A
Continuidade e diferenciabilidade de autovalores e autovetores

Lema A.1 *Seja* $\mathbb{S}(n, \mathbb{R})$ *o espaço vetorial de matrizes reais e simétricas de dimensão* n*. Suponha que* $S_0 \in \mathbb{S}(n, \mathbb{R})$ *tem um autovalor simples* λ_0 *e autovetor normalizado associado* v_0*. Então, para uma vizinhança adequada* U *de* S_0*, existe um único par de funções suaves* $\lambda \colon U \to \mathbb{R}$ *e* $v \colon U \to S^{n-1}$*, a esfera unitária em* $\mathbb{R}^n$*, tais que* $\lambda(S_0) = \lambda_0$*, e* $\lambda(S)$ *é autovalor de* S *com autovetor normalizado associado* $v(S)$*. Além disso,* $\dot{\lambda} = \langle \dot{S} v, v \rangle$*.*

Prova. Para mostrar a existência de uma determinação suave única de autovalores e autovetores, seja v_0 um autovetor unitário de S_0 associado a λ_0 e considere a seguinte função.

$$
\begin{aligned}
F \colon \mathbb{S}(n, \mathbb{R}) \times S^{n-1} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\
(S\,,\, v\,,\, \lambda) &\mapsto Sv - \lambda v
\end{aligned}
$$

Pelo teorema da função implícita, podemos escrever v e λ como funções suaves de S em uma vizinhança U de S_0 tais que $F(S, v(S), \lambda(S)) = 0$ com $v(S_0) = v_0$ e $\lambda(S_0) = \lambda_0$, desde que a derivada de F em relação às duas últimas coordenadas seja um isomorfismo no ponto (S_0, v_0, λ_0). Fazendo as contas, para um vetor v perpendicular a v_0 (ou, mais geometricamente, para $v \in T_{v_0} S^{n-1}$),

$$
\begin{aligned}
DF_{(S_0, v_0, \lambda_0)}(0, v, \lambda) &= \lim_{x \to 0} (S_0(v_0 + xv) - (\lambda_0 + x\lambda)(v_0 + xv) - S_0 v_0 + \lambda_0 v_0)/x \\
&= S(0)v - \lambda_0 v + \lambda v_0 = (S(0) - \lambda_0 I)v + \lambda v_0.
\end{aligned}
$$

Como λ_0 é autovalor simples de S_0, $S_0 - \lambda_0 I$ é um isomorfismo do espaço dos vetores perpendiculares a v_0 em si mesmo e, portanto, DF é um isomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$. Finalmente, lembrando que para uma família de vetores normalizados $v(S)$ temos $\langle \dot{v}, v \rangle = 0$, derivamos $Sv = \lambda v$, obtendo $\dot{S}v + S\dot{v} = \dot{\lambda}v + \lambda\dot{v}$, cujo produto interno com v resulta em $\langle \dot{S}v, v \rangle + \langle S\dot{v}, v \rangle =$

$\langle \dot{\lambda} v, v \rangle + \langle \lambda \dot{v}, v \rangle$. Substituindo $\langle S\dot{v}, v \rangle$ por $\langle \dot{v}, Sv \rangle = \lambda \langle \dot{v}, v \rangle$, deduzimos que $\dot{\lambda} = \langle \dot{S} v, v \rangle$. ■

No caso de espectro múltiplo, o assunto é mais técnico. Um resultado conveniente que encapsula as propriedades de continuidade necessárias do espectro é o seguinte ([W]). O teorema citado, devido a Ostrowski, tem uma estimativa explícita do raio da bola em termos de cotas para os módulos das entradas das matrizes envolvidas.

Teorema A.2 *Seja $A_k, k \in \mathbb{N}$ uma seqüência de matrizes $n \times n$ complexas convergentes a uma matriz A_∞ com espectro $\sigma(A_\infty) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ para uma rotulação arbitrária, e com multiplicidades $n_1, \ldots, n_r$. Então, para valores suficientemente pequenos de ϵ, existe K tal que cada bola de raio ϵ centrada em $\lambda_j, j = 1, \ldots, r$ contém n_j autovalores de todas as matrizes A_k, para $k > K$.*