

2

Esboço de demonstração

Denote por \mathcal{T}^k o conjunto das matrizes de Toeplitz $k \times k$, reais e simétricas. Desta forma, uma matriz de Toeplitz é determinada por sua primeira linha:

$$M_k(t_1, t_2, \dots, t_k) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_k \\ t_2 & t_1 & \dots & t_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_k & t_{k-1} & \dots & t_1 \end{pmatrix}.$$

O problema inverso de autovalores para matrizes de Toeplitz pode ser formulado em termos da sobrejetividade da função

$$\sigma : \mathcal{T}^k \rightarrow \mathbb{R}_+^k = \{(y_1, \dots, y_k) \mid y_1 \leq \dots \leq y_k\}$$

que associa a uma matriz o seu espectro ordenado $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k)$. Para investigar isso, não há perda em restringir o domínio a matrizes com traço zero, que formam um hiperplano $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{T}^k$, e considerar a função $\sigma_0 : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+^{k-1}$ que leva $M_k(0, t_2, \dots, t_k)$ para $(\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{k-1})$. Nesse caso, $\lambda_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$.

A soma dos quadrados das entradas de uma matriz T , igual a $tr(T^2)$, é também a soma dos quadrados de seus autovalores. Assim, $\sigma : \mathcal{T}^k \rightarrow \mathbb{R}_+^k$ e sua restrição $\sigma_0 : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+^{k-1}$ são contínuas em ∞ e com isso são próprias (isto é, a inversa de qualquer conjunto compacto é compacta). Em particular, o grau topológico destas funções é bem definido (Apêndice B). Essas funções têm grau constante em \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^{k-1} porque os domínios \mathcal{T}^k e \mathcal{H}_0 não têm fronteiras (de novo, consulte o Apêndice B). Por outro lado, como σ e σ_0 não são sobrejetoras quando interpretadas tendo \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^{k-1} por contra-domínios, temos que $deg(\sigma) = deg(\sigma_0) = 0$.

Em busca de uma prova via teoria de grau de que σ_0 é sobrejetora, vamos procurar restrições de σ_0 a um domínio cuja fronteira cubra a fronteira de \mathbb{R}_+^{k-1} , que são os pontos com pelos menos duas coordenadas

iguais. A pré-imagem $\sigma_0^{-1}(\partial\mathbb{R}_+^{k-1})$ é o conjunto das matrizes de espectro múltiplo em \mathcal{H}_0 . O conjunto \mathcal{U} , formado pelas matrizes de espectro simples em \mathcal{H}_0 , é um aberto denso de \mathcal{H}_0 . * Uma alternativa é restringir σ_0 a uma componente conexa de \mathcal{U} e verificar se o grau da restrição é diferente de zero. Algumas propriedades elementares de matrizes de Toeplitz que serão provadas no Capítulo 4 (proposições 4.1 e 4.4(d)) tornarão mais natural a escolha de uma ou mais componentes conexas de \mathcal{U} , mas por enquanto deixaremos alguns exemplos apontarem possibilidades.

Fazendo uso da homogeneidade de σ_0 , vamos mais uma vez normalizar seu domínio e seu contra-domínio. Denote por $\mathcal{T}_{\text{norm}}^k$ o conjunto das matrizes de Toeplitz $M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k)$. O espectro $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ associado a $M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k)$ satisfaz $\sum \lambda_i = 0$ e, como não é possível que todos os autovalores se anulem, temos $\lambda_1 < 0$. Normalizando os autovalores como $y_i = \lambda_i/(-\lambda_1)$, obtemos $-1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k = -(-1 + y_2 + \dots + y_{k-1})$. Defina o simplexo $L_k \subset \mathbb{R}^{k-2}$ pelas restrições

$$\begin{aligned} -1 &\leq x_1, \\ x_i &\leq x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq k-3, \\ x_1 + \dots + x_{k-3} + 2x_{k-2} &\leq 1. \end{aligned}$$

Finalmente, seja $\sigma_{\text{norm}}: \mathcal{T}_{\text{norm}}^k \rightarrow L_k$ a aplicação que faz corresponder a uma matriz $M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k)$ o seu *espectro normalizado* $(y_2, \dots, y_{k-1}) \in L_k$. A sobrejetividade de σ_{norm} garantirá que todo espectro é realizado por alguma matriz de Toeplitz: normalize o espectro não nulo que se pretende obter para um ponto em L_k , encontre uma pré-imagem T deste ponto e escolha α e β para que a matriz de Toeplitz $\alpha T + \beta I$ tenha o espectro desejado. Em princípio a sobrejetividade de σ_{norm} não está condicionada à possibilidade de obter matrizes de Toeplitz com qualquer espectro porque a restrição $t_2 = 1$ não traz informações sobre o espectro de matrizes com $t_2 = 0$. Essa não é a única dificuldade envolvendo a normalização escolhida: a função σ_{norm} não é sequer própria e com isso não podemos calcular o seu grau. Entretanto, dentre as componentes conexas do conjunto $\mathcal{U}_{\text{norm}}$ de matrizes de espectro simples de $\mathcal{T}_{\text{norm}}^k$, encontraremos pelo menos uma limitada. Designaremos

*Matrizes com autovalores duplos são determinadas pelos zeros do discriminante de seu polinômio característico e como tal formam um conjunto fechado. Um argumento simples de analiticidade (real) garante que a existência de uma única matriz de Toeplitz com espectro simples (por exemplo, a matriz tridiagonal $M_k(0, 1, 0, \dots, 0)$, cujo espectro é calculado no capítulo 4) implica a densidade de \mathcal{U} .

por \mathcal{R}_k uma componente limitada de $\mathcal{U}_{\text{norm}}$ e estudaremos a ação de σ_{norm} em $\overline{\mathcal{R}_k}$.

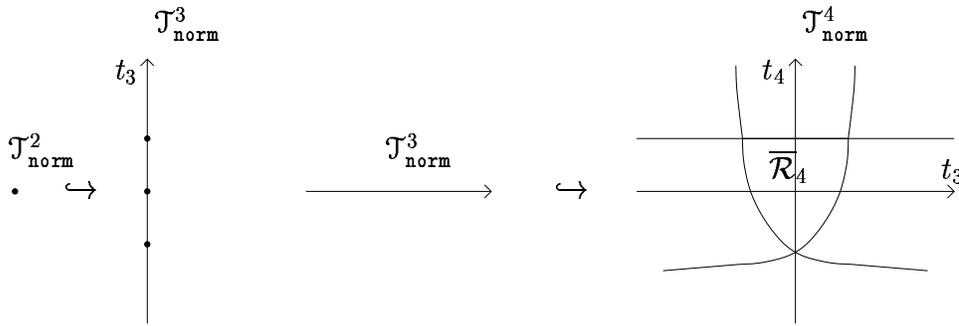


Figura 2.1: Os conjuntos $\mathcal{J}_{\text{norm}}^2$, $\mathcal{J}_{\text{norm}}^3$ e $\mathcal{J}_{\text{norm}}^4$

A figura 2.1 mostra os conjuntos $\mathcal{J}_{\text{norm}}^k$, para $k = 2, 3$ e 4 e as imersões de cada conjunto na dimensão seguinte. Obviamente, $\mathcal{J}_{\text{norm}}^2$ tem uma matriz só, $M_2(0, 1)$. Além de $\mathcal{J}_{\text{norm}}^2 \times \{0\}$ (aqui, identificamos matrizes de Toeplitz por suas primeiras linhas), há dois pontos marcados em $\mathcal{J}_{\text{norm}}^3$. Esses pontos devem ser pensados como gráficos de funções sobre $\mathcal{J}_{\text{norm}}^2$ e representam as matrizes de espectro múltiplo em $\mathcal{J}_{\text{norm}}^3$. O intervalo aberto entre esses dois pontos é a componente \mathcal{R}_3 : a função σ_{norm} de $\overline{\mathcal{R}_3}$ para L_3 é sobrejetora, o que pode ser demonstrado calculando seu grau, que é 1. Na verdade, nessa dimensão a função é um difeomorfismo, o que pode ser visto com contas simples. A figura de $\mathcal{J}_{\text{norm}}^4$ apresenta três curvas de matrizes de espectro múltiplo, que também são gráficos de funções de $\mathcal{J}_{\text{norm}}^3$ em \mathbb{R} . A região aberta limitada pelas três curvas é \mathcal{R}_4 .

Em dimensões mais altas, os conjuntos de espectro múltiplo que formam a fronteira de \mathcal{R}_k consistem de superfícies dadas por gráficos (lema 4.6) sobre a imersão $\mathcal{R}_{k-1} \times \{0\}$. A álgebra necessária usa o fato que cálculos de espectro dependem da variável t_k de forma muito simples.

A estrutura combinatória da fronteira de L_k induz um conjunto de faces no próprio \mathcal{R}_k : faces em \mathcal{R}_k são pré-imagens de faces de L_k por σ_{norm} . Em particular, faces em \mathcal{R}_k consistem de matrizes com multiplicidades espectrais iguais. Assim, multiplicidades altas correspondem a sub-faces de dimensão baixa. A possibilidade de coordenatizar as faces de \mathcal{R}_k vem da caracterização da fronteira de \mathcal{R}_k como união de gráficos sobre a imersão $\mathcal{R}_{k-1} \times \{0\}$. Mais precisamente, dado um índice j e uma matriz $M_{k-1}(0, 1, t_2, \dots, t_{k-1})$ com j -ésimo autovalor λ_j de multiplicidade n_j , é possível escolher um único t_k de modo a obter uma matriz $M_k(0, 1, t_2, \dots, t_k)$ cujo j -ésimo autovalor ainda seja λ_j , agora com multiplicidade $n_j + 1$ (Proposição 4.2). Como indicado na figura 2.2, a fronteira de \mathcal{R}_4 é formada por

três cópias de $\overline{\mathcal{R}}_3$, cuja fronteira, por sua vez, contém duas representações de $\overline{\mathcal{R}}_2$.

A escolha de \mathcal{R}_k limitada dá sentido ao grau da *aplicação espectral* $\Lambda: \overline{\mathcal{R}}_k \rightarrow L_k$, a restrição de σ_{norm} a $\overline{\mathcal{R}}_k$. Entretanto, a impossibilidade de inverter explicitamente qualquer ponto no interior de L_k dificulta o cálculo do grau. Provaremos no Capítulo 5 a existência em \mathcal{R}_k de um ponto regular de Λ que é *injetor*, ou seja, nenhum outro ponto em $\overline{\mathcal{R}}_k$ tem a mesma imagem que ele. Isso mostra que o grau de Λ é ± 1 no interior de L_k (Apêndice B).

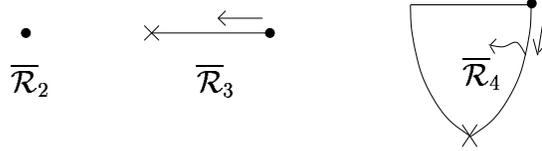


Figura 2.2: Estrutura de faces de dimensões crescentes em $\partial\mathcal{R}_k$

A existência de um ponto injetor é a parte mais técnica da demonstração. A prova baseia-se na construção sequencial de pontos injetores em faces de \mathcal{R}_k de dimensões crescentes, culminando em um ponto injetor em \mathcal{R}_k . Para dar início à cadeia de pontos injetores, mostramos no Capítulo 4, que existe um vértice injetor, a matriz $M_k(0, 1, 1, \dots, 1)$, representada pelas bolas marcadas em $\overline{\mathcal{R}}_2$, $\overline{\mathcal{R}}_3$ e $\overline{\mathcal{R}}_4$ na figura 2.2. Migraremos progressivamente deste ponto, que possui os $k - 1$ menores autovalores iguais, para matrizes com autovalores de multiplicidade cada vez menor.

Vamos acompanhar o processo em dimensão 4. Na figura 2.2, o vértice indicado corresponde à matriz $V = M_4(0, 1, 1, 1)$, com autovalores $\{-1, -1, -1, 3\}$. A face F_d da direita, seguindo a seta da figura, contém todas as matrizes de $\overline{\mathcal{R}}_4$ para as quais -1 é o menor autovalor normalizado e tem multiplicidade 2: as matrizes em \mathcal{R}_4 têm espectro simples e as matrizes nas outras faces não têm o menor autovalor normalizado duplo. Mais do que isso, Λ é injetor quando restrito a um conjunto O_1 de matrizes em F_d suficientemente próximas a V . Em resumo, matrizes de O_1 são pontos injetores de Λ . A partir de um ponto em O_1 , constrói-se, por um argumento de perturbação um caminho em \mathcal{R}_4 , como indicado pela seta na figura. Mais uma vez, matrizes desse caminho suficientemente próximas de F_d são pontos injetores. Assim, obtém-se um aberto O_2 de \mathcal{R}_4 consistindo de pontos injetores tendo O_1 em seu fecho.

Em dimensão arbitrária, o caminho que inicia no vértice $M_k(0, 1, \dots, 1)$ e percorre faces em dimensão crescente, saindo de cada uma transversalmente, até alcançar o aberto \mathcal{R}_k é matéria do Lema 5.1. Sua construção está fundamentada em dois tipos de propriedades: as re-

lações entre os autovalores da matriz e da submatriz obtida pela eliminação das últimas linha e coluna, descritas nas Proposições 4.2 e 4.4, e o efeito nos autovalores de perturbações $M_k^{(\epsilon)} = M_k(0, 1, t_3, \dots, t_k \pm \epsilon)$ na coordenada t_k (Equação 4-3). Finalmente, o lema 5.3 garante que a existência de um ponto injetor é herdada de uma face para outra de dimensão maior. O controle cuidadoso da derivada das restrições de Λ às faces é usado não apenas como ferramenta para provar que existem pontos injetores nas subfaces, mas é imprescindível para assegurar a regularidade do ponto encontrado.

Para exemplificar o procedimento de construção do caminho por faces de dimensão crescente, fixe $M_6(0, 1, t_3, \dots, t_6)$ com menor autovalor λ de multiplicidade 4: vamos perturbá-la de forma controlada para obter matrizes com o menor autovalor de multiplicidade 3. A Proposição 4.4 garante que λ é autovalor de $M_5(0, 1, t_3, \dots, t_5)$ e de $M_4(0, 1, t_3, t_4)$, com multiplicidades respectivamente 3 e 2. A equação 4-3 garante que a perturbação $M_4(0, 1, t_3, t_4 \pm \epsilon)$ separa o autovalor duplo em dois autovalores simples. Para retornar a dimensão 6, usamos as convoluções da proposição 4.4, que determinam a coordenada extrema da matriz de modo a aumentar a multiplicidade de um autovalor escolhido: $M_5(0, 1, t_3, t_4 \pm \epsilon, t_5(t_3, t_4 \pm \epsilon))$ terá seu menor autovalor com multiplicidade 2 e o menor autovalor de $M_6(0, 1, t_3, t_4 \pm \epsilon, t_5(t_3, t_4 \pm \epsilon), t_6(t_3, t_4 \pm \epsilon, t_5))$ terá multiplicidade 3.