com a força singular indicada.....	74

Figura 3.4 – Deslocamento na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3	74
Figura 3.5 – Deslocamento na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3	75
Figura 3.6 – Valores da tensão σ_x ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3	75
Figura 3.7 – Valores da tensão σ_y ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.3	76
Figura 3.8 – Valores da tensão τ_{xy} ao longo dos segmentos de reta Figura 3.3 ...	76
Figura 3.9 – Esquema da cavidade de contorno irregular com a fonte singular indicada.....	77
Figura 3.10 – Valores do potencial ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.9	78
Figura 3.11 – Gradiente na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.9	78
Figura 3.12 – Gradiente na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.9	79
Figura 3.13 – Esquema da estrutura de contorno irregular com a força singular indicada.....	80
Figura 3.14 – Deslocamento na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13.....	80
Figura 3.15 – Deslocamento na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13.....	81
Figura 3.16 – Valores da tensão σ_x ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13	81
Figura 3.17 – Valores da tensão σ_y ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13	82
Figura 3.18 – Valores da tensão τ_{xy} ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.13	82
Figura 3.19 – Esquema do domínio multiplamente conexo de contorno irregular com a fonte singular indicada.....	83
Figura 3.20 – Valores do potencial ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.19	

.....	84
Figura 3.21 – Gradiente na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.19	84
Figura 3.22 – Gradiente na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 3.19	85
Figura 4.1 – Esquema do corpo de contorno irregular com a fonte indicada.....	97
Figura 4.2 – Potencial ao longo do segmentos de reta indicados na Figura 4.1	97
Figura 4.3 – Fluxo na direção x ao longo do segmentos de reta da Figura 4.1	98
Figura 4.4 – Fluxo na direção y ao longo do segmentos de reta da Figura 4.1	98
Figura 4.5 – Potencial ao longo do segmentos de reta indicados na Figura 4.1	99
Figura 4.6 – Fluxo na direção x ao longo do segmentos de reta da Figura 4.1	99
Figura 4.7 – Fluxo na direção y ao longo do segmentos de reta da Figura 4.1 ...	100
Figura 4.8 – Esquema da cavidade de contorno irregular com a fonte indicada.	101
Figura 4.9 – Potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 4.8	101
Figura 4.10 – Fluxo na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8	102
Figura 4.11 – Fluxo na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8	102
Figura 4.12 – Potencial ao longo dos segmentos de reta indicados na Figura 4.8	103
Figura 4.13 – Fluxo na direção x ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8	103
Figura 4.14 – Fluxo na direção y ao longo dos segmentos de reta da Figura 4.8	104
Figura 4.15 – Esquema da estrutura de contorno irregular com a força singular indicada.....	105
Figura 4.16 – Amplitude do deslocamento na direção x sobre os segmentos de reta indicados na Figura 4.15.....	106
Figura 4.17 – Amplitude do deslocamento na direção y sobre os segmentos de reta indicados na Figura 4.15.....	107
Figura 4.18 – Amplitude da tensão σ_x sobre os segmentos de reta da Figura 4.15	108
Figura 4.19 – Amplitude da tensão σ_y sobre os segmentos de reta da Figura 4.15	109
Figura 4.20 – Amplitude da tensão τ_{xy} sobre os segmentos de reta da Figura 4.15	110
Figura 4.21 – Carregamento nodal equivalente na direção x para as três	

discretizações.....	111
Figura 4.22 – Carregamento nodal equivalente na direção y para as três discretizações.....	112
Figura 4.23 – Esquema do corpo com contorno irregular recortado do elemento de treliça	122
Figura 4.24 – As 40 primeiras frequências naturais do corpo e do elemento de treliça	122
Figura 4.25 – Resposta do deslocamento no ponto A indicado na Figura 4.23 ..	123
Figura 4.26 – Esquema do corpo com contorno irregular recortado do elemento de treliça	124
Figura 4.27 – Resposta do deslocamento no ponto A indicado na Figura 4.26 ..	124
Figura 4.28 – Resposta do deslocamento ao longo do segmento de reta da Figura 4.26	124
Figura 4.29 – Esquema do corpo com contorno irregular recortado do elemento de treliça	125
Figura 4.30 – Deslocamentos nodais ao longo do contorno.....	126
Figura 4.31 – Deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.29.....	126
Figura 4.32 – Deslocamento ao longo do segmento de reta tracejado da Figura 4.29	126
Figura 4.33 – Elemento de treliça submetido a velocidade inicial constante.....	127
Figura 4.34 – Deslocamentos nodais ao longo do contorno.....	127
Figura 4.35 – Deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.33.....	128
Figura 4.36 – Deslocamento ao longo do segmento de reta tracejado da Figura 4.33	128
Figura 4.37 – Esquema do recorte na membrana e detalhe da discretização do contorno.....	129
Figura 4.38 – Esquema do campo de deslocamentos num Instante de tempo.....	129
Figura 4.39 – Resposta do deslocamento do ponto A indicado na Figura 4.37 ..	130
Figura 4.40 – Esquema da estrutura e discretização do contorno	131
Figura 4.41 – Variação da temperatura ao longo do lado AB	131
Figura 4.42 – Variação da temperatura ao longo do lado AB em escala menor .	132
Figura 5.1 – Sistema de coordenadas para descrição de um FGM.....	134
Figura 5.2 – Padrões de variação ilustrativos da função exponencial $k(z)$	138

Figura 5.3 – Padrões de variação ilustrativos da função polinomial $k(z)$	140
Figura 5.4 – Padrões de variação ilustrativos da função trigonométrica $k(z)$	142
Figura 5.5 – Esquema da função $k(z)$ e do contorno irregular com a fonte indicada.....	153
Figura 5.6 – Potencial ao longo do segmento de reta tracejado	154
Figura 5.7 – Fluxo na direção x ao longo do segmento de reta tracejado	154
Figura 5.8 – Fluxo na direção z ao longo do segmento de reta tracejado.....	154
Figura 5.9 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 15 elementos	155
Figura 5.10 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 38 elementos	155
Figura 5.11 – Esquema da função $k(z)$ e do contorno irregular com a fonte indicada.....	156
Figura 5.12 – Potencial ao longo do segmento de reta tracejado	156
Figura 5.13 – Fluxo na direção x ao longo do segmento de reta tracejado	156
Figura 5.14 – Fluxo na direção z ao longo do segmento de reta tracejado.....	157
Figura 5.15 – Esquema da função $k(z)$ e do contorno irregular com a fonte indicada.....	158
Figura 5.16 – Potencial ao longo do segmento de reta tracejado	158
Figura 5.17 – Fluxo na direção x ao longo do segmento de reta tracejado	158
Figura 5.18 – Fluxo na direção z ao longo do segmento de reta tracejado.....	159
Figura 5.19 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 15 elementos	159
Figura 5.20 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 38 elementos	159
Figura 5.21 – Esquema da função $k(z)$ e do contorno irregular com a fonte indicada.....	160
Figura 5.22 – Potencial ao longo do segmento de reta tracejado	161
Figura 5.23 – Fluxo na direção x ao longo do segmento de reta tracejado	161
Figura 5.24 – Fluxo na direção z ao longo do segmento de reta tracejado.....	161
Figura 5.25 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 47 elementos	162
Figura 5.26 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 78 elementos	162
Figura 5.27 – Esquema da função $k(z)$ e do contorno irregular com a fonte indicada.....	163
Figura 5.28 – Potencial ao longo do segmento de reta tracejado	164
Figura 5.29 – Fluxo na direção x ao longo do segmento de reta tracejado	164
Figura 5.30 – Fluxo na direção z ao longo do segmento de reta tracejado.....	164

Figura 5.31 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 47 elementos	165
Figura 5.32 – Fluxo nodal equivalente para discretização com 78 elementos	165
Figura 5.33 – Fluxo de água sobre uma barragem e malha de elementos de contorno	166
Figura 5.34 – Fluxo ao longo do segmento AC.....	166
Figura 5.35 – Fluxo ao longo do segmento BD.....	167
Figura 5.36 – Potencial ao longo da base AB da fundação	167
Figura 5.37 – Propriedades do material, esquema da estrutura e condições de contorno	168
Figura 5.38 – Potencial ao longo do lado $X = 0$ para alguns instantes de tempo	169
Figura 5.39 – Propriedades do material, esquema da estrutura e condições de contorno	170
Figura 5.40 – Potencial ao longo do lado $X = 1$ para alguns instantes de tempo	170

Lista de Símbolos

Caracteres latinos:

\mathbf{A}	Matriz quadrada não-singular arbitrária
\mathbf{b}_m, \mathbf{b}	Vetor de deslocamentos do sistema interno equivalentes ao campo de deslocamentos referentes às forças de massa
C, C_1, C_2, C_3	Constantes arbitrárias
C_{sm}, \mathbf{C}	Matriz de constantes de corpo rígido
\mathbf{C}^r	Matriz de constantes de corpo rígido relacionada a u_{is}^r
\mathbf{C}^*	Matriz de constantes de corpo rígido relacionada a u_{im}^*
\mathbf{C}_w	Matriz de constantes de corpo rígido obtida a partir de \mathbf{W}
\mathbf{C}_w^r	Matriz de constantes de corpo rígido relacionada a u_{is}^r obtida a partir de \mathbf{W}
\mathbf{C}_w^*	Matriz de constantes de corpo rígido relacionada a u_{im}^* obtida a partir de \mathbf{W}
\mathbf{c}_s, \mathbf{c}	Vetor de constantes de corpo rígido
$\mathbf{c}_r^p, \mathbf{c}^p$	Vetor de constantes de corpo rígido relacionado a u_i^p
\mathbf{c}_w	Vetor de constantes de corpo rígido obtido a partir de \mathbf{W}
\mathbf{c}_w^p	Vetor de constantes de corpo rígido relacionado a u_i^p obtido a partir de \mathbf{W}
C_{ijkl}	Tensor da relação constitutiva
\mathbf{d}_m, \mathbf{d}	Deslocamentos nodais do sistema externo
$\mathbf{d}_m^*, \mathbf{d}^*$	Deslocamentos nodais equivalentes do sistema interno
\mathbf{E}	Projetor ortogonal
$\bar{\mathbf{F}}_i$	Forças de massa prescritas
$\mathbf{F}_{mn}, \mathbf{F}$	Matriz de flexibilidade do sistema interno
$\bar{\mathbf{F}}$	Matriz de flexibilidade no sistema interno para meio infinito
$\bar{\mathbf{F}}_\infty$	Matriz de flexibilidade no sistema interno avaliada em Γ_∞

G	Módulo de elasticidade transversal
H_{mn}, \mathbf{H}	Matriz de incidência cinemática
\bar{H}	Matriz de incidência cinemática para meio infinito
\bar{H}_∞	Matriz de incidência cinemática avaliada em Γ_∞
K_{ij}	Constante potencial
K_{mn}, \mathbf{K}	Matriz de rigidez do sistema externo
\bar{K}	Matriz de rigidez do sistema externo para meio infinito
p_m, \mathbf{p}	Vetor de forças nodais equivalentes
p_m^*, \mathbf{p}^*	Vetor de forças singulares
p_{im}^*	Função de transformação de forças referente à solução fundamental
\bar{p}	Vetor de forças nodais equivalentes para meio infinito
\bar{p}_∞	Vetor de forças nodais equivalentes avaliado em Γ_∞
q_i	Gradientes
q_{im}^*	Função de transformação de gradientes referente à solução fundamental
q_i^a	Função auxiliar de gradientes
q_{im}^{a*}	Função auxiliar de gradientes referentes a solução fundamental
r	Raio
r_s, \mathbf{r}	Vetor dos parâmetros de corpo rígido
t_m, \mathbf{t}	Vetor de forças nodais do sistema externo, equivalentes às forças de massa
T_i	Componentes do vetor de forças de superfície
\bar{T}_i	Forças de superfície prescritas
T_i^*	Forças de superfície referentes à solução fundamental
u_i	Vetor de deslocamentos
\bar{u}_i	Deslocamentos prescritos
u_i^*	Deslocamentos referentes à solução fundamental
u_i^p, \mathbf{u}^p	Deslocamentos referentes à solução particular da equação de equilíbrio
u_i^{*n}	Deslocamentos totais referentes às forças de massa

u_{ij}	Funções de interpolação de deslocamentos
u_{im}^*	Função de transformação de deslocamentos referente à solução fundamental
u_{is}^r, \mathbf{u}^r	Funções arbitrárias de corpo rígido
u_{kr}^a, \mathbf{u}^a	Função auxiliar de deslocamentos
u_{km}^{a*}	Função auxiliar de deslocamentos referentes a solução fundamental
\mathbf{U}^*	Matriz dos valores de u_{im}^* avaliados nos pontos nodais
\mathbf{U}^r	Matriz dos valores de u_{is}^r avaliados nos pontos nodais
$U_0(\epsilon_{ij})$	Densidade de energia interna de deformação
$U_0^C(\sigma_{ij})$	Densidade de energia interna na forma complementar
$U_0^{*C}(\sigma_{ij})$	Densidade de energia interna na forma complementar, referente ao sistema interno
\mathbf{V}	Matriz cujas colunas formam a base ortonormal das forças singulares que correspondem a forças nodais equivalentes nulas
$\tilde{\mathbf{V}}$	Matriz cujas colunas formam uma base das forças singulares que correspondem a forças nodais equivalentes nulas
\mathbf{W}	Matriz cujas colunas formam a base ortonormal dos deslocamentos de corpo rígido
w_{is}^r, \mathbf{w}^r	Funções de corpo rígido associadas a \mathbf{W}
x	Coordenadas cartesianas
\mathbf{X}	Matriz cujas colunas formam uma base dos deslocamentos de corpo rígido
y	Coordenadas cartesianas

Caracteres gregos:

Δ_{im}	Delta de Dirac
Φ	Função potencial
Γ	Contorno arbitrário
$\bar{\Gamma}$	Contorno arbitrário para meio infinito
Γ_∞	Contorno arbitrário no infinito

Γ_u	Região do contorno onde se têm deslocamentos prescritos
Γ_σ	Região do contorno onde se têm forças prescritas
Π	Energia potencial total
Π_g	Forma generalizada da energia potencial total
Π_R	Potencial de Hellinger-Heissner
Ω	Domínio do corpo elástico
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ_{ij}	Deformações
γ	Matriz de transformação
η_j	Cosenos diretores de um elemento de superfície
λ_{ij}, λ_i	Multiplicadores de Lagrange
ν	Coefficiente de Poisson
π	Constante
θ	Potencial
θ_m^*	Função de transformação de potencial referente à solução fundamental
θ^r	Função potencial arbitrária que denota deslocamento de corpo rígido
θ^a	Função auxiliar de potencial
σ_{ij}	Tensões normais
σ_{ij}^*	Tensões referentes à solução fundamental
σ_{ij}^{*n}	Tensões totais referentes às forças de massa
σ_{ij}^{*p}	Tensões referentes à solução particular da equação de equilíbrio
σ_{ijm}^*	Função de transformação de tensões referente à solução fundamental
σ_{ijr}^a	Função auxiliar de tensões
σ_{ijm}^{a*}	Função auxiliar de tensões referentes a solução fundamental
σ_{ij}^{ap}	Função auxiliar de tensões referentes a solução particular
τ_{ij}	Tensões cisalhantes
ξ	Coordenadas paramétricas
ρ	Densidade do material