

5

O grau da aplicação espectral

O lema 4.6 garante que $\partial\mathcal{R}_k$ é composto por matrizes de espectro múltiplo e, portanto, \mathcal{R}_k é uma reunião de componentes conexas do aberto $\mathcal{U}_{\text{norm}}$ de matrizes de espectro simples em $\mathcal{T}_{\text{norm}}^k$. O mesmo lema mostra que $\overline{\mathcal{R}_k}$ é compacto, o que nos interessa por fornecer condições para o uso de teoria de grau. Aliás, para matrizes 4×4 , \mathcal{R}_4 é a única região com essa particularidade, como mostra a figura 4.1.

Certamente, $\Lambda(\partial\mathcal{R}_k) \subset \partial L_k$ e assim, pelo Apêndice B, o grau de Λ é constante no interior de L_k . Provaremos que esse grau é diferente de zero e a sobrejetividade de $\Lambda: \overline{\mathcal{R}_k} \rightarrow L_k$ será um corolário. A continuidade de Λ (que segue da continuidade dos autovalores como apresentada no Apêndice A) e a compacidade do domínio estendem a sobrejetividade do interior para a fronteira de L_k .

Um ponto delicado no trabalho de Landau é que não se sabe o suficiente sobre a pré-imagem por Λ de nenhum ponto no interior de L_k e por isso o cálculo do grau é indireto. Na verdade, é fácil exibir um vértice de L_k que tem uma única pré-imagem em $\overline{\mathcal{R}_k}$: é o ponto $(-1, -1, \dots, k-1) = \Lambda(M_k(0, 1, \dots, 1))$, onde os $k-1$ menores autovalores normalizados coincidem. Em \mathcal{R}_k , construiremos seqüencialmente segmentos de arestas, regiões em faces de dimensão dois, etc., consistindo unicamente de pontos injetores, até atingirmos um aberto no interior de \mathcal{R}_k com essa propriedade e no qual encontraremos um ponto regular, empregado para calcular o grau de Λ no interior de L_k : pela injetividade, ele será forçosamente ± 1 .

Começamos mostrando que, de fato, $M_k(0, 1, \dots, 1)$ é um ponto injetor de Λ . Para que a matriz $M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k)$ tenha autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda$, a proposição 4.4(e) exige que $n_j(\lambda) = j-1$, para $2 \leq j \leq k$, e que t_j , $3 \leq j \leq k$, seja determinado seqüencialmente pela convolução descrita a partir do autovetor v de $M_2(0, 1)$ associado a $\lambda = -1$, como na Proposição 4.4. Por essa construção, M_k é única e a escolha $t_3 = \dots = t_k = 1$ realiza essas exigências. Veremos no corolário 5.2 que essa matriz está no

bordo de \mathcal{R}_k . Introduziremos uma classe um pouco mais abrangente de matrizes que as Landau-regulares para estudar a fronteira de \mathcal{R}_k . Uma matriz $M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k)$ é *Landau-regular de fronteira* se para cada $j \leq k$, as três propriedades a seguir são satisfeitas.

- (i) Os autovalores de $M_j(0, 1, t_3, \dots, t_j)$ são simples, exceto possivelmente pelo menor autovalor,
- (ii) Os autovetores podem ser escolhidos de forma que suas paridades se alternem,
- (iii) O maior autovalor é par.

Lema 5.1 *Seja M_k uma matriz Landau-regular de fronteira com menor autovalor λ de multiplicidade m . Se $m = 1$, M_k é Landau-regular. Se $m \geq 2$, então M_k é o ponto final de um caminho $M_k^{(\epsilon)}$, $\epsilon \rightarrow 0_+$, de matrizes Landau-regulares de fronteira com menor autovalor de multiplicidade $m - 1$.*

Prova. Considere uma matriz Landau-regular de fronteira M_k com menor autovalor simples λ . Para verificar que M_k é Landau-regular, basta garantir que os autovalores de suas submatrizes são simples. Vamos inicialmente mostrar que o menor autovalor μ de M_{k-1} é simples. Em consequência da proposição 4.4 (e), λ não é autovalor de M_{k-1} . Por entrelaçamento, $\lambda < \mu$. Existem duas possibilidades. Se μ é autovalor de M_k , sua multiplicidade em M_k é 1, porque M_k é Landau-regular de fronteira. Novamente por entrelaçamento, μ é o segundo menor autovalor de M_k . Como a multiplicidade em M_{k-1} varia exatamente de 1 (4.2), temos $n_{k-1}(\mu) = 2$. A proposição 4.4 implica que μ é o menor autovalor de M_{k-2} com multiplicidade 1. Nesse caso as paridades de μ como autovalor de M_{k-2} e M_k são iguais, pela mesma proposição. Por outro lado, os menores autovalores de M_k e M_{k-2} devem ter as mesmas paridades, pelas alternâncias requeridas na definição de uma matriz Landau-regular de fronteira. Isso leva a uma contradição pois μ é o segundo autovalor de M_k e não pode ter a mesma paridade de λ . Vamos agora supor que μ não é um autovalor de M_k : a multiplicidade espectral em M_{k-1} só pode variar de ± 1 e a simplicidade segue. Com isso fica provado que M_{k-1} também é uma matriz Landau-regular de fronteira com menor autovalor simples, e o argumento pode ser iterado para mostrar que M_k é Landau-regular.

O resto da demonstração torna preciso o argumento exemplificado no último parágrafo do Capítulo 2. No caso $n_k(\lambda) = m \geq 2$, a proposição 4.4(e) indica que λ é o menor autovalor de M_{k-m+1} e é simples. Além disso,

para índices $k - m + 2 \leq j \leq k$, a entrada do canto t_j é determinada seqüencialmente a partir de M_{k-m+1} pela construção descrita em 4.4(b). O parágrafo anterior mostra que $M_{k-m+1} \in \mathcal{R}_{k-m+1}$. A perturbação do canto $t_{k-m+2}^{(\epsilon)} = t_{k-m+2} \pm \epsilon$, que obtém $M_{k-m+2}^{(\epsilon)}$ a partir de M_{k-m+2} , separa o menor autovalor duplo de M_{k-m+2} em $\lambda^-(\epsilon) < \lambda^+(\epsilon)$: o sinal da perturbação é determinado pela paridade de λ como autovalor de M_{k-m+1} de modo a garantir, pelo cálculo 4-3 do Lema 4.6, que $M_{k-m+2}^{(\epsilon)} \in \mathcal{R}_{k-m+2}$.

Defina agora novas matrizes $M_k^{(\epsilon)}$ completando seqüencialmente $M_{k-m+2}^{(\epsilon)}$ usando os cantos $t_j(\epsilon)$, $k - m - +3 \leq j \leq k$, calculados por 4.4(b) de forma que $\lambda^-(\epsilon)$ tenha multiplicidade $m - 1$ em $M_k(\epsilon)$.

Mostraremos agora que $M_k^{(\epsilon)}$ depende continuamente de ϵ . Na verdade, basta ver que $M_k(\epsilon)$ se aproxima de $M_k = M_k(0)$ quando ϵ tende a zero. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, o autovetor $w(\epsilon)$ associado ao menor autovalor de $M_{k-m+2}^{(\epsilon)}$ converge para o autovetor de λ em M_{k-m+2} que tem a mesma paridade de $w(\epsilon)$. Isso porque qualquer seqüência tem uma subseqüência convergente e o limite só pode ser esse. A proposição 4.4(b) estabelece que as entradas t_j , $k - m + 3 \leq j \leq k$, de M_k são obtidas através de convoluções com $w = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} w(\epsilon)$, e por isso $t_j = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} t_j(\epsilon)$.

Finalmente, vamos ver que para valores pequenos de ϵ , $M_k^{(\epsilon)}$ é uma matriz Landau-regular de fronteira. Para valores suficientemente pequenos de ϵ , os autovalores simples de M_j continuam simples na perturbação $M_j^{(\epsilon)}$ e mantêm a paridade. Além disso, a perturbação fragmenta o bloco de autovalores múltiplos de M_j em um bloco de multiplicidade menor e um segundo menor autovalor de $M_j^{(\epsilon)}$. Por comparação com M_j , a Landau-regularidade de fronteira de $M_j^{(\epsilon)}$ depende apenas da paridade do seu segundo autovalor. O bloco de autovalores múltiplos de M_j é gerado a partir do autovetor v de M_{k-m+1} associado a λ . Ao contrário, o bloco de autovalores múltiplos de $M_j^{(\epsilon)}$ tem a paridade do menor autovalor de $M_{k-m+2}^{(\epsilon)}$, que é oposta àquela de λ , por construção. Isso garante que o segundo autovalor de $M_j^{(\epsilon)}$ tem a mesma paridade de v e portanto $M_k^{(\epsilon)}$ é Landau-regular de fronteira. ■

Corolário 5.2 *Toda matriz Landau-regular de fronteira M_k está em $\overline{\mathcal{R}}_k$.*

Prova. Iterando o lema 5.1, de modo a baixar sucessivamente a multiplicidade do menor autovalor, podemos aproximar M_k por matrizes Landau-regulars de fronteira que possuam o menor autovalor com multiplicidade tanto menor quanto se queira. Reduzindo a multiplicidade a 1, encontramos aproximações em \mathcal{R}_k . ■

Passaremos agora à parte mais delicada da demonstração de Landau, onde estudaremos as subfaces de fronteira de \mathcal{R}_k e nelas encontraremos domínios nos quais a restrição de Λ não possuirá pontos críticos e terá extensões localmente injetoras.

Parametrize L_k por vetores (y_2, \dots, y_{k-1}) . Para $0 \leq j \leq k-3$, denote por l_j a face j -dimensional de L_k onde $-1 = y_2 = \dots = y_{k-j-1}$, por S_j a pré-imagem de l_j por Λ em $\overline{\mathcal{R}_k}$ e por Λ_j a restrição de Λ a S_j . Identificaremos S_{k-2} com $\overline{\mathcal{R}_k}$. Para $0 \leq j < k-2$, S_j está na fronteira de \mathcal{R}_k e corresponde a matrizes com os $k-j-1$ menores autovalores iguais.

Lema 5.3 *Para cada j , $1 \leq j \leq k-2$, $S_j \setminus S_{j-1}$ contém um subconjunto O_j de matrizes Landau-regulares de fronteira que satisfaz as seguintes propriedades*

- (i) O_j é aberto em S_j .
- (ii) $O_j \cup O_{j-1}$ é aberto em S_j .
- (iii) A derivada de Λ_j não é singular em nenhum ponto de $O_j \cup O_{j-1}$.
- (iv) Λ_j é localmente injetora em $O_j \cup O_{j-1}$.

Na figura abaixo estão indicados O_0 (o próprio vértice), O_1 (ao longo da face da direita) e O_2 em \mathcal{R}_4 . Note que as uniões $O_1 \cup O_0$ e $O_2 \cup O_1$ são abertos nas topologias induzidas pelo plano em S_1 e S_2 .

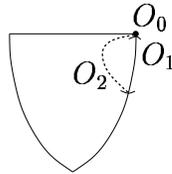


Figura 5.1: O_0 , O_1 e O_2 são abertos de S_0 , S_1 e S_2 , respectivamente

Prova. A demonstração é por indução a partir de $O_0 = S_0$. Sabemos que $S_0 = \{M_k(0, 1, \dots, 1)\}$ corresponde a uma matriz cujo menor autovalor tem multiplicidade $k-1$. Uma matriz em S_1 precisa ter o menor autovalor com multiplicidade $k-2$ e, pela proposição 4.4, deve ser a expansão via convoluções de alguma matriz em \mathcal{R}_3 próxima de $M_3(0, 1, 1)$.

Como essa construção é a mesma do lema 5.1, S_1 é um arco de matrizes Landau-regulares de fronteira geradas a partir do menor autovetor $w(\epsilon)$ de $M_3^{(\epsilon)} = M_3(0, 1, 1 - \epsilon)$, quando restrito a uma vizinhança de S_0 . O autovetor $w(\epsilon)$ é diferenciável em ϵ e sua primeira coordenada é afastada de zero.

Em conseqüência, as entradas $t_j(\epsilon)$ de $M_k^{(\epsilon)}$ também são diferenciáveis em ϵ . A perturbação $M_3^{(\epsilon)}$ separa o autovalor duplo em $\lambda_-(\epsilon) < \lambda_+(\epsilon)$ e o

entrelaçamento dos autovalores torna certo que o autovalor $\lambda_{k-1}(\epsilon)$ de $M_k^{(\epsilon)}$ satisfaz $\lambda_+(\epsilon) \leq \lambda_{k-1}(\epsilon)$. Como ambos têm o mesmo limite quando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\left. \frac{d\lambda_{k-1}(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \geq \left. \frac{d\lambda_+(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{2v_1^2}{\|v_o\|^2},$$

onde v_i é o autovetor ímpar associado ao menor autovalor de M_3 e v_1 é sua primeira coordenada. A função Λ leva $M_k(\epsilon)$ para $(-1, \dots, -1, \lambda_{k-1}(\epsilon)/(-\lambda_-(\epsilon)))$. Se v_p é o menor autovetor par de M_3 e possui primeira coordenada v_1 ,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\lambda_{k-1}(\epsilon)}{-\lambda_-(\epsilon)} \right) \right|_{\epsilon=0} = \frac{-\lambda'_{k-1}(0)\lambda_-(0) + \lambda_{k-1}(0)\lambda'_-(0)}{(\lambda_-(0))^2} \geq \frac{2v_1^2}{\|v_i\|^2} + \frac{2v_1^2}{\|v_p\|^2}.$$

A expressão é contínua e permanece positiva em um aberto em torno de O_0 no arco S_1 . Escolha O_1 como um aberto de matrizes Landau-regulars de fronteira, parametrizadas por $\epsilon \in (0, \delta)$, em que a derivada se mantenha positiva. A positividade da derivada garante que Λ_1 é localmente injetora em $[M_k(0), M_k(\delta)]$. Isso conclui o lema para $j = 1$.

Suponha por indução que existe $O_j \subset S_j$ realizando as exigências do lema e seja $M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k)$ uma matriz Landau-regular de fronteira em O_j . Uma forma de mover M_k para S_{j+1} é aplicar a construção do lema 5.1. A perturbação separa o autovalor duplo de M_{j+3} em $\lambda_-(\epsilon) < \lambda_+(\epsilon)$ e determina uma matriz Landau-regular de fronteira

$$M_k^{(\epsilon)} = M_k(0, 1, t_3, \dots, t_{j+2}, t_{j+3} \pm \epsilon, t_{j+4}(\epsilon), \dots, t_k(\epsilon)) \quad (5-1)$$

a partir convoluções com o menor autovetor de $M_{j+3}^{(\epsilon)}$. Pelo mesmo argumento da perturbação de O_o em S_1 , $M_k^{(\epsilon)}$ é diferenciável em ϵ e Λ_{j+1} leva $M_k^{(\epsilon)}$ em $(-1, \dots, -1, (\lambda_{k-j-1}(\epsilon)/-\lambda_-(\epsilon)), \dots, (\lambda_k(\epsilon)/-\lambda_-(\epsilon)))$.

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\lambda_{k-j-1}(\epsilon)}{-\lambda_-(\epsilon)} \right) \right|_{\epsilon=0} \geq \frac{2v_1^2}{|\lambda|} \left(\frac{1}{\|v_i\|^2} + \frac{1}{\|v_p\|^2} \right) > 0. \quad (5-2)$$

Agora considere uma perturbação arbitrária $M_k^{(\epsilon)}(0, 1, t_3(\epsilon), \dots, t_k(\epsilon))$ de $M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k)$ em $S_{j+1} \setminus S_j$. Pela proposição 4.4, o menor autovalor $\lambda(\epsilon)$ de $M_k^{(\epsilon)}$ é um autovalor simples de $M_{j+3}^{(\epsilon)}$ e $t_i(\epsilon)$, $j+4 \leq i \leq k$, é definido por convolução com o autovetor $w(\epsilon)$ de $M_{j+3}(\epsilon)$ associado a $\lambda(\epsilon)$. O autoespaço $E_k^{(\epsilon)}$ de $M_k^{(\epsilon)}$ associado a $\lambda(\epsilon)$ é gerado por vetores formados pela adjunção de blocos de zeros antes e depois de $w(\epsilon)$. O limite de $w(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ é um autovetor de λ em M_{j+3} com a mesma paridade de $w(\epsilon)$. Note que $M_{j+3}^{(\epsilon)}$ está em \mathcal{R}_3 porque é a perturbação de uma matriz

Landau-regular de fronteira que solta o único autovalor duplo. Não é possível soltar esses autovalores com a paridade trocada porque $M_{j+3}^{(\epsilon)}$ estaria fora de $\overline{\mathcal{R}}_{j+3}$, mas o lema 4.6 indica que qualquer matriz em $\overline{\mathcal{R}}_k$ possui submatrizes principais em $\overline{\mathcal{R}}_i$. Como a paridade de $w(\epsilon)$ não depende da perturbação, o mesmo vale para o seu limite $w(0)$. Em conseqüência, $E_k^{(\epsilon)}$ converge para o espaço de mesma estrutura $E_k^{(0)}$, obtido a partir de $w(0)$. O autovetor $v(\epsilon)$ de $M_k^{(\epsilon)}$ correspondente ao autovalor $\lambda_{k-j-1}(\epsilon)$, que foi liberado do bloco de autovalores múltiplos de M_k , é ortogonal a $E_k^{(\epsilon)}$ e precisa convergir para o complemento ortogonal de $E_k^{(0)}$ no autoespaço de λ em M_k . Esse limite v independe da perturbação. Esse é um ponto técnico crucial porque nos permitirá converter informação diferencial de Λ_j para Λ_{j+1} : é preciso liberar um único autovalor de cada vez para não perder suavidade. Um exemplo em que não há convergência de autovetores quando dois autovalores são simultaneamente liberados de um bloco de autovalores múltiplos será apresentado após a demonstração.

Se perturbamos $M_{j+3}^{(\epsilon)} = M_{j+3}(0, 1, t_3 \pm \epsilon_3, \dots, t_{j+3} \pm \epsilon_{j+3})$, com os sinais escolhidos para que a perturbação esteja em \mathcal{R}_3 , os autovetores variam suavemente com cada componente $\epsilon_3, \dots, \epsilon_{j+3}$ de ϵ porque são todos autovetores simples da parte par ou ímpar de M_{j+3} . Em outras palavras, aplique separadamente o lema A.1 às restrições pares e ímpares dessas matrizes. A suavidade de $w(\epsilon)$ propaga para $t_i(\epsilon)$, $j+4 \leq i \leq k$ e para os autovetores múltiplos de $M_k^{(\epsilon)}$, que são construídos a partir de $w(\epsilon)$. Como $M_k^{(\epsilon)}$ é uma perturbação diferenciável de M_k , cada autovetor simples de M_k também varia suavemente. E o mesmo vale para o $(j+1)$ -ésimo autovetor de $M_k^{(\epsilon)}$ porque ele pode ser definido por ortogonalidade aos outros. Com isso os autovalores podem ser derivados a partir da fórmula $\lambda_i(\epsilon) = \langle M_k^{(\epsilon)} v_i(\epsilon), v_i(\epsilon) \rangle / \|v_i(\epsilon)\|^2$, e obtemos

$$\left. \frac{d\lambda_i(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\langle T_k v_i, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}, \quad k-j-1 \leq i \leq k,$$

onde $v_{j-k-1} = v$, o limite definido acima, v_i é o i -ésimo autovetor de M_k , $k-j \leq i \leq k$, e $T_k = dM_k^{(\epsilon)}/d\epsilon|_{\epsilon=0}$. Para $i \leq k-j-2$, os autovalores são iguais e

$$\left. \frac{d\lambda_i(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\langle T_k u, u \rangle}{\|u\|^2},$$

para qualquer autovetor u de M_k no subespaço $E_k^{(0)}$, ou seja, qualquer autovetor perpendicular a v , associado ao menor autovalor. A extensão Λ_{j+1} de Λ_j é suave em torno de O_j e qualquer variação de M_k pode ser decomposta em uma direção tangente a S_j e outra com a forma (5-1).

Intuitivamente, Λ_{j+1} não é crítica em O_j porque preenche o espaço tangente a l_j , por indução, e a direção transversa a S_j é levada para uma direção transversa a l_j . Com relação à parametrização de S_{j+1} com as variáveis t_3, \dots, t_{j+3} , as matrizes de S_j correspondem a valores $(t_3, \dots, t_{j+2}, f(t_3, \dots, t_{j+2}))$, onde f é uma função suave determinada por convoluções com o menor autovetor da submatriz simples. O espaço \mathcal{P} tangente a S_j em M_k é gerado por

$$\left(x_3, \dots, x_{j+2}, \sum_{i=3}^{j+2} \frac{\partial f}{\partial t_i} x_i \right).$$

Nesse espaço, a derivada de Λ_{j+1} coincide com a derivada de Λ_j , que é injetora. Então existe uma única direção p tal que

$$\langle D\Lambda_{j+1}\mathcal{P}, p \rangle = 0.$$

Na verdade, p é o vetor de l_{j+1} perpendicular a l_j , ou seja, $(1, 0, \dots, 0)$. Através da equação (5-2), tem-se que

$$\langle D\Lambda_{j+1}(0, \dots, 0, 1), (1, 0, \dots, 0) \rangle = \partial\Lambda_{j+1}/\partial x_{j+3} \neq 0,$$

e a imagem da derivada é $j + 1$ -dimensional. Por continuidade podemos escolher uma vizinhança de M_k em S_j em que a derivada não seja singular e as matrizes se mantenham Landau-regulares de fronteira. Defina O_{j+1} como união dessas vizinhanças para as matrizes em O_j . A injetividade local segue do teorema da função inversa. ■

O exemplo a seguir mostra a necessidade de liberar um único autovalor de cada vez para que a diferenciabilidade de Λ_j seja herdada por Λ_{j+1} . Para $x \in [0, 1]$, os caminhos $\alpha(x) = M_4(0, 1, 1 - x, 1 - x)$ e $\beta(x) = M_4(0, 1, 1 - x, 1 - 2x)$ têm imagens em $\overline{\mathcal{R}}_4$ e $\alpha(0) = \beta(0)$. As matrizes são simples para $x \in (0, 1)$ e possuem uma única determinação de autovetores com primeira coordenada igual a 1 (lembre que autovetores de matrizes de Toeplitz associados a autovalores simples têm primeira coordenada não nula). Com essa convenção, os autovetores ímpares de $\alpha(x)$ convergem para $(1, (\sqrt{5} - 1)/2, -(\sqrt{5} - 1)/2, -1)$ e $(1, (\sqrt{5} + 1)/2, -(\sqrt{5} + 1)/2, -1)$ quando $x \rightarrow 0$ e os autovetores ímpares de $\beta(x)$ têm limites $(1, 1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1)$ e $(1, 1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1)$.

Lema 5.4 *Existe um valor regular de Λ no interior do simplexo L_k com uma única pré-imagem em $\overline{\mathcal{R}}_k$.*

Prova. O conjunto O_{k-2} construído pelo lema 5.3 é aberto em $\overline{\mathcal{R}}_k$ e está contido em \mathcal{R}_k pois é formado por matrizes Landau-regulars de fronteira com o menor autovalor simples, isto é, as matrizes em O_{k-2} são Landau-regulars. Isso mostra que O_{k-2} é aberto em \mathcal{R}_k e sabemos pelo mesmo lema que O_{k-2} contém apenas pontos regulares de Λ . Considere os pontos na imagem de O_{k-2} e suponha que todos eles têm mais de uma pré-imagem. Pelo lema, podemos aproximar um ponto $\sigma \in O_{k-3}$ por pontos $\sigma_n \in O_{k-2}$, para os quais existe $\sigma'_n \neq \sigma_n$ em \mathcal{R}_k tal que $\Lambda(\sigma_n) = \Lambda(\sigma'_n)$. Passando a uma subsequência se necessário, σ'_n converge para σ' . Por continuidade, $\Lambda(\sigma') = \Lambda(\sigma)$ e com isso $\sigma' \in \Lambda^{-1}(l_{k-3}) = S_{k-3}$. Os pontos σ e σ' não podem coincidir porque Λ é injetora em alguma vizinhança de σ em $O_{k-2} \cup O_{k-3}$. Então O_{k-3} herda de O_{k-2} a propriedade de todos os seus pontos possuírem um par em S_{k-3} com a mesma imagem por Λ . Podemos repetir o argumento para O_j e reduzir j até zero. Mas O_0 é um conjunto unitário e não pode abrigar σ e σ' distintos. ■

Corolário 5.5 *O grau da função $\Lambda: \overline{\mathcal{R}}_k \rightarrow L_k$ é ± 1 no interior de L_k e $\Lambda(\overline{\mathcal{R}}_k) = L_k$.*

Prova. O ponto com existência garantida pelo lema 5.4 tem grau ± 1 pois é regular e possui apenas uma pré-imagem. A fronteira de \mathcal{R}_k é mandada por Λ para a fronteira de L_k e assim, pelo Apêndice B, o grau no interior do simplexo é constante. Como qualquer ponto fora da imagem de Λ tem necessariamente grau nulo, o interior do simplexo está contido na imagem de Λ . Por compacidade, L_k todo deve ser atingido. ■