



Nícolas Salas Julio

Estudo de respostas vibratórias em navios

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio.

Orientadora: Roberta de Queiroz Lima

Rio de Janeiro
Novembro de 2019

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais e à minha irmã por sempre me apoiarem neta longa jornada que foi a graduação. À professora Roberta de Queiroz Lima, que aceitou ser minha orientadora neste trabalho e esteve sempre disposta a me ajudar na sua realização, tirando todas as dúvidas que surgiram durante o período. A todos os meus amigos presentes na minha vida durante a minha graduação, em especial a meus amigos Michael Licinio Krohling e Rider Platon Nogueira de Brito, companheiros nos dois anos que passei na Ecole Centrale de Nantes e co-autores do projeto que foi base para a ideia deste trabalho de conclusão de curso.

Resumo

Estudo de respostas vibratórias em navios

Dentro do universo de transporte de pessoas e mercadorias, os navios têm um papel essencial enquanto veículos de transporte em massa. Como outras máquinas e elementos mecânicos, os navios são submetidos aos diferentes esforços em suas respectivas estruturas. Tais esforços podem ser os causadores de uma possível falha, e então, o conhecimento destes é de fundamental importância para a concepção dos projetos e para a realização de manutenções preventivas em navios já existentes. Por todos estes aspectos, é extremamente interessante saber modelar estes esforços sofridos pelo navio. Contudo, a construção deste modelo pode ser complexa. Os navios, normalmente, têm estruturas e geometrias extremamente complexas, saber representá-las dentro de um modelo pode não ser uma tarefa trivial. Sabendo disto, neste trabalho é proposto um modelo para representar a dinâmica do navio através da teoria de vigas que é simples e conhecida. Primeiramente o problema homogêneo é tratado, são encontradas soluções analíticas para os modos de vibração que são comparadas com aproximações numéricas dos mesmos. As aproximações numéricas são obtidas com o auxílio da técnica de discretização de elementos finitos. Observamos a influência do número de elementos utilizados na discretização na representação dos diferentes modos, é vista que quanto mais complexo o movimento do modo (maior frequência natural) mais elementos são necessários para obter um erro inferior a 1%. Para resolver problemas forçados utilizamos, além da discretização por elementos finitos, o método de integração numérica de Runge-Kutta. Observamos que é possível determinar o número de elementos necessários para representar a dinâmica da viga forçada corretamente. Conhecendo a mais alta frequência excita pelo forçamento podemos determinar quantos elementos são necessários para representar o modo mais complexo excitado pelo forçamento externo. Analisamos que esta escolha do número de elementos é crucial, uma vez que quando escolhemos menos elementos do que o necessário arriscamos perder informações da resposta dinâmica da viga. Por outro lado, quando escolhemos um número de elementos demasiadamente alto o tempo de cálculo aumenta consideravelmente (pode aumentar 1 hora passando de 30 para 50 elementos por exemplo) sem ganho em precisão (diferenças entre as mesmas aproximações com 30 e 50 elementos é da ordem de $10^{-5}\%$).

Palavras-chave

Navios; modelo viga-navio; método dos elementos finitos; vibrações; análise modal.

Abstract

Study of vibratory responses in ships

Within the universe of transporting people and goods, ships play an essential role as mass transport vehicles. Like other machines and mechanical elements, ships are subjected to different stresses in their respective structures. Such efforts may be the cause of a possible failure, and therefore, their knowledge is of fundamental importance for project design and preventive maintenance on existing ships. For all these aspects, it is extremely interesting to know how to model these efforts suffered by the ship. However, the construction of this model can be complex. Ships usually have extremely complex structures and geometries, so representing them within a model may not be a trivial task. Knowing this, this work proposes a model to represent the ship dynamics through the simple and known beam theory. First the homogeneous problem is solved, analytical solutions are found for the vibration modes that are compared with numerical approximations of them. Those numerical approximations are obtained with the help of the finite element discretization technique. We observe the influence of the number of elements used in the discretization in the representation of the different modes, since the more complex the movement of the mode (higher natural frequency) the more elements are required to get an error of less than 1 %. After this first part, we pass on the study of forced responses. In addition to finite element discretization, we use the Runge-Kutta numerical integration method to solve the differential equations in time. We note that it is possible to determine the number of elements required to represent the dynamics of the forced beam correctly. Knowing the highest frequency excited by forcing we can determine how many elements are needed to represent the most complex mode excited by external force. We analyze that this choice of the number of elements is crucial, since when we choose fewer elements than necessary we risk losing information about the dynamic response of the beam. On the other hand, when you choose too many elements the calculation time increases considerably (it can increase by 1 hour from 30 to 50 elements for example) without gain in accuracy (differences between the same approximations with 30 and 50 elements is in the order of 10^{-5} %).

Keywords

Ships; beam-ship model; finite elements method; vibrations; modal analysis.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Motivação	9
1.2	As ferramentas utilizadas	10
2	Apresentação do problema	12
2.1	O problema	12
2.2	O modelo proposto	13
2.3	Equações da dinâmica do problema	16
2.4	Simplificações propostas	18
3	Solução analítica da dinâmica da viga	19
3.1	Resolução por separação de variáveis	19
3.2	A solução	20
4	Aproximação numérica para a solução da dinâmica da viga	23
4.1	Formulação fraca	23
4.2	Método de elementos finitos	25
4.3	Aplicação no problema viga-navio	26
4.4	Comparação solução analítica e aproximação MEF	33
5	Solução do problema no tempo	36
5.1	Decomposição modal	36
5.2	Aproximação Numérica: método de Runge-Kutta	39
6	Aproximação numérica para dinâmica da viga forçada	41
6.1	Forçamento constante	41
6.2	Forçamento senoidal : excitação da décima frequência natural	43
6.3	Forçamento distribuído	48
6.4	O <i>slaming</i>	51
7	Conclusões	55
7.1	Conclusões gerais	55
7.2	O produto deste trabalho	56

Lista de figuras

2.1	<i>Slamming</i> em um navio de pequeno porte	12
2.2	Movimento do <i>slamming</i> tratado neste texto	13
2.3	Exemplo de modelagem de navio por uma viga [1]	13
2.4	Repartição da viga tratada neste estudo	15
2.5	Evolução da força representativa do <i>slaming</i>	15
2.6	Diagrama de corpo livre em um elemento dx da viga	17
3.1	Modos de vibração da viga	21
3.2	Modo rígido de deslocamento	22
4.1	Viga dividida em 3 elementos	26
4.2	Variáveis nodais do problema	28
4.3	Funções de interpolação por nó	29
4.4	Representação visual do processo de acoplagem	30
4.5	Comparação soluções numéricas e analíticas	33
4.6	Comparação soluções numéricas e analíticas	34
5.1	Ilustração do problema a ser resolvido com decomposição modal	38
6.1	Ilustração do problema com forçamento nodal constante	41
6.2	Solução analítica do deslocamento nodal do ponto médio da viga	42
6.3	Erro percentual das aproximações em comparação com a solução analítica	43
6.4	Ilustração do problema com forçamento nodal senoidal	44
6.5	Aproximação da solução com 10, 20, 30, 40 e 50 elementos	45
6.6	Aproximação da solução com 20 elementos	45
6.7	Erro percentual entre as solução analítica e aproximação numérica para o quinto modo de vibração	46
6.8	Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos	47
6.9	Diferença entre as aproximação utilizando 20 e 50 elementos	47
6.10	Ilustração do problema com forçamento distribuído constante	48
6.11	Aproximação da solução com 10, 20 e 30 elementos	48
6.12	Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos	49
6.13	Ilustração do problema com forçamento distribuído senoidal	49
6.14	Aproximação da solução com 10, 20, 30 e 50 elementos	50
6.15	Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos	50
6.16	Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos	51
6.17	Ilustração do problema com forçamento do <i>slaming</i>	51
6.18	Evolução temporal do forçamento representativo do <i>slaming</i>	52
6.19	Transformada de Fourier do sinal de entrada do problema	52
6.20	Erro aproximação terceiro modo em relação a solução analítica	53

6.21	Aproximação da solução com 14 elementos	53
6.22	Aproximações com 14, 10, 4 e 2 elementos	54
6.23	Aproximações com 14, 10, 4 e 2 elementos com zoom para observarmos a convergência	54

Lista de tabelas

2.1	Propriedades das diferentes seções do navio	14
2.2	Propriedades médias da viga	18
3.1	Valores de $\beta_n L$ [2]	21
3.2	β_n, σ_n e ω por modo	22
6.1	Frequências naturais da viga	44

1

Introdução

1.1

Motivação

Dentro do universo de transporte de pessoas e mercadorias, os navios têm um papel essencial enquanto veículos de transporte em massa. Como outras máquinas e elementos mecânicos, os navios são submetidos aos diferentes esforços em suas respectivas estruturas. Tais esforços podem ser os causadores de uma possível falha, e então, o conhecimento destes é de fundamental importância para a concepção dos projetos e para a realização de manutenções preventivas em navios já existentes.

Estes esforços podem ser de diferentes tipos (vibrações, choques, corrosões, etc.) e podem ser gerados por diferentes fontes, como as ondas do mar, os ventos ou até fontes internas, como o motor do navio e suas turbinas. A motivação deste trabalho é o estudo das vibrações de um navio geradas pelos diferentes tipos de esforços possíveis, simulados por forças concentradas ou distribuídas em todo navio.

Por todos estes aspectos, é extremamente interessante saber modelar estes esforços sofridos pelo navio. Contudo, a construção deste modelo pode ser complexa. Os navios, normalmente, têm estruturas e geometrias extremamente complexas, saber representá-las dentro de um modelo pode não ser uma tarefa trivial.

Neste contexto, é habitual na indústria naval modelar a estrutura central de navios através da teoria de vigas [1] [3]. O chamado modelo viga-navio é usado para representar a dinâmica de um navio de uma maneira mais simples. Na verdade, o navio é dividido em diferentes seções com áreas e momentos de inércia conhecidos, que são substituídas pelo chamado "elemento viga". A junção destes "elementos viga" forma o modelo do navio, substituindo a geometria complexa antes apresentada e facilitando os cálculos de deformações, esforços cortantes e momentos fletores resultantes dos carregamentos aplicados.

Neste trabalho iremos apresentar uma aplicação do modelo viga-navio na resolução de problemas reais que serão explicados nas seções subsequentes. Primeiramente a modelagem destes problemas será apresentada, junto com suas respectivas equações. Em seguida, a solução analítica do problema será mostrada, junto com os diferentes modos de vibração do problema homogêneo. Depois, iremos aplicar uma discretização por elementos finitos na viga, de

forma a poder calcular uma aproximação numérica para o problema. Os resultados numéricos serão comparados aos analíticos com o objetivo de validar o modelo numérico.

1.2

As ferramentas utilizadas

Neste trabalho serão tratados diversos conceitos que não são muito abordados durante o curso de graduação em engenharia mecânica. Estes conceitos são listados a seguir, seguidos de uma breve explicação de suas respectivas utilizações neste trabalho.

1. Teoria de vigas

Esta teoria foi utilizada no modelo proposto para representar o navio. Serão explicados durante o trabalho (mais especificamente no capítulo 2) quais são os modelos normalmente utilizados para descrever as equações representativas da dinâmica de uma viga, assim como as hipóteses tomadas para se chegar até estas equações.

2. Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é uma técnica de discretização de problemas contínuos. Neste trabalho ele é utilizado para discretizar a viga representativa do navio, auxiliando na obtenção de uma aproximação numérica para a solução da dinâmica da viga.

3. Análise de convergência

Analisaremos também a convergência entre as diferentes soluções aproximadas, colocando em evidência os fatores importantes para que esta convergência ocorra.

4. Transformada de Fourier

A transformada de Fourier será utilizada aqui para descobrir qual a frequência de excitação de um forçamento externo aplicado na viga. Esta descoberta será feita através da análise do espectro de frequência resultante da aplicação da transformada no sinal de entrada (forçamento em função do tempo).

5. Decomposição modal

Após a discretização do problema através do método dos elementos finitos serão apresentadas soluções para as diferentes coordenadas modais do problema. Estas soluções serão obtidas com o auxílio da decomposição modal, onde as matrizes resultantes da discretização por elementos finitos são projetadas em uma base modal para o desacoplamento do sistema.

6. Integração numérica

Também foi utilizado o método de integração numérica de Runge-Kutta para encontrar uma aproximação numérica à solução. Este método será apresentado junto a sua utilização neste trabalho durante o capítulo 5.

2

Apresentação do problema

Neste capítulo iremos definir o problema que será tratado neste trabalho. Começaremos apresentando o já descrito modelo viga-navio, ou seja, como foi modelado o problema. Seguiremos pela apresentação das equações da dinâmica do problema a serem resolvidas, com apresentação das condições iniciais e de contorno. Finalmente, será proposta uma simplificação no modelo para facilitar a análise da sua fiabilidade.

2.1

O problema

Como já descrito na introdução, trataremos aqui de vibrações em navios, causadas pelos diferentes forçamentos. Em um primeiro momento, tentaremos simular os esforços feitos pelas ondas, causadores de um movimento conhecido, em inglês, como *slaming*. O *slaming* é o conjunto de movimentos bruscos feitos pelo navio quando este "passa" pelas ondas. A imagem a seguir ilustra este fenômeno[4][5].



Figura 2.1: *Slamming* em um navio de pequeno porte

Sabemos que os deslocamentos causados pela passagem de um navio por uma onda podem acontecer em diversas direções (vertical, horizontal, rotacional e qualquer combinação dessas três)[5]. Entretanto, neste trabalho simplificaremos este movimento apenas à direção transversal ao eixo principal do navio, como mostrado na figura abaixo:

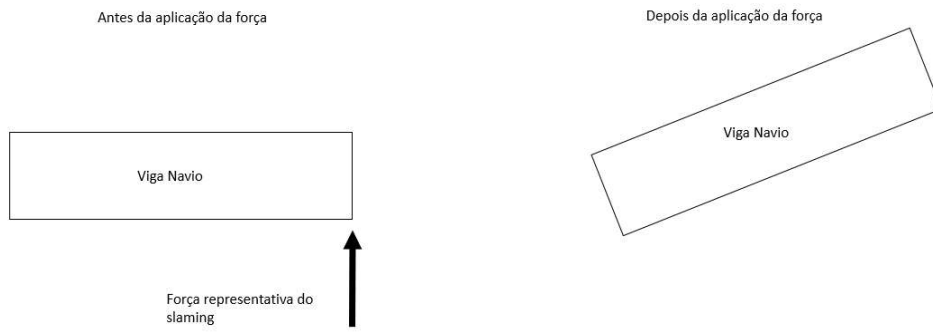


Figura 2.2: Movimento do *slamming* tratado neste texto

2.2

O modelo proposto

2.2.1

O navio

Agora que conhecemos os problema que será tratado, passemos à sua modelagem. Como também já dito, foi escolhido o modelo viga-navio para modelar o navio. Este modelo consiste em aproximar o navio por uma viga de características variáveis, estas características sendo aproximações nas diferentes seções transversais de um navio[3]. A figure a seguir mostra um exemplo do descrito neste paragrafo:

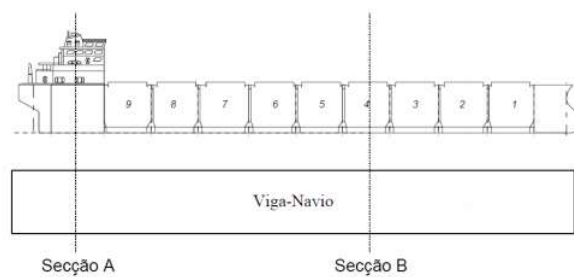


Figura 2.3: Exemplo de modelagem de navio por uma viga [1]

Para construir o modelo aqui tratado, a empresa "*Bureau Veritas*", com sede em Nantes, na França, nos forneceu algumas características de um navio real. Tais características são mostradas na tabela abaixo, acompanhado da representação 1-D da viga, com os diferentes elementos-viga destacados.

Elemento-viga	Abcissa x de inicio (m)	Massa (toneladas)	Área (m^2)	$I_{yy}(m^4)$
1	0	1563	3,8	140
2	11	2020	6,6	593
3	29	1873	5,3	730
4	40	2249	6,4	1159
5	54	2673	6,1	1210
6	72	2681	7	1210
7	86	2673	6,1	1210
8	100	2808	8,2	1666
9	112	2892	7,4	1365
10	129	2662	6,4	1000
11	143	2320	6,1	1063
12	158	2133	6,2	1026
13	172	2038	6,1	1038
14	186	2022	5,7	907
15	201	2060	6,2	1285
16	215	2221	6	1113
17	229	2154	5,3	1000
18	247	1541	4,2	523
19	258	872	3	142
20	272	382	2,5	9,8

Tabela 2.1: Propriedades das diferentes seções do navio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

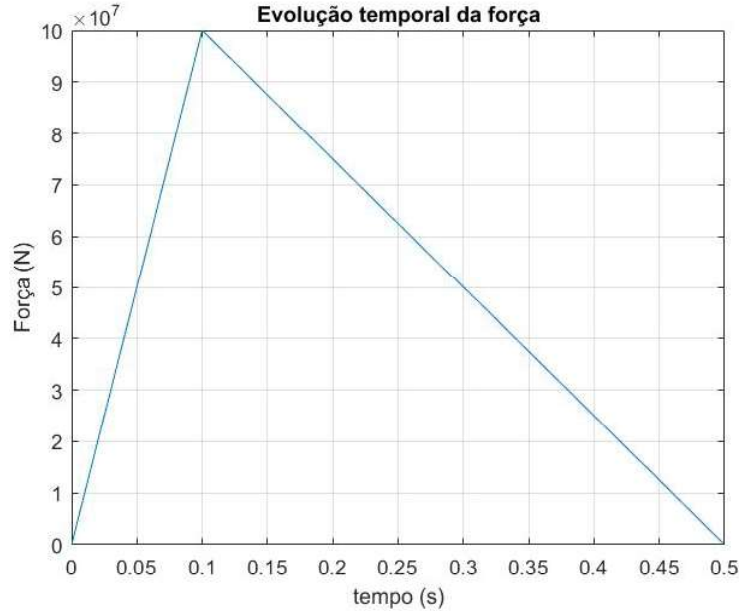
Figura 2.4: Repartição da viga tratada neste estudo

Como podemos ver o navio que sera tratado aqui possui 20 seções e um comprimento total L de 287 metros. As propriedades que necessitamos para a resolução da equação da dinâmica que será mostrada a seguir são: momento de inercia seção transversal (I_{yy}), área da seção transversal e sua massa. Além disso, consideramos que a viga que representa o navio é feita de aço, com densidade $\rho = 7890 \text{ kg/m}^3$, modulo de Young $E = 200 \text{ GPa}$.

2.2.2

O forçamento

A modelagem do *slaming* será feita através de uma força de característica triangular, assimétrica, com amplitude variável com o tempo. A evolução temporal da força é mostrada na imagem 2.5.

Figura 2.5: Evolução da força representativa do *slaming*

Observamos que esta força tem uma duração de 0,5 segundos e uma amplitude de 10^6 kN . Quanto à localização da força, para simular bem o choque das ondas, foi escolhida uma força pontual aplicada na frente do navio, ou, se passarmos ao referencial da viga, na sua extremidade direita ($x = 287$ metros).

2.3

Equações da dinâmica do problema

Nesta seção apresentaremos as equações da dinâmica do problema. Como explicado anteriormente, nosso problema se resumiu a um problema de estudo de comportamento dinâmico de uma viga. Teorias de vigas já são conhecidas e frequentemente utilizadas para estudos dinâmicos.

2.3.1

Modelos existentes

Os dois principais modelos de problemas de viga são os de Euler-Bernoulli e Timoshenko[2]. O primeiro considera os efeitos cisalhantes e de inércia de rotação desprezíveis, e traduz isso pela suposição que as seções transversais planas da viga permanecem perpendiculares ao eixo longitudinal mesmo após a deformação. Já a segunda leva estes dois efeitos em consideração, ou seja, as seções transversais planas da viga não permanecem perpendiculares ao eixo longitudinal, devido aos efeitos cisalhantes e de inércia de rotação. Outra hipótese importante na teoria de vigas é a de pequenas deformações, o que nos permite negligenciar as variações geométricas das seções.

2.3.2

As equações

Neste trabalho, como não consideramos efeitos de rotação, escolhemos o modelo de Euler-Bernoulli para modelar o comportamento da nossa viga. Consideramos então uma viga com comprimento L , densidade variável $\rho(x)$, área da seção transversal $A(x)$, módulo de Young $E(x)$ e momento de inércia da seção transversal $I(x)$. O deslocamento de cada ponto x da viga no instante de tempo t é dado por $u(x, t)$ assim como o forçamento externo é dado por $f(x, t)$

Pegamos uma seção da viga entre os pontos 1 e 2, representamos o esforço cortante por $V(x, t)$ e o momento fletor como $M(x, t)$. Representamos esta seção na imagem abaixo:

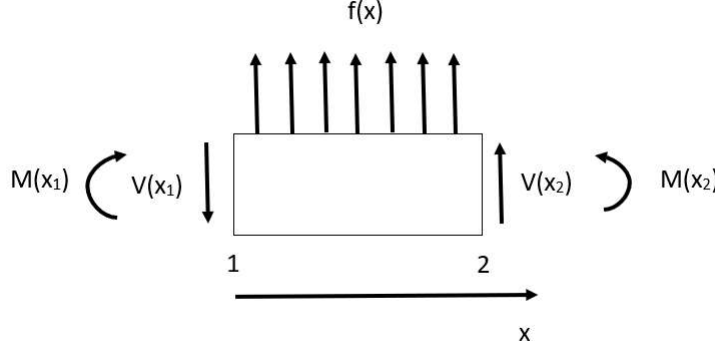


Figura 2.6: Diagrama de corpo livre em um elemento dx da viga

Fazendo um balanço da quantidade de movimento na seção temos[6]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)A(x) \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) dx = V(x_2, t) - V(x_1, t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx. \quad (2-1)$$

Considerando a seção infinitamente pequena podemos dizer que $V(x_2, t) - V(x_1, t) = \frac{\delta V}{\delta x}$ temos:

$$\rho(x)A(x) \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) = \frac{\delta V}{\delta x}(x, t) + f(x, t). \quad (2-2)$$

Finalmente, usando a teoria de Euler-Bernoulli, sabemos que o esforço cortante é dado por $-\frac{\delta M}{\delta x}$ [2], e sendo $M = E(x)I(x) \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ ficamos com:

$$\rho(x)A(x) \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}(E(x)I(x) \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}) = f(x, t). \quad (2-3)$$

A equação (2-3) é a da dinâmica de vigas segundo Euler-Bernoulli.

2.3.3

Condições iniciais de contorno

Como o navio no mar não está apoiado ou preso em nenhuma posição, consideraremos aqui uma viga em condições livre-livre. Sabemos que estas condições são de certa forma irreais, visto que o empuxo faz uma força em todo o navio para impedi-lo de afundar, porém neste primeiro momento a aproximação é mais que satisfatória.

Traduzindo em equações, temos que o esforço cortante e o momento nas duas extremidades da viga deverá ser nulo, ou seja:

$$\begin{aligned} - \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(0, t) &= 0; \\ - \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(L, t) &= 0; \\ - \frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(0, t) &= 0; \\ - \frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

Sobre as condições iniciais, dizemos que a viga está parada no espaço antes da chegada da onda, ou seja:

- $u(x, 0) = 0$;
- $\frac{\delta u}{\delta t}(x, 0) = 0$.

2.4

Simplificações propostas

Para os próximos capítulos nós iremos considerar algumas simplificações. A primeira diz respeito às propriedades da viga, iremos considerá-las constantes durante todo o seu comprimento. O valor dado foi a média das propriedades da viga original. A tabela a seguir mostra as propriedades que serão utilizadas.

Massa	Área	Momento de Inercia
2092 Toneladas	5,8m m^2	928 m^4

Tabela 2.2: Propriedades médias da viga

A outra simplificação está no forçamento. Primeiramente, este será considerado como nulo, depois, faremos variar o seu valor e também seu ponto de aplicação.

3

Solução analítica da dinâmica da viga

Neste capítulo iremos resolver analiticamente a equação da dinâmica da viga apresentada no capítulo anterior. Trataremos aqui somente da solução espacial da equação o que chamamos de problema de modos. Chamamos assim porque iremos encontrar com esta resolução os diferentes modos e frequências naturais de vibração da viga proposta.

Lembramos que, após as simplificações propostas em 2.4, a equação (2-3) pode ser reescrita como:

$$\rho A \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} + EI \frac{\delta^4 u}{\delta x^4} = 0. \quad (3-1)$$

Observamos que esta é uma equação diferencial de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço. Logo, serão necessárias para sua resolução 4 condições de contorno e 2 condições iniciais[2]. Verificamos em 2.3.3 que esta é exatamente a quantidade de condições existentes.

3.1

Resolução por separação de variáveis

O método normalmente utilizado para resolução de problemas deste tipo é o de *separação de variáveis*[2]. Neste método, tentamos escrever o deslocamento em função de duas variáveis separadas, uma dependente do tempo e outra dependente da posição, ou seja:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3-2)$$

Substituindo (3-3) em (3-1) temos:

$$\rho A \frac{\delta^2}{\delta t^2} [X(x)T(t)] + EI \frac{\delta^4}{\delta x^4} [X(x)T(t)] = 0. \quad (3-3)$$

Aplicando as derivadas, separando os termos dependentes da posição e do tempo e substituindo $\frac{\delta}{\delta x} = '$ e $\frac{\delta}{\delta t} = \dot{}$ ficamos com:

$$\frac{1}{\rho A} \frac{1}{X(x)} (EI X''(x))'' = -\frac{1}{T(t)} \ddot{T}(t) = \lambda^2. \quad (3-4)$$

Onde λ é uma constante a ser determinada. Desta maneira, podemos dividir o problema em duas EDOs, uma dependente da posição x e outra dependente do tempo t :

$$\frac{1}{\rho A} (EI X''(x))'' = \lambda^2 X(x). \quad (3-5)$$

$$\ddot{T}(t) = -\lambda^2 T(t). \quad (3-6)$$

Mais uma vez lembrando as simplificações apresentadas em 2.4, consideramos E e I constantes, podemos considerar esta hipótese em (3-5):

$$\frac{EI}{\rho A}(X''''(x)) = \lambda^2 X(x). \quad (3-7)$$

Como dito anteriormente, trataremos aqui neste capítulo apenas da resolução no espaço, ou seja, procuramos uma solução para a equação (3-7). Segundo [2] esta EDO tem solução da forma:

$$X_n(x) = a_1 \sin(\beta_n x) + a_2 \cos(\beta_n x) + a_3 \sinh(\beta_n x) + a_4 \cosh(\beta_n x). \quad (3-8)$$

Onde a_1 , a_2 , a_3 e a_4 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. Já β é uma constante obtida através de uma relação dependente das frequências naturais ω da viga[2]:

$$\beta^4 = \left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} \right)^2. \quad (3-9)$$

E $\omega = \lambda$. Para cada frequência natural do sistema teremos um valor de β_n e uma equação de X_n . Estas equações são os modos próprios da viga.

3.2

A solução

Para encontrar a solução desta equação no nosso caso de viga livre-livre, recorreremos à referência [2] que disponibiliza tabelas com os parâmetros necessários na resolução. Reescrevemos (3-8) como:

$$X_n(x) = \sin(\beta_n x) + \cos(\beta_n x) + \sigma_n (\sinh(\beta_n x) + \cosh(\beta_n x)). \quad (3-10)$$

Sendo (3-10) a solução proposta para vigas livre-livre em [2]. A constante σ_n também é tabelada e depende do parâmetro β , ela é dada por:

$$\sigma_n = (\cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)) / (\sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)). \quad (3-11)$$

A tabela original de [2] é disponibilizada em anexo. Sendo L o comprimento da viga, no nosso caso de 287 metros. O valor de $\beta_n L$ também é tabelado, como mostramos abaixo

n	$\beta_n L$
1	4,73004074
2	7.85320462
≥ 3	$\frac{(2n+1)\pi}{2}$

Tabela 3.1: Valores de $\beta_n L$ [2]

Com estes dois valores calculados, podemos finalmente encontrar as equações dos nossos modos próprios de vibração. Com a ajuda de um código *MatLab* traçamos os 5 primeiros modos da nossa viga, o resultado é mostrado a seguir.

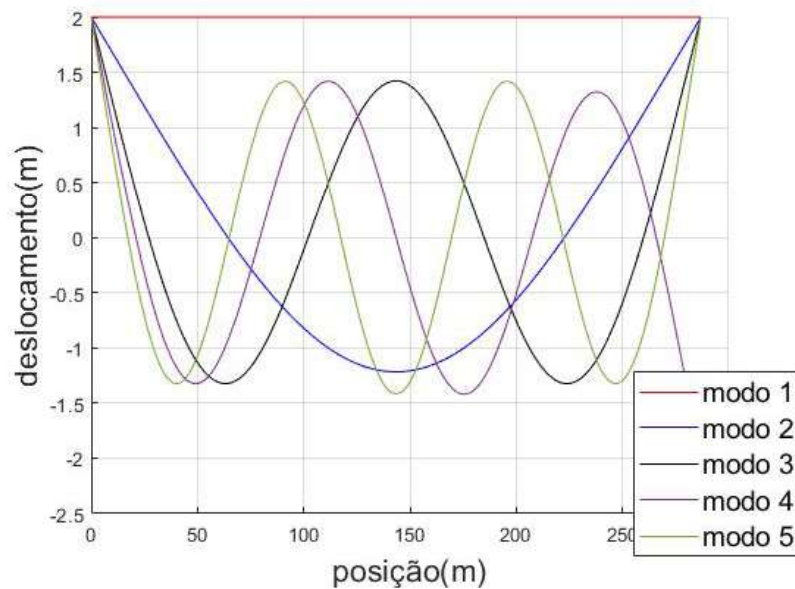


Figura 3.1: Modos de vibração da viga

Por último, reparamos que uma das soluções possíveis para as frequências naturais é zero. A frequência nula representa o que chamamos de modo rígido de vibração [2]. No caso de nossa viga livre-livre este uma vez, e representa o modo em que a viga se desloca sem vibrar, como mostrado na figura abaixo.

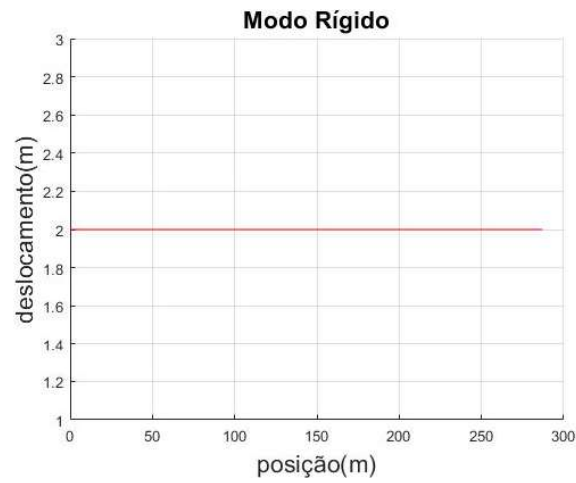


Figura 3.2: Modo rígido de deslocamento

Disponibilizamos também aqui uma tabela com os valores de β , σ e ω (frequência natural) encontrados.

n	β_n	σ_n	$\omega(\text{Hz})$
1	0	-	0
2	0,01648	0,9825	17,2979
3	0,02736	1,0007	47,6808
4	0,03831	0,9999	93,4778
5	0,04925	1,0000	154,5245
6	0,06020	0,9999	230,8329

Tabela 3.2: β_n, σ_n e ω por modo

4

Aproximação numérica para a solução da dinâmica da viga

Neste capítulo uma aproximação numérica para a solução do problema apresentado no capítulo anterior será desenvolvida. Esta aproximação é obtida a partir de uma discretização por elementos finitos. O método será apresentado e aplicado para o cálculo de uma aproximação dos modos de vibração da viga.

4.1

Formulação fraca

Começaremos por apresentar a formulação fraca do problema. Para isso, é necessário explicar a diferença entre as formulações forte e fraca. A formulação forte de um problema é o conjunto formado pela equação diferencial que o representa, mais as condições iniciais e de contorno. No nosso caso, a equação (2-3) junto com as condições apresentadas em 2.3.3[7][6].

$$\rho A \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) + EI \frac{\delta^4 u}{\delta x^4} = f(x, t). \quad (4-1)$$

- $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(0, t) = 0;$
- $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(L, t) = 0;$
- $\frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(0, t) = 0;$
- $\frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(L, t) = 0;$
- $u(x, 0) = 0;$
- $\frac{\delta u}{\delta t}(x, 0) = 0.$

A solução desta formulação deve ser uma função contínua, com 4 derivadas contínuas (ordem da EDO representativa do problema)[7]. A formulação fraca é a maneira de reescrever o problema diminuindo estas restrições de regularidade[7]. Esta nova formulação é obtida pela multiplicação de uma função $\phi(x)$ à formulação forte e a integração no espaço da equação resultante:

$$\int_0^L \rho A \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) \phi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\delta^4 u}{\delta x^4} \phi(x) dx = \int_0^L f(x, t) \phi(x) dx. \quad (4-2)$$

Onde $\phi(x)$ é a chamada função teste. Para o caso de uma viga livre-livre, onde todas as condições de contorno são naturais, esta função pertence a um espaço sem restrições [7] [6].

Para resolver a equação, fazemos integral por partes duas vezes para o segundo termo:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \rho A \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) \phi(x) dx + EI \phi \frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(L, t) - EI \phi \frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(0, t) - EI \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \frac{\delta \phi}{\delta x}(L) + EI \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \frac{\delta \phi}{\delta x}(0) \\
+ \int_0^L EI \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi(x)}{\delta x^2} dx = \int_0^L f(x, t) \phi(x) dx.
\end{aligned} \tag{4-3}$$

Sabemos que pelas condições limite e iniciais:

$$\begin{aligned}
& - EI \phi \frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(L, t); \\
& - EI \phi \frac{\delta^3 u}{\delta x^3}(0, t); \\
& - EI \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \frac{\delta \phi}{\delta x}(L); \\
& - EI \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \frac{\delta \phi}{\delta x}(0).
\end{aligned}$$

Finalmente a formulação fraca do problema é escrita:

$$\int_0^L \rho A \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) \phi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\delta^4 u}{\delta x^4} \frac{\delta^2 \phi(x)}{\delta x^2} dx = \int_0^L f(x, t) \phi(x) dx. \tag{4-4}$$

Tal equação pode também ser escrita como:

$$M(u, \phi) + K(u, \phi) = F(\phi). \tag{4-5}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
& - M(u, \phi) = \int_0^L \rho A \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) \phi(x) dx \text{ operador de massa ;} \\
& - K(u, \phi) = \int_0^L EI \frac{\delta^4 u}{\delta x^4} \phi(x) dx \text{ operador de rigidez;} \\
& - F(\phi) = \int_0^L f(x, t) \phi(x) dx \text{ operador de força.}
\end{aligned}$$

Porém esta formulação ainda depende do deslocamento da viga. Para não depender deste deslocamento, iremos aproximá-lo por :

$$u^N = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n. \tag{4-6}$$

A referência [6] mostra o processo para o cálculo dos diferentes a'_n s utilizando o método de Galerkin [7]. Finalmente, chegaremos à formulação fraca dependendo apenas das funções-teste.

$$\int_0^L EI \frac{\delta^2 \phi_i}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_j}{\delta x^2} dx \ddot{u} + \int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dx \dot{u} + \int_0^L f \phi_j dx. \tag{4-7}$$

4.2

Método de elementos finitos

O método de elementos finitos é uma maneira de discretizar o problema apresentado na formulação fraca. A solução é aproximada em subdomínios, chamados elementos, e funções de aproximação são construídas [7].

Estas funções de aproximação são chamadas de funções de interpolação, elas serão feitas com base em valores de solução específicos de cada um dos elementos, nos chamados nós, que podem estar no contorno ou no interior dos elementos[8].

As funções de interpolação podem ser dos mais variados tipos, e o seu grau depende do número de nós de cada elemento e do grau da equação diferencial a ser resolvida. Os elementos também podem ser de diferentes tipos (quadráticos, triangulares, etc.), porém, como aqui tratamos de uma viga 1-D, usaremos elementos de uma dimensão.

Para resolver um problema utilizando uma discretização por elementos finitos existe um roteiro a ser seguido [7] [6]:

1. Escolha do número de elementos, do tipo de elemento e da precisão desejada
2. Aproximação do domínio : Construção da malha e numeração dos elementos e nós.
3. Aproximação da solução da equação da formulação fraca no domínio aproximado.

– Supomos para cada elemento que u^e é da forma:

$$u^e = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i. \quad (4-8)$$

– onde N é o número de nós no elemento.

– Substituímos o valor de u na formulação fraca de cada elemento e teremos as matrizes rigidez e massa elementares.

$$[M^e]\ddot{u}^e + [K^e]u^e = F^e. \quad (4-9)$$

– Escolhemos as funções interpolação.

4. Acoplamento do sistema : junção das matrizes elementares respeitando às condições de continuidade locais e globais.

$$[M]\ddot{u} + [K]u = F. \quad (4-10)$$

5. Imposição das condições de contorno : Substituir os valores nodais conhecidos vindos destas condições.
6. Resolver o problema matricial resultante do passos anteriores.
7. Se o resultado aproximado não respeitar a precisão desejada deve-se aumentar o número de elementos ou mudar o tipo e refazer os cálculos a partir do passo 2

4.3

Aplicação no problema viga-navio

Aplicaremos a discretização por elementos finitos no problema apresentado na seção anterior. Lembrando que a formulação fraca do problema global é dada por:

$$\int_0^L EI \frac{\delta^2 \phi_i}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_j}{\delta x^2} dx \ddot{a} + \int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dx a + \int_0^L f \phi_j dx. \quad (4-11)$$

Seguiremos o roteiro apresentado na seção anterior para a resolução do problema. Escolhemos primeiramente uma discretização em 3 elementos, com dois nós por elemento, como mostrado na figura abaixo:

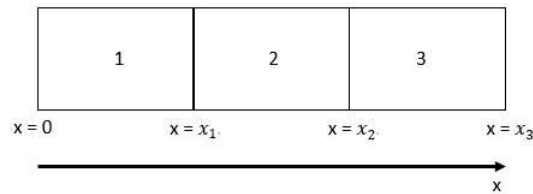


Figura 4.1: Viga dividida em 3 elementos

Como já havia sido dito neste capítulo, tratamos de um problema 1-D onde buscamos encontrar o deslocamento transversal da viga, logo o tipo de elemento é o único possível para este tipo de problema (visto que só temos uma dimensão o único fator que poderia ser mudado seria o número de nós em cada elemento).

Seguindo, devemos escrever a equação da formulação fraca para cada um dos 3 elementos e encontrar as matrizes de massa e rigidez elementares, além dos vetores de força elementares. Começamos pelo primeiro elemento, que tem seu início em $x = 0$ e fim em $x = x_1$

$$\int_0^{x_1} EI \frac{\delta^2 \phi_i}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_j}{\delta x^2} dx a + \int_0^{x_1} \rho A \phi_i \phi_j dx \ddot{a} + \int_0^{x_1} f \phi_j dx. \quad (4-12)$$

Encontramos assim as matrizes elementares:

$$\mathbf{M}^{(1)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_0^{x_1} \phi_1 \phi_1 dx & \int_0^{x_1} \phi_1 \phi_2 dx \\ \int_0^{x_1} \phi_2 \phi_1 dx & \int_0^{x_1} \phi_2 \phi_2 dx \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = EI \begin{pmatrix} \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} dx & \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} dx \\ \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} dx & \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} dx \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = \begin{pmatrix} \int_0^{x_1} f \phi_1 dx \\ \int_0^{x_1} f \phi_2 dx \end{pmatrix}.$$

A equação do primeiro elemento é dada por:

$$M^{(1)} \ddot{X}^{(1)} + K^{(1)} X^{(1)} = F^{(1)}. \quad (4-13)$$

Continuamos para o segundo elemento, seguimos com o mesmo processo e escrevemos a formulação fraca:

$$\int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\delta^2 \phi_i}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_j}{\delta x^2} dx a + \int_{x_1}^{x_2} \rho A \phi_i \phi_j dx \ddot{a} + \int_{x_1}^{x_2} f \phi_j dx. \quad (4-14)$$

Encontramos assim as matrizes elementares:

$$\mathbf{M}^{(2)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_2 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_3 \phi_3 dx \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = EI \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} dx \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f \phi_2 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f \phi_3 dx \end{pmatrix}.$$

A equação do segundo elemento é dada por:

$$M^{(2)} \ddot{X}^{(2)} + K^{(2)} X^{(2)} = F^{(2)}. \quad (4-15)$$

Igualmente para o terceiro elemento:

$$\int_{x_2}^{x_3} EI \frac{\delta^2 \phi_i}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_j}{\delta x^2} dx a + \int_{x_2}^{x_3} \rho A \phi_i \phi_j dx \ddot{a} + \int_{x_2}^{x_3} f \phi_j dx. \quad (4-16)$$

Encontramos assim as matrizes elementares:

$$\mathbf{M}^{(3)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_4 dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = EI \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} dx \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F}^{(3)} = \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} f\phi_3 dx \\ \int_{x_2}^{x_3} f\phi_4 dx \end{pmatrix}.$$

A equação do terceiro elemento é dada por:

$$M^{(3)}\ddot{X}^{(3)} + K^{(3)}X^{(3)} = F^{(3)}. \quad (4-17)$$

Com todas as matrizes elementares encontradas nos resta escolher as funções de interpolação. Como visto nas equações mostradas anteriormente, é necessário que estas funções de interpolação tenham 2 derivadas em x . Como escolhemos elementos com dois nós, diremos que em cada um desses dois nós existem duas variáveis, sendo eles o deslocamento transversal u e a rotação no eixo perpendicular ao plano da viga θ .

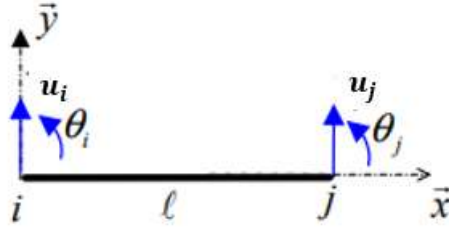


Figura 4.2: Variáveis nodais do problema

A referência [8] nos apresenta funções de interpolação utilizadas neste caso. Estas funções são construídas em volta de 4 variáveis nodais. Logo, foi escolhido o espaço de polinômios de terceiro grau.

Cada elemento terá então quatro funções N de interpolação, duas ligadas aos deslocamentos transversais nodais (N_1 e N_3) e duas ligadas às rotações nodais (N_2 e N_4)

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2(x) = l\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_4(x) = l\left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \end{cases} \quad (4-18)$$

As funções ϕ_i de interpolações utilizadas nas matrizes de massa e rigidez e no vetor de força são caracterizadas pela junção de todas as funções N de um dado nó. A figura abaixo exemplifica o descrito para um exemplo com duas funções N por elemento.

Conhecidas as funções de interpolação podemos passar à acoplagem das matrizes massa e rigidez elementares e dos vetores força elementares.

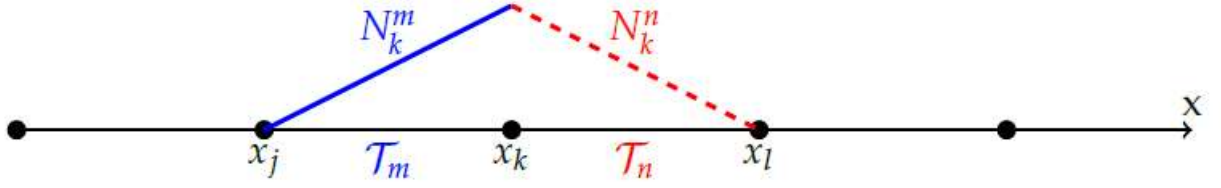


Figura 4.3: Funções de interpolação por nó

Esta acoplagem deve ser feita observando os nós em contato nos diferentes elementos. Por exemplo, o nó (2) está presente no primeiro e no segundo elemento, logo, na matriz global devemos somar as contribuições deste nó nos dois elementos na posição que reflete o multiplicador de u_2 .

Abaixo a representação de como seria este processo pela matriz rigidez. A imagem 4.4 também demonstra o processo visualmente.

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_e^{(1)}] & & \\ & [K_e^{(2)}] & \\ & & [K_e^{(3)}] \end{bmatrix}$$

Figura 4.4: Representação visual do processo de acoplagem

As matrizes globais são mostradas em seguida:

$$\mathbf{M} = \rho A \begin{pmatrix} \int_0^{x_1} \phi_1 \phi_1 dx & \int_0^{x_1} \phi_1 \phi_2 dx & 0 & 0 \\ \int_0^{x_1} \phi_2 \phi_1 dx & \int_0^{x_1} \phi_2 \phi_2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_3 dx & 0 \\ 0 & \int_{x_1}^{x_2} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_3 \phi_3 dx + \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_4 dx \\ 0 & 0 & \int_{x_2}^{x_3} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K} = EI \begin{pmatrix} \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} & \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} & 0 & 0 \\ \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_1}{\delta x^2} & \int_0^{x_1} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} & 0 \\ 0 & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_2}{\delta x^2} & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} + \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} & \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} \\ 0 & 0 & \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_3}{\delta x^2} & \int_{x_2}^{x_3} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} \frac{\delta^2 \phi_4}{\delta x^2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \int_0^{x_1} f \phi_1 \\ \int_0^{x_1} f \phi_2 + \int_{x_1}^{x_2} f \phi_2 \\ \int_{x_1}^{x_2} f \phi_3 + \int_{x_2}^{x_3} f \phi_3 \\ \int_{x_2}^{x_3} f \phi_4 \end{pmatrix}.$$

Sendo este o sistema de equações diferenciais a ser resolvido para encontrar o deslocamento da viga, que também pode ser representada por:

$$M\ddot{U} + KU = F \quad (4-19)$$

Onde:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Podemos substituir agora as funções de interpelação propostas e encontrar os valores das matrizes em função dos parâmetros do problema. Todas as funções N são polinomiais e dependentes de x e podem ser facilmente derivadas.

Antes disso, é importante ressaltar que as matrizes apresentadas neste capítulo foram construídas com base em elementos com duas funções interpolação. Porém, como vimos, no nosso caso isso não seria possível, visto que necessitamos de no mínimo duas derivadas em x fomos obrigados à pensar em funções de terceiro grau, que por consequência necessitam de 4 variáveis nodais. Logo, as multiplicações de ϕ deixam de ser i, j (vetores com dois elementos) e passam a ser i, j, k, l (vetores com 4 funções de forma).

Antes, com apenas duas funções de interpolação tínhamos:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} (\phi_1 \phi_2) = \begin{pmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Com 4 funções de interpolação passamos a ter:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} (\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) = \begin{pmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 & \phi_1 \phi_3 & \phi_1 \phi_4 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 & \phi_2 \phi_3 & \phi_2 \phi_4 \\ \phi_3 \phi_1 & \phi_3 \phi_2 & \phi_3 \phi_3 & \phi_3 \phi_4 \\ \phi_4 \phi_1 & \phi_4 \phi_2 & \phi_4 \phi_3 & \phi_4 \phi_4 \end{pmatrix}.$$

Aplicando estas alterações, as matrizes elementares deixam de ser 2x2 e passam a ser 4x4. Aplicando as derivações e substituições descritas nos últimos parágrafos temos as matrizes elementares em função dos parâmetros necessários:

$$\mathbf{M}_e = (\rho AL) \begin{pmatrix} 13/35 & 11L/210 & 9/70 & -13L/420 \\ 11L/210 & L^2/105 & 13L/420 & -L^2/140 \\ 9/70 & 13L/420 & 13/35 & -11L/210 \\ -13L/420 & -L^2/140 & -11L/210 & L^2/105 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K}_e = (EI/L^3) \begin{pmatrix} 12 & 6 * L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}.$$

Com a mesma regra já apresentada, podemos encontrar as matrizes globais. Como todos os elementos têm tamanho, área da seção transversal e características de inercia idênticas, todas as matrizes elementares são iguais. Sabemos também que, neste primeiro momento, o vetor F é nulo, visto que buscamos resolver o problema de modos.

$$F = 0. \quad (4-20)$$

4.4

Comparação solução analítica e aproximação MEF

O problema a ser resolvido, como mostrado anteriormente, se reduz a:

$$M\ddot{U} + KU = 0. \quad (4-21)$$

A solução proposta para este tipo de problema seria:

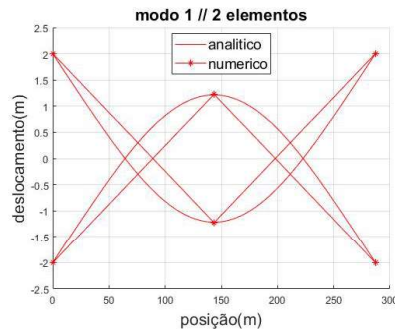
$$U = e^{i\omega t}u. \quad (4-22)$$

Substituindo em (5-8) temos:

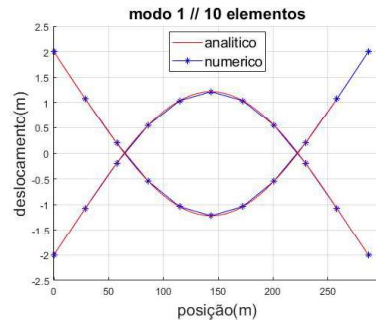
$$\omega^2 Mu + Ku = 0. \quad (4-23)$$

A equação (4-23) representa o problema de autovalores a ser resolvido., onde os autovalores representam as frequências próprias (ω) e os autovetores os modos próprios. Este problema foi resolvido com o auxílio de um código feito no software Matlab, os modos e frequências de vibração foram encontrados numericamente com a ajuda do solver *eigs* do programa [9].

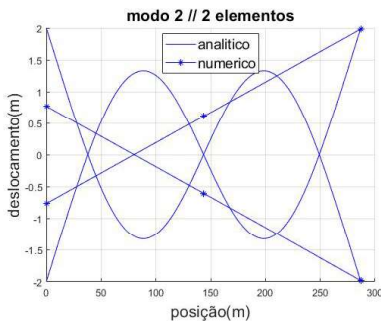
Os cálculos foram feitos para diferentes números de elementos, e os resultados foram traçados juntos às soluções analíticas, como mostrado a seguir:



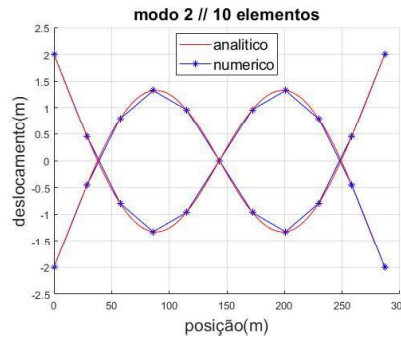
4.5(a): Primeiro modo, 2 elementos



4.5(b): Primeiro modo, 10 elementos

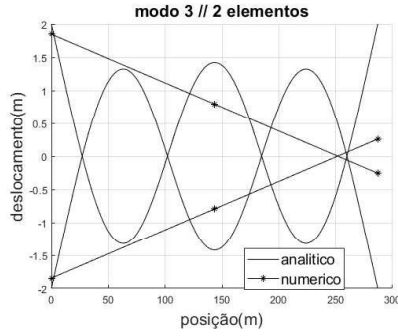


4.5(c): Segundo modo, 2 elementos

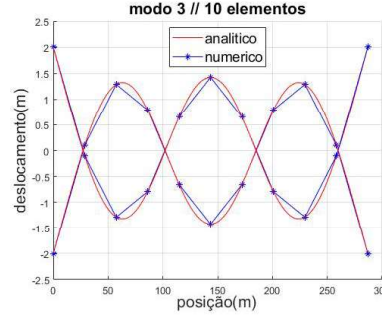


4.5(d): Segundo modo, 10 elementos

Figura 4.5: Comparação soluções numéricas e analíticas



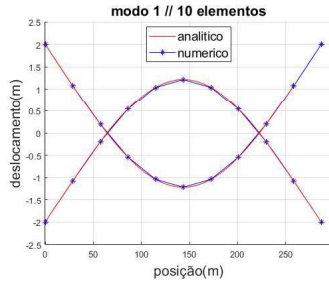
4.6(a): Terceiro modo, 2 elementos



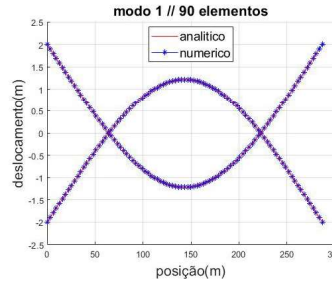
4.6(b): Terceiro modo, 10 elementos

Figura 4.6: Comparação soluções numéricas e analíticas

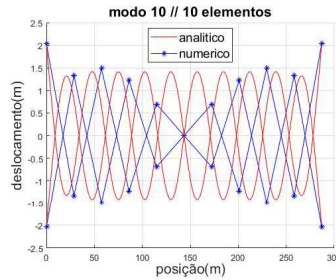
É possível observar a influencia do número de elementos nas soluções numéricas. Quanto maior o número de elementos, teoricamente, menor o erro da solução calculada através da discretização de elementos finitos. Porém, observamos que, para os modos de frequência mais baixa, a partir de um certo número de elementos a precisão não aumenta ou aumenta muito pouco.



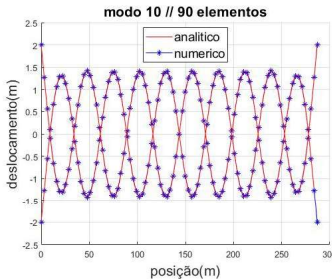
4.7(a): Primeiro modo, 10 elementos



4.7(b): Primeiro modo, 90 elementos



4.7(c): Décimo modo, 10 elementos

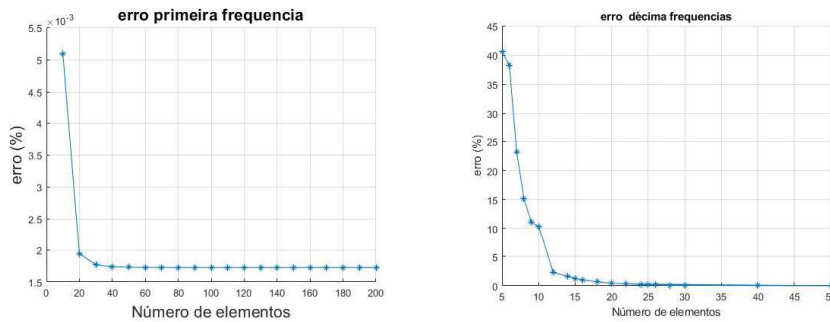


4.7(d): Décimo modo, 90 elementos

Isto acontece devido à complexidade dos movimentos passados em frequências maiores. Quando utilizamos o MEF, calculamos os valores de deslocamento apenas para os nós e interpolamos os valores entre eles com o auxílio das funções de interpolação [7]. Quanto mais simples o movimento, mais fácil de representá-lo com menos pontos. Por exemplo, o primeiro modo, representante de uma flexão simples pode ser construído com menos pontos do que o décimo modo, que tem modos de flexão locais.

Por este motivo, é importante saber a quantidade de modos necessários para representar um problema forçado. Visto que, se o forçamento e excitar uma frequência mais alta, com modo de deslocamento mais complexo, com um número de elementos muito baixo a solução não será bem representada. A má escolha do número de elementos pode nos fazer "perder informações" da resposta da viga.

Por um outro lado, se exagerarmos no número de elementos o cálculo pode se tornar lento, demorando muito mais do que o necessário. Para aferir sobre o número de modos necessários nós traçamos os erros nos valores de frequência em função do número de elementos.



4.7(e): Erro percentual no cálculo da frequência própria do primeiro modo 4.7(f): Erro percentual no cálculo da frequência própria do décimo modo

Observamos que, para o primeiro modo, 10 elementos são suficientes para descrever o movimento com um erro muito baixo (da ordem de $10^{-3}\%$). Já para o décimo modo, vemos que precisamos de mais de 20 elementos para conseguir um erro aceitável (menor que 1%), o que confirma a análise feita anteriormente.

O ideal para encontrar o número de modos necessários para representar um problema é fazer uma análise frequencial através da transformada de fourier[6]. Deste modo, podemos encontrar a intensidade da maior frequência excitada pelo forçamento, e por consequência, o número de modos necessários para o representar. Esta análise será feita no próximo capítulo, onde apresentamos soluções numéricas para respostas forçadas.

5

Solução do problema no tempo

Até este momento tratamos apenas da solução no espaço das equações da dinâmica da viga. Porém, como visto no capítulo 3, dividimos a solução da dinâmica em duas partes, uma referente ao espaço e outra referente ao tempo.

Neste capítulo apresentaremos maneiras de resolver as equações no tempo do problema discretizado. Após a discretização, o nosso problema se transforma em:

$$M\ddot{U} + KU = F(t). \quad (5-1)$$

Primeiramente mostraremos que, em alguns casos, é possível encontrar soluções analíticas para os deslocamentos dos nós, utilizando o conceito de decomposição modal. Depois, mostraremos uma maneira de encontrar uma aproximação numérica, utilizando o método de Runge-Kutta.

5.1

Decomposição modal

5.1.1

O método

O método de decomposição modal consiste na projeção das matrizes M e K na base modal, com o objetivo de desacoplar as equações da dinâmica da viga e poder resolvê-las separadamente. Em seguida, descrevemos o passo-a-passo a ser seguido para encontrar a resposta através deste método [2]:

1. Primeira mudança de base

O primeiro passo é passar das coordenadas geométricas, aqui representadas por $u(t)$, para um segundo sistema de coordenadas, que chamaremos de $q(t)$. Esta transformação é feita utilizando:

$$u(t) = M^{-1/2}q(t) \quad (5-2)$$

Multiplicamos o lado esquerdo das matrizes por $M^{-1/2}$ e ficamos com:

$$I\ddot{Q}(t) + M^{-1/2}KM^{-1/2}Q(t) = M^{-1/2}F(t). \quad (5-3)$$

Onde:

- $Q = [q_1 q_2 \dots q_n]^T$,
- I é matriz identidade da ordem do sistema,

$$- K^{(M)} = M^{-1/2} K M^{-1/2}.$$

2. Modos próprios e frequências naturais do sistema

Os modos próprios e frequências naturais do sistema são encontrados resolvendo o problema de autovalores e autovetores da matriz $K^{(M)}$.

Encontrando as frequências e modos podemos construir a matriz P , que tem nas suas colunas os autovetores normalizados. Esta matriz P é ortonormal, ou seja $P^{-1} = P^T$

3. Segunda mudança de base

Passamos agora do sistema de coordenadas dado por $q(t)$ para o sistema de coordenadas modais, chamada aqui de $r(t)$. Esta mudança será feita da seguinte forma:

$$q(t) = Pr(t) \quad (5-4)$$

Para simplificar o sistema, multiplicamos o lado esquerdo das matrizes por P^T . Ficamos com:

$$I\ddot{R}(t) + P^T M^{-1/2} K M^{-1/2} P R(t) = P M^{-1/2} F(t). \quad (5-5)$$

Lembrando que, como a matriz P é ortonormal, $P^T I P = I$. A equação (5-5) representa a dinâmica da viga projetada na base modal. Aqui, a matriz dada por $P^T M^{-1/2} K M^{-1/2} P$ é diagonal, e deste modo as equações podem ser desacopladas e resolvidas separadamente, como um sistema de uma coordenada.

4. Volta às coordenadas geométricas

Após resolver o sistema e encontrar os deslocamentos modais devemos voltar às coordenadas originais. Para isso, devemos encontrar a matriz S , dada por:

$$S = M^{-1/2} P \quad (5-6)$$

Para voltar as coordenadas de $u(t)$ fazemos:

$$u(t) = S r(t) \quad (5-7)$$

5.1.2

Exemplo de aplicação

Aplicaremos o método descrito anteriormente na viga discretizada por um elemento. Aplicamos uma força $F(t)$ na extremidade direita da viga. Mostraremos aqui o sistema sendo desacoplado mas não resolveremos o sistema. A resolução do sistema será tratada no capítulo 6, onde este será resolvido com a ajuda da ferramenta *dsolve* do MatLab. A figura abaixo representa o problema a ser resolvido:

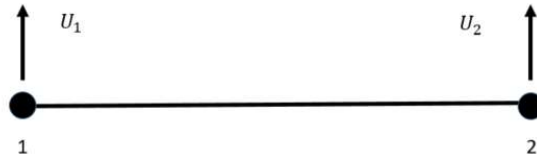


Figura 5.1: Ilustração do problema a ser resolvido com decomposição modal

Iremos desprezar aqui as rotações e tratar apenas do deslocamentos transversal, eliminando as linhas e colunas que representam estas variáveis temos as matrizes do sistema a ser resolvido:

$$\mathbf{M} = (\rho AL) \begin{pmatrix} 13/35 & 9/70 \\ 9/70 & 13/35 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K} = (EI/L^3) \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}.$$

Começamos a seguir o passo-a-passo apresentado neste capítulo, começamos pela primeira mudança de variável e pela multiplicação de $M^{-1/2}$ do lado esquerdo. A matriz $K^{(M)}$ resultante é dada por:

$$\mathbf{K}^{(M)} = (EI/L^3) \begin{pmatrix} 49,4 & -49,4 \\ -49,4 & 49,4 \end{pmatrix}.$$

Com o auxílio da função *eig* do MatLab encontramos os autovalores e os autovetores da matriz $K^{(M)}$:

$$\omega_1^2 = 0$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \end{pmatrix}.$$

$$\omega_2^2 = 98,8$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} -0,707 \\ 0,707 \end{pmatrix}.$$

Estes vetores já estão devidamente normalizados. Encontramos assim a matriz \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -0,707 & -0,707 \\ -0,707 & 0,707 \end{pmatrix}.$$

Fazendo $\mathbf{P}^T \mathbf{K}^{(M)} \mathbf{P}$ temos:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{K}^{(M)} \mathbf{P} = (EI/L^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 98,8 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, encontramos o sistema a ser resolvido nas coordenadas modais:

$$I\ddot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{(M)} \mathbf{P} \mathbf{R}(t) = \mathbf{F}. \quad (5-8)$$

5.2

Aproximação Numérica: método de Runge-Kutta

5.2.1

O método

O método de Runge-Kutta é um método de resolução numérica para equações diferenciais ordinárias. Para a utilização do método, a equação deve ser da seguinte forma:

$$\dot{y} = f(y, t). \quad (5-9)$$

O método calcula o valor de y no passo de tempo $n + 1$ em função do valor de y no passo anterior n . Para fazer isso, ele utiliza de uma inclinação K , que será explicada na sequência:

$$y_{n+1} = y_n + K\Delta t. \quad (5-10)$$

Onde K é a inclinação da reta que aproxima os diferentes valores de y . Neste trabalho utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem, isso quer dizer que a inclinação K será dada pela média ponderada de quatro inclinações diferentes, sendo elas:

- k_1 é a inclinação no início do intervalo;
- k_2 é a inclinação no ponto médio do intervalo, usando a inclinação k_1 para determinar o valor de y no ponto $t_n + h/2$ através do método de Euler;

- k_3 é novamente a inclinação no ponto médio do intervalo, mas agora usando a inclinação k_2 para determinar o valor de y ;
- k_4 é a inclinação no final do intervalo, com seu valor y determinado usando k_3

Calculando a média ponderada teremos:

$$K = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (5-11)$$

5.2.2

Aplicação no problema de viga

Se observarmos a equação (5-1), vemos que ela não é do tipo descrito em (5-9). Para resolver esta equação pelo método de Runge-Kutta devemos escrevê-la da maneira necessária [10]. Para isso, definimos o vetor Y , que é dado por:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix}.$$

Assim, construímos o seguinte sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \ddot{U} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -M \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}.$$

Onde a segunda linha representa a equação a ser resolvida. A primeira linha é incluída apenas para respeitar a forma de escrever os vetores pelo método e deixar as matrizes quadradas. Somando os valores escritos na primeira linha do sistema obtemos 0.

Assim, resolvemos o sistema matricial acima com a ajuda da função `ode45` do MatLab. Esta função vai retornar um vetor Y de tamanho $2k$, onde as primeiras k coordenadas representam U e as últimas k coordenadas representam \dot{U} .

6

Aproximação numérica para dinâmica da viga forçada

Neste capítulo apresentaremos aproximações para soluções de problemas de vigas sujeitas à forçamentos externos. Começaremos pelo problema mais simples, onde uma força externa constante é aplicada na extremidade da viga. Passaremos por soluções que excitam modos de vibração da barra, mostraremos o aparecimento destes modos e analisaremos a precisão da aproximação feita. Finalmente, voltaremos ao problema do *slaming*, e encontraremos a aproximação da sua solução, mostrando quantos elementos são necessários para ter uma boa precisão.

Lembrando que as condições iniciais e de contorno para todos os problemas aqui apresentados são as mesmas, apresentadas em 2.3.3.

6.1

Forçamento constante

Para este primeiro caso, escolhemos aplicar a força no ultimo nó da viga(extrema direita), com amplitude de 10^7N , valor da amplitude máxima do forçamento representativo do *slaming*.

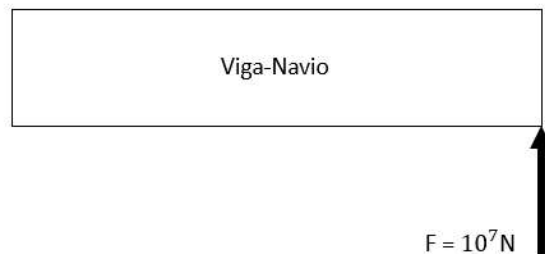
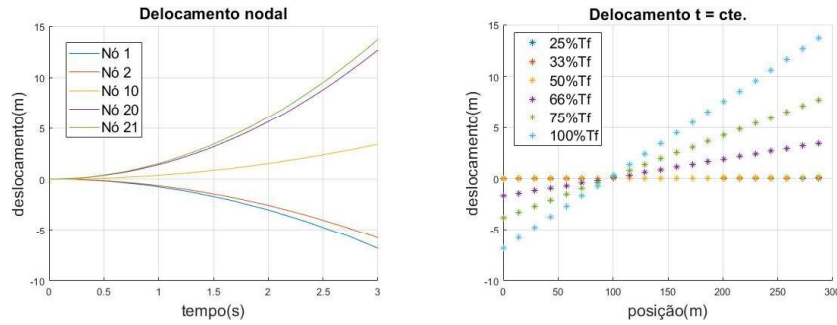


Figura 6.1: Ilustração do problema com forçamento nodal constante

Calculamos a aproximação variando o numero de elementos, os resultados são mostrados abaixo:



6.2(a): Deslocamento nodal dos dife- 6.2(b): Deslocamento da viga nos dife-
rentes nós rentes instantes de tempo

Para verificar se a aproximação é válida, calculamos a solução analítica do problema, através de uma decomposição das matrizes na base modal[2]. Esta solução é mostrada a seguir:

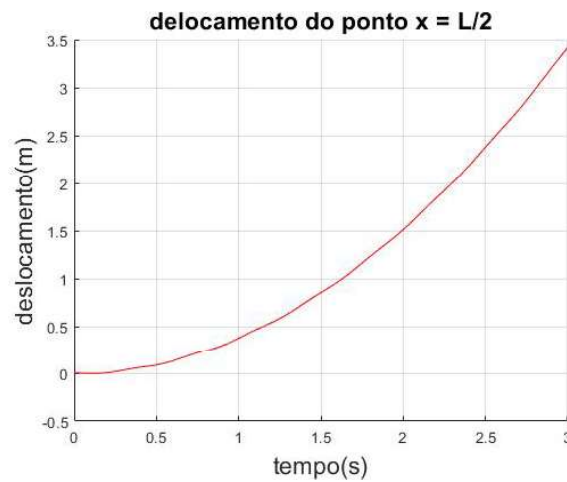


Figura 6.2: Solução analítica do deslocamento nodal do ponto médio da viga

O erro percentual foi no calculado para cada aproximação no ponto médio da viga. Abaixo, os gráficos desses erros em função do tempo:

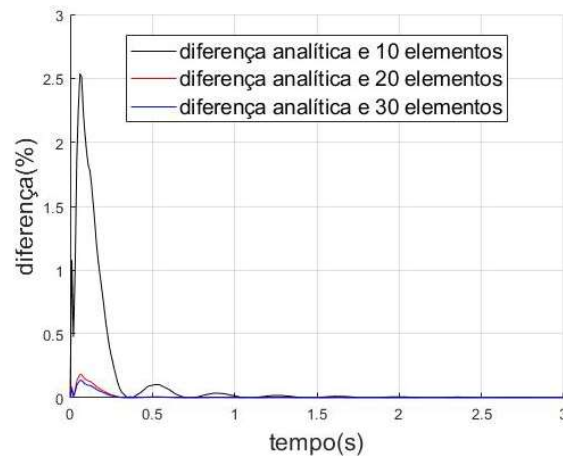


Figura 6.3: Erro percentual das aproximações em comparação com a solução analítica

Observamos que quanto maior o número de elementos, mais próxima a aproximação se encontra da solução exata. Contudo, vemos que este ganho em precisão não é significativo (de 2,5% com 10 elementos para 0,18% com 20 elementos). Isto acontece porque o forçamento tem uma forma "simples" e excita as frequências mais baixas. Como visto anteriormente, para representar as frequências mais baixas com uma boa precisão, não são necessários muitos elementos (o primeiro modo por exemplo pode ser representado com menos de 10 elementos com um erro na ordem de $10^{-3}\%$)

6.2

Forçamento senoidal : excitação da décima frequência natural

6.2.1

A importância do número de elementos

Para observar melhor a dependência do número de elementos na aproximação da solução que utiliza o método dos elementos finitos, decidimos excitar uma frequência mais alta, no caso, a quinta. A imagem abaixo representa o problema aqui tratado:

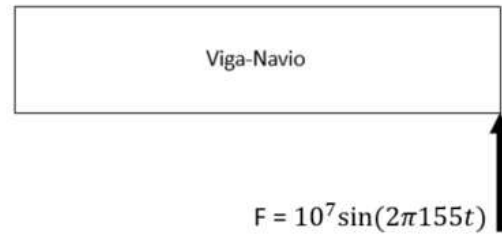


Figura 6.4: Ilustração do problema com forçamento nodal senoidal

O força é aplicada no ultimo nó da viga(extrema direita) e é da forma:

$$F = 10^7 \sin(2\pi f_5 t). \quad (6-1)$$

Lembrando das 9 primeiras frequências naturais de vibração, obtidas com o auxilio da função *eigs*, mostradas na tabela abaixo:

Modo	frequência(Hz)
1	0,00
2	17,30
3	47,70
4	93,40
5	154,50
6	230,80
7	322,40
8	429,20
9	551,30

Tabela 6.1: Frequências naturais da viga

Calculamos a aproximação variando o número de elementos utilizados, os resultados são mostrados abaixo:

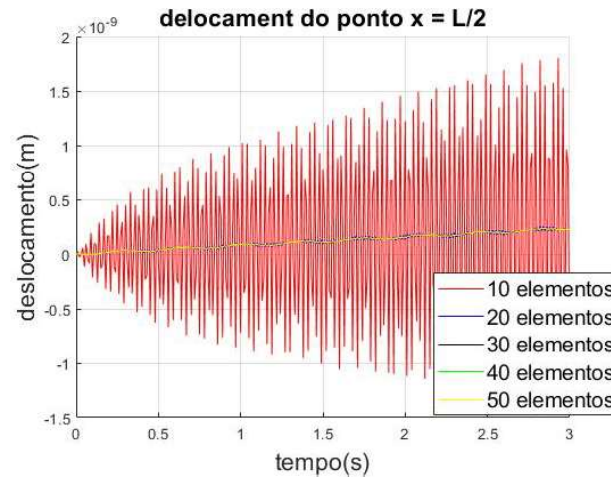


Figura 6.5: Aproximação da solução com 10, 20, 30, 40 e 50 elementos

Observamos a convergência da aproximação com o aumento do número de elementos. Vemos que a diferença entre os resultados com 10 e 20 elementos é significativa (amplitude com 20 elementos é em média 100% menor), o que prejudica inclusive a visibilidade das aproximações com mais elementos na imagem 6.9. Abaixo podemos ver a aproximação com 20 elementos:

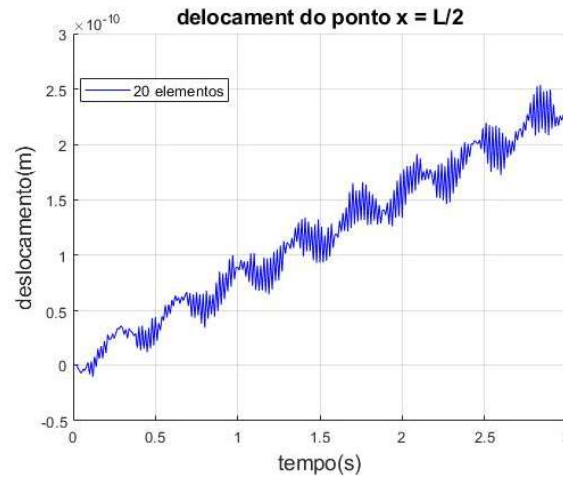


Figura 6.6: Aproximação da solução com 20 elementos

A diferença entre os resultados obtidos com 20, 30, 40 e 50 elementos é, pelo menos, duas ordens de grandeza menor. Para entender o motivo deste comportamento, devemos saber quantos elementos são necessários para representar a resposta da viga forçada por uma força de frequência de excitação próxima à quinta frequência natural.

Para isso, comparamos a solução analítica para o quinto modo próprio da viga não forçada com sua respectiva aproximação numérica. Calculando o número de elementos necessários para representar o quinto modo com um erro menor que 1%, e concluímos que seriam necessários mais de 20 elementos, como mostrado no gráfico abaixo:

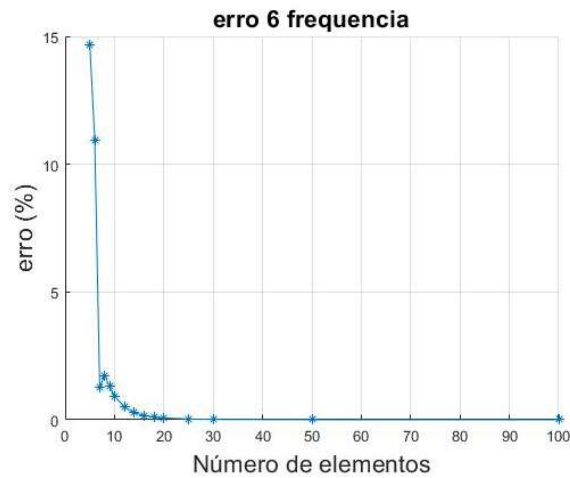


Figura 6.7: Erro percentual entre as solução analítica e aproximação numérica para o quinto modo de vibração

Acima de 20 elementos, o ganho de precisão é consideravelmente baixo (da ordem de $10^{-11}\%$). Mostramos a seguir as diferenças percentuais entre os resultados com 10 elementos e com 20 elementos, e também entre os resultados utilizando 20 elementos e 50 elementos. Tais gráficos ilustram bem a convergência das aproximações com o aumento do número de modos.

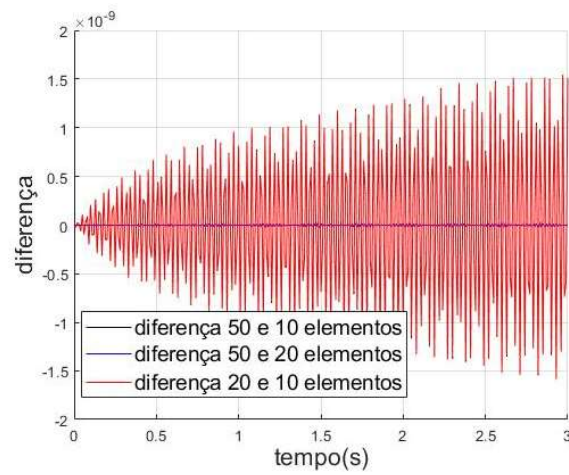


Figura 6.8: Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos

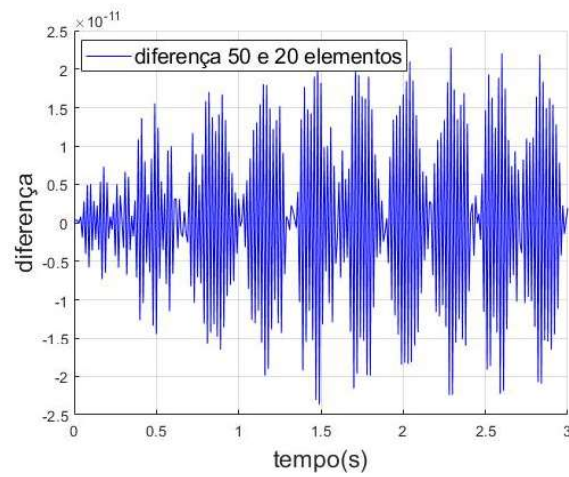


Figura 6.9: Diferença entre as aproximação utilizando 20 e 50 elementos

6.3

Forçamento distribuído

6.3.1

Constante

Analisaremos também a aproximação para problemas com forçamentos distribuídos por toda viga. Começaremos com um forçamento constante com o tempo. O problema é representado pela figura abaixo:

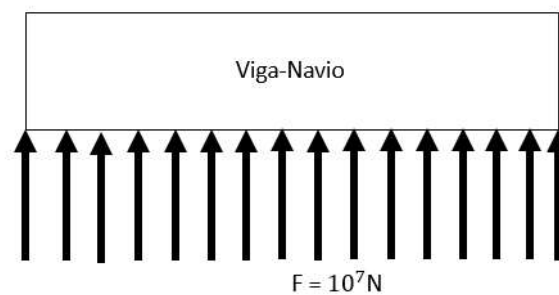


Figura 6.10: Ilustração do problema com forçamento distribuído constante

Observamos mais uma vez a convergência com relação ao número de elementos utilizados na discretização, calculamos a aproximação com 10, 20 e 30 elementos:

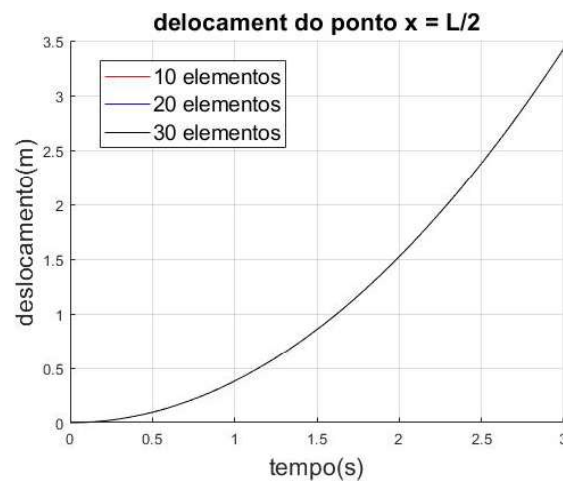


Figura 6.11: Aproximação da solução com 10, 20 e 30 elementos

Observamos que a variação entre os diferentes números de elementos é pequena (da ordem de $10^{-3}\%$). A análise feita para o forçamento concentrado continua válida, a forma simples do forçamento vem a excitar somente as frequências mais baixas e então podemos observar uma boa caracterização da resposta dinâmica da viga com poucos elementos.

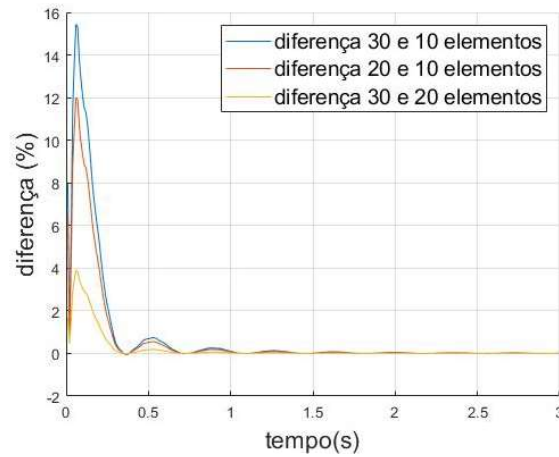


Figura 6.12: Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos

6.3.2 Senoidal

Seguimos o mesmo processo para um forçamento de característica senoidal, uniforme ao longo da viga e com frequência igual à frequência natural do décimo modo, como mostrado abaixo:

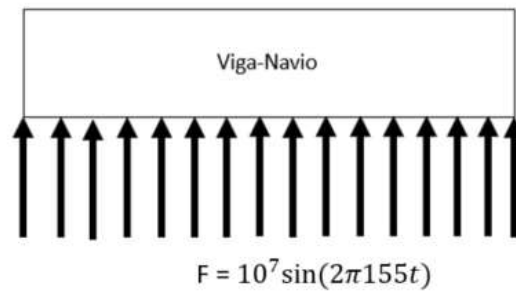


Figura 6.13: Ilustração do problema com forçamento distribuído senoidal

Observamos mais uma vez a convergência com relação ao número de elementos utilizados na discretização, calculamos a aproximação com 10, 20, 30 e 50 elementos:

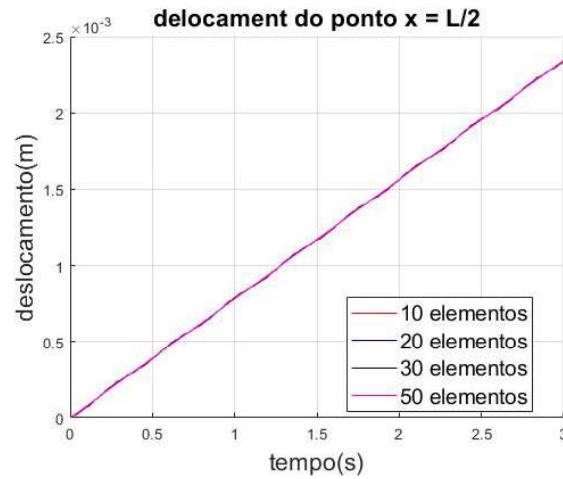


Figura 6.14: Aproximação da solução com 10, 20, 30 e 50 elementos

Observamos que 20 elementos já são mais que suficientes para alcançar uma convergência no deslocamento modal, a análise feita para a força concentrada também serve para o caso de forçamento distribuído.

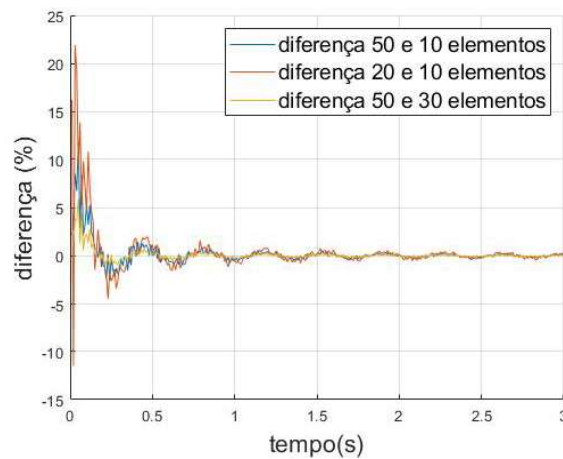


Figura 6.15: Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos

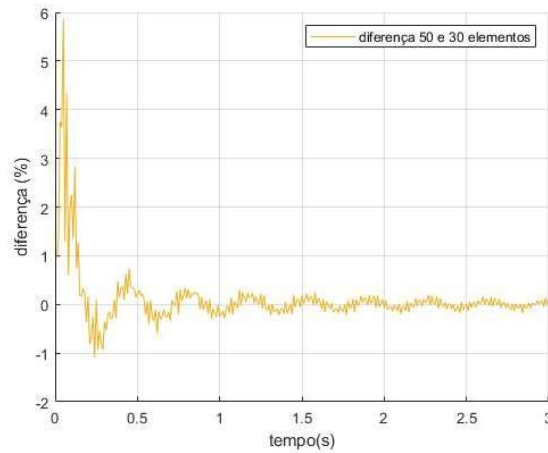


Figura 6.16: Diferença entre as aproximação utilizando diferentes números de elementos

6.4

O *slaming*

Agora, voltaremos a tratar do forçamento representativo do *slaming*. Começamos por ilustrar o problema e caracterizar o forçamento:

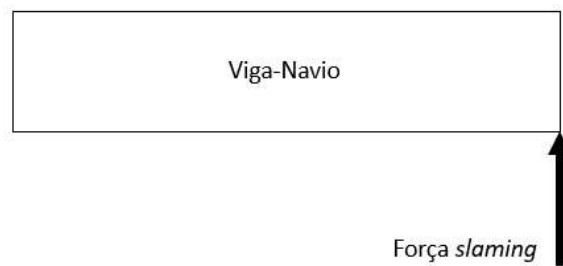


Figura 6.17: Ilustração do problema com forçamento do *slaming*

Para conseguir uma boa aproximação, precisamos saber qual o número de elementos a ser utilizado na discretização por elementos finitos. Para isso, devemos saber qual o valor da maior frequência que excita a viga. Isto é feito aplicando a transformada de Fourier no sinal de entrada. O resultado é mostrado a seguir:

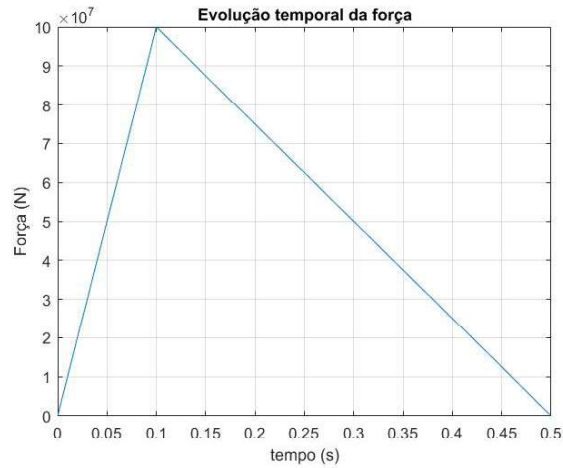


Figura 6.18: Evolução temporal do forçamento representativo do *slaming*

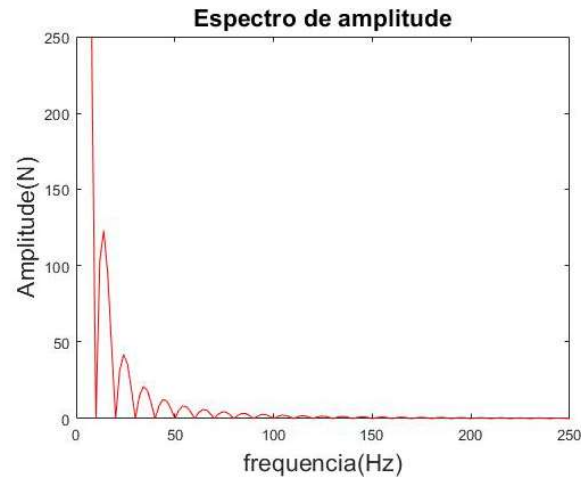


Figura 6.19: Transformada de Fourier do sinal de entrada do problema

Observamos que a maior frequência de excitação da viga será da ordem de 90Hz. Este valor é próximo ao valor da quarta frequência natural da viga (93,4Hz). Para saber quantos elementos são necessários para representar com um baixo erro o modo correspondente a esta frequência, traçamos a evolução do erro da aproximação deste modo com relação à solução analítica em função do número de elementos:

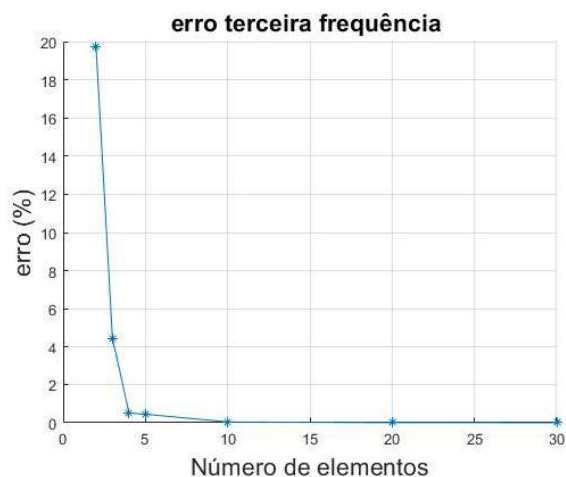


Figura 6.20: Erro aproximação terceiro modo em relação a solução analítica

Concluimos que valores entre 10 e 15 elementos são suficiente para representar este modo (erro inferior a 1%). Calculamos então a solução aproximada do problema forçado com 14 elementos e expressamos os resultados à seguir:

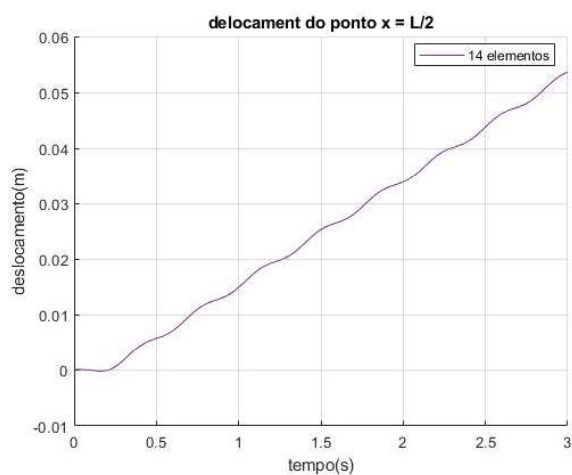


Figura 6.21: Aproximação da solução com 14 elementos

Para conferir a análise feita no paragrafo anterior, calculamos também a aproximação com 2, 4 e 10 elementos:

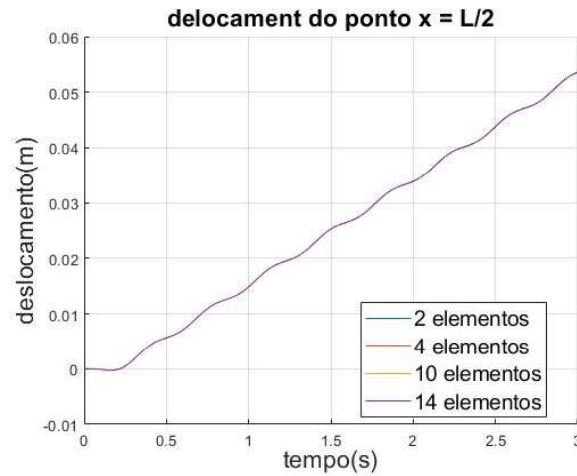


Figura 6.22: Aproximações com 14, 10, 4 e 2 elementos

Observamos que o comportamento é similar ao da resposta ao forçamento constante, as aproximações são próximas pois o forçamento excita frequências baixas, com 4 elementos já representamos a terceira frequência com um erro considerado próximo do aceitável (por volta de 3%). Entretanto, ao observar a figura com um certo zoom, vemos que os valores das aproximações com 14 e 10 elementos são mais próximos entre si, e os com 4 e 6 elemento mais distantes, verificando a análise anteriormente feita.

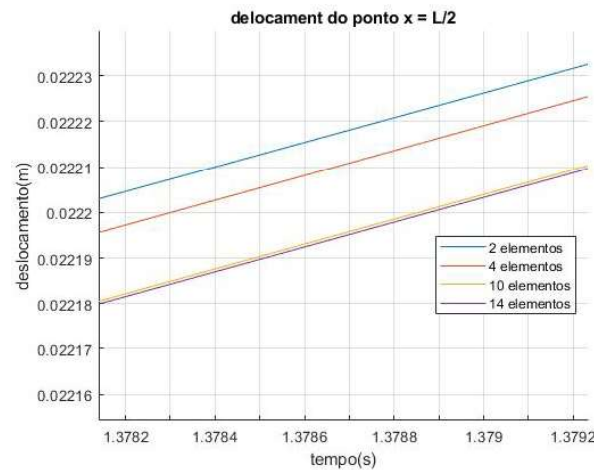


Figura 6.23: Aproximações com 14, 10, 4 e 2 elementos com zoom para observarmos a convergência

7

Conclusões

7.1

Conclusões gerais

Neste trabalho foi apresentada uma forma de aproximar dinâmicas de navios através de teoria de vigas. Estas aproximações foram obtidas por meio da utilização do modelo viga-navio. A dinâmica escolhida para estudo foi a de um navio forçado por uma onda, um movimento conhecido como *slaming*.

Contudo, antes de passar ao problema final a ser estudado, passamos pela apresentação da teoria utilizada na aproximação da solução. Neste trabalho são utilizados vários conceitos que não são normalmente abordados durante o curso de graduação, sendo eles:

1. Teoria de vigas;
2. Método dos elementos finitos;
3. Análise de convergência;
4. Transformada de Fourier;
5. Decomposição modal;
6. Integração numérica.

Primeiramente apresentando a teoria de vigas, as equações representativas da dinâmica destas e que irão representar a dinâmica do navio. Com estas equações, foi possível encontrar uma solução analítica ao problema de modos, que foi detalhada durante o trabalho.

Passamos posteriormente à teoria utilizada para obter a solução aproximada. O problema foi discretizado utilizando o método dos elementos finitos, que também foi apresentado neste trabalho. Encontramos finalmente uma solução aproximada ao problema de modos e a comparamos com a solução analítica. Observamos que os erros variam com um parâmetro importante, o número de elementos a ser utilizado na discretização.

Através das análises desenvolvidas ao longo do trabalho, observou-se que a escolha do número de elementos deve ser feita de forma criteriosa atendendo um critério de erro previamente definido. Verificou-se que os modos de frequência natural mais baixa são modos de movimentos mais simples e podem ser representados com um número de elementos reduzido.

Já os modos de frequência mais alta tem movimentos complexos e com poucos elementos não conseguimos alcançar um erro baixo (menor que 1%) na comparação com a solução analítica. Também é importante não superdimensionar o número de elementos a ser utilizado, visto que o ganho no tempo de cálculo pode ser significativo, sem ganho em precisão.

Finalmente, aplicamos o mesmo método para resolver problemas com diferentes tipos de forçamentos externos. Aqui foi utilizado o método de Runge-Kutta de integração numérica para obter as aproximações. Começamos com um forçamento mais simples, nodal e constante. Neste momento foi feita a comparação com a resposta analítica modal e concluímos que a aproximação feita utilizando o método dos elementos finitos é válida com erros menores que 3%.

Posteriormente, o forçamento nodal constante foi substituído por um nodal e senoidal. Observamos a importância do número de elementos na aproximação, mostrando que a escolha equivocada deste pode nos levar a perder informações na resposta.

Os forçamentos nodais foram então substituídos por forçamentos distribuídos ao longo da viga. Calculamos mais uma vez as aproximações e foi possível confirmar as análises feitas para forçamentos nodais.

Por último, o problema proposto no início deste relatório foi tratado. A aproximação para a viga forçada pela força representativa do *slaming* foi calculada, e, com auxílio da transformada de Fourier, foi possível encontrar qual a mais alta frequência excitada por este forçamento. Sabendo disto, foi possível encontrar o número de elementos necessários para simular o fenômeno com uma boa precisão, viabilizando assim, o encontro da resposta forçada da viga discretizada com o método dos elementos finitos.

7.2

O produto deste trabalho

Todos os resultados mostrados e analisados durante este trabalho foram obtidos a partir de um programa desenvolvido no software MatLab para obtenção de aproximações numéricas de dinâmicas de vigas utilizando a discretização por elementos finitos.

O código foi feito de maneira a poder resolver problemas de viga a partir da teoria de Bernoulli para todas as condições de contorno e iniciais. Neste trabalho, devido ao tratamento de um problema específico de viga livre-livre, as condições de contorno não foram alteradas. Contudo, com este mesmo código seria possível resolver outros problemas com condições de contorno diferentes.

Referências Bibliográficas

- [1] HUGHES, O.F; PAIK, J.K. . *Ship Structural Analysis and Design*. Jersey City, 2010.
- [2] DANIEL J. INMAN. *Engineering vibrations, fourth edition*.
- [3] TANCREDI, T.P. A estrutura primária do navio. 2004.
- [4] ODD M. FALTINSEN, MAURIZIO LANDRINI¹ AND MARILENA GRECO . Slamming in marine applications. 2004.
- [5] Ship Structure Committee. Slamming of ships: A critical review of the current state of knowledge. 1970.
- [6] RUBENS SAMPAIO, PRISCILLA ALMEIDA, THIAGO RITTO. *Dinâmica de estruturas flexíveis, PUC-Rio*. 2007.
- [7] N. SALAS JULIO M. LICINIO KROHLING R. PLATON NOGUEIRA DE BRITO. Etude de vibrations en navires, ECOLE CENTRALE DE NANTES, 2019.
- [8] GREGORY LEGRAIN. *Modèle éléments finis, ECOLE CENTRALE DE NANTES*. 2017.
- [9] <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/eigs.html>. *MatLab documentation function eigs*.
- [10] ROBERTA LIMA. *Integração de equações diferenciais no MATLAB, PUC-Rio*. 2019.