2
Dominância Estocástica

2.1.
Introdução

A decisão de investimento entre alternativas com risco, segundo Levy e Sarnat (1984), pode ser dividida em duas etapas: primeiro, reduz-se o número de alternativas construindo-se um conjunto eficiente de opções utilizando um critério de eficiência apropriado para uma dada classe de investidores; em seguida, o investidor faz a escolha de acordo com suas preferências pessoais.

O **critério de eficiência** é uma regra que divide um conjunto de opções em dois subconjuntos mutuamente exclusivos: um eficiente e outro ineficiente. O conjunto eficiente contém todas as alternativas aceitáveis para um grupo particular de investidores. Isto nos dá a certeza de que todos os indivíduos pertencentes a este grupo escolherão opções contidas no conjunto eficiente, uma vez que este contém as alternativas que maximizam suas utilidades esperadas.

Existem três regras de dominância estocástica:

1. A dominância estocástica de primeira ordem (DEP) seleciona os investimentos para aqueles investidores que preferem um retorno maior a um menor;
2. A dominância estocástica de segunda ordem (DES) seleciona os investimentos para aqueles investidores que, além de preferirem um retorno maior a um menor, são avessos ao risco;
3. A dominância estocástica de terceira ordem (DET) seleciona os investimentos para aqueles investidores que, além de preferirem um retorno maior a um menor e serem avessos ao risco, possuem aversão crescente ao risco.

Ou seja, a terceira regra da dominância estocástica é um conjunto eficiente da segunda regra que por, sua vez, é um conjunto eficiente da primeira.

2.2. Dominância Estocástica de Primeira Ordem (DEP)

Este critério considera o caso mais genérico: ele assume que o investidor não leva em consideração o risco, isto é, ele sempre vai preferir um investimento de retorno maior a um de retorno menor independentemente do risco corrido. Isto significa que a derivada primeira da sua função de utilidade não pode ser negativa (ou seja, que U(R) é não decrescente).

Considerando duas opções de investimento F e G representadas pelas distribuições do retorno R, a opção F dominará a opção G se e somente se:

$$E_F U(R) > E_G U(R) \tag{2.1}$$

A regra da DEP pode então ser generalizada da seguinte maneira: dadas duas probabilidades de distribuição cumulativas F e G, a opção F será preferível à opção G por DEP, independente da concavidade da função de utilidade, se $F(R) \leq G(R)$ para todo R, na condição de que para pelo menos um valor de R ($R=R_0$) a inequação $F(R_0)<G(R_0)$ se mantenha.

Isto equivale a dizer que duas distribuições cumulativas de probabilidade não se interceptam, sendo esta uma condição necessária e suficiente para a DEP. Pode-se analisar a DEP graficamente como no exemplo seguinte:

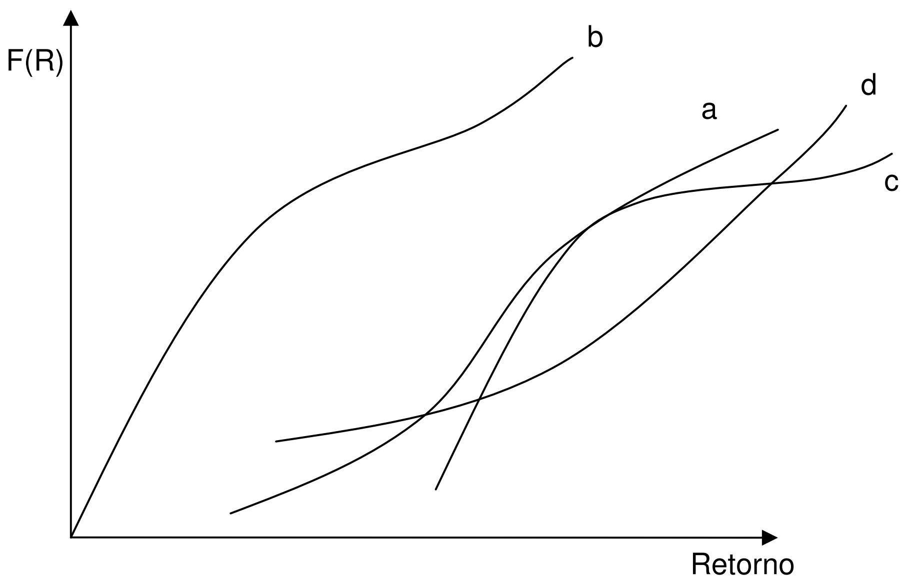

Figura 8: Dominância Estocástica de Primeira Ordem

A Figura 8 representa as distribuições cumulativas de quatro opções de investimento, a, b, c e d. É nítida a dominância de a sobre b, já que $F_a(R)$ está totalmente à direita de $F_b(R)$ (i.e., $F_a(R) \leq F_b(R)$ é sempre verdade). Da mesma forma c e d são preferíveis a b pois $F_c(R) \leq F_b(R)$ e $F_d(R) \leq F_b(R)$ para qualquer valor de R.

Apesar de possuírem uma interseção, c domina a já que não se cruzam e c está à direita de a. Já a distribuição d cruza tanto com a como c, não sendo preferível a nenhuma das duas opções.

A condição de F dominar G, ou F(R)≤G(R), é equivalente a afirmar que a probabilidade de receber um retorno menor que um valor k é sempre menor para a opção F do que para G. Uma vez que F(k)≤G(k), tem-se que:

$$\Pr_F(R \leq k) \leq \Pr_G(R \leq k) \tag{2.2}$$

onde Pr(η) indica a probabilidade de ocorrer o evento η.

2.3. Dominância Estocástica de Segunda Ordem (DES)

Como já foi dito anteriormente, a DES é um subconjunto eficiente da DEP que contém as alternativas de investimentos para investidores que preferem um retorno maior a um menor e são avessos ao risco. Isto significa que, além da derivada primeira ser positiva (U'≥0), a derivada segunda da função de utilidade dos investidores é negativa ou zero (U"≤0).

Uma condição necessária e suficiente para uma opção F ser preferível a uma segunda opção G pelo critério da DES e para todos os indivíduos avessos ao risco é a de satisfazer a seguinte relação para todo valor de R:

$$\int_{-\infty}^{R} F(t)dt \leq \int_{-\infty}^{R} G(t)dt \tag{2.3}$$

Ou equivalentemente:

$$\int_{-\infty}^{R} \left|G(t) - F(t)\right| dt \geq 0 \tag{2.4}$$

com a desigualdade estrita valendo para pelo menos um R_0.

Esta formulação da DES utilizando integral é para o caso de uma distribuição contínua. No caso discreto a integral é substituída por uma soma.

Na equação 2.3, a integral representa a área sob a distribuição cumulativa entre -∞ e um retorno R. A integral da diferença G-F da equação 2.4 representa a área entre as distribuições G e F entre -∞ e R. A figura seguinte representa graficamente G e F (um sinal + representa os intervalos em que F(R)<G(R) e um sinal – o intervalo em que F(R)>G(R)).

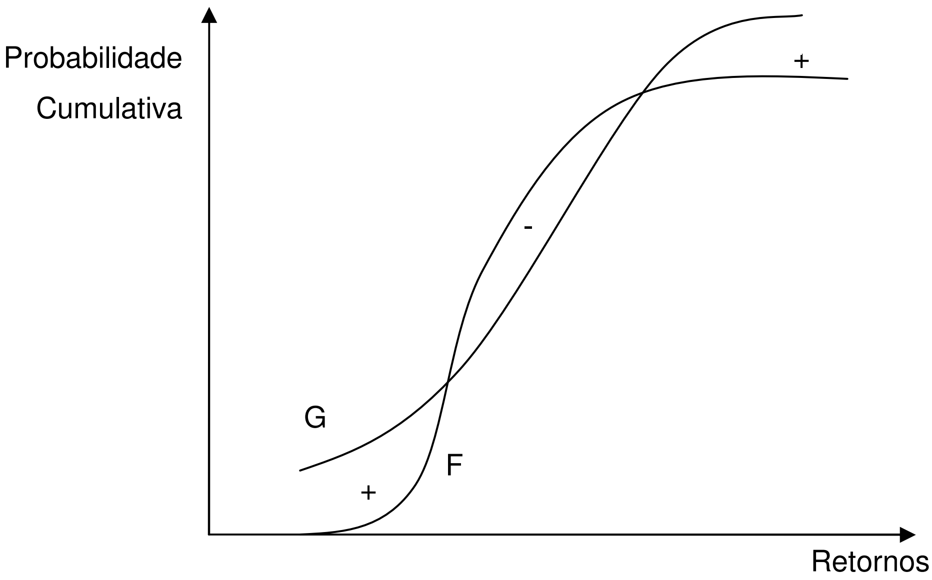

Figura 9: Dominância Estocástica de Segunda Ordem

Uma vez que para todo retorno possível a área cumulativa entre as duas distribuições é positiva, o critério de DES é satisfeito e F domina G para os indivíduos avessos ao risco.

2.4. Dominância Estocástica de Terceira Ordem (DET)

Este critério de dominância assume que além de ter utilidade crescente (U'≥0) e ser avesso ao risco (U"≤0), o investidor possui aversão decrescente ao risco (U"'≥0).

Para apresentar a DET de uma maneira simples, define-se que:

$$F_1(R) = \int_{-\infty}^{R} F(t)dt \tag{2.5}$$

e

$$G_1(R) = \int_{-\infty}^{R} G(t)dt \tag{2.6}$$

Da mesma maneira;

$$F_2(R) = \int_{-\infty}^{R} F_1(t)dt \tag{2.7}$$

e

$$G_2(R) = \int_{-\infty}^{R} G_1(t)dt \tag{2.8}$$

Dadas duas opções F e G, F será preferível a G por DET para todos os indivíduos avessos ao risco e com aversão absoluta ao risco decrescente se e somente se $F_2(R) \leq G_2(R)$ para todos os valores de R (com uma inequação estrita valendo para pelo menos um R) e também $E_F(R) \geq E_G(R)$.

2.5. Um Algoritmo Para os Testes de Dominância Estocástica

O algoritmo a ser descrito é baseado em Levy e Kroll[2] e apresentado em Levy e Sarnat (1984). Inicia-se organizando as taxas de retorno das séries temporais, supostas equiprováveis, em uma matriz onde cada linha é uma observação e cada coluna um fundo.

Cada coluna é então ordenada da menor para a maior taxa de retorno. A estas observações ordenadas dá-se o nome de **quantis**, sendo $x_{t,i}$ o quantil t do fundo i.

[2] Levy, H., Kroll, Y., *Efficiency Analysis with Borrowing and Lending: Criteria and Their Effectiveness*. Review of Economics and Statistics, fev/1979

2.5.1. Teste Para DEP

Basta comparar os quantis. O fundo i dominará o fundo j se e somente se:

$x_{t,\,i} \geq x_{t,\,j}$ para todo $t = 1, 2, \ldots n$

2.5.2. Teste Para DES

O teste de DES se aplica somente aos fundos selecionados pelo teste de DEP. A partir da matriz de quantis do teste de DEP monta-se uma nova matriz x' tal que para cada fundo i:

$x'_{1,\,i} = x_{1,i}$

$x'_{2,\,i} = x_{1,\,i} + x_{2,\,i}$

$x'_{3,\,i} = x_{1,\,i} + x_{2,\,i} + x_{3,\,i}$

.

.

.

$x'_{n\,i} = x_{1,\,i} + x_{2,\,I} + \ldots + x_{n,\,i}$

O fundo i dominará o fundo j se e somente se:

$x'_{t,\,i} \geq x'_{t,\,j}$ para todo $t = 1, 2, \ldots n$

2.5.3. Teste Para DET

O teste de DET se aplica somente aos fundos selecionados pelo teste de DES. A partir da matriz x' do teste de DES monta-se uma nova matriz x" tal que para cada fundo i:

$x''_{1,\,i} = x'_{1,\,i}/2$

$x''_{2\,,i} = x'_{1,\,i} + x'_{2,\,i}/2$

$x''_{3\,,i} = x'_{1,\,i} + x'_{2,\,i} + x'_{3,\,i}/2$

.

.

.

$x''_{n,i} = x'_{1,i} + x'_{2,i} + \ldots + x'_{n-1,i} + x'_{n,i}/2$

O fundo i dominará o fundo j se e somente se:

$x''_{t,i} \geq x''_{t,j}$ para todo $t = 1, 2, \ldots n$