

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Lucas do Nascimento Sagrilo**

**Otimização das Dimensões da Seção Transversal de um  
Chassi para Veículos Comerciais**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica  
da PUC-Rio

Orientador: Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2019

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao Professor Ivan Menezes pelo grande auxílio e pela total disponibilidade durante a realização deste projeto. Seu bom humor e sua interminável motivação em auxiliar seus alunos são admiráveis, o que acaba nos contagiando e motivando a seguir carreira fazendo pesquisas e desenvolvendo novos trabalhos.

Um agradecimento especial também à minha família pelo apoio e suporte durante toda a minha Graduação. Claro que também agradeço à meu pai por toda a ajuda durante a realização de meu trabalho e pelos seus constantes “pitacos”, do desenvolvimento do código até a redação do relatório, que mesmo que não tenha obedecido à todos, com certeza ajudaram e muito em meu projeto.

Aos meus amigos de longa data, João Pedro Cunha, Mateus Bastos e Henrique Santiago que sempre estiveram presentes durante a minha faculdade e que sempre me acompanharam nos momentos de dificuldades, mas que também garantiram boas gargalhadas, juntamente com aqueles que se juntaram à família já nos tempos de PUC, Anna Letícia, Antônio Galvão e Marcelo Durães.

Também gostaria de agradecer aos amigos que conheci durante a graduação e que foram companheiros durante o Duplo Diploma, Caio Filippo, Daniel da Costa, Victor Cozza, Gabriel Favalessa, Vitor Rohde e Marcos Saito. Com certeza sem o apoio e a ajuda de vocês não teria vencido essa que talvez tenha sido a etapa mais difícil de minha vida.

Claro que agradeço à todo o Corpo Docente da PUC-Rio envolvido na Graduação em Engenharia Mecânica pela formação de excelente qualidade, assim como à todos os Professores da CentraleSupélec que tive contato durante o Duplo Diploma. Um agradecimento também ao Professor Sérgio Lifschitz e a toda a equipe da CCCI por possibilitar o intercâmbio de alunos e a CAPES pela concessão da bolsa BRAFITEC que financiou meus estudos no exterior.

Finalmente, um abraço especial aos amigos Olivier Prin, Nicolas Gallice e Laurent Conte que me acompanharam durante seis meses em meu estágio, com quem aprendi muito e que, com certeza, fizeram parte de minha graduação. Espero revê-los algum dia!

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional que efetue o dimensionamento ótimo de uma viga tendo em vista a redução de seu peso, sujeita a determinadas restrições e, em seguida, aplicá-lo ao caso de uma longarina de um chassi para caminhões e ônibus. Para isto, são apresentados o Método da Rigidez Direta, teoria utilizada para o cálculo de esforços e deslocamentos e, em seguida, a teoria de Programação Matemática e sua implementação tendo em vista a obtenção de resultados ótimos. O funcionamento do programa consiste em gerar dimensões para a seção transversal de uma viga, dentro de um intervalo de valores possíveis, testar se tais dimensões satisfazem as condições impostas por meio do Método da Rigidez, verificando tensão máxima de flexão e máximo deslocamento vertical, verificando também as restrições necessárias para evitar a flambagem da viga, e prosseguir a iteração do algoritmo de otimização até a obtenção do resultado ótimo.

**Palavras-chave:** Programação Matemática. Otimização. Método da Rigidez Direta. Elementos de Vigas. Deslocamentos. Flexão. Tensões.

## **ABSTRACT**

The aim of this work is the development of a computer program that performs the optimal dimensioning of a beam, minimizing its weight, subjected to some constraints, and to apply this code to the sizing of the longitudinal members of a frame used in trucks and buses. For that, two methods are employed: the Stiffness Method used for assessing the internal forces, load effects and displacements; and the Mathematical Programming approach for obtaining the optimal solution. The operating mode of the program is to generate values for the cross-section dimensions in an interval of possible values for each dimension, and verify by the Stiffness Method if the imposed constraints regarding the maximum bending stress and maximum vertical displacement are satisfied. Additionally, it is also checked if the cross-section dimensions satisfy the constraints to avoid beam lateral buckling. After the verification, the algorithm continues the iterations, until it finds the optimal results.

**Key words:** Mathematical Programming. Optimization. Stiffness Method. Beam Elements. Displacements. Bending. Strain.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>7</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>9</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>10</b>
<b>1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>15</b>
<b>3 – MODELAGEM DO PROBLEMA .....</b>	<b>17</b>
3.1 – Contextualização .....	17
3.2 – Determinação dos valores do carregamento uniforme .....	18
3.3 – Condições de apoio .....	22
<b>4 – MÉTODO DA RIGIDEZ.....</b>	<b>24</b>
4.1 – Introdução.....	24
4.2 – Conceito de deslocamento nodal.....	24
4.3 – Efeitos dos carregamentos nodais .....	25
4.4 – Matriz de Rigidez de Elemento .....	27
4.5 – Construção da Matriz de Rigidez Global .....	28
4.6 – Nós restringidos e condições de contorno .....	31
4.7 – Carregamentos Uniformemente Distribuídos e o Método da Rigidez .....	33
4.8 – Cálculo dos deslocamentos nodais .....	33
4.9 – Cálculo das Reações de Extremidade dos Membros.....	34
4.10 – Reações de Apoio.....	35
<b>5 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA .....</b>	<b>37</b>
5.1 – Introdução.....	37
5.2 – O Problema Geral de Programação Matemática .....	37
5.3 – Método para Resolução do Problema de Otimização .....	38
<b>6 – SOLUÇÃO DO PROBLEMA .....</b>	<b>41</b>
6.1 – Definição dos Parâmetros do Material .....	41
6.2 – Restrições à flambagem .....	41
6.3 – Dados de entrada .....	42
6.4 – Valores máximos admissíveis e Fatores de Segurança .....	43
6.5 – Refinamento da Malha .....	44
6.6 – Passos para a execução do programa .....	45

<b>7 – RESULTADOS OBTIDOS.....</b>	<b>48</b>
7.1 – Resultados após execução do programa.....	48
7.2 – Análise dos resultados .....	49
<b>8 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>50</b>
8.1 – Conclusão Geral e Comentários .....	50
8.2 – Sugestões para Trabalhos Futuros .....	50
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>52</b>
ANEXO 1: Ficha Técnica do Volksbus 17.230OD .....	54
ANEXO 2: Função <i>Main</i> .....	55
ANEXO 3: Função <i>RefinaMalha</i> .....	57
ANEXO 4: Função <i>GetConstraints</i> .....	59
ANEXO 5: Função <i>GetWeight</i> .....	62

## LISTA DE SÍMBOLOS

$q_1$	Carregamento Uniforme devido à parte dianteira (kN/m)
$q_2$	Carregamento Uniforme devido à parte central e traseira (kN/m)
$R_1$	Resultante no Eixo Dianteiro (kN)
$R_2$	Resultante no Eixo Traseiro (kN)
$B_d$	Balanço dianteiro do chassi (m)
$B_t$	Balanço Traseiro do chassi (m)
$L$	Comprimento total do chassi (m)
$P_M$	Peso estimado do motor (kN)
$b$	Base do perfil estrutural da longarina (m)
$h$	Altura do perfil estrutural da longarina (m)
$t_w$	Espessura da alma do perfil estrutural da longarina (m)
$t_f$	Espessura dos flanges do perfil estrutural da longarina (m)
$\rho$	Densidade do material da viga (g/cm <sup>3</sup> )
$E$	Módulo de Elasticidade do material da viga (Pa)
$I$	Momento de Inércia de área em relação ao eixo vertical da seção transversal da viga (m <sup>4</sup> )
$U_i$	Vetor de Deslocamento Nodal
$R_i$	Reação de Extremidade Nodal
$S$	Matriz de Rigidez de Elemento
$S_{i,j}$	Rigidez do Grau de Liberdade $j$ devido ao deslocamento $i$
$P$	Vetor de Carregamentos
$F$	Vetor de Graus de Liberdade
$P_L$	Vetor de Carregamentos dos Graus Liberados
$S_{ML}$	Matriz de Rigidez da Estrutura Liberada
$U_L$	Vetor de Deslocamentos dos Graus de Liberdade Liberados
$S_{RL}$	Matriz de Rigidez da Estrutura Restringida
$P_R$	Vetor de Carregamentos dos Graus Restringidos
$n$	Número de Graus de Liberdade

$\sigma_E$	Tensão de Escoamento (Pa)
$N_B$	Matriz de nós
$E_B$	Matriz de Propriedades dos Elementos
$S_B$	Matriz de Restrições de Nó
$\Delta$	Deslocamento Vertical de Nó (m)
$\theta$	Rotação de Nó (rad)



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Chassi Volksbus 17.230OD .....	12
Figura 1.2 – Ônibus de transporte rodoviário utilizando o Volksbus 17.230OD .....	12
Figura 1.3 – Caminhão sobre um chassi similar ao Volksbus 17.230OD .....	13
Figura 1.4 – Longarinas e travessas em um chassi para ônibus e caminhões .....	13
Figura 1.5 – Detalhe de fixação de uma mola parabólica a uma longarina .....	14
Figura 3.1 – Dimensões do Volksbus 17.230OD .....	17
Figura 3.2 – Representação dos carregamentos uniformes em um chassi de dois eixos	18
Figura 3.3 – Modelagem simplificada dos carregamentos incidentes sobre uma longarina .....	19
Figura 3.4 – Esboço da seção transversal da longarina .....	19
Figura 3.5 – Esboço da vista superior da longarina e suas dimensões .....	20
Figura 3.6 – Modelagem hiperestática dos carregamentos incidentes sobre uma longarina .....	23
Figura 4.1 – Discretização de uma viga bi-apoiada .....	24
Figura 4.2 – Numeração dos esforços atuantes nos nós .....	25
Figura 4.3 – Elemento restringido .....	26
Figura 4.4 – Efeito dos deslocamentos do nó e dos nós adjacentes .....	28
Figura 4.5 – Numeração dos deslocamentos do nó e dos nós adjacentes .....	29
Figura 4.6 – Matrizes de Rigidez de Elemento identificadas na Matriz de Rigidez Global .....	30
Figura 4.7 – Construção da Matriz de Rigidez Global a partir da superposição das Matrizes de Elemento .....	30
Figura 4.8 – Viga engastada à esquerda e rotulada à direita .....	31
Figura 6.1 – Localização dos nós recomendados pelo Método da Rigidez .....	42
Figura 7.1 – Perfil da seção transversal obtido após otimização .....	49

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 –	Parâmetros e valores da modelagem da viga isostática .....	22
Tabela 4.1 –	Ações de engastamento devido à deslocamentos de extremidades .....	26
Tabela 4.2 –	Numeração dos graus de liberdade da Figura 4.8 .....	31
Tabela 4.3 –	Equivalência estática de um carregamento uniformemente distribuído .....	33
Tabela 6.1 –	Parâmetros do Aço ASTM A36 .....	41
Tabela 7.1 –	Primeira Execução do Programa .....	48
Tabela 7.2 –	Segunda Execução do Programa .....	48
Tabela 7.3 –	Terceira Execução do Programa .....	48
Tabela 7.4 –	Quarta Execução do Programa .....	48

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUÇÃO**

Sabe-se que o transporte rodoviário é de fundamental importância para o desenvolvimento e para a economia de um país. Segundo [8], 60% do volume total de cargas transportadas no Brasil é pelo modal rodoviário. Além disso, uma grande quantidade de brasileiros que optam pelo ônibus como meio de transporte, seja para trajetos rotineiros entre domicílio e trabalho, seja para viagens rodoviárias de curta, média ou longa distância.

O Brasil é um dos maiores produtores de itens primários, tais como grãos e carne bovina. Vale ressaltar que grande parte da produção está em regiões interioranas do país, longe dos grandes centros consumidores e dos locais de embarque para exportação. Dessa forma, faz-se necessário o transporte até esses locais, e como o país ainda carece de uma grande rede de modais de transporte de massa, como ferrovias, por exemplo, muitos desses itens são transportados pela malha rodoviária, logo, é de grande interesse para as transportadoras veículos de carga que possuam custos operacionais baixos.

Também é de fundamental importância o transporte por ônibus no Brasil. Inúmeros passageiros são transportados por meio de veículos rodoviários coletivos, seja por ser uma solução de baixo custo, ou por ser uma alternativa à realidade cada vez mais caótica do trânsito nas grandes cidades. Por isso, também é importante que os ônibus apresentem custos operacionais baixos para que continuem a exercer seu importante papel na sociedade.

Ainda segundo [8], a indústria de veículos comerciais, sobretudo a de caminhões e ônibus, desenvolveu durante muitos anos seus produtos por meio de técnicas ligadas ao retorno de experiência. Dessa forma, os produtos presentes nesse mercado eram aperfeiçoados através da análise de falhas e constatação de problemas de produtos anteriores, além da realização de testes com os produtos já prontos. Tal metodologia implicava em implementos rodoviários de peso elevado e superdimensionados, o que acabava resultando em custos operacionais altos para empresas deste segmento, e que, por conseguinte, eram repassadas ao consumidor.

Porém, com o advento de novas tecnologias e com a globalização, essas indústrias acabaram por ter de se adaptar às novas tecnologias disponíveis para o dimensionamento de estruturas mecânicas. O desenvolvimento de técnicas como Elementos Finitos, e a popularização dos computadores e de softwares de cálculo, hoje permitem às empresas técnicas de otimização de peso e desenvolvimento de geometrias para seus produtos, com o objetivo de oferecer implementos rodoviários que proporcionem melhor desempenho e mais economia para seus operadores.

Segundo [5], pode-se definir um chassi como o elemento estrutural de um veículo responsável por suportar todas as cargas às quais o veículo está sujeito. Estes componentes devem ser projetados para promover grande versatilidade, durabilidade e excelente performance, devido à grande variabilidade de aplicações de trabalho que alguns veículos podem estar sujeitos.

Uma particularidade da indústria de caminhões e ônibus é que alguns modelos de chassi podem ser utilizados tanto em caminhões quanto em ônibus. Isto é, uma mesma base pode receber uma cabine e uma carroceria para ser utilizada no transporte de cargas, ou receber uma única carroceria destinada ao transporte de passageiros e de seus objetos pessoais, conforme ilustram as Figuras 1.1, 1.2 e 1.3.



Figura 1.1 – Chassi Volksbus 17.230OD

(Fonte: <https://www.vwco.com.br/produtos-volkswagen/modelo/onibus-1/17-230-od-55>. Acesso em 21/10/2019)



Figura 1.2 – Ônibus de transporte rodoviário utilizando o Volksbus 17.230OD

(Fonte: <https://sp.olx.com.br/onibus/onibus-volkswagen-17230-com-ar-567241615>. Acesso em 21/10/2019)



Figura 1.3 – Caminhão sobre um chassi similar ao Volksbus 17.230OD  
(Fonte: <https://www.buscaacelerada.com.br/caminhao/vw-17>. Acesso em 21/10/2019)

Devido à versatilidade desse tipo de chassi, como ilustram as Figuras 1.1 a 1.3, é de interesse dimensioná-lo para que possua o menor peso possível, mas resistindo às cargas aplicadas sobre ele. Segundo [5], o tabuleiro de um chassi para veículos comerciais possuem dois componentes estruturais principais: as longarinas e as travessas, conforme ilustra a Figura 1.4.

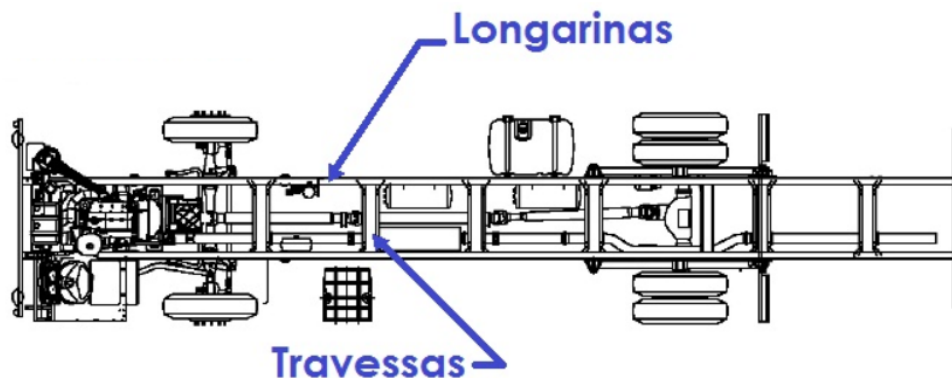


Figura 1.4 – Longarinas e travessas em um chassi para ônibus e caminhões  
(Fonte: <http://www.mobceara.com/2012/06/o-onibus-e-suas-curiosidades.html?m=0>. Acesso em 21/10/2019)

Ainda segundo [5], as longarinas para este tipo de chassi são compostas por duas vigas em aço posicionadas na direção longitudinal da estrutura e solicitadas principalmente em flexão, devido às cargas verticais impostas à estrutura. Por isso, o perfil mais comum encontrado para estas vigas é em C, devido à necessidade de um elevado momento de inércia para suportar os efeitos da flexão. Seus apoios são as suspensões dos eixos dianteiro e traseiro e normalmente, consistem em feixes de mola do tipo parabólico fixados em dois pontos da lateral da longarina, conforme ilustra a Figura 1.5.



Figura 1.5 – Detalhe de fixação de uma mola parabólica a uma longarina  
(Fonte: <http://www.molasbrasil.com/dica/Feixe-de-Molas>. Acesso em 21/10/2019)

Já as travessas têm como função principal a ligação entre as duas longarinas, logo devem impor uma rigidez elevada à torção em torno do eixo longitudinal do chassi. Também devem restringir a tensão cisalhante que é transmitida entre uma longarina e outra.

Neste projeto, o objetivo será o desenvolvimento de um código computacional que otimize as dimensões da seção transversal de uma longarina, baseado nas dimensões do Volksbus 17.230OD, levando em consideração as tensões de flexão, o deslocamento vertical máximo e os limites impostos pela flambagem, a partir dos métodos apresentados pelas Referências [1], [9] e [13]. A Ficha Técnica do chassi fabricado pela Volkswagen Caminhões e Ônibus está presente no **ANEXO 1**.

No Capítulo 2 é feita uma Revisão Bibliográfica acerca do tema, apresentando alguns trabalhos nessa área, seus principais resultados e os pontos importantes para a realização deste projeto.

O Capítulo 3 mostra como foi determinado o carregamento para o qual a estrutura será dimensionada, assim como as condições impostas pelos apoios.

Já o Capítulo 4 apresenta o Método da Rigidez, que foi utilizado para o cálculo dos deslocamentos, tensões atuantes na longarina e reações de apoio. Tais informações são de extrema relevância para a otimização das dimensões da seção transversal, pois o Capítulo 5 apresenta a maneira como foi implementada a otimização desses valores. A cada passo da função de minimização do peso, é necessário verificar pelo Método da Rigidez se as condições em deslocamento e tensão de flexão são satisfeitas.

Em seguida, o Capítulo 7 tratará dos fatores de segurança do projeto, também levando em consideração os efeitos dinâmicos sobre a longarina, assim como do passo a passo para a execução do código de otimização.

Os resultados serão apresentados e analisados no Capítulo 8 e as conclusões e sugestões para trabalhos futuros estarão no Capítulo 9.

## **CAPÍTULO 2**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Este trabalho possui como base os artigos [4], [7] e [16], que tratam acerca da possibilidade de redução do peso de um chassi.

Em [7], o autor primeiramente baseia-se em um modelo de chassi já existente e, a partir de um conhecimento prévio de onde estão localizados os pontos críticos para o seu dimensionamento, verifica que a estrutura está superdimensionada. Em seguida, efetua uma análise de sensibilidade, verificando dentre as dimensões das diferentes seções transversais e espessuras, quais delas influenciam mais no peso. Para tal, várias simulações são feitas no software ANSYS® e, ao final, o autor consegue obter uma redução de 17% no peso do chassi.

O artigo [16] também segue um caminho parecido, porém sem a preocupação da análise de sensibilidade. Seus autores dissertam acerca dos efeitos da redução de espessura, afirmando que tal procedimento deve ser calculado com extremo rigor, uma vez que está reduzindo a resistência à aplicação de carregamentos e pode amplificar os efeitos de alguns fenômenos como vibrações e fadiga. Em seguida, apresenta um modelo de chassi já existente, e simula em um software de Elementos Finitos os efeitos de uma redução nas dimensões deste modelo.

Já [4] busca otimizar um chassi de um caminhão com o objetivo de aumentar sua rigidez em torção e, ao mesmo tempo, reduzir seu peso. Este trabalho apresenta detalhadamente como pode ser construído um carregamento para o qual o chassi deve ser dimensionado, além de sugerir quais são as restrições de apoio atuantes.

A partir destes trabalhos, foi possível elencar os pontos importantes para a realização do presente trabalho: é necessário partir de um modelo de base fabricado pela indústria e estudar os efeitos da redução das dimensões e espessuras utilizadas nas seções transversais. Porém, os trabalhos citados anteriormente apenas simulam novas dimensões informadas pelos autores usando softwares de cálculo baseados em Elementos Finitos. Logo, nota-se que é possível ir além: ao invés de apenas simular alguns casos e, em seguida, escolher dentre os que possuem tensões e deflexões com valores aceitáveis aquele que possua a menor massa, pode-se utilizar um algoritmo de otimização que simule valores para as espessuras e dimensões das seções transversais e verifique, a cada passo, se os valores do otimizador satisfazem as condições de máxima tensão de flexão e máxima deflexão vertical, chegando-se a um resultado ótimo no final.

Para o cálculo de tensões e deflexões, uma maneira eficaz é utilizar o Método da Rigidez apresentado pela Referência [1]. Tal método reduz o cálculo de deslocamentos lineares e angulares a simples resolução de um sistema linear e, em seguida, pode-se utilizar estes resultados para o cálculo dos momentos fletores e tensões de flexão ao longo das vigas que compõem o chassi.

Uma vez que as seções transversais terão pequenas espessuras, também é importante verificar as condições impostas pela flambagem. O autor de [9] trata do dimensionamento de estruturas em aço, e apresenta as relações que os diferentes perfis estruturais devem respeitar segundo as normas técnicas brasileiras.



## CAPÍTULO 3

### MODELAGEM DO PROBLEMA

#### 3.1 – Contextualização

O presente projeto é baseado no modelo Volksbus 17.230OD, montado no Brasil pela Volkswagen Caminhões e Ônibus [15]. Na Figura 3.1, estão ilustradas suas dimensões principais.

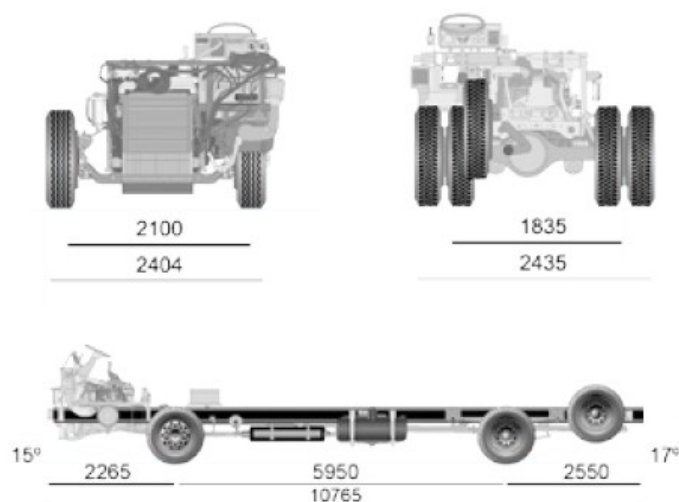


Figura 3.1 – Dimensões (em milímetros) do Volksbus 17.230OD  
Fonte: [15]

A partir da Figura 3.1, é possível listar as principais dimensões de interesse para o projeto:

- Comprimento total das longarinas: 10765 mm;
- Balanço Dianteiro<sup>1</sup>: 2265 mm;
- Balanço Traseiro<sup>2</sup>: 2265 mm;
- Distância Entre Eixos: 5950 mm.

Segundo as Especificações Técnicas, disponíveis no **ANEXO 1**, a carga máxima que pode ser suportada por cada um dos eixos é:

- Eixo dianteiro: 6300 kg;
- Eixo traseiro: 11000 kg.

Serão considerados como esforços atuantes no chassi:

- O peso próprio da estrutura;

<sup>1</sup> Balanço Dianteiro: é a distância entre o eixo dianteiro e a extremidade dianteira do chassi.

<sup>2</sup> Balanço Traseiro: é a distância entre o eixo traseiro e a extremidade traseira do chassi.

- O peso do motor ( $P_M$ ), estimado em 500 kg;
- Carregamentos uniformes representando as cargas que serão efetivamente transportadas pela estrutura, a serem determinados.

### 3.2 – Determinação dos valores do carregamento uniforme

Para esta análise, optou-se por modelar os carregamentos da seguinte maneira, baseando-se no perfil de caminhões e ônibus: as cargas efetivamente transportadas estão concentradas entre o eixo dianteiro e a extremidade traseira do veículo, estando a parte da frente destinada ao posicionamento da cabine no caso de um caminhão. Já para um ônibus, os passageiros e suas bagagens também estão concentrados entre o eixo dianteiro e a traseira do veículo, estando a parte dianteira destinada apenas ao motorista e aos passageiros que viajam próximos a ele.

Por isso, optou-se por definir um carregamento uniformemente distribuído de intensidade  $q_1$  entre a parte dianteira do chassi e o eixo dianteiro, e outro carregamento do mesmo tipo de intensidade  $q_2$  entre o eixo dianteiro e a traseira do veículo. Os valores  $q_1$  e  $q_2$  serão calculados de forma que os eixos dianteiros e traseiros suportem a máxima carga admissível indicada nas Especificações Técnicas.

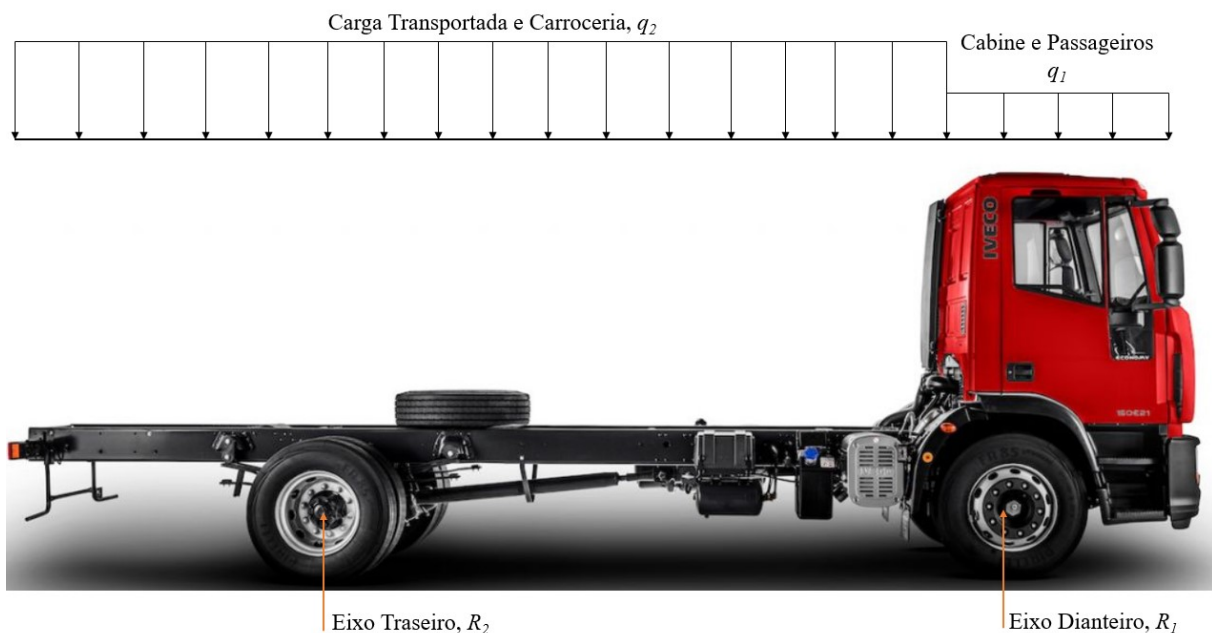


Figura 3.2 – Representação dos carregamentos uniformes em um chassi de dois eixos  
(Fonte: <https://caminhoes.salaodocarro.com.br/revista/iveco-tector-150e21-4x2.html>. Acesso em 23/10/2019.)

Levando em consideração a simetria do chassi na direção longitudinal, pode-se representar os carregamentos atuantes sobre uma das longarinas da forma apresentada pela

Figura 3.3, assumindo que o peso do motor esteja apoiado de forma equidistribuida sobre duas vigas soldadas às longarinas, conforme sugere a Figura 1.1.

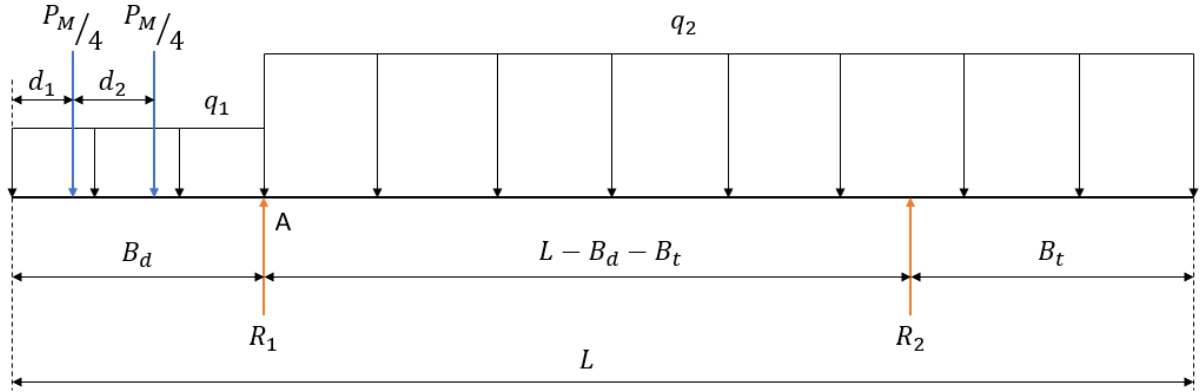


Figura 3.3 – Modelagem simplificada dos carregamentos incidentes sobre uma longarina  
Fonte: AUTOR

Conforme mencionado anteriormente, o perfil da seção transversal será considerado do tipo C, seguindo a classificação apresentada por [2]. As dimensões características deste tipo de perfil são apresentadas na Figura 3.4.

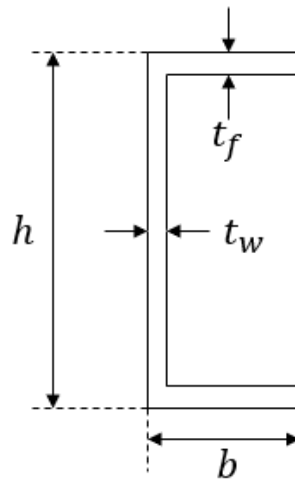


Figura 3.4 – Esboço da seção transversal da longarina  
Fonte: AUTOR

O perfil estrutural representado na Figura 3.4 pode ser entendido como a composição de três elementos [2]: dois flanges (de espessura  $t_f$ ) e uma alma (de espessura  $t_w$ ). Tais dimensões serão as variáveis a serem determinadas no processo de otimização. A área da seção transversal pode ser escrita como:

$$A(b, h, t_f, t_w) = h t_w + 2 (b - t_w) t_f \quad (3-1)$$

Já o Momento de Inércia de área do perfil da Figura 3.4 é dado por:

$$I(b, h, t_f, t_w) = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{(b - t_w) t_f^3}{12} + \left( \frac{h - t_f}{2} \right)^2 (b - t_w) t_f \quad (3-2)$$

Faz-se necessário determinar as intensidades dos carregamentos uniformemente distribuídos  $q_1$  e  $q_2$  indicados na Figura 3.3. Para tal, visto que a estrutura deve ser dimensionada para a situação mais crítica, deve-se impor a metade dos valores máximos admissíveis como reações  $R_1$  e  $R_2$  nos apoios, uma vez que apenas uma metade está sendo dimensionada, e que a estrutura é considerada perfeitamente simétrica. Uma vez verificada que tal modelagem representa um problema de uma viga isostática bi apoiada, os valores de  $q_1$  e  $q_2$  podem ser determinados pelas equações de equilíbrio estático:

$$\begin{cases} \sum F_v = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

Deseja-se que os valores dos carregamentos uniformes estejam determinados segundo uma densidade linear (unidade de força por unidade de comprimento). Em um primeiro momento, serão determinadas as densidades superficiais  $\overline{q}_1$  e  $\overline{q}_2$ , pois as forças atuam sobre os dois retângulos identificados na Figura 3.5. Posteriormente, dada a largura constante, será possível obter as densidades lineares  $q_1$  e  $q_2$ .

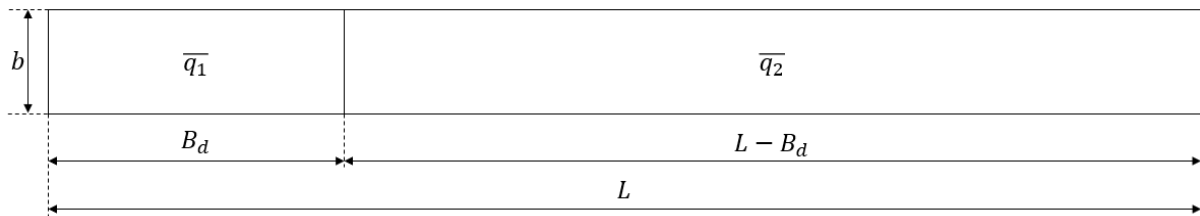


Figura 3.5 – Esboço da vista superior da longarina e suas dimensões  
Fonte: AUTOR

Dessa forma, é possível desenvolver as equações (3-3) considerando como positivos os esforços verticais para cima e os momentos no sentido anti-horário, calculados em relação ao ponto A indicado na Figura 3.3:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 + R_2 - \frac{P_M}{4} - \frac{P_M}{4} - \bar{q}_1 b B_d - \bar{q}_2 b (L - B_d) = 0 \\ \frac{P_M}{4} (B_d - d_1) + \frac{P_M}{4} (B_d - d_1 - d_2) + R_2 (L - B_d - B_t) \\ + \bar{q}_1 B_d b \frac{B_d}{2} - \bar{q}_2 (L - B_d) b \frac{(L - B_d)}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (3-4)$$

É possível notar que apenas os valores associados aos carregamentos uniformemente distribuídos são desconhecidos, logo trata-se de um sistema de duas equações e duas incógnitas que pode ser facilmente resolvido.

É importante ressaltar que ainda não foram considerados os efeitos do peso da estrutura, uma vez que ele não é considerado no carregamento máximo admissível no chassi. Porém, uma vez determinadas as intensidades de  $\bar{q}_1$  e  $\bar{q}_2$ , tais valores serão adicionados do peso próprio da estrutura. Também é importante ressaltar que, para que o problema seja fisicamente consistente, é necessário que os valores encontrados para  $\bar{q}_1$  e  $\bar{q}_2$  sejam ambos positivos, visto suas direções.

Resolvendo o sistema (3-4) com o software MATLAB®, obtêm-se as seguintes expressões para  $\bar{q}_1$  e  $\bar{q}_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}_1 = \frac{(2 P_M d_1 + P_M d_2 - B_d P_M - 2 B_d R_1 + 2 B_d R_2 + 4 B_t R_2) - L P_M + 2 L R_1 - 2 L R_2}{2 B_d L b} \\ \bar{q}_2 = - \left( \frac{(2 P_M d_1 + P_M d_2 - B_d P_M - 2 B_d R_1 + 2 B_d R_2) + 4 B_t R_2 - 4 L R_2}{2 (b L^2 - B_d L b)} \right) \end{array} \right. \quad (3-5)$$

A Tabela 3.1 apresenta os valores numéricos das grandezas utilizadas no projeto.

Tabela 3.1 – Parâmetros e valores da modelagem da viga isostática

Parâmetro	Valor	Fonte
$P_M$	4,905 kN	Estimado conforme dados da literatura
$d_1$	0,300 m	Estimado na Figura 1.1
$d_2$	1,000 m	Estimado na Figura 1.1
$B_d$	2,265 m	Figura 3.1
$B_t$	2,550 m	Figura 3.1
$R_1$	30,90 kN	Metade do valor indicado no <b>ANEXO 1</b>
$R_2$	53,96 kN	Metade do valor indicado no <b>ANEXO 1</b>
$L$	10,765 m	Figura 3.1
$b$	A ser definido pelo otimizador	

Substituindo os valores da Tabela 3.1 em (3-5), obtém-se:

$$\bar{q}_1 = \frac{2.098}{b} \quad \bar{q}_2 = \frac{9.136}{b} \quad (3-6)$$

com  $\bar{q}_1$  e  $\bar{q}_2$  expressos em quilo-Newtons por metro quadrado (kN/m<sup>2</sup>) e  $b$  em metros (m).

Porém, como mencionado anteriormente, deseja-se obter os valores de  $q_1$  e  $q_2$  em quilo-Newtons por metro (kN/m), uma vez que a Figura 1.1 sugere que a seção transversal da longarina é constante ao longo de todo o chassi e, portanto, o valor de  $b$  também. Assim, é possível multiplicar os valores de (3-6) por essa constante, obtendo-se:

$$q_1 = b \bar{q}_1 = 2.098 \text{ kN/m} \quad q_2 = b \bar{q}_2 = 9.136 \text{ kN/m} \quad (3-7)$$

### 3.3 – Condições de apoio

De acordo com a Figura 1.5, pode-se concluir que a modelagem dos apoios presentes no chassi não é simples como mostrado na modelagem anterior, pois a força de contato com o solo é transmitida à estrutura por meio de molas parabólicas bi apoiadas sobre a estrutura. Por isso, optou-se por substituir cada um dos apoios simples por dois apoios equidistantes daqueles representados na Figura 3.3, e a distância entre eles foi estimada em 1 metro. Dessa maneira, a viga a ser calculada torna-se hiperestática, conforme ilustrado na Figura 3.6:

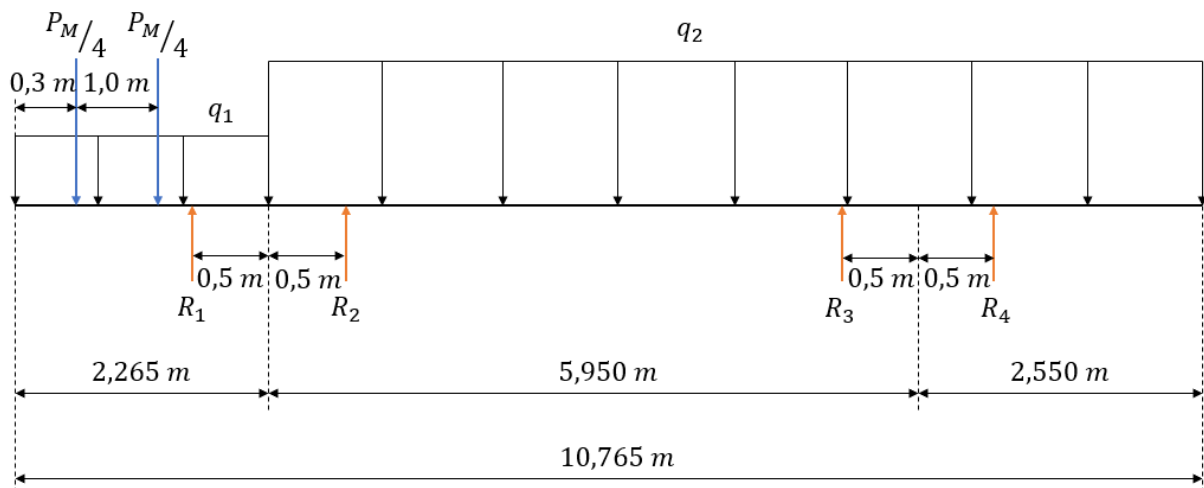


Figura 3.6 – Modelagem hiperestática dos carregamentos incidentes sobre uma longarina  
Fonte: AUTOR

Levando-se em conta os efeitos do peso próprio do chassi, os valores de  $q_1$  e  $q_2$  indicados na Figura 3.6 devem ser os valores obtidos em (3-7) adicionados do termo  $\rho A g$ , onde  $\rho$  é a densidade do material, em  $\text{kg/m}^3$ ,  $A$  é a área da seção transversal, indicada em (3-1) e  $g$  é a aceleração da gravidade, utilizada como  $9,81 \text{ m/s}^2$  [2]. É importante notar que o valor desse termo possui dependência dos valores das dimensões da seção transversal, a serem determinados pela otimização.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODO DA RIGIDEZ

#### 4.1 – Introdução

Uma vez definida a viga para a qual deseja-se dimensionar a seção transversal, é necessário definir um método pelo qual as tensões e os deslocamentos possam ser calculados. A referência [1] apresenta o Método da Rigidez, que surgiu como pioneiro aos métodos mais atuais conhecidos na Engenharia Estrutural. Tal método foi desenvolvido num contexto de avanço das técnicas de programação, como uma resposta aos cálculos estruturais que até então eram realizados manualmente.

O Método da Rigidez transforma um problema estrutural, governado por equações diferenciais em um sistema de equações algébricas lineares cuja solução determina os deslocamentos e rotações dos pontos nodais da estrutura, conforme ilustrado na Figura 4.1.

#### 4.2 – Conceito de deslocamento nodal

Para que a implementação do Método da Rigidez seja possível, é necessário definir um sistema linear de dimensão finita, para isso, divide-se uma estrutura em uma quantidade finita de elementos. Nas extremidades dos elementos estão presentes os nós, onde podem ser aplicadas forças na direção vertical e momentos na direção normal, e cujos deslocamentos e rotações serão calculados nestes pontos. A Figura 4.1 ilustra a discretização de uma viga contínua em quatro elementos e cinco nós:

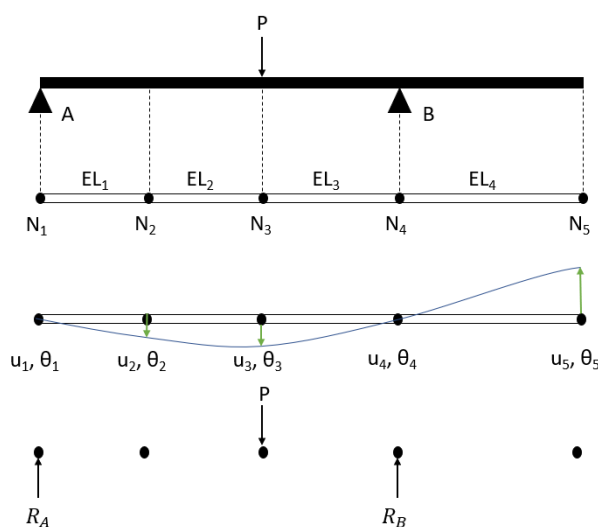


Figura 4.1 – Discretização de uma viga bi-apoiada  
Fonte: AUTOR



Na Figura 4.1, partiu-se de uma viga bi-apoiada (apoios em  $A$  e  $B$ ), com um balanço na extremidade direita e sujeita a ação de um carregamento de intensidade  $P$  no vão entre os dois apoios. Foram determinados cinco pontos, numerados de  $N_1$  a  $N_5$ , para os quais deseja-se conhecer os deslocamentos verticais e rotações, numerados de  $u_1$  a  $u_5$  e de  $\theta_1$  a  $\theta_5$ , respectivamente.

Neste método, cada um dos elementos, numerados de  $EL_1$  a  $EL_4$ , precisa possuir, obrigatoriamente, seção transversal uniforme entre os dois nós que o determina. Além disso, as forças presentes na estrutura devem estar aplicadas aos nós, como ilustrado na Figura 4.1, por meio das reações de apoio  $R_A$  e  $R_B$ , e do carregamento concentrado  $P$ .

Dessa forma, para o bom funcionamento do Método da Rigidez, sempre que há algum tipo de singularidade (carregamento aplicado, apoio ou mudança de seção transversal, por exemplo) na viga a ser analisada, é necessária a colocação de um nó no local onde ocorre esta singularidade, mesmo que os valores de deslocamento e rotação em tal ponto não sejam de interesse.

### 4.3 – Efeitos dos carregamentos nodais

Generalizando-se o que fora apresentado na Figura 4.1, é possível afirmar que uma viga discretizada em  $n$  elementos possuirá uma quantidade total de  $n+1$  nós, dada a sua geometria em apenas uma dimensão. Os possíveis carregamentos aos quais os nós estão submetidos podem ser numerados conforme a Figura 4.2:

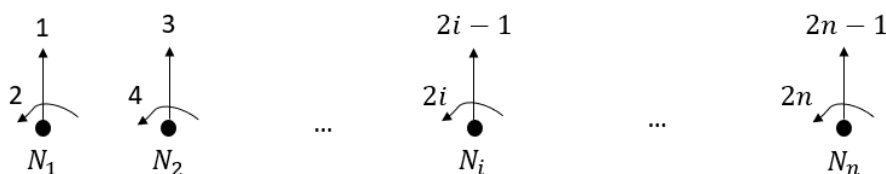


Figura 4.2 – Numeração dos esforços atuantes nos nós  
Fonte: AUTOR

É possível observar que, na numeração sugerida acima, todas as forças nodais possuem índices ímpares e os momentos possuem índices pares. Tais grandezas são arbitradas como positiva para cima e no sentido anti-horário, respectivamente, conforme sugere [1]. Com o Método da Rigidez, serão analisados os efeitos de cada um dos carregamentos atuantes num elemento e, em seguida, os efeitos serão somados por meio do Método da Superposição, apresentado nas Referências [1] e [2].

Em seguida, toma-se um par de nós consecutivos da viga discretizada e impõe-se restrições aos seguintes movimentos, conforme ilustrado na Figura 4.3:

- Deslocamento do nó à esquerda (I);
- Rotação do nó a direita (II);
- Deslocamento do nó à direita (III);
- Rotação do nó à esquerda (IV).

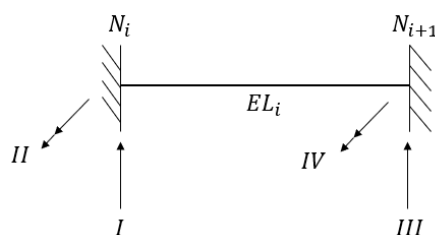


Figura 4.3 – Elemento restrungido  
Fonte: AUTOR

É possível notar que caso seja liberada apenas a ação das forças nodais identificadas por I ou III na Figura 4.3, o movimento resultante será um deslocamento vertical. Já no caso de II ou IV, tal movimento será de rotação no sentido anti-horário. A Referência [1] quantifica as reações de apoio nos engastes devido à atuação destas forças, levando-se em consideração as propriedades físicas da viga, conforme apresenta a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Ações de engastamento devido à deslocamentos de extremidades

Ação	Ilustração	Reações nos Engastes
Deslocamento Vertical		$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$ $R = \frac{12EI\Delta}{L^3}$
Rotação		$M_A = \frac{2EI\theta}{L}$ $M_B = \frac{4EI\theta}{L}$ $R = \frac{6EI\theta}{L^2}$

#### 4.4 – Matriz de Rigidez de Elemento

De acordo com o Método da Superposição ([1] e [2]), é possível afirmar que o deslocamento total causado em cada nó da Figura 4.3 é a soma dos deslocamentos causados por cada uma das forças numeradas de I a IV individualmente. Podemos definir, por meio dos valores apresentados na Tabela 4.1, as reações de extremidades devido a deslocamentos unitários. A reação de extremidade total será o valor dessa reação devido ao movimento unitário multiplicado pela intensidade real da reação.

Neste momento, é necessário inserir a notação  $S_{i,j}$ , que representa a reação do deslocamento unitário no grau de liberdade  $j$  devido ao movimento do grau  $i$ . A partir dos dados da Tabela 4.1, é possível determinar todas as 16 componentes possíveis:

$$\begin{aligned}
 S_{I,I} &= \frac{12EI}{L^3} & S_{I,II} &= \frac{6EI}{L^2} & S_{I,III} &= -\frac{12EI}{L^3} & S_{I,IV} &= \frac{6EI}{L^2} \\
 S_{II,I} &= \frac{6EI}{L^2} & S_{II,II} &= \frac{4EI}{L} & S_{II,III} &= -\frac{6EI}{L^2} & S_{II,IV} &= \frac{2EI}{L} \\
 S_{III,I} &= -\frac{12EI}{L^3} & S_{III,II} &= -\frac{6EI}{L^2} & S_{III,III} &= \frac{12EI}{L^3} & S_{III,IV} &= -\frac{6EI}{L^2} \\
 S_{IV,I} &= \frac{6EI}{L^2} & S_{IV,II} &= \frac{2EI}{L} & S_{IV,III} &= -\frac{6EI}{L^2} & S_{IV,IV} &= \frac{4EI}{L}
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

Utilizando o Método da Superposição, é possível escrever o seguinte sistema linear, onde  $U_i$  é o deslocamento do nó  $i$ , e  $R_i$  é a reação de extremidade no nó:

$$\begin{cases}
 R_1 = S_{I,I}U_I + S_{I,II}U_{II} + S_{I,III}U_{III} + S_{I,IV}U_{IV} \\
 R_2 = S_{II,I}U_I + S_{II,II}U_{II} + S_{II,III}U_{III} + S_{II,IV}U_{IV} \\
 R_3 = S_{III,I}U_I + S_{III,II}U_{II} + S_{III,III}U_{III} + S_{III,IV}U_{IV} \\
 R_4 = S_{IV,I}U_I + S_{IV,II}U_{II} + S_{IV,III}U_{III} + S_{IV,IV}U_{IV}
 \end{cases} \tag{4-2}$$

O sistema linear (4-2) pode ser reescrito sob a forma matricial  $\mathbf{R} = \mathbf{S}\mathbf{U}$ , onde  $\mathbf{S}$  é a matriz de rigidez do elemento:

$$\begin{bmatrix} R_I \\ R_{II} \\ R_{III} \\ R_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_I \\ U_{II} \\ U_{III} \\ U_{IV} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

#### 4.5 – Construção da Matriz de Rigidez Global

Uma vez conhecida a matriz de rigidez de um elemento, é necessário definir a matriz de rigidez de toda a viga, que leve em consideração os deslocamentos de todos os nós presentes na estrutura. É possível notar que os movimentos de um nó são influenciados pelos deslocamentos que ocorrem nele mesmo, assim como nos nós imediatamente a esquerda e a direita. A Figura 4.4 ilustra o efeito dos nós adjacentes.

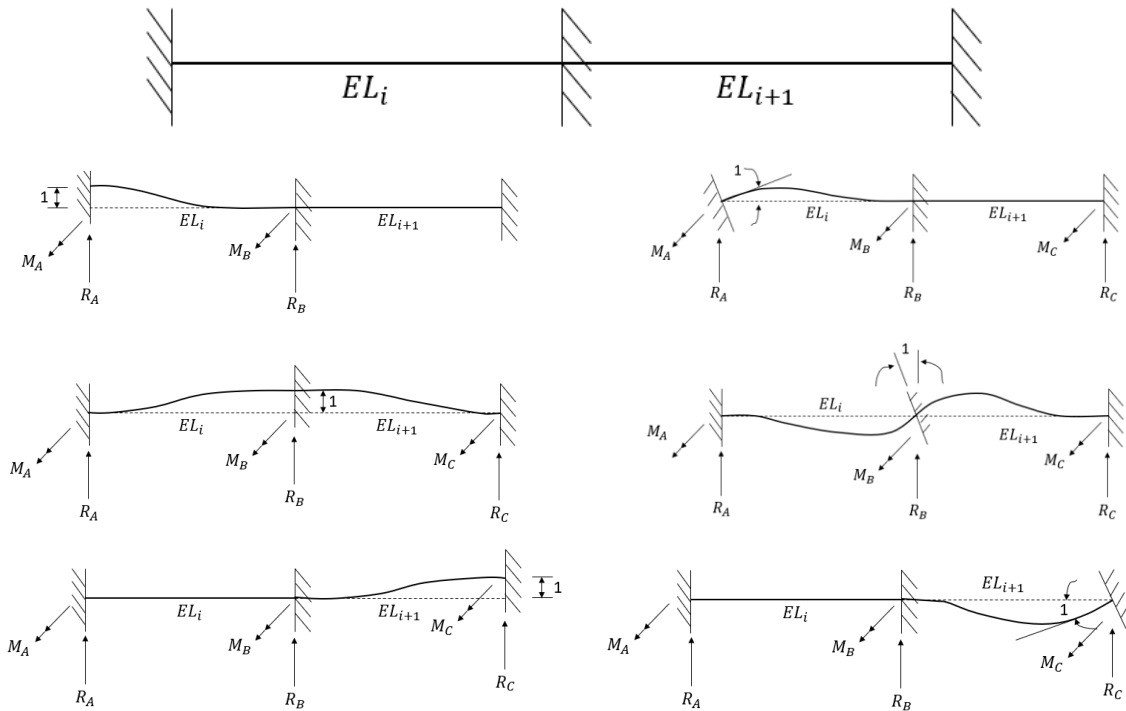


Figura 4.4 – Efeito dos deslocamentos do nó e dos nós adjacentes  
Fonte: AUTOR

Como é possível verificar na Figura 4.4, os deslocamentos do nó a esquerda causam reações de extremidade somente no elemento da esquerda, da mesma forma que os deslocamentos a direita provocam reações apenas no elemento da direita. Já os deslocamentos do nó central provocam reações em seus dois membros adjacentes.

Da mesma forma que a matriz de rigidez foi construída para um único elemento, é possível escrever a matriz de rigidez para o par de elementos da Figura 4.4, utilizando a numeração da Figura 4.5 e mantendo a convenção para  $S_{i,j}$  utilizada anteriormente.

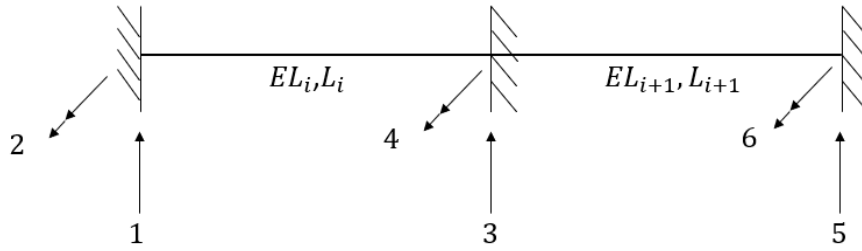


Figura 4.5 – Numeração dos deslocamentos do nó e dos nós adjacentes  
Fonte: AUTOR

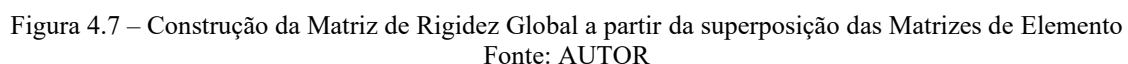
É necessário ressaltar que aqui deverá ser utilizado o Método da Superposição quando analisados os efeitos dos deslocamentos do nó central. Dessa forma, a rotação unitária de tal nó é equivalente a soma da rotação unitária à direita do elemento à esquerda com a rotação unitária à esquerda do elemento à direita, por exemplo. Assim, é possível construir a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_i^3} & \frac{6EI}{L_i^2} & -\frac{12EI}{L_i^3} & \frac{6EI}{L_i^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L_i^2} & \frac{4EI}{L_i} & -\frac{6EI}{L_i^2} & \frac{2EI}{L_i} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L_i^3} & -\frac{6EI}{L_i^2} & \frac{12EI}{L_i^3} + \frac{12EI}{L_{i+1}^3} & \frac{6EI}{L_i^2} - \frac{6EI}{L_{i+1}^2} & -\frac{12EI}{L_{i+1}^3} & \frac{6EI}{L_{i+1}^2} \\ \frac{6EI}{L_i^2} & \frac{2EI}{L_i} & \frac{6EI}{L_i^2} - \frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{4EI}{L_i} + \frac{4EI}{L_{i+1}} & -\frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{2EI}{L_{i+1}} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L_{i+1}^3} & -\frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{12EI}{L_{i+1}^3} & -\frac{6EI}{L_{i+1}^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{2EI}{L_{i+1}} & -\frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{4EI}{L_{i+1}} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

Ao analisar (4-4), percebe-se que esta matriz é o resultado da soma dos elementos da matriz (4-3) adaptados para o elemento da esquerda ( $EL_i$ ) com a própria matriz (4-3) aplicada ao elemento da direita ( $EL_{i+1}$ ), deslocada de três linhas para baixo e três colunas para a direita. Tal constatação apresenta sentido físico justamente pela aplicação do Método da Superposição,

Figura 4.6 – Matrizes de Rigidez de Elemento identificadas na Matriz de Rigidez Global  
Fonte: AUTOR

Além disso, cada nó produz reações de extremidade em si mesmo, e nos nós imediatamente à esquerda e à direita, logo, para cada adição da Matriz de Rigidez de Elemento na Matriz global, deve-se respeitar a regra de deslocamento de três colunas e três linhas identificada no caso de dois elementos. Assim, a construção da Matriz de Rigidez Global está ilustrada na Figura 4.7.



#### 4.6 – Nós restringidos e condições de contorno

Nesta etapa da construção do Método da Rigidez introduzido por [1], é necessário levar em consideração as condições de contorno do problema. Como o objetivo deste trabalho é solucionar o problema de uma viga sobre apoios, as restrições impostas são as restrições dos próprios apoios.

Conforme já mencionado nos capítulos precedentes, em todo ponto em que há uma particularidade na viga (mudança de seção transversal, carregamento aplicado, reação de apoio, por exemplo), faz-se necessário a colocação de um nó neste ponto.

Exemplificando, caso um nó esteja sobre um engaste, os graus de liberdade de deslocamento e de rotação estarão restringidos, enquanto que no caso de um apoio simples do tipo rolete, apenas o deslocamento estará restringido [2].

Uma vez essas restrições impostas à estrutura, aparecerão forças (para evitar deslocamentos) ou momentos (para evitar rotações) a fim de preservar as condições impostas. Tais forças e momentos são definidas por [2] como reações de apoio.

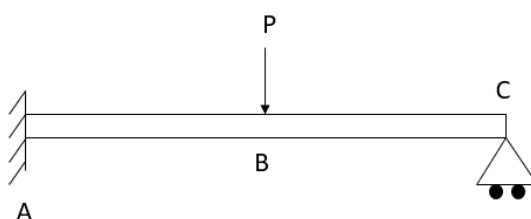


Figura 4.8 – Viga engastada à esquerda e rotulada à direita  
Fonte: AUTOR

A Figura 4.8 apresenta um caso de aplicação: para sua solução por meio do Método da Rigidez, é necessário a colocação de ao menos três nós, identificados por A, B e C, considerando que a seção transversal da viga seja uniforme ao longo de todo seu comprimento. Neste momento, numeraremos os graus de liberdade conforme a convenção de [1]:

Tabela 4.2 – Numeração dos graus de liberdade da Figura 4.8

Grau de Liberdade	Correspondência
1	Deslocamento do nó A
2	Rotação do nó A
3	Deslocamento do nó B
4	Rotação do nó B
5	Deslocamento do nó C
6	Rotação do nó C

A seguir, são introduzidos os vetores  $\mathbf{P}$ , denominado vetor dos carregamentos, e o vetor  $\mathbf{F}$ , de graus de liberdade. A  $i$ -ésima entrada de  $\mathbf{P}$  é o carregamento ao qual o grau de liberdade está sujeito e a  $i$ -ésima entrada de  $\mathbf{F}$  é 0 caso o movimento do nó seja livre ou 1 caso seu movimento seja restringido pelas condições de apoio. No caso da Figura 4.8, estes vetores são:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

Em seguida [1] sugere transformar os vetores  $\mathbf{P}$  da seguinte forma: criar um vetor  $\mathbf{P}_L$  cujas entradas sejam compostas apenas pelas componentes de  $\mathbf{P}$  correspondentes aos graus de liberdade cujos movimentos não são restringidos pelos apoios, mantendo o ordenamento.

$$\mathbf{P}_L = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

Devido à geometria do problema, sabe-se que as componentes de  $\mathbf{P}_L$  correspondem aos graus de liberdade 3, 4 e 6, respectivamente. Agora, faz-se necessário a construção da Matriz de Rigidez que leve em consideração apenas os efeitos destes graus, uma vez que os demais estão restringidos, denominada por [1] como Matriz de Rigidez da estrutura liberada, definida por  $\mathbf{S}_{ML}$ .

O Método da Superposição indica que o deslocamento 3 da Figura 4.8 provoca também deslocamentos em 4 e em 6, assim como 4 provoca também em 3 e 6 e ainda 6 provoca também deslocamentos em 3 e 4. Logo a Matriz de Rigidez da estrutura liberada deve levar em consideração apenas as rigidezes correspondentes a esses deslocamentos. Como o problema em questão é composto por dois elementos e três nós, sua Matriz de Rigidez Global é similar a (4-4). A Matriz de Rigidez da estrutura liberada consistirá, segundo [1], em apenas os elementos de (4-4) que representem os efeitos listados anteriormente, ou seja, os elementos 33, 34, 36, 43, 44, 46, 63, 64 e 66, resultando na seguinte matriz:



$$S_{ML} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_i^3} + \frac{12EI}{L_{i+1}^3} & \frac{6EI}{L_i^2} - \frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{6EI}{L_{i+1}^2} \\ \frac{6EI}{L_i^2} - \frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{4EI}{L_i} + \frac{4EI}{L_{i+1}} & \frac{2EI}{L_{i+1}} \\ \frac{6EI}{L_{i+1}^2} & \frac{2EI}{L_{i+1}} & \frac{4EI}{L_{i+1}} \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

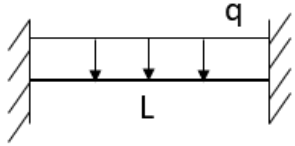

No caso geral, o procedimento é similar: primeiramente identificam-se as rigidezes correspondentes aos graus de liberdade que não estão restringidos na matriz  $S$  e, a partir deles, constrói-se  $S_{ML}$  da mesma forma que no exemplo anterior. Vale ressaltar que todas as Matrizes de Rigidez são simétricas.

#### 4.7 – Carregamentos Uniformemente Distribuídos e o Método da Rigidez

Conforme as seções precedentes, verificou-se que o Método da Rigidez admite unicamente carregamentos nodais. Para tal, segundo [1], é estaticamente equivalente tratar uma viga bi-engastada sujeita à um carregamento uniformemente distribuído e adicionar aos nós adjacentes ao carregamento uniforme em questão as reações presentes nos engastes do primeiro caso.

No caso dos vetores apresentados na seção acima, basta somar a  $P$  e a  $P_L$ , os efeitos das reações equivalentes para a resolução através do Método da Rigidez. A Tabela a seguir quantifica tais efeitos, segundo os resultados apresentados em [1].

Tabela 4.3 – Equivalência estática de um carregamento uniformemente distribuído

Caso Inicial	Adaptação	Esforços nodais
		$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$ $M_A = M_B = \frac{qL^2}{12}$

#### 4.8 – Cálculo dos deslocamentos nodais

Uma vez conhecidas a matriz  $S_{ML}$  e o vetor  $P_L$ , [1] identifica a seguinte relação válida entre as duas matrizes e o vetor de deslocamentos nodais  $U_L$  dos graus de liberdade cujos movimentos não estão restringidos:

$$P_L = S_{ML}U_L \quad (4-8)$$

ou então:

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{S}_{ML}^{-1} \mathbf{P}_L \quad (4-9)$$

Dessa maneira, o cálculo dos deslocamentos nodais reduz-se ao cálculo da matriz inversa de  $\mathbf{S}_{ML}$  e sua multiplicação pelo vetor  $\mathbf{P}_L$ . Deve-se ressaltar que a dimensão de  $\mathbf{U}_L$  é idêntica à do vetor  $\mathbf{P}_L$ , uma vez que  $\mathbf{S}_{ML}$  é uma matriz quadrada cujo número de linhas e colunas é igual ao número de entradas de  $\mathbf{P}_L$ . Logo,  $\mathbf{U}_L$  terá como entradas apenas os deslocamentos dos graus de liberdade que não estão restringidos, respeitando o ordenamento inicial.

Tal cálculo pode parecer um tanto quanto desgastante para um ser humano quando efetuado à mão, sobretudo para matrizes  $\mathbf{S}_{ML}$  representando muitos graus de liberdade não restringidos. Porém, para resolução através de computador tal cálculo é relativamente simples e de fácil implementação.

#### 4.9 – Cálculo das Reações de Extremidade dos Membros

Segundo [1], a Matriz de Rigidez Global também pode ser utilizada para o cálculo das reações de extremidade dos membros, também conhecidos como esforços cortantes e momentos fletores na linguagem adotada por [2]. Para tal, uma vez que os deslocamentos de cada nó são conhecidos, os esforços de extremidade podem ser calculados simplesmente por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} \mathbf{U} \quad (4-10)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a Matriz de Rigidez do elemento,  $\mathbf{U}$  são os deslocamentos seguindo o ordenamento de  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{F}$  é um vetor de dimensão  $4 \times 1$  cujos elementos são, respectivamente:

- Esforço Cortante à esquerda do elemento;
- Momento Fletor à esquerda do elemento;
- Esforço Cortante à direita do elemento;
- Momento Fletor à direita do elemento.

Neste momento é importante ressaltar que todas as Matrizes de Rigidez de Elemento precisam ser armazenadas caso seja necessário o uso das informações de esforços nas extremidades dos elementos em um programa de computador, não bastando o simples preenchimento da matriz global.

Também é necessário ressaltar que, caso tenha sido feita a adaptação de um carregamento uniformemente distribuído para seu equivalente estático como discutido anteriormente, esses valores deverão ser subtraídos da matriz  $F$  para representar as reações de extremidade efetivas no elemento.

#### 4.10 – Reações de Apoio

Assim como os deslocamentos foram calculados considerando-se os efeitos dos graus de liberdade não restringidos sobre os demais em mesma situação, as reações de apoio podem ser obtidas por meio da superposição dos efeitos dos nós não restringidos sobre os restringidos, uma vez que por compatibilidade geométrica [2], a soma de todos os deslocamentos produzidos num grau de liberdade restringido deve ser nula.

Retornando ao exemplo da Figura 4.8, identificamos os graus de liberdade restringidos 1, 2 e 5, e os não restringidos 3, 4 e 6. Logo, estamos interessados em estudar os efeitos do deslocamento 3 em 1, 2 e 5, os efeitos de 4 em 1, 2 e 5 e, por fim os efeitos de 6 em 1, 2 e 5. Isto significa, segundo [1], o estudo das componentes 31, 32, 35, 41, 42, 45, 61, 62 e 65 da Matriz de Rigidez Global da Figura 4.8. Tais componentes podem ser reunidas na matriz  $S_{RL}$ , conforme (4-11).

$$S_{RL} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L_i^3} & -\frac{6EI}{L_i^2} & -\frac{12EI}{L_{i+1}^3} \\ \frac{6EI}{L_i^2} & \frac{2EI}{L_i} & -\frac{6EI}{L_{i+1}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L_{i+1}^2} \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

Uma vez conhecida a matriz  $S_{RL}$  e os deslocamentos dos nós conhecidos por meio do vetor  $U_L$ , é possível calcular as reações nos apoios com a equação (4-12), uma vez que, por hipótese, não há carregamentos entre nós da estrutura. É necessária também a construção do vetor  $P_R$ , que é o vetor  $P$  de carregamentos nos nós somente com as entradas referentes aos graus de liberdade restringidos. Para o exemplo da Figura 4.8,  $P_R$  é nulo, pois não há carregamentos nos graus de liberdade restringidos.

$$F_R = S_{RL} U_L - P_R \quad (4-12)$$

$\mathbf{F}_R$  é um vetor cujas entradas são as reações de apoio na ordem utilizada no ordenamento dos graus de liberdade.

No caso geral, é necessário efetuar as mesmas tarefas: reconhecer os graus de liberdade restringidos e não restringidos, e em seguida construir  $\mathbf{S}_{RL}$  tomando os elementos de  $\mathbf{S}$  a partir do cruzamento dos números dos graus de liberdade restritos e não restritos. Vale ressaltar que  $\mathbf{S}_{RL}$  é uma matriz retangular, cujo número de linhas é idêntico ao número de graus de liberdade restringidos e cujo número de colunas é igual ao número de graus de liberdade livres, possibilitando a multiplicação por  $\mathbf{U}_L$ . O resultado desta multiplicação matricial é, consequentemente, um vetor coluna de forças cujo número de entradas é igual ao número de graus de liberdade restringidos, que é o resultado fisicamente esperado.

## CAPÍTULO 5

### PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

#### 5.1 – Introdução

O Capítulo 4 apresenta um método facilmente implementável em computador para o cálculo de deslocamentos, rotações, reações de apoio e reações de extremidades em uma viga. Porém, nesse projeto, busca-se ir além de uma análise de tensões: o objetivo principal é o dimensionamento de uma viga para atender as solicitações em flexão e em deslocamento vertical respeitando a geometria do perfil estrutural em C da Figura 3.4, de forma a possuir o menor peso possível e também respeitar as condições em flambagem.

Para tal, é necessário recorrer aos métodos apresentados pela Programação Matemática. Segundo [14], tal domínio de estudos é responsável por tratar problemas de minimização ou de otimização, ocupando-se tanto do tratamento teórico do problema quanto do estudo e elaboração de algoritmos para a resolução deste tipo de problema.

Assim, o objetivo deste trabalho será basear-se num método de busca do mínimo global da função que define o peso total de uma longarina, garantindo que estas dimensões encontradas estão de acordo com as condições de projeto.

#### 5.2 – O Problema Geral de Programação Matemática

As referências [13] e [14] definem o problema geral de programação matemática como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{X}) \\ & \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \\ s. t. & h_k(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1 \dots m \\ & c_l(\mathbf{X}) \leq 0 \quad l = 1 \dots p \\ & x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1 \dots n \end{array} \right. \quad (5-1)$$

onde:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

é designado o vetor de variáveis de projeto. Em (5-1), a função vetorial das  $n$  variáveis de projeto  $f(\mathbf{X})$  é denominada função objetivo, a qual busca-se seu valor mínimo. Estas variáveis podem estar sujeitas à  $m$  restrições de igualdade  $h_k(\mathbf{X})$ , a  $p$  restrições de desigualdade  $c_l(\mathbf{X})$  e

a  $n$  restrições de desigualdade laterais, que impõem um intervalo real de variação para as  $n$  variáveis de projeto.  $x_i^l$  é o limite inferior e  $x_i^u$  é o limite superior da  $i$ -ésima variável do vetor  $X$ .

O problema de programação matemática (5-1) pode ser classificado como um problema de otimização com restrições, caso haja alguma condição de igualdade, desigualdade ou lateral que a função objetivo deva respeitar. Caso contrário, onde busca-se o mínimo da função  $f(X)$  em todo o seu domínio de existência, classifica-se como um problema de otimização sem restrições.

Tal problema também pode ser classificado quanto ao grau das funções envolvidas. Por exemplo, se a função objetivo e as restrições forem funções lineares das variáveis de projeto, trata-se de um problema de programação linear, se forem quadráticas, um problema de programação quadrática. Evidentemente, estas não são as únicas formas de classificação, porém um bom entendimento e uma boa classificação do problema fará a diferença na hora da escolha dentre a grande quantidade de métodos disponíveis na literatura técnica para a resolução de problemas de otimização.

Um ponto importante, segundo [13], é a existência e unicidade de uma solução ótima. Os algoritmos utilizados em otimização acabam por convergir para um ponto de mínimo que satisfaça as condições impostas ao problema, porém este ponto pode não ser o único ponto de mínimo. Dessa forma, como todo algoritmo necessita de valores iniciais para as variáveis de projeto, o autor sugere que sejam feitas várias simulações a partir de diferentes pontos de partida. Caso todas as simulações venham a convergir para o mesmo valor final, existe uma grande possibilidade de existência de um mínimo global, porém caso diferentes resultados sejam obtidos, todos eles satisfazendo as condições impostas, cabe ao projetista utilizar o bom senso para escolher dentre as possíveis soluções.

### 5.3 – Método para Resolução do Problema de Otimização

Neste projeto, foi definido que seria utilizada a biblioteca de otimização do MATLAB®. Primeiramente, observa-se que a função objetivo do problema seria a função que define a massa de uma longarina, ou seja:

$$f(X) = \rho A L \quad (5-3)$$

Representando o produto da densidade volumétrica do material da viga pela área da seção transversal e pelo comprimento da viga. Por hipótese, a seção transversal da viga é uniforme ao longo de toda a longarina, logo o produto da densidade volumétrica pelo comprimento é uma constante na situação em questão. Logo o problema de otimização do peso da longarina reduz-se à otimização da área da seção transversal sujeita às mesmas condições, e a função objetivo pode ser reescrita de acordo com a Equação (5-4):

$$f(b, h, t_f, t_w) = h t_w + 2 (b - t_w) t_f \quad (5-4)$$

Assim, as variáveis de projeto são:

- A altura da seção transversal,  $h$ ;
- A base da seção transversal,  $b$ ;
- A espessura da alma,  $t_w$ ;
- A espessura dos flanges,  $t_f$ .

A visualização destas variáveis é possível na Figura 3.4.

Uma vez que os objetivos são o dimensionamento para a tensão de flexão máxima, para o deslocamento vertical máximo e para as instabilidades de flambagem, as restrições de projeto serão:

- Deslocamento inferior ao deslocamento máximo admissível no projeto;
- Tensão de flexão ao longo de toda a longarina deve ser inferior à tensão de escoamento do aço de projeto multiplicada por um fator de segurança a ser determinado;
- Respeito às condições máximas da razão entre comprimento e espessura para evitar falhas por flambagem.

Este caso pode ser considerado como uma otimização de uma função não linear a múltiplas variáveis sujeita à restrições não lineares, pois, segundo [2], a tensão de flexão em um ponto para uma viga de perfil C é dada por:

$$\sigma_F = \frac{Mh}{2I} \quad (5-5)$$

onde  $M$  é o momento fletor no ponto,  $h$  é a altura e  $I$  é o momento de inércia de área em relação ao eixo perpendicular da viga. Os valores de  $M$  assim como os valores do deslocamento vertical

são calculados por meio do Método da Rigidez, e na configuração para a longarina modelada no Capítulo 3, o comportamento das restrições não é linear segundo [2].

Para a resolução numérica o MATLAB® possui a função *fmincon*, que possui como argumentos, segundo [12]:

- *fun*: Função vetorial objetivo do programa de otimização;
- *x0*: Vetor cujas entradas são os pontos de partida para as variáveis de projeto no algoritmo de otimização;
- *A*: Matriz dos coeficientes do sistema de desigualdades lineares;
- *b*: Matriz dos resultados do sistema de desigualdades lineares;
- *Aeq*: Matriz dos coeficientes do sistema de igualdades lineares;
- *beq*: Matriz dos resultados do sistema de igualdades lineares;
- *lb*: Vetor com os limites inferiores das variáveis de projeto;
- *ub*: Vetor com os limites superiores das variáveis de projeto;
- *nonlcon*: Restrições não lineares do problema;
- *options*: Opções a serem consideradas pela função de otimização durante sua execução.

Como visto anteriormente, no problema em questão não há condições de igualdade ou desigualdade lineares, logo *A*, *B*, *Aeq* e *Beq* serão nulos. Várias estimativas iniciais de *x0* serão feitas conforme sugere [13], a fim de verificar a unicidade ou não das soluções de otimização encontradas. As variáveis *lb* e *ub* podem ser estabelecidas a partir das dimensões dos perfis em C existentes no mercado e em *nonlcon* devem ser informadas as três restrições do problema.

Já em *options*, solicita-se a resolução do problema pelo algoritmo do ponto interior (*interior-point*), onde os gradientes da função objetivo devem ser calculados através do método das diferenças finitas em cada passo pelo próprio código pela fórmula para diferenças centradas, e por fim o número máximo de avaliações da função objetivo é 10000.

O fato de utilizar as opções do *fmincon* para que os gradientes sejam calculados pela própria função do MATLAB® isenta o projetista da necessidade de um cálculo analítico ou por meio de um método numérico destes valores e sua posterior implementação dentro do módulo de otimização.



## CAPÍTULO 6

### SOLUÇÃO DO PROBLEMA

#### 6.1 – Definição dos Parâmetros do Material

Como visto anteriormente, os valores de deslocamento, rotação e, conseqüentemente, de tensão de flexão na longarina que está sendo analisada nesse projeto, estão diretamente relacionados ao material que será escolhido para este componente. A referência [8] sugere o uso do aço ASTM A36, que é um dos mais utilizados na indústria de implementos rodoviários no Brasil. A mesma Referência sugere os valores da Tabela 6.1 para os parâmetros do material:

Tabela 6.1 – Parâmetros do Aço ASTM A36

Parâmetro	Valor
Módulo de Elasticidade (E)	210 GPa
Densidade Volumétrica ( $\rho$ )	7.85 g/cm <sup>3</sup>
Tensão de Escoamento ( $\sigma_E$ )	310 MPa

Por fim, é necessário definir os limites inferiores e superiores do otimizador. Para os valores de  $t_w$  e  $t_f$ , utiliza-se a faixa de espessuras entre 6 mm e 38.10 mm indicados no catálogo [10], do fabricante USIMINAS. Já para  $b$  e  $h$ , cabe ao projetista definir a faixa de variação possível para estes valores. Por compatibilidade com os perfis existentes e guardadas as proporções geométricas de um chassi, a faixa de valores admissível para essas duas grandezas foi estabelecida entre 5 cm e 40 cm.

#### 6.2 – Restrições à flambagem

Segundo a referência [9], em perfis estruturais do tipo C, é fundamental respeitar os limites impostos pelo fenômeno da flambagem para evitar falhas. Para tal, o autor sugere as seguintes limitações no caso de estruturas baseadas no ASTM A36:

$$\frac{b}{t_f} < 16 \quad (6-1)$$

$$\frac{h}{t_w} < 42 \quad (6-2)$$

### 6.3 – Dados de entrada

Para que o programa possa funcionar conforme descrito nos capítulos precedentes, primeiramente é necessário definir os nós da estrutura e, posteriormente, os carregamentos e os graus de liberdade. Segundo o procedimento descrito no Método da Rigidez, os nós que precisam ser obrigatoriamente colocados estão ilustrados na Figura 6.1:

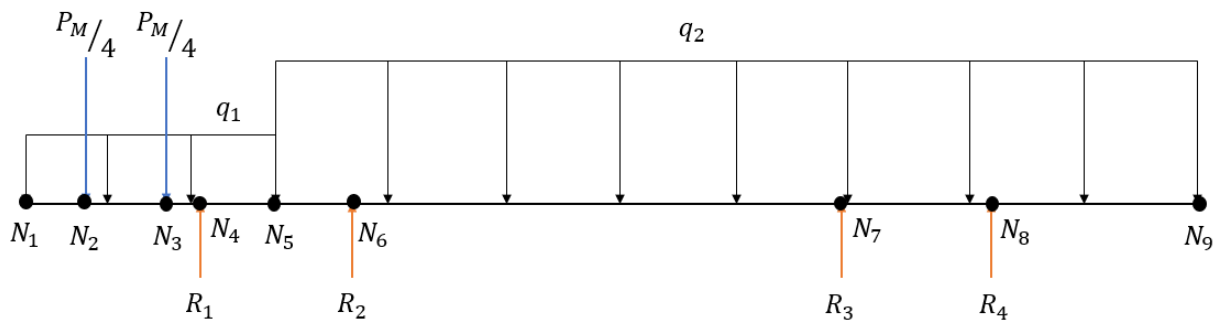


Figura 6.1 – Localização dos nós recomendados pelo Método da Rigidez  
Fonte: AUTOR

Na Figura acima, identificam-se nove nós, numerados de 1 até 9 e, conseqüentemente, oito elementos. Percebe-se que  $N_2$  e  $N_3$  possuem forças na direção vertical, enquanto que os graus de liberdade em deslocamento dos nós  $N_4$ ,  $N_6$ ,  $N_7$  e  $N_8$  estão restringidos devido às reações de apoio. Logo, é possível criar uma matriz  $N_B$  onde cada linha represente um nó, a primeira coluna represente a distância (em m) em relação a extremidade, a segunda a intensidade da força atuante no nó (em kN) e a terceira o valor do momento atuante (em kNm) em cada nó.

$$N_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & -1.2 & 0 \\ 1.3 & -1.2 & 0 \\ 1.765 & 0 & 0 \\ 2.265 & 0 & 0 \\ 2.765 & 0 & 0 \\ 7.715 & 0 & 0 \\ 8.715 & 0 & 0 \\ 10.765 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

Assim como para os nós, é preciso informar as propriedades de cada elemento, ou seja, sua densidade, seu módulo de elasticidade assim como o carregamento uniformemente distribuído atuante naquele segmento. Dessa maneira, define-se  $E_B$ , matriz que contém em cada linha as informações de um elemento, onde a primeira coluna contém os módulos de

elasticidade (em kPa), a segunda a densidade volumétrica (em g/cm<sup>3</sup>) e a terceira a intensidade do carregamento uniformemente distribuído (em kN/m), calculados em (3-6).

$$\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} 210 \times 10^6 & 7.85 & -2.098 \\ 210 \times 10^6 & 7.85 & -2.098 \\ 210 \times 10^6 & 7.85 & -2.098 \\ 210 \times 10^6 & 7.85 & -2.098 \\ 210 \times 10^6 & 7.85 & -9.136 \\ 210 \times 10^6 & 7.85 & -9.136 \\ 210 \times 10^6 & 7.85 & -9.136 \\ 210 \times 10^6 & 7.85 & -9.136 \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

Duas considerações importantes devem ser feitas: as unidades das matrizes  $\mathbf{N}_B$  e  $\mathbf{E}_B$  foram escolhidas de forma a obter os deslocamentos em metros, as rotações em radianos, forças em quilo-Newtons e momentos em quilo-Newtons-metro. Além disso, mesmo que as propriedades sejam uniformes ao longo de toda a longarina, optou-se por esta modelagem de forma que o programa de otimização das dimensões de uma viga possa ser aplicável também a vigas cujas propriedades não sejam uniformes ao longo de todo o comprimento.

Por fim, os dados das restrições são listados também em uma matriz onde cada linha representa as ações em um nó. A primeira coluna assume o número do nó onde exista alguma restrição, e as duas colunas seguintes assumem valores binários, onde 0 representa liberdade e 1 restrição. A segunda coluna refere-se ao deslocamento e a terceira à rotação. Assim, constrói-se a matriz  $\mathbf{S}_B$  de restrições de nós:

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

#### 6.4 – Valores máximos admissíveis e Fatores de Segurança

Um chassi não está, evidentemente, sujeito apenas à forças de natureza estática como carregamentos e reações, mas também à forças de natureza dinâmica devido a acelerações, desacelerações, imperfeições no piso e curvas, por exemplo. Para levar em consideração estes últimos efeitos, recorre-se à [8], onde o autor realiza vários testes em implementos rodoviários em diferentes tipos de piso, sob diferentes condições de carregamento, por meio do uso de extensômetros elétricos nos locais onde encontram-se os valores de tensão mais elevados. Em sua análise, os valores de tensão podem chegar a 10 vezes o valor encontrado para a situação

onde apenas os carregamentos estáticos estão atuantes. Por isso, adota-se o fator de segurança 10 para o dimensionamento devido a cargas dinâmicas.

Neste caso, deve-se considerar também que:

- As **propriedades dos materiais** foram obtidas a partir de dados típicos, e não a partir de testes em laboratório;
- O **ambiente de serviço do equipamento** pode ser considerado como moderadamente severo, uma vez que o chassi está sujeito a muitas imperfeições no pavimento e muitas vezes ao desrespeito à capacidade máxima de transporte indicada nos manuais por parte de seus operadores;
- Os **modelos usados no cálculo de forças e tensões** representam de forma aproximada o sistema, uma vez que é impossível determinar o valor exato dos carregamentos e tensões atuantes na estrutura.

Neste caso, as referências [3] e [6] indicam o uso do fator de segurança 3 para o dimensionamento da estrutura. Assim, levando-se em consideração os efeitos dinâmicos juntamente com o fator de segurança de projeto recomendado pela literatura, a tensão de flexão máxima admissível na modelagem será 30 vezes menor que a tensão de escoamento indicada na Tabela 6.1.

Quanto ao valor máximo admissível para o deslocamento, foi adotado neste projeto 1.0 mm, a partir dos resultados obtidos por [7]. Vale ressaltar que os efeitos dinâmicos podem aumentar significativamente este valor, por isso a adoção de um limite conservador.

## 6.5 – Refinamento da Malha

Para uma avaliação mais precisa das tensões atuantes no chassi e, conseqüentemente, para o seu dimensionamento, é necessário o cálculo de deslocamentos e tensões em uma quantidade de pontos muito além dos nove nós indicados na Figura 6.1. Para tal, efetua-se um refinamento da malha, impondo 50 novos nós igualmente espaçados em cada um dos elementos indicados acima, sem nenhuma restrição ou carregamento nodal.

Este refinamento garante que o espaçamento máximo entre dois nós será de 0.1 m, o que é aceitável dado o comprimento total da estrutura (10.765 m).

## 6.6 – Passos para a execução do programa

Este trabalho utiliza quatro funções em MATLAB® para o cálculo das variáveis de projeto otimizadas:

- **Main:** Concentra a definição dos parâmetros da estrutura a ser otimizada, executa as demais funções e, ao final, apresenta para o usuário o resultado da otimização;
- **GetConstraints:** A partir dos valores das variáveis de projeto no passo do otimizador, calcula a tensão de flexão máxima e o deslocamento máximo considerando toda a extensão da estrutura;
- **GetWeight:** Calcula o valor da função objetivo para os valores das variáveis de projeto indicados no passo do otimizador;
- **RefinaMalha:** Insere a quantidade de nós desejada pelo usuário entre dois nós consecutivos.

A sequência de funcionamento da função `main` está indicada a seguir:

1. Definição das matrizes  $N_B$ ,  $E_B$  e  $S_B$ ;
2. Definição do número de subdivisões de um elemento desejado no refinamento da malha;
3. Construção da malha refinada por meio da função `RefinaMalha`;
4. Definição dos valores máximos admissíveis para a tensão de flexão e deslocamento vertical;
5. Definição das opções da função do módulo de otimização do MATLAB® `fmincon`;
6. Definição dos valores máximos e mínimos admissíveis para as variáveis de projeto  $h$ ,  $b$ ,  $t_w$  e  $t_f$ ;
7. Definição dos valores iniciais das variáveis de projeto para o otimizador;
8. Definição das funções objetivo e de cálculo da máxima tensão de flexão e máximo deslocamento vertical por meio de `GetWeight` e `GetConstraints`;
9. Execução do `fmincon`, com as duas funções do passo anterior, os valores iniciais e os valores limites para as variáveis de projeto e as restrições não-lineares como argumentos;
10. Apresentação do resultado para o usuário.

Já a função `RefinaMalha` possui a seguinte sequência de execução:

1. Cálculo do número de nós, de elementos e de nós com restrições na estrutura inicial, a partir dos dados informados pelo usuário;
2. Cálculo do número de nós e de elementos na nova estrutura;
3. Inicialização das matrizes que armazenarão os dados dos novos carregamentos nodais e dos novos elementos;
4. Inicialização do vetor de forças que armazenará os carregamentos nodais conforme a numeração proposta pelo Método da Rigidez;
5. Preenchimento das matrizes  $N_B$ ,  $E_B$  e  $S_B$  conforme a descrição na seção 6.3;
6. Soma aos valores da matriz de carregamentos nodais os esforços relativos ao carregamento uniformemente distribuído conforme a seção 4.7;
7. Criação do vetor de graus de liberdade fixos conforme a numeração do Método da Rigidez.

Em seguida, `GetConstraints` executará os seguintes passos:

1. Cálculo do número de nós e de elementos presentes na estrutura refinada;
2. Cálculo do vetor de graus de liberdade sem restrições a partir da diferença entre o total de graus de liberdade na estrutura e os fixos;
3. Definição do vetor de graus de liberdade livres;
4. Inserção dos efeitos do peso próprio para as variáveis de projeto definidas no passo do otimizador;
5. Inicialização da matriz de rigidez global e das matrizes de rigidez para cada elemento;
6. Cálculo das matrizes de rigidez global e de elemento a partir do Método da Rigidez;
7. Cálculo dos deslocamentos nodais conforme a seção 4.8;
8. Cálculo das reações de apoio conforme a seção 4.10;
9. Cálculo das reações de extremidade nos elementos conforme a seção 4.9 e comparação dos módulos dos valores obtidos para a determinação do máximo momento fletor na estrutura;
10. Cálculo do máximo deslocamento vertical a partir da comparação dos módulos das entradas indexadas por valores ímpares do vetor de deslocamentos;
11. Cálculo da máxima tensão de flexão usando a equação (5-5);
12. Verificação das condições de projeto.

Por fim, a função `GetWeight`, responsável pelo cálculo do valor assumido pela função objetivo, funciona por meio do seguinte sequenciamento:

1. Cálculo do número de elementos da estrutura após o refinamento da malha;
2. Inicialização de um acumulador para o cálculo do peso de cada elemento individualmente;
3. Cálculo do peso de cada elemento e soma ao acumulador.

Os códigos utilizados neste projeto estão nos **ANEXOS 2 a 5**.

## CAPÍTULO 7

### RESULTADOS OBTIDOS

#### 7.1 – Resultados após execução do programa

Uma vez definidos todos os parâmetros necessários para o funcionamento do programa, é possível executar o programa e obter os resultados. Conforme a sugestão dada por [13], o mesmo programa será executado quatro vezes com condições de partida do otimizador diferentes, conforme os resultados das Tabelas 7.1 a 7.4, a fim de verificar se a solução ótima é única ou se caberá ao projetista a escolha entre as diferentes alternativas possíveis.

Tabela 7.1 – Primeira Execução do Programa

Situação	$b$ (m)	$h$ (m)	$t_w$ (m)	$t_f$ (m)
Condição inicial	0.30	0.30	0.01	0.01
Resultado ótimo	0.220151	0.399878	0.009525	0.013819

Tabela 7.2 – Segunda Execução do Programa

Situação	$b$ (m)	$h$ (m)	$t_w$ (m)	$t_f$ (m)
Condição inicial	0.20	0.30	0.02	0.02
Resultado ótimo	0.220151	0.399878	0.009525	0.013819

Tabela 7.3 – Terceira Execução do Programa

Situação	$b$ (m)	$h$ (m)	$t_w$ (m)	$t_f$ (m)
Condição inicial	0.40	0.35	0.03	0.01
Resultado ótimo	0.220151	0.399878	0.009525	0.013819

Tabela 7.4 – Quarta Execução do Programa

Situação	$b$ (m)	$h$ (m)	$t_w$ (m)	$t_f$ (m)
Condição inicial	0.10	0.10	0.01	0.01
Resultado ótimo	0.220151	0.399878	0.009525	0.013819



## 7.2 – Análise dos resultados

Após análise dos resultados nas Tabelas 7.1 a 7.4, observa-se que, independentemente dos valores das condições iniciais, o resultado converge para uma única solução, aumentando assim as chances de que essa seja a única solução do problema, segundo a literatura.

Recorda-se, pela equação (3-2), que os valores de  $t_f$  e  $h$  estão elevados à terceira potência na equação que define o momento de inércia da seção transversal. Logo, é de se esperar que o otimizador busque primeiramente maximizar estes valores respeitando os limites inferior e superior estabelecidos para a altura. Já para a espessura dos flanges, há uma busca por um valor que aumente o momento de inércia, porém sem incrementar demais o peso da estrutura e respeitando a condição de flambagem.

Os demais valores também são estabelecidos pelo otimizador visando reduzir o peso da estrutura sem, no entanto, violar as restrições estabelecidas para flambagem, deslocamento vertical máximo e tensão de flexão inferior ao limite de escoamento.

A Figura 7.1 ilustra a geometria do perfil ótimo encontrado, agora com as dimensões aproximadas para valores em milímetros facilmente fabricáveis:

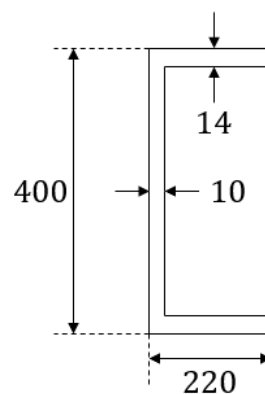


Figura 7.1 – Perfil da seção transversal obtido após otimização (dimensões em milímetros)

Fonte: AUTOR

## **CAPÍTULO 8**

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

#### **8.1 – Conclusão Geral e Comentários**

Foi possível verificar por meio das diferentes simulações realizadas que o algoritmo de otimização busca definir os valores dos parâmetros de forma a garantir o menor valor do momento de inércia necessário para satisfazer as condições impostas em flexão e deformação vertical, verificando as restrições impostas pela flambagem.

Também deve-se salientar a eficiência do MATLAB® e do Método da Rigidez: apesar da definição dos parâmetros tratar-se de um procedimento iterativo, com matrizes de dimensão elevada (no caso deste trabalho a matriz de rigidez global possui dimensão  $400 \times 400$ ), o resultado é obtido de forma rápida (tempo de execução inferior a 30 segundos). Dessa forma, utilizar este método para o cálculo de tensões em vigas dentro do MATLAB® é uma excelente opção para trabalhos de Engenharia.

Vale ressaltar também que, este projeto dimensionou apenas as duas longarinas do chassi para obter resultados de natureza acadêmica. Evidentemente, para a obtenção de resultados aplicáveis na indústria, os materiais deveriam ser testados de maneira prévia e os carregamentos deveriam ser determinados de forma a reproduzir melhor diferentes situações de uso do chassi. Dessa forma, seria possível também reduzir os fatores de segurança utilizados neste projeto. As dimensões determinadas no estudo também não levaram em conta fatores econômicos, o que também é determinante para a escolha de dimensões adotadas nos produtos industriais.

Os dados devidos aos carregamentos dinâmicos atuantes na estrutura foram selecionados a partir de outro trabalho envolvendo implementos rodoviários, porém de geometria distinta. Para a obtenção de melhores resultados, evidentemente é necessário um maior investimento na determinação do comportamento da estrutura específica estudada neste trabalho.

#### **8.2 – Sugestões para Trabalhos Futuros**

Sugere-se, primeiramente, aprimorar a modelagem do problema a partir das próprias sugestões de estruturas apresentadas por [1]: uma modelagem por meio do tipo grelha permitiria também o dimensionamento das travessas, apesar de tornar os cálculos e técnicas para a

determinação das matrizes de rigidez global um pouco mais complexas, pois as análises tratariam de um problema de três dimensões.

Outra sugestão interessante é estabelecer um contato com a indústria de chassis, e obter a dimensão exata da seção transversal utilizada em seus produtos, para o estabelecimento de comparações entre os valores teóricos e os utilizados na indústria. Nesse contato, também seria possível verificar com os profissionais quais seriam as restrições que são efetivamente empregadas para o dimensionamento de estruturas veiculares na prática e também métodos mais sofisticados de definir os carregamentos para os quais o chassi deve ser dimensionado.

Um estudo do comportamento dinâmico do chassi é fundamental para compreender as tensões atuantes quando este é submetido a impactos, como a passagem por buracos ou imperfeições no pavimento. Isto evitaria o uso de dados de estudos sobre estruturas similares e utilizaria dados específicos para o chassi em questão, podendo também acarretar em uma diminuição dos fatores de segurança utilizados no projeto.

Seria importante, também, a análise de outros fenômenos presentes nas estruturas mecânicas como fadiga, vibrações e cisalhamento, por exemplo. Apesar do objetivo deste projeto ser dimensionar uma estrutura baseado em uma análise de tensões, os fenômenos listados podem provocar mudanças significativas nas dimensões encontradas para não haver falha em serviço.

Também é importante a simulação de diferentes carregamentos e suas combinações que provoquem as cargas máximas indicadas nos eixos. Neste trabalho, analisou-se apenas o efeito de dois carregamentos uniformes, porém é possível trabalhar com cargas trapezoidais, parabólicas, senoidais, pontuais, dentre outras possibilidades.

Em um projeto onde existam várias incertezas quanto ao uso do chassi, devido à variedade de aplicações, também são interessantes estudos de confiabilidade estrutural, pois os carregamentos atuantes sobre as longarinas não são determinísticos assim como os parâmetros de resistência do material. Isto permitiria um análise racional da segurança deste tipo estrutura, assim como tornaria possível a determinação de coeficientes de segurança apropriados para a sua verificação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GERE, J. M.; WEAVER JR, W. Análise de Estruturas Reticuladas. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- [2] GERE, J. M.; GOODNO, B. J. Mecânica dos Materiais. 7. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.
- [3] JUVINALL, R. C.; MARSHEK, K. M. Fundamentos do Projeto de Componentes de Máquinas. 5. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [4] KURDI, O.; RAHMAN, R. A.; SAMIN, P. M. Optimization of Heavy Duty Truck Chassis Design by Considering Torsional Stiffness and Mass of The Structure. Applied Mechanics of Materials, Vol. 554 (2014), pp 459-463.
- [5] LEANDRO, V. M. Análise Estrutural de um Chassi de Semirreboque pelo Método dos Elementos Finitos. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Automotiva. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville, 2019.
- [6] NORTON, R. L. Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada. 4. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [7] PATEL, H.; PANCHAL, K. C.; JADAV, C. S. Structural Analysis of Truck Chassis Frame and Design Optimization for Weight Reduction. International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT), Vol. 2, April 2013.
- [8] PERES, G. Uma Metodologia para Simulação e Análise Estrutural de Veículos de Transporte de Carga. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.
- [9] SILVA, V. P. Dimensionamento de Estruturas de Aço. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (POLI-USP), 2012.
- [10] SOLUÇÕES USIMINAS. Catálogo Online. Disponível em: <<https://www.usiminas.com/nossos-produtos/>>. Acesso em 21/10/2019.
- [11] THE MATHWORKS, INC. User's Guide for *fmincon*: Find Minimum of Constrained Nonlinear Multivariable Functions. Version R2019a, 2019.
- [12] THE MATHWORKS, INC. User's Guide for Constrained Nonlinear Optimization Algorithms. Version R2019a, 2019.
- [13] VANDERPLAATS, G. N. Numerical Optimization Techniques for Engineering Design. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1984.
- [14] VAZ, L. E.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M. Programação Matemática: Teoria, Algoritmos e Aplicações na Engenharia. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 2012.

- [15] VOLKSWAGEN CAMINHÕES E ÔNIBUS. Volksbus 17.230OD: Especificações Técnicas. Disponível em: <<https://www.vwco.com.br/produtos-volkswagen/modelo/onibus-1/17-230-od-55>>. Acesso em 10/04/209.
- [16] YILMAZÇOBAN, I. K.; KAHRAMAN, Y. Truck Chassis Structural Thickness Optimization With The Help Of Finite Element Technique. The Online Journal of Science and Technique (TOJSAT), Vol. 1, July 2011.

# Volksbus 17.230 OD

Tipo (Aros e rodas)	Aço (7,5" x 22,5")
Pneus	275/80R22 5

Relação de redução do eixo traseiro	5,86:1	5,38:1	6,57:1
Velocidade máxima(km/h)	105	112	95
Capacidade de rampa em PBT (%)	39	36	44
Partida em rampa em PBT(%)	35	32	40

Tipo (Aros e rodas)	Aço (7,5" x 22,5")
Pneus	275/80R22 5



## ANEXO 2: Função *Main*

```
% Trabalho de Conclusão de Curso do Aluno Lucas do
Nascimento Sagrilo
% Baseado no Trabalho dos Professores Anderson Pereira e
Ivan Menezes do
% Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio
% Data: 03/OUT/2019

format long;

%% Dados da Viga a ser Otimizada

% Para o bom funcionamento do programa, em todo ponto onde
exista uma
% singularidade (mudança no valor da carga distribuída,
mudança nas
% dimensões da seção transversal, força ou momento
pontual) deve ser
% inserido pelo usuário um nó neste ponto.
% ATENÇÃO: Este programa leva em consideração apenas
cargas pontuais e
% distribuídas uniformemente, não admite cargas do tipo
trapezoidais,
% senoidais, etc...

% NODE_BASE(i) = [ coord_x, F, M ];
NODE_BASE = [ 0.0    ,  0.0 , 0.0 ;
              0.3    , -1.2 , 0.0 ;
              1.3    , -1.2 , 0.0 ;
              1.765  ,  0.0 , 0.0 ;
              2.265  ,  0.0 , 0.0 ;
              2.765  ,  0.0 , 0.0 ;
              7.715  ,  0.0 , 0.0 ;
              8.715  ,  0.0 , 0.0 ;
              10.765 ,  0.0 , 0.0 ];

% ELEM_BASE(i) = [ E, rho, q ];
ELEM_BASE = [ 210000000.0 , 7.850 , -2.098 ;
              210000000.0 , 7.850 , -2.098 ;
              210000000.0 , 7.850 , -2.098 ;
              210000000.0 , 7.850 , -2.098 ;
              210000000.0 , 7.850 , -9.136 ;
              210000000.0 , 7.850 , -9.136 ;
              210000000.0 , 7.850 , -9.136 ;
              210000000.0 , 7.850 , -9.136 ];
```

```

% SUPP_BASE(i) = [ Node, dy, rz ];
SUPP_BASE = [ 4, 1, 0 ;
              6, 1, 0 ;
              7, 1, 0 ;
              8, 1, 0 ];

% Número de subdivisões de cada elemento
DISCR = 50;

%% Constroi a Estrutura de Dados da Viga Refinada
[NODE, ELEM, FIX, F ] = ...
    RefinaMalha( NODE_BASE, ELEM_BASE, SUPP_BASE, DISCR );

% Valores Máximos Admissíveis
SigmaY = 310000.0/20;
Max_u = 0.001;

% Organização da Estrutura de Dados para o módulo de
Otimização
options =
optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','inter
ior-point', ...

'SpecifyObjectiveGradient',false,'SpecifyConstraintGradien
t',false, ...
    'CheckGradients', false, ...
    'FiniteDifferenceType','central', ...
    'MaxFunctionEvaluations',10000);

ub = [ 0.40  0.40  0.0381    0.0381 ];
lb = [ 0.05  0.05  0.006    0.006 ];
x0 = [ 0.30  0.30  0.01     0.01 ];

ConstFunc =
@(x)GetConstraints(x,SigmaY,Max_u,NODE,ELEM,FIX,F);
WeightFunc = @(x)GetWeight(x,NODE,ELEM);

[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = ...

fmincon(WeightFunc,x0,[],[],[],[],lb,ub,ConstFunc,options)
;

% Valores Ótimos
x

```



### ANEXO 3: Função *RefinaMalha*

```
% Constrói a Estrutura de Dados da Viga Refinada
function [NODE, ELEM, FIX, F] = ...
    RefinaMalha ( NODE_BASE, ELEM_BASE, SUPP_BASE, DISCR )

NNBase = size(NODE_BASE,1);
NEBase = NNBase - 1;
NSBase = size(SUPP_BASE,1);

NN = (NNBase - 1)*DISCR + 1;
NE = NN - 1;

NODE = zeros(NN,3);
ELEM = zeros(NE,3);
F = zeros(2*NN,1);

% Monta as Estruturas NODE, ELEM e F
k=0;
C=0.0;
NODE(1,:) = NODE_BASE(1,:);
F(2*1-1) = NODE_BASE(1,2);
F(2*1) = NODE_BASE(1,3);
for i=1:NEBase
    dL = ( NODE_BASE(i+1,1) - NODE_BASE(i,1) )/ DISCR;
    for j=1:DISCR
        k=k+1;
        C=C+dL;
        ELEM(k,:) = ELEM_BASE(i,:);
        NODE(k+1,1)=C;
        q = ELEM_BASE(i,3);
        F(2*k-1)=F(2*k-1)+q*dL/2;
        F(2*(k+1)-1)=F(2*(k+1)-1)+q*dL/2;
        F(2*k)=F(2*k)+q*dL*dL/12;
        F(2*(k+1))=F(2*(k+1))-q*dL*dL/12;
    end
    NODE(k+1,:) = NODE_BASE(i+1,:);
    F(2*(k+1)-1)=F(2*(k+1)-1)+NODE_BASE(i+1,2);
    F(2*(k+1))=F(2*(k+1))+NODE_BASE(i+1,3);
end

% Monta o vetor FIX
k=0;
for i=1:NSBase
    node = SUPP_BASE(i,1);
    if SUPP_BASE(i,2)==1
```

```
        k=k+1;
        FIX(k) = (node-1)*2*DISCR+1;
    end
    if SUPP_BASE(i,3)==1
        k=k+1;
        FIX(k) = (node-1)*2*DISCR+2;
    end
end
```

#### ANEXO 4: Função *GetConstraints*

```
%% Cálculo das Funções Correspondentes às Restrições
function [c,ceq,dceq] = GetConstraints ...
    (x, SigmaY, Max_u, NODE, ELEM, FIX, F )

NNode = size(NODE,1);
NElem = NNode-1;
FREE = setdiff(1:2*NNode,FIX);

%% Calcula uma Viga Linear pelo Método dos Elementos
Finitos
% Obs: considerando o Comportamento Linear Elástico e
% Regime de Pequenos Deslocamentos.
% Código desenvolvido durante o Trabalho de Conclusão de
Curso do aluno
% Lucas do Nascimento Sagrilo a partir do trabalho dos
Professores Ivan
% Menezes e Anderson Pereira do Departamento de Engenharia
Mecânica da
% PUC-Rio

%% Efeitos do Peso Próprio

for i = 1:NElem
    dL = NODE(i+1,1) - NODE(i,1);
    b = x(1); h = x(2); tw = x(3); tf = x(4);
    A1 = h*tw;
    A2 = tf*(b-tw);
    A = A1 + 2*A2;
    g = 9.81;
    q = ELEM(i,2)*A*g;
    F(2*i-1) = F(2*i-1) - q*dL/2;
    F(2*i) = F(2*i) - q*dL*dL/12;
    F(2*i+1) = F(2*i+1) - q*dL/2;
    F(2*i+2) = F(2*i+2) + q*dL*dL/12;
end

%% Solução pelo Método dos Elementos Finitos
% Cálculo dos Deslocamentos Nodais

% Matriz de Rigidez Global
K = zeros(2*NNode,2*NNode);

% Matrizes de Rigidez dos Elementos
K_ELEM = zeros(4,4,NElem);
```

```

% Preenchimento das Matrizes K e K_ELEM
% Fonte: GERE e WEAVER: Análise de Estruturas Reticuladas.
% Guanabara Dois, 1981
for e = 1:NElem
    L = NODE(e+1)-NODE(e);
    E = ELEM(e,1);
    eDof = [2*e-1, 2*e, 2*e+1, 2*e+2];
    b = x(1); h = x(2); tw = x(3); tf = x(4);
    I1 = (tw*h^3)/12; % Vertical Rectangle
    I2 = ((b-tw)*(tf^3))/12 + (((h-tf)/2)^2)*(b-tw)*tf; %
Horizontal Rectangle
    I = I1 + 2*I2;
    k = [12*E*I/(L^3), 6*E*I/(L^2), -12*E*I/(L^3), 6*E*I/(L^2);
        6*E*I/(L^2), 4*E*I/L, -6*E*I/(L^2), 2*E*I/L;
        -12*E*I/(L^3), -6*E*I/(L^2), 12*E*I/(L^3), -
6*E*I/(L^2);
        6*E*I/(L^2), 2*E*I/L, -6*E*I/(L^2), 4*E*I/L];
    K_ELEM(:, :, e) = k;
    K(eDof, eDof) = K(eDof, eDof) + k;
end

% Cálculo dos Deslocamentos Nodais
% U(2*i-1) = Deslocamento Vertical do Nó i
% U(2*i) = Deslocamento Angular do Nó i
% Fonte: GERE e WEAVER: Análise de Estruturas Reticuladas.
% Guanabara Dois, 1981
U = zeros(2*NNode,1);
U(FREE) = K(FREE, FREE) \ F(FREE);

%% Cálculo das Reações de Apoio
% Fonte: GERE e WEAVER: Análise de Estruturas Reticuladas.
% Guanabara Dois, 1981
% Ar = Arl + Srd*D, Srd=K(FIX,FREE)
% Arl = F, pois cargas entre nós não são admitidas neste
programa
Arl = (-1)* F(FIX);
Srd = K(FIX,FREE);
D = U(FREE);
Ar = Arl + Srd*D;

%% Cálculo do Momento Máximo
M_MAX=0.0;
for i=1:size(FIX,2)
    dof=FIX(i);
    if mod(dof,2) == 0
        if abs( Ar(i) ) > M_MAX
            M_MAX = abs ( Ar(i) );
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
for i=1:NElem
    k = K_ELEM(:, :, i);
    u = [ U(2*i-1), U(2*i), U(2*i+1), U(2*i+2) ];
    f = k * u';
    M_MAX = max([M_MAX, f(2), f(4)]);
end

%% Cálculo do Máximo Deslocamento Vertical
u_MAX=0.0;
for i=1:2*NNode
    if mod(i,2) == 1
        if abs( U(i) ) > u_MAX
            u_MAX = abs ( U(i) );
        end
    end
end

%% Verificação das Condições do Problema
% Máxima tensão de flexão e Máximo deslocamento vertical
admissível
c = zeros(4,1);
SigmaM = M_MAX*(1/2)*x(2)/I;
c(1) = SigmaM/SigmaY - 1;
c(2) = u_MAX/Max_u - 1;
c(3) = ((x(2)/x(3))/42) - 1;
c(4) = ((x(1)/x(4))/16) - 1;

% Restrições de Igualdade e Suas Derivadas
ceq = []; dceq = [];

```

## ANEXO 5: Função *GetWeight*

```
% Cálculo do Valor da Função Objetivo (Peso da Viga)
% Código desenvolvido durante o Trabalho de Conclusão de
Curso do aluno
% Lucas do Nascimento Sagrilo a partir do trabalho dos
Professores Ivan
Menezes e Anderson Pereira do Departamento de Engenharia
Mecânica da
PUC-Rio
function [weight] = GetWeight(x,NODE,ELEM)
NElem = size(NODE,1) - 1;

weight = 0;
for e = 1:NElem
    b = x(1); h = x(2); tw = x(3); tf = x(4);
    A1 = h*tw;
    A2 = tf*(b-tw);
    A = A1 + 2*A2;
    weight = ELEM(e,2)*A*(NODE(e+1)-NODE(e));
end
```