

1

Introdução

Um problema inverso de autovalores considera a existência de matrizes que possuam ao mesmo tempo alguma estrutura específica e propriedades espectrais pré-estabelecidas. As propriedades procuradas podem ser informações parciais sobre os autovalores e autovetores. Problemas inversos de autovalores freqüentemente estão associados a técnicas de análise numérica que permitem obter aproximações para suas soluções. Esse texto gira em torno do problema inverso de autovalores para matrizes de Toeplitz. *Matrizes de Toeplitz* são matrizes constantes ao longo das diagonais $a_{i,j} = t_{i-j}$. Sua importância está ligada ao fato de serem versões discretas de convoluções.

Em 1994, H. Landau demonstrou que dados n números reais, existe uma matriz de Toeplitz real e simétrica com esse espectro ([L]). O problema foi proposto por P. Delsarte e Y. Genin em 1984 ([DG]) e desde então, diversas abordagens bastante incompletas foram propostas ([L2], [F], [T], [T2]). A demonstração de Landau não é construtiva pois o argumento baseia-se em teoria de grau e ainda não foi encontrado um algoritmo satisfatório que obtenha uma matriz de Toeplitz com espectro fixado.

Uma das primeiras aplicações de teoria de grau a problemas inversos matriciais deve-se a Alexander ([A]). No Apêndice B, apresentamos uma variante de sua demonstração de que a diagonal de uma matriz complexa fixa M pode ser alterada de maneira a obter matrizes $M + D$ com qualquer espectro. Informalmente, o problema consiste em mostrar que a função que leva uma matriz diagonal D ao espectro de $M + D$ é sobrejetora, tarefa habitual em teoria de grau. S. Friedland foi o primeiro a sugerir o uso de teoria de grau para resolver o problema inverso de autovalores para matrizes simétricas de Toeplitz ([L]). Existe uma diferença técnica significativa entre os dois problemas. No segundo exemplo, o cálculo do grau da função que interessa (que, essencialmente, associa a uma matriz de Toeplitz seu espectro ordenado) envolve cancelamentos. Um dos méritos do argumento de Landau é escolher um subdomínio apropriado do espaço de matrizes de Toeplitz para o qual a restrição da função espectro tem grau não nulo.