

B

Grau Topológico e duas aplicações em teoria espectral

O grau topológico quase realiza o sonho de contar continuamente raízes de uma função. As figuras B.1 e B.2 mostram que pequenas perturbações da função podem mudar o número de raízes. Os problemas apresentados pelas duas figuras são de naturezas distintas. Na primeira figura a dificuldade é causada pela presença de uma raiz na fronteira do domínio: uma pequena variação na função pode fazer com que a raiz saia do domínio. Essa dificuldade pode ser resolvida restringindo a contagem a funções que não tenham raízes na fronteira. A segunda figura é ainda mais expressiva pois deixa claro que a contagem é descontínua quando duas raízes se cancelam e ainda sugere que duas raízes têm potencial de cancelamento quando a função é crescente em uma delas e decrescente na outra. Para recuperar continuidade, a sugestão imediata é abrir mão da contagem e associar a cada raiz um sinal que identifique se a função preserva orientação em uma vizinhança deste ponto.



Figura B.1: O número de raízes não varia continuamente com a função

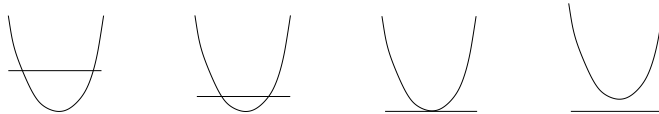


Figura B.2: Um exemplo mais delicado de descontinuidade

Somos então levados a considerar o grau de uma função F em relação a um ponto y de sua imagem,

$$\deg(F, y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\det(DF(x))). \quad (*)$$

O ponto-chave da construção do grau é encontrar cenários adequados nos quais a fórmula faz sentido e é informativa.

Um cenário inicial ([Am]) é o conjunto $\mathcal{F}_{\Omega,y}$ das funções suaves $F: \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com Ω aberto e de fecho compacto, para as quais $y \notin \partial F(\Omega)$ é um valor regular. Nesse caso, a expressão (*) faz sentido e mostra-se que $\deg(F, y) = \deg(F - y, 0)$ é constante ao longo de deformações contínuas F_t (na norma *sup*) e y_t preservando $F_t - y_t \in \mathcal{F}_{\Omega,0}$. Em particular, o grau $\deg(F, \cdot)$ é constante nas componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$. O conjunto de funções em seguida é ampliado para incluir todas as funções contínuas $F: \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para as quais $y \notin \partial F(\Omega)$. Para essas funções, o grau é calculado a partir de aproximações suaves adequadas.

Podemos abrir mão da compacidade de $\bar{\Omega}$ se exigirmos em vez que $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função própria. A invariância do grau também é garantida se exigirmos que as homotopias F_t e y_t além das hipóteses anteriores sejam por sua vez próprias. Em particular, no caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\deg(F, y)$ independe de y , já que $\partial\Omega = \emptyset$.

A expressão (*) faz sentido ainda quando o domínio e o contra-domínio são variedades orientáveis compactas (com ou sem bordo) de mesma dimensão ([M]). Mais, podemos supor que o domínio seja não compacto, desde que estejamos considerando funções e deformações próprias.

A teoria de grau é frequentemente usada como ferramenta para provar sobrejetividade de funções. Qualquer ponto fora da imagem de F tem grau zero por definição, e com isso todos os pontos onde o grau não se anula são atingidos pela função. Calcular o grau é uma operação global, e por isso pode parecer mais difícil do que obter uma pré-imagem, mas a invariância do grau por homotopias apropriadas torna o cálculo possível em muitas situações. Mais até, o grau permite expandir para uma vizinhança o que se sabe sobre um ponto.

Existem situações em que o grau de fato conta pré-imagens. Um exemplo simples será empregado no problema inverso descrito no Teorema B.2. Seja $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função analítica (em várias variáveis) própria. Desdobrando partes reais e imaginárias tanto do domínio quanto do contra-domínio, obtemos uma função $\tilde{F}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ própria, e como tal, admitindo o cálculo de $\deg(\tilde{F})$. Jacobianos de funções desse tipo, quando inversíveis, têm sempre determinante estritamente positivo: o caso $n = 1$ é uma consequência das equações de Cauchy-Riemann, e o caso geral segue do mesmo modo para as equações de Cauchy-Riemann apropriadamente estendidas. Assim, $\deg(\tilde{F})$ conta as pré-imagens de um valor regular de $\tilde{F}$ (que está naturalmente associado a um valor regular de F).

Apresentaremos dois exemplos de teoria espectral para ilustrar o uso dessas técnicas. No primeiro, ao demonstrar o teorema espectral, limitaremos o domínio para diminuir o número de pré-imagens e identificaremos o sinal dos jacobianos nas pré-imagens restantes. No segundo, um problema inverso de autovalores, calcularemos o grau por um argumento de homotopia. A demonstração abaixo é devida a Hacon ([H]).

Teorema B.1 *Toda matriz real simétrica $M \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ pode ser decomposta no produto $M = Q^T D Q$, onde Q é uma matriz ortogonal em $SO(n, \mathbb{R})$ e $D \in D(n, \mathbb{R})$ é diagonal.*

Prova. O problema pode ser reformulado em termos da sobrejetividade da função

$$F: SO(n, \mathbb{R}) \times D(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R}) \\ (Q, D) \mapsto Q^T D Q.$$

Note que $SO(n, \mathbb{R})$ é uma variedade compacta, conexa e orientável. A função F é certamente suave. Propriedade segue do teorema de Gershgorin ([G]): todos os autovalores de uma matriz M estão contidos na união das bolas $B_i = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - M_{ii}| \leq \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq i} |M_{ik}|\}$. Assim, a inversa de um fechado limitado do contra-domínio é um fechado limitado do domínio.

Seja $A(n, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes anti-simétricas. O espaço tangente a $SO(n, \mathbb{R})$ em Q é $TSO(n, \mathbb{R})_Q = \{AQ \mid A \in A(n, \mathbb{R})\}$, sendo assim naturalmente parametrizado pelo próprio $A(n, \mathbb{R})$. Passamos ao cálculo da derivada de F :

$$DF_{(Q,D)}(A, E) = \lim_{t \rightarrow 0} (Q^T e^{-tA} (D + tE) e^{tA} Q - Q^T D Q) / t = \\ (e^{tA} Q \text{ é um caminho em } SO(n, \mathbb{R}) \text{ que tem } AQ \text{ por vetor tangente em } 0.) \\ = \lim_{t \rightarrow 0} (Q^T (I - tA) (D + tE) (I + tA) Q - Q^T D Q) / t = \\ (\text{expandindo a exponencial em sua série de potências, omitimos os termos} \\ \text{de ordem maior que 1, que desapareceriam no limite}) \\ = Q^T (DA - AD + E) Q.$$

Se D é simples, ou seja, se suas posições diagonais são todas diferentes, a jacobiana

$$DF_{(Q,D)}: A(n, \mathbb{R}) \times D(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R}) \\ (A, D) \mapsto Q^T (DA - AD + E) Q$$

é inversível. Para ver isso, note que as dimensões de domínio e contra-domínio são iguais: basta então verificar injetividade, ou mesmo que $DA - AD + E = 0$ implica que $A = E = 0$. Como D é diagonal, a matriz $DA - AD$ tem diagonal igual a zero, e a igualdade implica imediatamente que a matriz diagonal E é zero. Agora, $AD - DA = 0$ implica que $DAe_i = ADe_i = A(d_i e_i) = d_i Ae_i$, onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica. Mas a equação indica que Ae_i é um autovetor de D associado a d_i , e portanto $Ae_i = \lambda_i e_i$. A anti-simetria impede que λ_i seja não nulo e mostra que $A = 0$. Por conta da injetividade, a dimensão da imagem precisa ser a mesma do domínio, e com isso $\{AD - DA \mid A \in A(n, \mathbb{R})\}$ contém todas as matrizes simétricas de diagonal nula.

Passamos agora ao cálculo do grau de F . Como o domínio não tem fronteira, o grau é constante sobre todo o contra-domínio. Tome então uma matriz diagonal $\tilde{D}$ com espectro simples, e considere suas pré-imagens (Q_i, D_j) , onde $Q_i \in SO(n, \mathbb{R})$ e D_j são matrizes diagonais cujas entradas ao longo da diagonal são obtidas permutando as posições na diagonal de $\tilde{D}$. Pela inversibilidade da jacobiana nesse caso, cada pré-imagem contribui para o cálculo do grau com $\text{sgn}(\det DF_{(Q_i, D_j)})$. Como a transformação linear $(A, E) \mapsto Q^T(DA - AD + E)Q$ é inversível para qualquer matriz Q na variedade conexa $SO(n, \mathbb{R})$, um argumento de continuidade mostra que esse sinal pode ser calculado para o caso $Q = I$. Vamos ver agora que dois pares (Q_i, D_j) e (Q_i, D_k) induzem o mesmo sinal no determinante se e somente se D_j e D_k têm mesma paridade quando vistas como permutações de $\tilde{D}$. Para isto, escolha uma base para o domínio consistindo da base de matrizes anti-simétricas $(A_{i,j}, i < j)$, tendo uma única entrada não nula e igual a 1 acima da diagonal, na posição (i, j) e uma base (E_k) de matrizes diagonais tendo uma única entrada não nula igual a 1 na posição (k, k) . A transformação $DF_{(I, D_j)}$ fixa cada matriz diagonal E_k , independentemente de D_j . Matrizes anti-simétricas são levadas a matrizes simétricas. Se D_j e D_k diferem de uma transposição (r, s) , então $DF_{(I, D_j)} A_{r,s} = -DF_{(I, D_k)} A_{r,s}$. Em geral, $DF_{(I, D_j)} A_{r',s'} = \pm DF_{(I, D_k)} A_{r',s'}$, e para $(r', s') \neq (r, s)$ é fácil ver que o número de sinais negativos é par. Assim, permutações que diferem de uma transposição induzem transformações com orientações opostas. O caso geral segue, e dele aprendemos que $\deg(F) = 0$ se $n > 1$, já que para cada matriz Q_i temos o mesmo número de diagonais D_j associadas a permutações pares e ímpares.

Uma alternativa é reduzir o domínio para $\mathcal{R} = SO(n, \mathbb{R}) \times \{D \in D(n, \mathbb{R}) \mid d_1 < d_2 < \dots < d_n\}$. O domínio passou a ter fronteira, mas sua imagem não desconecta o contra-domínio pois tem codimensão

2. De fato, além das diagonais de espectro múltiplo terem codimensão 1 em $D(n, \mathbb{R})$, pelo menos uma matriz anti-simétrica comuta com cada uma dessas diagonais.

O cálculo do grau para um valor regular diagonal agora não tem cancelamentos: na notação acima, as matrizes D_j nesse domínio reduzido únicas, e todas as matrizes Q_i contribuem com o mesmo sinal, pela conexidade de $SO(n, \mathbb{R})$. Assim, para essa restrição, $\deg(F)$ não é nulo, e F então é sobrejetora. ■

Teorema B.2 *Suponha dados uma matriz complexa $n \times n$ A e n números complexos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Então existe uma matriz diagonal D tal que $A + D$ tem por autovalores os números dados. Genericamente, existem $n!$ matrizes D deste tipo.*

Prova. Mais uma vez interpretaremos o problema como o estudo da sobrejetividade de uma função. Dada uma matriz M , identifique seu polinômio característico $\det(\lambda I - M) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$ com a n -upla dos coeficientes $(c_{n-1}, \dots, c_0) \in \mathbb{C}^n$. Defina F_A de $D(n, \mathbb{C})$ em $\mathbb{C}^n$ levando D para os coeficientes do polinômio característico de $A + D$. É fácil ver que F_A é uma função analítica (em n variáveis). Dessa maneira, separando partes reais e imaginárias tanto no domínio quanto no contra-domínio, F_A dá origem a uma função $\tilde{F}_A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Vamos mostrar que F_A (e logo $\tilde{F}_A$) é própria. Um polinômio mônico com coeficientes satisfazendo $|a_k| \leq M$, $0 \leq k \leq n-1$, possui raízes limitadas por $|x| \leq \max\{1, nM\}$ porque se $|x|$ fosse maior que nM e 1,

$$\begin{aligned} |x^n| &= |a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0| \leq M(|x|^{n-1} + \dots + 1) \\ &\leq nM|x|^{n-1} < |x|^n. \end{aligned}$$

A pré-imagem por F_A de um compacto em $\mathbb{C}^n$ então é um conjunto de matrizes com autovalores uniformemente limitados. O teorema de Gershgorin estabelece que os autovalores de uma matriz da forma $A + D$ estão contidos numa união de bolas cujos raios são determinados por A e os centros são os valores na diagonal de $A + D$ e cada bola disjunta das demais contém pelo menos um autovalor. Então um conjunto de matrizes da forma $A + D$ com autovalores uniformemente limitados é formado por um conjunto limitado de diagonais D . Isso mostra que F_A é uma função própria.

Como o domínio das duas funções não têm fronteiras, o grau $\deg(\tilde{F}_A, y)$ independe do ponto $y \in \mathbb{R}^{2n}$ usado para calculá-lo. O grau de $\tilde{F}_A$ no caso especial $A = 0$ é fácil de calcular: ele é $n!$. De fato, vamos lembrar

que o mapa que leva uma n -upla de $\mathbb{C}^n$ aos coeficientes não triviais do polinômio mônico que tem as entradas da n -upla como raízes é um difeomorfismo local (analítico!) quando as entradas da n -upla são todas distintas. Assim, dado um polinômio p com raízes distintas, as pré-imagens de p por F_0 correspondem às $n!$ matrizes diagonais tendo as raízes de p como autovalores. Cada matriz é um ponto regular, pelo fato recém-citado, e, pela analiticidade de F_0 , o determinante da Jacobiana de $\tilde{F}_0$ em pontos regulares é sempre estritamente positivo.

Agora, consideramos o caso geral. A homotopia F_{tA} entre F_0 e F_A é própria: o mesmo argumento usado acima pode ser aplicado aqui porque para $t \in [0, 1]$, as entradas de tA são limitadas e as diagonais precisam ser limitadas para que os autovalores de $D + tA$ o sejam. Resulta disso que F_A tem o mesmo grau de F_0 . O grau diferente de zero implica a sobrejetividade da função. Os argumentos invocando analiticidade mostram que a contagem genérica (mais precisamente, para valores regulares de F_A) de pré-imagens é $n!$. ■

Mesmo se os dados iniciais, A e $\{\lambda_i\}$ forem reais, deve-se esperar que várias das soluções D_j sejam matrizes complexas.