



**Ewerton Alves Bezerra**

**Estabilidade e vibrações de cascas  
cilíndricas sanduíche com núcleo de espuma  
metálica**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
para obtenção do grau de Mestre pelo Programa  
de Pós-graduação em Engenharia Civil do  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental  
da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro  
Abril de 2019



**Ewerton Alves Bezerra**

**Estabilidade e vibrações de cascas  
cilíndricas sanduíche com núcleo de  
espuma metálica**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre pelo Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-  
Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora  
abaixo.

**Prof. Dr. Paulo Batista Gonçalves**

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC/Rio

**Prof. Dr. Raul Rosas e Silva**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC/Rio

**Prof. Dr. Diego Orlando**

Departamento de Mecânica e Energia (FAT) – UERJ

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Ewerton Alves Bezerra**

É tecnólogo em Construção de Edifícios pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, IFRN (2011). Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN (2016). Ingressou em Março de 2017 no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), na área de Estruturas. Já desenvolveu trabalhos na área de dimensionamento de estruturas de concreto e, recentemente, na área de dinâmica e estabilidade de estruturas, contemplando os temas de cascas cilíndricas sanduíche e materiais com gradação funcional.

### Ficha Catalográfica

Bezerra, Ewerton Alves

Estabilidade e vibrações de cascas cilíndricas sanduíche com núcleo de espuma metálica / Ewerton Alves Bezerra; orientador: Paulo Batista Gonçalves. – Rio de Janeiro PUC, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2019.

v., 149 f.; il. color. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2019.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Cascas cilíndricas. 3. Espuma metálica. 4. Casca com gradação funcional. 5. Casca sanduíche. 6. Estabilidade. 7. Vibrações. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

Dedico, com todo amor e carinho, à minha  
linda, única e querida irmã Érika Dalila (*in  
memoriam*).

## Agradecimentos

Imensa e intensamente a Deus pelo cuidado, proteção, provisão e bondade por me conceder esta maravilhosa oportunidade;

Aos meus amados pais, Raquel e Edmilson, aos meus queridos avós Isis, Ivanildo e Marluce, a minha namorada Lídia e a toda minha família pelo apoio e sustento incondicional;

A Segunda Igreja Batista em Inhaúma (SIBI), na figura de sua membresia, pelas orações, hospitalidade, amor e carinho, em especial ao Pr. César e família;

Ao professor Paulo pela confiança, paciência, ajuda, empatia e generosidade na condução desta dissertação;

Aos amigos, Manuel e Daniel, que PUC-Rio gentilmente me proporcionou, e da SIBI – eterna gratidão!

Aos professores que participaram da comissão examinadora;

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Resumo

Bezerra, Ewerton Alves; Gonçalves, Paulo Batista. **Estabilidade e vibrações de cascas cilíndricas sanduíche com núcleo de espuma metálica**. Rio de Janeiro, 2019. 128p. Dissertação de mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As cascas cilíndricas possuem aplicações em diversas áreas da engenharia. Nas últimas décadas tem se observado o surgimento de novos materiais e suas técnicas de produção, levando a novas aplicações em estruturas de cascas. Dentre estas, as cascas sanduíche e cascas com gradação funcional têm levado, em muitas aplicações, a um melhor desempenho estrutural associado a uma redução de peso. Este trabalho tem como objetivo estudar as frequências naturais e as cargas críticas de cascas sanduíche com faces de metal e núcleo de espuma metálica e cascas com gradação funcional, onde as características da espuma metálica variam ao longo da espessura levando a uma estrutura similar à da casca sanduíche. Esses resultados são comparados com aqueles de cascas isotrópicas homogêneas. Para tanto, é utilizada a teoria linear de Donnell, que é uma das mais empregadas para análise de cascas. Primeiramente, derivam-se as equações de movimento assim como as equações de equilíbrio crítico. Utilizando as soluções analíticas para uma casca simplesmente apoiada, obtêm-se as matrizes de massa, de rigidez e de rigidez geométrica, possibilitando o cálculo das frequências naturais e cargas críticas da casca sob compressão axial e pressão lateral. Através de uma análise paramétrica, os resultados mostram a influência da geometria da casca, da variação do material ao longo da espessura, do cisalhamento no núcleo e dos termos de inércia nas cargas críticas e frequências naturais. Os resultados também ressaltam a influência do núcleo de espuma metálica no aumento da capacidade de carga e redução de peso das cascas sanduíche e com gradação funcional.

## Palavras-chave

Cascas cilíndricas; espuma metálica; casca com gradação funcional; casca sanduíche; estabilidade; vibrações.

## Abstract

Bezerra, Ewerton Alves; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor). **Stability and vibrations of sandwich cylindrical shells with metal foam core**. Rio de Janeiro, 2019. 128p. Dissertação de mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Cylindrical shells are used in several areas of engineering fields. In the last decades has been observed the emergence of new materials and their production techniques, leading to new applications in shell structures. Among these, the sandwich shells and shell with functionally graded materials have led, in many applications, to a better structural performance associated to a reduction of weight. This work aims to study the natural frequencies and the critical loads of sandwich shells with metal faces and metal foam core and functionally graded shells, where the characteristics of the metallic foam vary throughout the thickness leading to a structure similar to that of the sandwich shell. These results are compared with those of homogeneous isotropic shells. For this, the linear theory of Donnell, which is one of the most used for shell analysis, is here used. First, the equations of motion as well as the critical equilibrium equations are derived. Using the analytical solutions for a simply supported shell, the mass, stiffness and geometric stiffness matrices are obtained, allowing the calculation of the natural frequencies and critical loads of the shell under axial compression and lateral pressure. Through a parametric analysis, the results show the influence of the shell geometry, material variation along the shell thickness, shear deformation of the core and the inertia terms on the critical loads and natural frequencies. The results also highlight the influence of the metallic foam core in increasing the load bearing capacity and reducing the weight of the sandwich and functionally graded shells.

## Keywords

Cylindrical shells; metallic foam; bark with functional gradation; sandwich shell; stability; vibrations.

# Sumário

1. Introdução	1
1.1. Espuma metálica	2
1.2. Placas e cascas sanduíche com espuma metálica	6
1.3. Teorias de placas e cascas sanduíche e de material com gradação funcional	10
1.4. Objetivos	14
1.4.1. Geral	14
1.4.2. Objetivos Específicos	15
1.5. Descrição dos Capítulos	15
2. Teorias de Cascas	17
2.1. Introdução	17
2.2. Campo de deslocamentos	18
2.3. Relações cinemáticas	19
2.4. Lei constitutiva	20
2.5. Relações tensão-deformação	20
2.6. Esforços internos	21
2.7. Energia de deformação	22
2.8. Energia cinética	23
2.9. Equações de Euler-Lagrange	24
2.10. Equações de movimento	25
2.11. Equações de equilíbrio	25
2.12. Solução para uma Casca Simplesmente Apoiada	26
2.13. Frequências Naturais	27
2.13.1. Matriz de Rigidez	28
2.13.2. Matriz de Massa	29
2.14. Cargas Críticas	30
2.14.1. Carga Axial	35
2.14.2. Pressão Lateral	36
3. Cascas cilíndricas sanduíche com gradação funcional	38
3.1. Introdução	38



3.2. Campo de deslocamentos	39
3.3. Relações cinemáticas	39
3.4. Lei constitutiva	39
3.5. Relação tensão-deformação	41
3.6. Esforços Internos	41
3.7. Energia de deformação	42
3.8. Energia cinética	43
3.9. Equações de Euler-Lagrange	43
3.10. Frequências Naturais	44
3.10.1. Matriz de Rigidez	44
3.10.2. Matriz de Massa	46
3.11. Cargas Críticas	46
4. Cascas cilíndricas sanduíche com cisalhamento no núcleo	47
4.1. Introdução	47
4.2. Campo de deslocamentos	49
4.3. Relações cinemáticas	49
4.4. Lei constitutiva	50
4.5. Relação tensão-deformação	51
4.6. Esforços Internos	51
4.7. Energia de deformação	54
4.8. Energia cinética	54
4.9. Equações de Euler-Lagrange	55
4.10. Equações de movimento	55
4.11. Equações de equilíbrio	56
4.12. Vibração Livre	56
4.12.1. Matriz de Rigidez	56
4.12.2. Matriz de Massa	57
4.13. Frequências Naturais	57
4.14. Cargas Críticas	57
5. Estudo das Frequências Naturais	58
5.1. Introdução	58
5.2. Variação da Matriz de Massa	67
5.3. Influência da geometria	70
5.4. Cascas cilíndricas de mesma massa	72
5.5. Variação da espessura para cascas com a mesma frequência natural	78

6. Estudo das Cargas Críticas	84
6.1. Introdução	84
6.2. Influência da Geometria	90
6.3. Cargas críticas para cascas com mesma massa	93
6.4. Cascas de mesma carga crítica	101
6.5. Cascas sob carga axial e pressão lateral	106
7. Conclusões e Sugestões	107
7.1. Frequências naturais	107
7.2. Cargas críticas	108
8. Referências	110
APÊNDICE A	117
APÊNDICE B	127
APÊNDICE C	128

## Lista de Figuras

Figura 1.1 - Espuma de alumínio ALPORAS	2
Figura 1.2 – Métodos produtivos de espumas metálicas – Por derretimento	4
Figura 1.3 – Métodos produtivos de espumas metálicas – Por pó metálico	5
Figura 1.4 – Placa sanduíche com espuma metálica em seu núcleo	6
Figura 1.5 – Ilustração de seção transversal de elemento com gradação funcional	14
Figura 2.1 – Sistema de coordenadas, propriedades geométricas e campo de deslocamentos	17
Figura 2.2 – Representação das rotações $\beta_x$ e $\beta_\theta$ em uma seção da casca	19
Figura 2.3 – Esforços internos na casca cilíndrica	22
Figura 2.4 – Modos de deformação circunferencial e longitudinal	27
Figura 2.5 – Esquema de carregamentos axial e de pressão lateral na casca cilíndrica	34
Figura 3.1 – Gradação de material constituinte da seção transversal da casca	39
Figura 3.2 – Gráfico com a função de variação dos parâmetros físicos ao longo da casca com gradação funcional	40
Figura 4.1 – Seção transversal da casca com as três camadas	48
Figura 4.2 – Deformação da seção transversal da casca sanduíche	48
Figura 4.3 – Variação dos parâmetros físicos ao longo da seção transversal da casca sanduíche	50

Figura 5.1 – Variação dos parâmetros físicos ao longo da casca com gradação funcional	60
Figura 5.2 – 1ª Frequência Natural – CH – 3 Variáveis	62
Figura 5.3 – 2ª Frequência Natural – CH – 3 Variáveis	62
Figura 5.4 – 3ª Frequência Natural – CH – 3 Variáveis	62
Figura 5.5 – 1ª Frequência Natural – CGF – 3 Variáveis – $S=1.0$	63
Figura 5.6 – 2ª Frequência Natural – CGF – 3 Variáveis – $S=1.0$	63
Figura 5.7 – 3ª Frequência Natural – CGF – 3 Variáveis – $S=1.0$	63
Figura 5.8 – 1ª Frequência Natural – CSCN	64
Figura 5.9 – 2ª Frequência Natural – CSCN	64
Figura 5.10 – 3ª Frequência Natural – CSCN	64
Figura 5.11 – Variação da energia de deformação na casca cilíndrica com o aumento do número de ondas circunferenciais	65
Figura 5.12 – Estudo da influência de $S$ na frequência natural mínima (CGF)	66
Figura 5.13 – Influência da teoria de cascas utilizada nas frequências naturais para $m = 1$	66
Figura 5.14 – 1ª Frequência Natural ( $m=1$ ) – CH e CGF (3 Variáveis, $S=1.0$ ) – Variação dos termos da energia cinética	69
Figura 5.15 – 1ª Frequência Natural ( $m=1$ ) – CH e CGF (5 Variáveis, $S=1.0$ ) – Variação dos termos da energia cinética	69
Figura 5.16 – 1ª Frequência Natural ( $m=1$ ) – CSCN – Variação dos termos da energia cinética	69
Figura 5.17 – Frequências naturais com variação das relações geométricas da casca isotrópica ( $m=1$ ) – CH (5 Variáveis). Valores de $n$ indicados	71
Figura 5.18 – Frequências naturais com variação das relações geométricas ( $m=1$ ) – CGF (5 Variáveis, $S=1.0$ ). Valores de $n$ indicados	71
Figura 5.19 – Frequências naturais com variação das relações geométricas ( $m=1$ ) – CSCN. Valores de $n$ indicados	71
Figura 5.20 – Influência dos parâmetros geométricos $R/h$ e $L/R$ na frequência natural mínima obtida pelas três teorias	72

Figura 5.21 – Comparação da distribuição dos materiais ao longo da espessura – CGF e CSCN ( $S=S^*=0.1$ )	75
Figura 5.22 – Comparação da distribuição dos materiais ao longo da espessura – CGF e CSCN ( $S=S^*=1.0$ )	75
Figura 5.23 – Comparação da distribuição dos materiais ao longo da espessura – CGF e CSCN ( $S=S^*=5.0$ )	75
Figura 5.24 – Comparativo de cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – 3 Variáveis – 1ª Frequência Natural	76
Figura 5.25 – Comparativo de cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – 5 Variáveis – 1ª Frequência Natural	76
Figura 5.26 – Comparativo de cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CSCN – 1ª Frequência Natural. (*) S equivalente a	76
Figura 5.27 – Comparação das frequências naturais para cascas de mesma massa e $m=1$ usando as três teorias de casca	77
Figura 6.1 – Cargas críticas axiais – CH – 3 e 5 variáveis ( $m$ de 1 a 10)	86
Figura 6.2 – Cargas críticas axiais – CGF – 5 variáveis. $S=1.0$	86
Figura 6.3 – Cargas críticas axiais – CSCN	86
Figura 6.4 – Estudo da influência de $S$ na carga axial crítica (CGF)	88
Figura 6.5 – Estudo da influência de $S$ na pressão lateral crítica (CGF)	88
Figura 6.6 – Pressões laterais críticas – CH – 3 variáveis	89
Figura 6.7 – Pressões laterais críticas – CGF – 3 variáveis. $S=1.0$	89
Figura 6.8 – Pressões laterais críticas – CSCN	89
Figura 6.9 – Pressões laterais críticas com variação das relações geométricas da casca isotrópica ( $m=1$ ) – CH (5 Variáveis). Valores de $n$ indicados	92
Figura 6.10 – Pressões laterais críticas com variação das relações geométricas da casca para $S=1.0$ ( $m=1$ ) – CFG (5 Variáveis). Valores de $n$ indicados	92
Figura 6.11 – Pressões laterais críticas com variação das relações geométricas da casca sanduíche ( $m=1$ ) – CSCN. Valores de $n$ indicados	92

Figura 6.12 – Comparativo entre teorias para variação das relações geométricas – Pressão Lateral Crítica	93
Figura 6.13 – Carga Axial em cascas de mesma massa (valores de $m$ indicados) – CH e CGF (3 Variáveis)	95
Figura 6.14 – Carga Axial em cascas de mesma massa para $S=1.0$ (valores de $m$ indicados) – CH e CGF (5 Variáveis)	95
Figura 6.15 – Carga Axial em cascas de mesma massa (valores de $m$ indicados) – CH e CSCN (5 Variáveis)	95
Figura 6.16 – Carga Axial em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CGF (3 Variáveis)	96
Figura 6.17 – Carga Axial em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CGF (5 Variáveis)	96
Figura 6.18 – Carga Axial em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CSCN (5 Variáveis)	96
Figura 6.19 – Pressão lateral em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CGF (3 Variáveis)	97
Figura 6.20 – Pressão lateral em cascas de mesma massa – CH e CGF (5 Variáveis)	97
Figura 6.21 – Pressão lateral em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CSCN (5 Variáveis)	97
Figura 6.22 – Estudo paramétrico de cascas sob carga axial e pressão lateral	106

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Propriedades físicas de espumas metálicas	59
Tabela 5.2 – Propriedades físicas dos materiais das cascas cilíndricas	59
Tabela 5.3 – Propriedades geométricas das cascas utilizadas – Exemplo	61
Tabela 5.4 – Influência dos termos de inércia nas frequências naturais mínimas ( $m=1$ )	68
Tabela 5.5 – Relações geométricas utilizadas na análise paramétrica	70
Tabela 5.6 – Espessuras (mm) de cascas com mesma massa	74
Tabela 5.7 – Frequências naturais de cascas com mesma massa em Hz em diferentes teorias. CGF e CSCN com $S=S^*=1.0$ . (*) menor frequência	78
Tabela 5.8 – Reduções das espessuras (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca (CH) para relação $L/R=4$ . Cascas de mesma frequência natural	79
Tabela 5.9 – Reduções das espessuras (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca (CH) para relação $L/R=2$ . Cascas de mesma frequência natural	79
Tabela 5.10 – Reduções das espessuras (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca (CH) para relação $L/R=1$ . Cascas de mesma frequência natural	79
Tabela 5.11 – Reduções no peso (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação $L/R=4$	80
Tabela 5.12 – Reduções no peso (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação $L/R=2$	80

Tabela 5.13 – Reduções no peso (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH, para a relação $L/R=1$	80
Tabela 5.14 – Massa por unidade de área ( $\text{kg/m}^2$ ) – CH x CGF	81
Tabela 5.15 – Reduções no peso (em %) das cascas na CSCN em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação $L/R=4$	81
Tabela 5.16 – Reduções no peso (em %) das cascas na CSCN em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação $L/R=2$	82
Tabela 5.17 – Reduções no peso (em %) das cascas na CSCN em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação $L/R=1$	82
Tabela 5.18 – Massa específica por unidade de área ( $\text{kg/m}^2$ ) – CH x CSCN. (*) Os valores de $t_c$ e $t_f$ são os equivalentes aos respectivos S da CGF	83
 Tabela 6.1 – Propriedades físicas dos materiais das cascas cilíndricas	 84
Tabela 6.2 – Propriedades geométricas das cascas	85
Tabela 6.3 – Cargas axiais críticas	87
Tabela 6.4 – Pressão lateral crítica	87
Tabela 6.5 – Relações geométricas: cascas cilíndricas	90
Tabela 6.6 – Espessuras (mm) de cascas com mesma massa	94
Tabela 6.7 – Aumento da carga crítica axial em função de S (m qualquer) – CH e CGF três variáveis	98
Tabela 6.8 – Aumento da carga crítica axial em função de S (m qualquer) – CH e CGF cinco variáveis	98
Tabela 6.9 – Aumento da carga crítica axial em função de S (m qualquer) – CH e CSCN	98
Tabela 6.10 – Aumento da carga crítica axial em função de S ( $m=1$ ) – CH e CGF 3 variáveis	99
Tabela 6.11 – Aumento da carga crítica axial em função de S ( $m=1$ ) – CH e CGF	99



Tabela 6.12 – Aumento da carga crítica axial em função de $S$ ( $m=1$ ) – CH e CSCN	100
Tabela 6.13 – Aumento da carga crítica da casca sob pressão lateral externa em função de $S$ – CH e CGF três variáveis	100
Tabela 6.14 – Aumento da carga crítica da casca sob pressão lateral externa em função de $S$ – CH e CGF cinco variáveis	100
Tabela 6.15 – Aumento da carga crítica da casca sob pressão lateral externa em função de $S$ – CH e CSCN	101
Tabela 6.16 – Espessuras (mm) para uma mesma carga axial crítica – CH x CGF. Essas espessuras também são utilizadas na CSCN.	102
Tabela 6.17 – Redução em % da massa por unidade de área ( $\text{kg/m}^2$ ) – CH x CGF	103
Tabela 6.18 – Redução em % da massa por unidade de área ( $\text{kg/m}^2$ ) – CH x CSCN – Carga axial crítica. (*) $S$ equivalente para espessuras $t_c$ e $t_r$	103
Tabela 6.19 – Espessuras (mm) para uma mesma pressão lateral crítica – CH x CGF	104
Tabela 6.20 – Redução em % da massa por unidade de área ( $\text{kg/m}^2$ ) – CH x CGF – Pressão lateral crítica	105
Tabela 6.21 – Redução em % da massa por unidade de área ( $\text{kg/m}^2$ ) – CH x CSCN – Pressão lateral crítica	105
Tabela 6.22 – Estudo paramétrico de cascas sob carga axial e pressão lateral	106

## Lista de Símbolos

$U$	campo de deslocamentos ao longo da espessura na direção $x$
$V$	campo de deslocamentos ao longo da espessura na direção $\theta$
$W$	campo de deslocamentos ao longo da espessura na direção $z$
$u$	campo de deslocamento da superfície média (direção $x$ )
$v$	campo de deslocamento da superfície média (direção $\theta$ )
$w$	campo de deslocamento da superfície média (direção $z$ )
$P$	carga de compressão uniforme
$p$	pressão lateral uniforme
$\nu$	coeficiente de Poisson
$L$	comprimento da casca
$x$	coordenada longitudinal
$\theta$	coordenada angular
$z$	coordenada transversal
$\epsilon$	deformação específica
$\gamma$	distorção específica
$U_d$	energia interna de deformação
$T$	energia cinética
$\Pi$	energia potencial total
$h$	espessura da casca
$N$	força normal
$Q$	força cisalhante transversal
$\omega$	frequência de vibração angular
$f$	frequência natural
$F$	funcional
$\mathcal{L}$	Lagrangiano
$\rho$	massa específica
$[K]$	matriz de rigidez
$[M]$	matriz de massa
$[K_g]$	matriz de rigidez geométrica

E	módulo de Young
M	momento
m	número de semi ondas longitudinais
n	número de ondas circunferenciais
$\nabla^4$	operador bi harmônico
V	potencial das cargas externas conservativas
R	raio médio da casca
D	rigidez à flexão
$\beta_x$	rotação da seção transversal em relação ao eixo x
$\beta_\theta$	rotação da seção transversal em relação ao eixo $\theta$
t	tempo
$\sigma$	tensão normal
$\tau$	tensão cisalhante

## Lista de abreviaturas

3 Var	três variáveis
5 Var	cinco variáveis
CGF	casca sanduíche com gradação funcional
CSCN	casca sanduíche com cisalhamento no núcleo
CH	casca homogênea

*“Quando o Senhor trouxe os cativos de volta a Sião, foi como um sonho. Então a nossa boca se encheu de riso, e a nossa língua de cânticos de alegria. Até nas outras nações se dizia: ‘O Senhor fez coisas grandiosas por este povo’. Sim, grandes coisas fez o Senhor por nós, por isso estamos alegres. Senhor restaura-nos, assim como enches os leitos dos ribeiros no deserto. Aqueles que semeiam com lágrimas com cânticos de alegria colherão. Aquele que sai chorando enquanto lança a semente, sem dúvida, voltará consigo trazendo seus frutos”.*

# 1. Introdução

Farshad (1993) define cascas como estruturas espaciais de superfície curva que suportam cargas externas aplicadas. Estruturas de cascas têm sido usadas desde a antiguidade em vários campos da engenharia e arquitetura. Reservatórios de água e de grãos (silos), abóbadas e coberturas de diversas formas em edificações, vasos de pressões em instalações industriais e nucleares, torres de refrigeração, foguetes e tubulações, entre outras estruturas. Também são encontradas comumente na natureza, se constituindo a forma ótima para diversos tipos de carregamento.

Recentemente, com o surgimento de vários materiais reforçados por fibras, laminados e compósitos, o domínio de aplicação e as faixas de eficiência estrutural têm aumentando continuamente (Farshad; 1993). Hosseni-Hashemi et al. (2012), destacam os painéis compósitos por apresentarem grande potencial de aplicações em diversas áreas da engenharia mecânica, aeroespacial, eletrônica, marinha, nuclear e estrutural.

Uma casca sanduíche, ou seja, um elemento compósito, consiste basicamente de duas faces que são separadas por um núcleo. As faces usualmente suportam as cargas primárias no plano (tração, compressão e cisalhamento no plano), enquanto o núcleo é responsável por resistir a cargas cisalhantes transversais (Vinson; 1993). As faces são, em geral, de um mesmo material e o núcleo de um material leve que pode ser uma espuma ou um sólido, em forma de favo de mel, em rede ou em treliça. Este trabalho aborda cascas sanduíche com um núcleo com espuma metálica.

A revisão da literatura apresentada a seguir aborda as espumas metálicas, placas e cascas sanduíche com núcleo de espuma metálica e, por fim, teorias de placas e cascas e de materiais com graduação funcional.

## 1.1. Espuma metálica

Em décadas recentes observa-se um crescente número de pesquisas sobre novos materiais estruturais. Dentre estes, aqui se destacam as espumas metálicas.

Ashby et al. (2000) caracterizam as espumas metálicas como uma nova classe de material de baixa densidade e com inúmeras particularidades no que se refere às propriedades físicas, mecânicas, térmicas, elétricas e acústicas. Elas substituem as espumas poliméricas em situações em que a multifuncionalidade é requerida (Harte et al.; 2000). Elas oferecem um grande potencial para estruturas que necessitam de baixo peso e boa absorção de energia, além de poderem ser recicladas e não serem tóxicas ou inflamáveis como as espumas poliméricas. As técnicas para a produção deste material ainda estão em desenvolvimento, e, em face disso, tem-se uma grande variabilidade em suas propriedades.



Figura 1.1 - Espuma de alumínio ALPORAS

Fonte: Página da Raumprobe. Disponível em:

<<https://www.raumprobe.de/material/gleich-gmbh-metallplatten-service/alporas-aluminiumschaum/datenblatt/>>

Uma revisão feita por Davies e Zhen (1983) aborda os principais aspectos referentes à produção, propriedades e aplicações da espuma metálica, além de destacar o rápido desenvolvimento deste produto ocorrido entre as décadas de 60 e 70. Foram elencados, até então, quatro métodos para produção da espuma: a fundição, a deposição metálica, a metalurgia do pó e a deposição por pulverização, com a fundição se subdividindo em outros quatro tipos – espuma por derretimento, fundição em torno de grânulos, processo de *investment casting* e incorporação de esferas ocas no material fundido. Na metalurgia do pó, também se destacam quatro

processos – formação de espuma a partir de pasta, aglomeração de pó solto, metalurgia de fibra e esponja sintetizada a partir de pasta saturada. As suas propriedades dependem muito das características dos poros distribuídos na espuma. Essas características incluem o tipo, a forma, o tamanho, o número (porcentagem volumétrica), a uniformidade e área de superfície desses poros. Espumas produzidas por diferentes processos de fabricação resultam assim em uma diversidade das propriedades deste tipo de material. Ao se concentrar nas propriedades mecânicas, a densidade é um item extremamente importante, além, claro, do tamanho, estrutura e distribuição dos poros. Como regra geral há uma relação bem próxima entre densidade e as propriedades mecânicas como, por exemplo, resistência a compressão, embora essa propriedade decresça mais rapidamente que a densidade. Por fim, os autores destacam algumas aplicações das espumas tais como estruturas que necessitem de baixo peso, estruturas que resistam a altas temperaturas, elementos sanduíche onde as espumas formam a camada do núcleo, e tubulações que conduzam fluidos.

A deformação de espumas metálicas de alumínio e zinco foi investigada por Banhart e Baumeister (1998) através de ensaios de compressão uniaxiais para se avaliar as possíveis oportunidades de emprego de tal material. Os testes resultaram em um diagrama tensão-deformação dependente da densidade da espuma, da orientação das camadas externas em relação à aplicação da carga e da direção predominante das células da espuma.

Körner e Singer (2000) fazem um resumo de processos produtivos de quatro espumas comerciais disponíveis usando pelo menos quatro dos métodos de produção descritos por Davies e Zhen (1983): CYMAT/HYDRO, ALPORAS, DUOCEL e ALULIGHT/FOAMINAL. Acrescentam ainda que, independentemente do tipo de processo, são apenas duas estratégias para a fabricação da espuma: auto-formação e pré-design. Novamente é destacado que as propriedades mecânicas das espumas estão intimamente ligadas à morfologia das células e a sua densidade relativa.



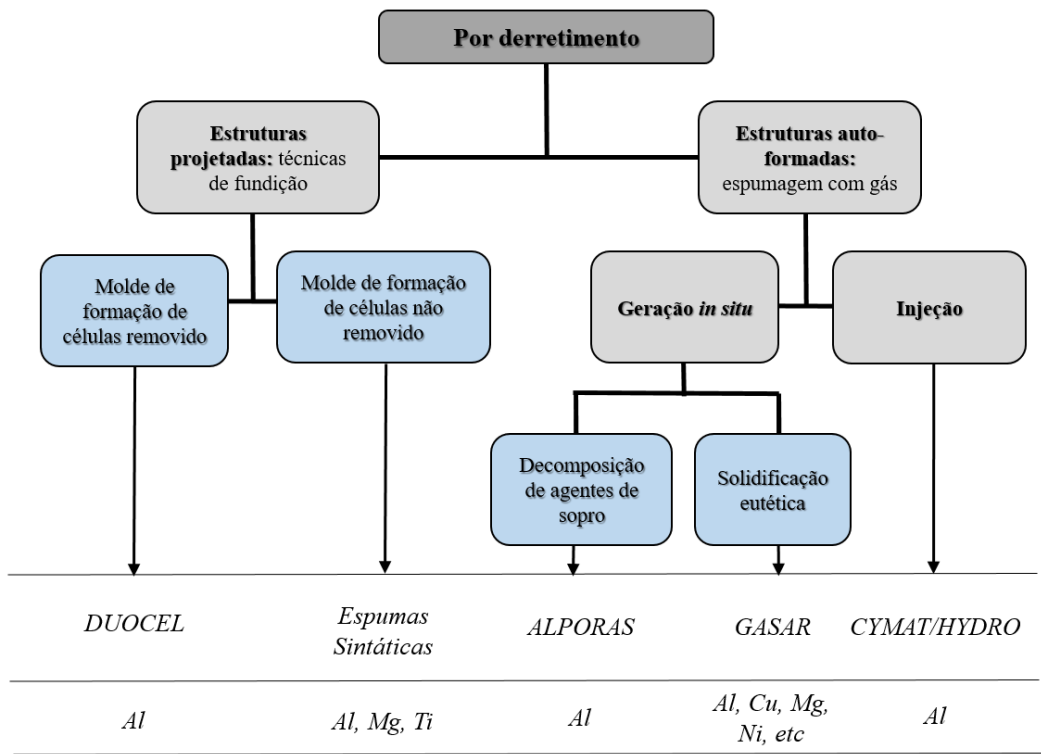


Figura 1.2 – Métodos produtivos de espumas metálicas – Por derretimento  
Fonte: Körner e Singer (2000), traduzido e adaptado.

O processo de produção, caracterização de propriedades e aplicações da espuma de alumínio denominada ALPORAS (Figura 1.1) são descritos por Miyoshi et al. (2000). ALPORAS é fabricada por um processo de fundição em lote. A espuma de alumínio é feita a partir do alumínio fundido pela estabilização das bolhas no derretimento. Para estabilizar as bolhas é necessário aumentar a viscosidade e impedir que as bolhas flutuem. Usa-se 1,5% (em peso) de cálcio (Ca) como agente espumante (aumenta o volume). O cálcio (Ca) é misturado com o alumínio fundido a 680°C por cerca de 6 minutos em temperatura ambiente. A espuma também é caracterizada por suas propriedades tais como faixa de tamanho médio das células, a densidade aparente e sua variação ao longo de uma dada direção, a energia de absorção por unidade de volume e curva de resistência à tração em função da porosidade. As aplicações se referem usualmente ao uso do material como absorvedor de energia.

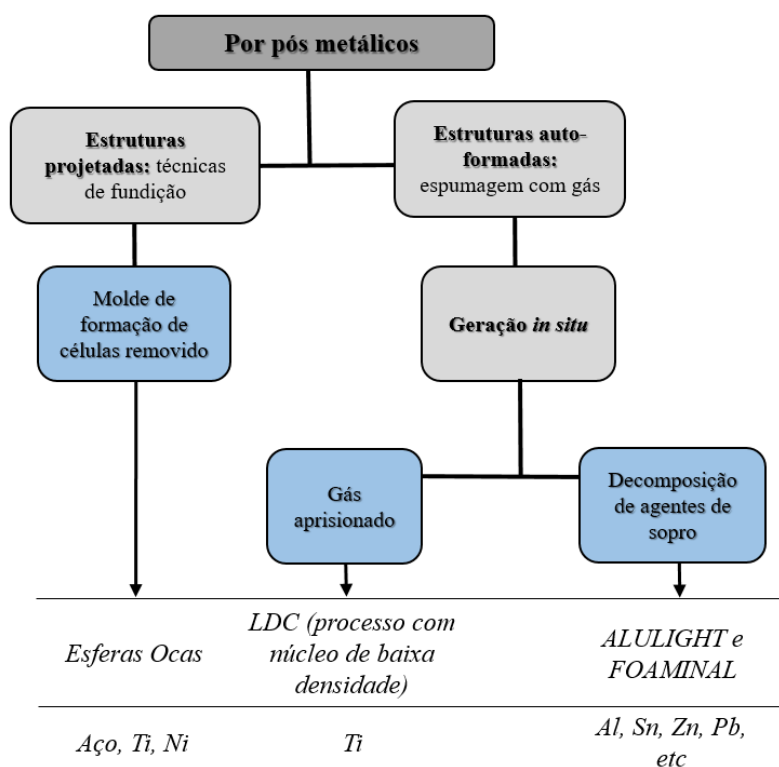


Figura 1.3 – Métodos produtivos de espumas metálicas – Por pó metálico  
 Fonte: Körner e Singer (2000), traduzido e adaptado.

Ramamurty e Paul (2004) examinaram como o módulo de elasticidade, resistência plástica e energia de absorção variam conforme a densidade é alterada. A espuma utilizada para estes testes foi a ALPORAS e os espécimes possuíam três diferentes alturas – 25, 50 e 115 mm. Foi encontrado que o módulo de elasticidade no carregamento é consideravelmente mais baixo e tem maior variabilidade em face do módulo na descarga, resultado da maior sensibilidade do primeiro a defeitos morfológicos na estrutura celular. A variabilidade na resistência plástica e energia de absorção são similares, por serem interdependentes. Concluíram que é possível correlacionar a variabilidade da propriedade medida com aquelas que caracterizam o material, como a variação de densidade e distribuição de tamanho de célula. A variabilidade medida nas propriedades de ALPORAS é muito grande em comparação com a do seu metal originário *Al*. Isso implica em que um aperfeiçoamento no processo produtivo da espuma é necessário para melhorar a sua confiabilidade, algo fundamental em aplicações de alto desempenho que exigem mínima possibilidade de falha e alta reprodutibilidade.

Sevostianov et al. (2006) analisam uma espuma de alumínio ( $AlMg1Si0.6$ ), produzido pelo método de metalurgia do pó com uma porosidade entre 0,45 e 0,85,

com células fechadas, determinando suas propriedades elásticas e elétricas. Comparando os dois conjuntos de dados experimentais, determinam o coeficiente de propriedade cruzada que conecta as mudanças no módulo de Young e a condutividade elétrica de um material devido aos poros.

## 1.2. Placas e cascas sanduíche com espuma metálica

Peters (1998) define uma estrutura sanduíche como sendo a união entre três elementos: um par de faces finas e rígidas e um núcleo de baixo peso que separa essas faces. Usando o mesmo raciocínio, Shokrollahi et al. (2014), definem que as estruturas sanduíche consistem de duas faces (uma externa/superior e uma interna/inferior) conectadas entre si por um núcleo geralmente de material ou estrutura leve. Este material pode ser madeira, espuma metálica ou polimérica, chapas corrugadas, borracha, entre outros. Já as faces demandam um material de alta rigidez como o aço, ligas de alumínio ou plásticos reforçados. Esses elementos sanduíche são muito eficientes no isolamento térmico e acústico e reduzem a vibração de estruturas leves e flexíveis, onde o núcleo é fortemente deformado no cisalhamento, devido às camadas rígidas confinantes (Zhai et al., 2018).



Figura 1.4 – Placa sanduíche com espuma metálica em seu núcleo

Fonte: Página da Manufacture Talk Radio. Disponível em: <https://mfgtalkradio.com/composite-metal-foams-applications-continue-expand/>

Harte et al. (2000) conduziram ensaios estáticos e de fadiga em um painel sanduíche. O núcleo é composto por espuma de alumínio (ALPORAS) e as faces de alumínio puro. Quatro geometrias são usadas nos testes. Três modos de falha foram observados: escoamento das faces, cisalhamento do núcleo e deformação sob carga rolante.

Hutchinson e He (2000) investigaram a flambagem de cascas cilíndricas sanduíche com núcleo de espuma de metal. Obtiveram a espessura ótima das faces e do núcleo da casca, além da densidade ótima e compararam o comportamento de uma casca perfeita com uma imperfeita. O objetivo do trabalho foi avaliar a interação entre as imperfeições e o escoamento plástico observando a queda da carga crítica de flambagem.

Bart-Smith et al. (2001) investigaram o desempenho à flexão de uma estrutura sanduíche com núcleo pouco espesso de metal celular, caracterizando os fenômenos de falha predominantes com base nos critérios de carga de colapso por escoamento das faces, cisalhamento no núcleo e indentação. Foi utilizada uma lei constitutiva previamente desenvolvida para o material do núcleo e incorporada às simulações numéricas. Comparou-se os resultados analíticos de estabilidade, carga de escoamento e carga limite com as simulações numéricas e resultados experimentais.

Min et al. (2004) investigam uma lâmina, que pode ser considerada uma casca, constituída de uma estrutura sanduíche com metal puro nas camadas externas e espuma de metal em seu núcleo. O metal utilizado foi o aço inoxidável 17-4 PH. As aplicações dessa lâmina são no setor aeroespacial. Foi feita uma análise de vibrações para determinação das frequências naturais e uma análise detalhada das tensões para diferentes combinações das espessuras das faces e porcentagem de volume do núcleo, comparando os resultados com uma lâmina de titânio sólido.

Radford et al. (2006) investigaram as respostas dinâmicas de placas circulares engastadas, tanto monolíticas quanto sanduíche, submetidas a uma carga de choque proveniente da queda de um projétil. Constatou-se que as placas sanduíche têm uma maior resistência ao choque que placas monolíticas de mesma massa e que a resistência ao choque das placas sanduíche aumenta com o aumento da espessura de seu núcleo. As simulações em elementos finitos estão de acordo com os resultados obtidos nos ensaios experimentais.

Banhart e Seeliger (2008) abordaram o processo de fabricação de estruturas sanduíche com espuma de metal em seu núcleo destacando três tipos. O primeiro é a colagem das faces sólidas na camada de espuma com adesivo colante, brasagem ou ligação por difusão – chamada de colagem *ex-situ*. O adesivo pode conferir, por exemplo, aumento de amortecimento. Outro tipo de fabricação consiste em combinar o metal utilizado na espuma com a cola criando assim uma colagem *in-situ*. O último processo de produção do compósito de três camadas é composto de um espumável (contendo hidreto de titânio  $TiH_2$  como agente de expansão) para o núcleo e faces sólidas, também de liga de alumínio. É feito pela extrusão ou rolagem em pó. Depois a camada do núcleo do painel é expandida por aquecimento até a temperatura de formação da espuma. O núcleo expande, enquanto as faces permanecem sólidas e firmemente ligadas ao núcleo durante esta etapa. A vantagem deste tipo de procedimento é que se tem uma ligação permanente e metálica mantida entre as camadas, sendo esta menos sensível ao calor que um adesivo, podendo ser utilizada em estruturas não inflamáveis resistentes ao calor.

Banhart e Seeliger (2012) analisam a tecnologia de fabricação de espuma de alumínio (AFS) e discutem as melhorias recentes e aplicações e concluem que a qualidade das espumas melhorou nos últimos anos e por isso as aplicações em que as espumas metálicas têm mais de uma função são mais propensas a serem economicamente viáveis.

Szyniszewski et al. (2012) estudam o comportamento estrutural de painéis sanduíche com faces de aço e núcleo de espuma de aço com ênfase na resistência a compressão e estabilidade. A espuma de aço, literalmente aço com vazios internos, proporciona maior rigidez à flexão, excepcional dissipação de energia e o potencial de mitigar a instabilidade local. Para isso, generalizam a expressão da largura efetiva de Winter levando a uma alteração nas expressões da flambagem elástica considerando a rigidez do painel e as deformações por cisalhamento. Neste trabalho, a expressão de largura efetiva de Winter é generalizada para o caso de painéis sanduíche de espuma de aço. As expressões analíticas obtidas foram comparadas com simulações em elementos finitos, empregando elementos contínuos tridimensionais e modelos constitutivos calibrados específicos para espumas metálicas. Eles destacam a melhoria significativa de resistência quando comparado com o aço sólido e determinam o equilíbrio ideal entre a espessura da chapa de aço e densidade do núcleo de espuma.

Cheng et al. (2013) analisam uma casca cilíndrica sanduíche de núcleo viscoelástico com o objetivo de se estudar a sua capacidade de amortecimento. O modelo desenvolvido leva em conta o cisalhamento, as deformações normais e a geometria curva da casca, além representar os deslocamento do tipo zig-zag no plano e fora do plano. Foram comparadas as frequências naturais, os coeficientes de amortecimento e as funções de resposta em frequência de cascas de alumínio viscoelásticas com as do painel de alumínio sólido. A espessura e razão de amortecimento da camada de amortecimento viscoelástica, a curvatura da estrutura cilíndrica de alumínio proposta e a colocação da camada de amortecimento do painel de alumínio foram investigadas usando a função de resposta de frequência. Os resultados mostraram que a camada viscoelástica diminui bastante as vibrações da estrutura.

Jing et al. (2013) investigam os modos de deformação/falha, resistência à abrasão e absorção de energia de cascas cilíndricas sanduíche metálicas com núcleos de espuma de alumínio de células fechadas. Realizaram para isto alguns experimentos com cascas sanduíche submetidas a cargas explosivas. Os resultados desses experimentos são usados para calibrar a simulação em elementos finitos. Os resultados de simulação numérica mostraram uma boa concordância nos modos de deformação/falha e na deflexão do ponto central da face posterior dos espécimes, com os resultados experimentais. Os resultados indicam que a deformação/falha, a deflexão e a absorção de energia das cascas sanduíche são sensíveis à intensidade de carga e configuração geométrica. A capacidade de absorção de energia das amostras aumenta e diminui monotonicamente com, respectivamente, o aumento do nível do impulso e da densidade relativa do núcleo. Jing et al. (2014), continuando o estudo anterior, desenvolvem uma análise teórica para prever a resposta dinâmica de cascas cilíndricas sanduíche engastadas submetidas a jatos de ar. Nesta investigação, a resposta da casca sanduíche foi dividida em três estágios: (a) no primeiro estágio supõe-se que o impulso seja transferido apenas para a velocidade da face exposta a explosão; (b) no segundo, o núcleo é considerado aproximadamente como submetido a uma compressão progressiva ao passo que a face posterior é ainda estacionária e (c) no último estágio a teoria clássica de cascas monolíticas baseada em uma abordagem da taxa de dissipação de energia é empregada. Uma concordância razoável entre as previsões teóricas e os resultados

experimentais é observada para a máxima deflexão do ponto central da face posterior das cascas sanduíche.

Zhu et al. (2017) investigam placas sanduíche submetidas a baixas temperaturas e a cargas de impacto usando experimentalmente um peso em queda livre em uma câmara de teste termostática. Os resultados destes testes mostram que as forças de impacto e deflexões dos painéis sanduíche de alumínio aumentam proporcionalmente com o aumento das velocidades de impacto. Os incrementos da deflexão da camada frontal e da camada posterior, bem como a compressão do núcleo de alumínio, reduzem conforme o número de impactos repetidos aumenta.

### 1.3. Teorias de placas e cascas sanduíche e de material com gradação funcional

Ventsel e Krauthammer (2001) apresentam o desenvolvimento histórico da teoria de placas. Começam por Euler que, em 1776, analisou o problema de vibração livre de placas. Lagrange, posteriormente, em 1828, apresentou a equação geral da placa. Em seguida Cauchy, em 1828, e Poisson, em 1829, trabalharam com o problema da flexão de chapas. A primeira teoria satisfatória de flexão de placas está associada a Navier que introduz, em 1823, o conceito de rigidez à flexão. Em 1850, Kirchhoff desenvolveu as hipóteses básicas sobre a flexão de placas finas que até hoje são aceitas.

Leissa (1978) apresenta várias teorias para análise de cascas finas. Ele explica que os resultados dessas teorias são levemente diferentes devido à aplicação de determinadas simplificações em passagens específicas da derivação. Muitas teorias são obtidas a partir dos postulados de Love publicados em 1888 que foram adaptados da teoria de placas finas de Kirchhoff. Essas teorias<sup>1</sup> são por ordem cronológica: Flügge (1934), Donnell (1938), Mushtari (1938), Lur'ye (1940), Reissner (1941), Byrne (1944), Vlasov (1951), Timoshenko (1959), Sanders (1959), Goldenveizer (1961), Naghdi e Berry (1964) e Novozhilov (1964). Dentre estas se destacam a de Donnell, que é a teoria mais difundida, e a de Sanders, que é a que apresenta resultados mais refinados.

Carrera e Brischetto (2009) apresentam uma coletânea de teorias de cascas e placas sanduíche a partir das devidas adaptações das teorias acima citadas. Eles

as separam em teorias clássicas, teorias de alta ordem, teorias de camadas e teorias mistas baseadas no teorema variacional de Reissner. As teorias clássicas são a de estruturas laminadas e as que consideram a deformação de cisalhamento de primeira ordem. As teorias de alta ordem incluem ou não a tensão normal transversal e podem considerar o efeito zig-zag na deformação. A teoria de camadas adota suposições cinemáticas independentes para cada camada. As teorias mistas podem ser de várias camadas e camada única equivalente. Eles comparam os resultados numéricos de todas essas teorias.

Liu e Li (1995) derivam as equações fundamentais e condições de contorno para estudo das vibrações livres não lineares de cascas cônicas sanduíche por meio do princípio de Hamilton. Utilizam o método de Galerkin para encontrar soluções aproximadas para a relação frequência-amplitude considerando dois tipos de condições de contorno. Também discutem a influência dos parâmetros geométricos, parâmetros físicos e condições de contorno nas vibrações não lineares.

Hohe e Librescu (2003) apresentam uma teoria não linear de painéis sanduíche duplamente curvos com núcleo transversalmente compressível e analisam o comportamento de flambagem e pós-flambagem elástica de painéis sanduíche planos e curvos usando Galerkin. Devido à flexibilidade transversal do núcleo, os modos de instabilidade global e local (enrugamento da face) foram também abordados.

Kormaníková e Mamuzic (2011) estudam um painel sanduíche em que o núcleo suporta apenas as tensões cisalhantes transversais,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , e suas faces são de material laminado com distribuição simétrica e assimétrica. Exemplos numéricos foram realizados para avaliar as variações das tensões, deformações e esforços ao longo da seção transversal.

Magnucka-Blandzi (2011) analisou uma placa sanduíche retangular simplesmente apoiada comprimida no plano. As cargas críticas para uma família de placas sanduíche foram numericamente determinadas.

Amabili (2011) estudou as vibrações forçadas geometricamente não lineares de cascas cilíndricas circulares laminadas usando uma teoria de deformação de ordem superior proposta por Amabili e Reddy (2010). Foi feita a análise de bifurcações na região de ressonância e comparações com os resultados obtidos com as teorias de Novozhilov e de deformação de cisalhamento de alta ordem.



Foraboschi (2013) apresenta um modelo que descreve o comportamento de uma placa sanduíche através de um sistema de equações analíticas derivadas das hipóteses de Kirchhoff-Love. A vantagem deste modelo é que ele não apresenta problemas devidos a grande diferença entre a rigidez das camadas externas e a do núcleo.

Wang e Shi (2014) apresentam uma teoria simples e precisa de placa sanduíche levando em consideração a tensão normal transversal e a continuidade das tensões nas interfaces. Um polinômio cúbico refinado foi usado para a função transversal de cisalhamento e uma função linear foi adotada para a deformação transversal normal. Soluções analíticas para flexão de placas sanduíche com diferentes proporções e relações de rigidez foram obtidas para demonstrar a precisão desta teoria. Os resultados das deflexões, tensões normais e tensões de cisalhamento transversais foram comparados com as soluções da elasticidade tridimensional, com os resultados numéricos e com os resultados fornecidos por outras teorias de placas sanduíche. Concluíram que essa teoria de placa sanduíche de camada única equivalente é, além de simples, também capaz de alcançar a precisão das teorias de placas sanduíche em camadas.

Amabili (2018) desenvolveu uma teoria de primeira ordem para deformação de cisalhamento de cascas laminadas que retém todos os termos não lineares nos deslocamentos e rotações do plano. Esta teoria foi usada para estudar as vibrações não lineares de grande amplitude. Uma aplicação numérica a uma cascas cilíndrica circular laminada, simplesmente apoiada, foi usada para validar a teoria comparando-a a uma teoria de deformação não linear de terceira ordem para o caso de cascas submetidas a pressão. Os resultados foram apresentados nos domínios de frequência e tempo, além de mapas de Poincaré.

Sofyiev (2014) define materiais de gradação funcional como materiais multifuncionais em que a sua composição varia de acordo com a finalidade desejada para aplicação, seja para controle de variações térmicas, propriedades estruturais ou funcionais. A gradação funcional permite que as tensões ao longo da espessura da casca/placa se desenvolvam de forma suave, sem concentração ou descontinuidades. Em seu trabalho é discutida a vibração e flambagem de cascas cilíndricas sanduíche submetidas a uma pressão hidrostática uniforme usando a teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem. Foram discutidas as influências dos diferentes tipos de revestimentos, tensões cisalhantes e

características de casca nas frequências e carga crítica sob pressão hidrostática para materiais de gradação funcional e cascas cilíndricas sanduíche.

Loy et al. (1999) apresentam um estudo sobre a vibração de cascas cilíndricas feitas de um material com gradação funcional composto de aço inoxidável e níquel. Estudam as frequências naturais, a influência das frações volumétricas dos materiais constituintes e sua distribuição nas frequências naturais. Os resultados mostram que as características de frequência são similares às aquelas observadas para as cascas cilíndricas isotrópicas homogêneas e as frequências são afetadas pelas frações volumétricas e distribuição dos materiais constituintes ao longo da espessura. A análise foi realizada usando-se as relações deslocamento-deformação da teoria de casca de Love e o problema de autovalor foi obtida usando o método de Rayleigh-Ritz.

Li e Batra (2006) estudam a flambagem de uma casca cilíndrica de três camadas, simplesmente apoiada e sujeita a uma carga axial de compressão. As camadas externas da casca são compostas pelo mesmo material homogêneo e isotrópico, e a camada do núcleo é composta de um material isotrópico com gradação funcional. Foram calculadas cargas de flambagem para diferentes valores dos parâmetros geométricos e estudado o efeito da variação nos parâmetros de material da camada do núcleo.

Yang et al. (2008) investigam a flexão local não linear de uma placa sanduíche, composta por duas faces de material composto laminado e um núcleo de material com gradação funcional submetido a uma carga lateral. A análise foi baseada na teoria da placa de primeira ordem e na teoria não linear de von Kármán, sendo a interação entre a face carregada e o núcleo com gradação funcional modelada como uma placa apoiada em uma base elástica do tipo Vlasov. Os resultados numéricos mostram que, comparando com placas sanduíche com um núcleo macio homogêneo, o uso de um núcleo com gradação funcional pode efetivamente reduzir tanto a deformação local quanto as tensões de cisalhamento nas interfaces. Um estudo paramétrico foi realizado para mostrar a influência da fração volumétrica, do módulo de Young, da espessura do núcleo com gradação funcional, condições de contorno e posição da carga na resposta não linear da placa.

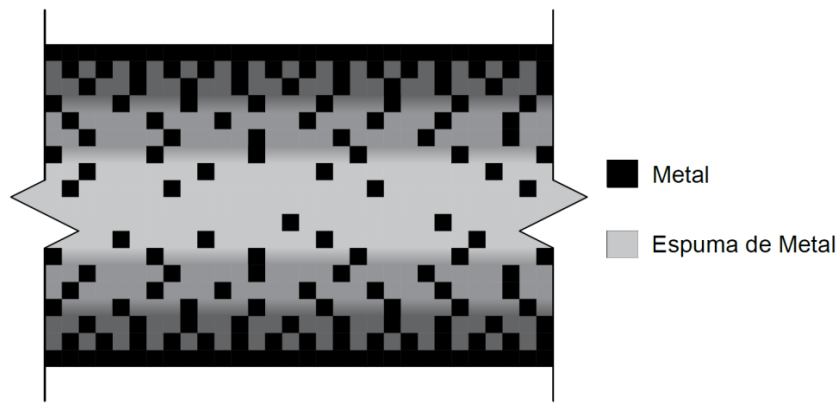


Figura 1.5 – Ilustração de seção transversal de elemento com gradação funcional  
Fonte: Autor (2018).

Da Silva et al. (2015) analisaram as vibrações não-lineares de uma casca cilíndrica com gradação funcional simplesmente apoiada, preenchida por fluido, submetida a uma carga lateral dependente do tempo e à uma pré-carga estática axial. A casca foi modelada utilizando a teoria não linear de Donnell. Um modelo consistente de ordem reduzida derivado de uma técnica de perturbação é usado para descrever os deslocamentos da casca e o método de Galerkin é aplicado para derivar um conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares de movimento. Os resultados mostram a influência da variação dos dois materiais constituintes ao longo da espessura da casca, fluido interno, pré-carga estática axial e geometria da casca nas frequências naturais, relação não linear frequência-amplitude, curvas de ressonância e cenário de bifurcação da casca cilíndrica com gradação funcional.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Geral

Estudar a estabilidade e vibrações de cascas cilíndricas sanduíche considerando cisalhamento no núcleo de espuma metálica e cascas cilíndricas com gradação funcionais equivalentes à casca sanduíche.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- a) Avaliar as frequências naturais e cargas críticas, sob compressão axial e pressão lateral, de cascas cilíndricas sanduíche seja com cisalhamento do núcleo ou com gradação funcional, comparando-as com os resultados obtidos para cascas cilíndricas isotrópicas e homogêneas;
- b) Para cada tipo de casca, estudar a variação das frequências naturais e cargas críticas para determinadas propriedades físicas e geométricas;
- c) Investigar as relações geométricas da casca ( $R/h$  e  $L/R$ ) nas frequências naturais e cargas críticas;
- d) Estudar o desempenho estrutural de cascas com a mesma massa;
- e) Estudar as variações das espessuras para cascas com mesma frequência natural e com a mesma carga crítica;
- f) Averiguar a variação das frequências naturais mínimas ao se alterar a composição da matriz de massa;
- g) Compreender em quais situações as cascas sanduíche são vantajosas.

### 1.5. Descrição dos Capítulos

Este trabalho está dividido em oito capítulos, sendo o primeiro este de introdução. O segundo capítulo apresenta os conceitos e hipóteses para uma casca isotrópica e homogênea. A teoria linear de Donnell é utilizada para desenvolver a formulação da casca cilíndrica. São apresentados, então, o campo de deslocamentos, a lei constitutiva, os esforços internos, as energias de deformação e cinética, os funcionais de energia, possibilitando a obtenção das equações de equilíbrio e de movimento. A solução analítica para uma casca simplesmente apoiada é utilizada para se derivar as matrizes de rigidez, rigidez geométrica e de massa. O terceiro e quarto capítulos apresentam a formulação para cascas cilíndricas sanduíche considerando, respectivamente, material com gradação funcional e com cisalhamento no núcleo. O quinto capítulo estuda as frequências naturais comparando as três teorias de cascas cilíndricas abordadas nos capítulos iniciais, em função das propriedades físicas dos materiais e dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ . O sexto capítulo compara as cargas críticas, sob compressão

axial e pressão lateral, obtidas a partir das três teorias de cascas cilíndricas abordadas nos capítulos iniciais, em função das propriedades dos materiais e dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ . As conclusões e sugestões decorrentes desses estudos são apresentadas no capítulo sete. Por fim, o capítulo oito traz as referências bibliográficas usadas nesta dissertação.

## 2. Teorias de Cascas

Este capítulo apresenta a formulação matemática da teoria clássica de cascas com base nas hipóteses da teoria de primeira ordem a partir das quais são obtidas as equações de equilíbrio e de movimento para cascas cilíndricas. A partir destas equações são calculadas as frequências naturais e cargas críticas para uma casca simplesmente apoiada.

### 2.1. Introdução

A casca cilíndrica considerada ao longo deste trabalho possui o sistema de coordenadas  $x$ ,  $y=R\theta$  e  $z$ , mostrado na Figura 2.1. A figura também mostra seus deslocamentos, sendo  $U$  o deslocamento na direção axial,  $V$  o deslocamento na direção circunferencial e  $W$  o deslocamento na direção radial. A casca possui raio  $R$ , comprimento  $L$  e a espessura  $h$ .

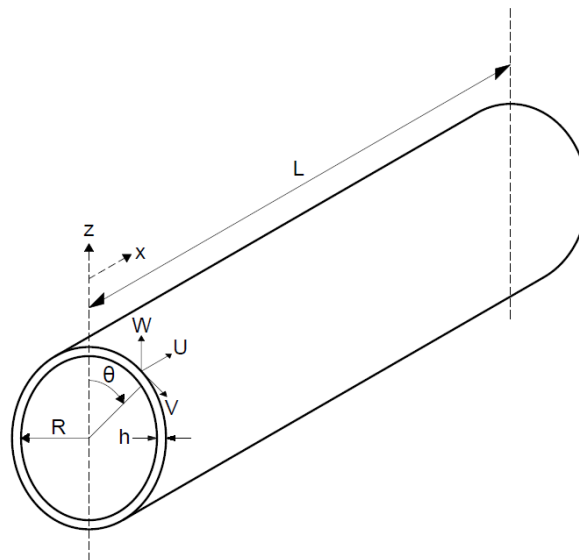


Figura 2.1 – Sistema de coordenadas, propriedades geométricas e campo de deslocamentos

Fonte: Autor (2019).

A teoria clássica de cascas cilíndricas esbeltas foi desenvolvida com base nos postulados de Love que utilizou as seguintes simplificações:

- a) A espessura da casca é muito menor que as outras dimensões da casca;
- b) As deformações e deslocamentos são suficientemente pequenos para que termos de alta ordem possam ser desprezados quando comparados com termos de primeira ordem;
- c) A tensão normal transversal é desprezada por ser pequena quando comparada com outras componentes de tensões normais;
- d) As normais à superfície média indeformada permanecem retas e normais à superfície média deformada e não sofrem deformação.

Quando se considera o efeito do cisalhamento transversal, a última hipótese é modificada e considera-se que a normal à superfície média permanece reta, mas não necessariamente perpendicular à superfície média da casca, sendo esta uma hipótese mais apropriada para cascas espessas.

## 2.2. Campo de deslocamentos

Na teoria clássica, o campo de deslocamentos é dado por

$$U(x, \theta, z, t) = u(x, \theta, t) + z\beta_x(x, \theta, t) \quad (2.1a)$$

$$V(x, \theta, z, t) = v(x, \theta, t) + z\beta_\theta(x, \theta, t) \quad (2.1b)$$

$$W(x, \theta, z, t) = w(x, \theta, t) \quad (2.1c)$$

onde  $u$  é o deslocamento axial,  $v$  é o deslocamento circunferencial e  $w$  é o deslocamento radial da superfície média da casca e  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são as rotações da seção transversal, como ilustra a Figura 2.2.

Considerando que as normais à superfície média indeformada permanecem retas e normais à superfície média deformada e não sofrem deformação, tem-se que:

$$\beta_x = -w_{,x} \quad (2.2a)$$

$$\beta_\theta = -\frac{w_{,\theta}}{R} \quad (2.2b)$$

Neste caso têm-se apenas três incógnitas, que são os deslocamentos da superfície média da casca.

Considerando que as normais à superfície média indeformada permanecem retas, mas não normais à superfície média deformada, tem-se que as rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são incógnitas do problema, tendo-se assim cinco incógnitas.

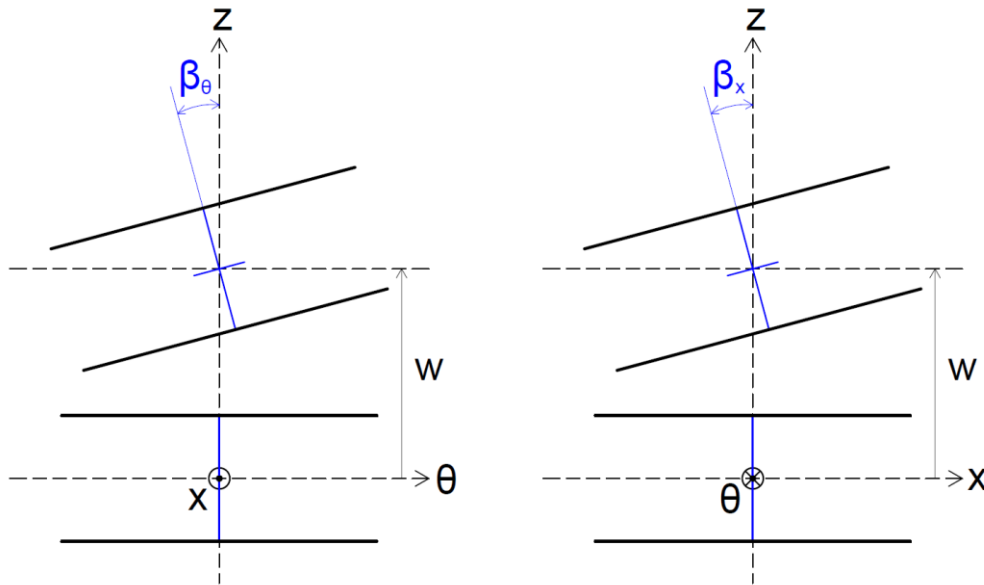


Figura 2.2 – Representação das rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  em uma seção da casca  
Fonte: Autor (2019).

A deflexão da casca,  $w$ , é considerada a mesma ao longo da espessura, não dependendo da coordenada  $z$ , como apresentado na Equação 2.1c.

### 2.3. Relações cinemáticas

As relações lineares deformação-deslocamento para um ponto qualquer da casca cilíndrica são dadas por:

$$\varepsilon_x = U_{,x} \quad (2.3a)$$



$$\varepsilon_\theta = \frac{V_{,\theta} + W}{R} \quad (2.3b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{U_{,\theta}}{R} + V_{,x} \quad (2.3c)$$

Quando as rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são incógnitas do problema, consideram-se mais duas deformações distorcionais, a saber:

$$\gamma_{xz} = \beta_x + W_{,x} \quad (2.4a)$$

$$\gamma_{\theta z} = \beta_\theta + \frac{W_{,\theta}}{R} \quad (2.4b)$$

que levam em conta as deformações devidas ao cisalhamento ao longo da espessura da casca. Em ambos os casos  $\varepsilon_z = 0$ .

## 2.4. Lei constitutiva

Considera-se inicialmente que o material da casca é homogêneo e isotrópico e obedece à Lei de Hooke.

## 2.5. Relações tensão-deformação

Assim, considerando um material elástico e linear, as relações entre tensão e deformação são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \quad (2.5a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \quad (2.5b)$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{x\theta} \quad (2.5c)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xz} \quad (2.5d)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{\theta z} \quad (2.5e)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal ou de Young, e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. O fator  $E/2(1 + \nu)$  é o chamado módulo de elasticidade transversal  $G$ .

## 2.6. Esforços internos

Os esforços que atuam em um elemento de casca (Figura 2.3) são obtidos da integração das tensões ao longo da espessura da casca, sendo dados por:

$$N_x = \int \sigma_x dz \quad (2.6a)$$

$$N_\theta = \int \sigma_\theta dz \quad (2.6b)$$

$$N_{x\theta} = \int \tau_{x\theta} dz \quad (2.6c)$$

$$M_x = \int \sigma_x z dz \quad (2.6d)$$

$$M_\theta = \int \sigma_\theta z dz \quad (2.6e)$$

$$M_{x\theta} = \int \tau_{x\theta} z dz \quad (2.6f)$$

$$Q_x = \int \tau_{xz} dz \quad (2.6g)$$

$$Q_\theta = \int \tau_{\theta z} dz \quad (2.6h)$$

onde  $N_x$ ,  $N_\theta$  e  $N_{x\theta}$  são as intensidades das forças normais e de cisalhamento no plano do elemento;  $M_x$ ,  $M_\theta$  e  $M_{x\theta}$  são os momentos fletores e torsor; e,  $Q_x$  e  $Q_\theta$  são as forças cisalhantes transversais.

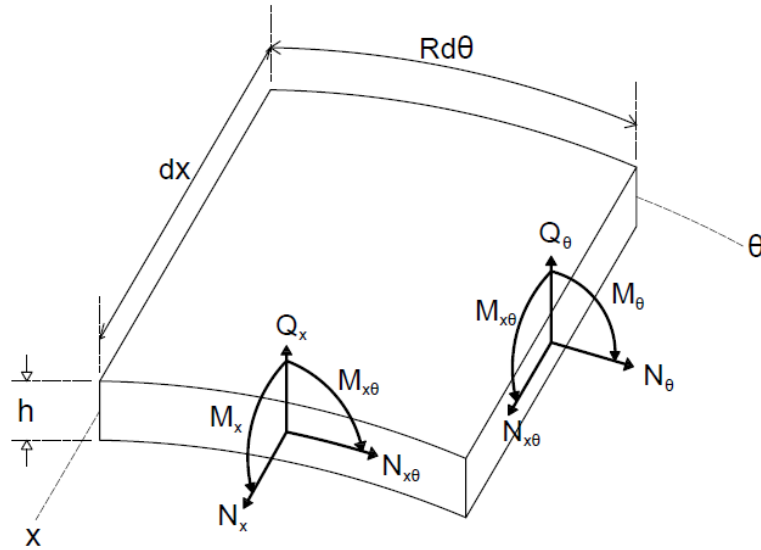


Figura 2.3 – Esforços internos na casca cilíndrica

Fonte: Autor (2019).

## 2.7. Energia de deformação

A energia armazenada pela casca ao se deformar é calculada através da integral ao longo de seu volume, sendo dada por:

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}) R dz d\theta dx \quad (2.7)$$

Com base nas Equações 2.3 e 2.5(a – c), e realizando a integração ao longo da espessura da casca obtém-se para a teoria clássica

$$U_d = \iint \frac{ERh^3}{24} \left[ \frac{w_{,\theta\theta} \left( \frac{w_{,\theta\theta}}{R^2} + \nu w_{,xx} \right)}{R^2(1-\nu^2)} + \frac{w_{,xx} \left( w_{,xx} + \frac{\nu w_{,\theta\theta}}{R^2} \right)}{1-\nu^2} + \frac{2w_{,x\theta}}{R^2(1-\nu^2)} \right] + \quad (2.8)$$

$$\frac{ERh}{2} \left\{ \frac{(v_{,\theta} + w) \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \nu u_{,x} \right)}{R(1-\nu^2)} + \frac{u_{,x} \left[ u_{,x} + \nu \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right) \right]}{1-\nu^2} + \frac{\left( \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right)^2}{2(1+\nu)} \right\} d\theta dx$$

Considerando que as rotações são variáveis independentes, tem-se

$$\begin{aligned}
U_d = & \iint \frac{ERh^3}{24} \left[ \frac{\beta_{\theta,\theta} \left( \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \nu \beta_{x,x} \right)}{R(1-\nu^2)} + \frac{\beta_{x,x} \left( \beta_{x,x} + \frac{\nu \beta_{\theta,\theta}}{R} \right)}{1-\nu^2} + \frac{\left( \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right)^2}{1-\nu^2} \right] + \\
& \frac{ERh}{2} \left\{ \frac{(v_{,\theta} + w) \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \nu u_{,x} \right)}{R(1-\nu^2)} + \frac{u_{,x} \left[ u_{,x} + \nu \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right) \right]}{1-\nu^2} + \frac{\left( \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right)^2}{2(1+\nu)} + \frac{(\beta_{x,x} + w_{,x})^2}{2(1+\nu)} + \right. \\
& \left. \frac{\left( \beta_{\theta,\theta} + \frac{w_{,\theta}}{R} \right)^2}{2(1+\nu)} \right\} d\theta dx
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Nas Equações 2.8 e 2.9 os termos multiplicados por  $h^3$  estão ligados a energia de flexão da casca e os termos multiplicados por  $h$  estão ligados a energia de membrana da casca.

## 2.8. Energia cinética

Utilizando o campo de deslocamentos da Equação 2.1, tem-se que a energia cinética da casca é dada por

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho (U_{,t}^2 + V_{,t}^2 + W_{,t}^2) R dz d\theta dx \quad (2.10)$$

onde  $\rho$  é a massa por unidade de volume.

Ao se integrar a Equação 2.10 ao longo da espessura da casca, obtém-se, considerando apenas a inércia a translação:

$$T = \iint \frac{\rho R h}{2} (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) d\theta dx \quad (2.11)$$

e, considerando, adicionalmente, a inércia a rotação:

$$T = \iint \frac{\rho R h^3}{24} (\beta_{x,t}^2 + \beta_{\theta,t}^2) + \frac{\rho R h}{2} (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) d\theta dx \quad (2.12)$$

## 2.9. Equações de Euler-Lagrange

A energia total do sistema é constituída, então, pela soma da energia cinética (Equações 2.11 ou 2.12) com a energia potencial total  $\Pi = U_d + V$ , onde  $V$  é o potencial das cargas externas conservativas, que neste capítulo não está sendo considerado. O Lagrangiano é dado pela diferença entre a energia cinética e potencial total, ou seja,  $\mathcal{L} = T - \Pi$ . O funcional  $\mathcal{L}$  é, pois, função dos deslocamentos e suas derivadas. Empregando o Princípio de Hamilton, têm-se as seguintes equações de Euler-Lagrange considerando a teoria clássica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,\theta}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,t}} \right) = 0 \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{i,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{i,\theta}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{i,t}} \right) = 0 \quad (2.13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,\theta}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,t}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,xx}} \right) + \frac{d^2}{dx d\theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,x\theta}} \right) + \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,\theta\theta}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.13c)$$

Ao se considerar o efeito do cisalhamento, acrescentam-se as equações:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_x} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{x,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{x,\theta}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{x,t}} \right) = 0 \quad (2.14a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_\theta} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{\theta,x}} \right) - \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{\theta,\theta}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{\theta,t}} \right) = 0 \quad (2.14b)$$

Tendo em mãos as expressões acima, podem-se escrever as equações de movimento e de equilíbrio da casca cilíndrica em função dos deslocamentos e suas derivadas.

## 2.10. Equações de movimento

Considerando as Equações 2.6, 2.13 e 2.14, as equações de movimento da casca cilíndrica podem ser escritas em função dos esforços internos para o caso de três variáveis independentes:

$$N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} + \rho h \ddot{u} = 0 \quad (2.15a)$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} + \rho h \ddot{v} = 0 \quad (2.15b)$$

$$-\frac{N_{\theta}}{R} + \left( M_{x,xx} + \frac{2M_{x\theta,x\theta}}{R} + \frac{M_{\theta,\theta\theta}}{R^2} \right) + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (2.15c)$$

e para o caso de cinco variáveis independentes:

$$N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} + \rho h \ddot{u} = 0 \quad (2.16a)$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} + \rho h \ddot{v} = 0 \quad (2.16b)$$

$$-\frac{N_{\theta}}{R} + Q_{x,x} + \frac{Q_{\theta,\theta}}{R} + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (2.16c)$$

$$-Q_x + M_{x,x} + \frac{M_{x\theta,\theta}}{R} + \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_x = 0 \quad (2.16d)$$

$$-Q_{\theta} + M_{x\theta,x} + \frac{M_{\theta,\theta}}{R} + \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_{\theta} = 0 \quad (2.16e)$$

As Equações 2.15 ou 2.16 também podem ser deduzidas considerando o equilíbrio de um elemento infinitesimal de casca na sua configuração deformada.

## 2.11. Equações de equilíbrio

Ao se retirar das Equações 2.13 e 2.14 as forças de inércia (os termos com derivadas em relação ao tempo), tem-se as equações de equilíbrio estático da casca:

$$N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (2.17a)$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (2.17b)$$

$$-\frac{N_{\theta}}{R} + Q_{x,x} + \frac{Q_{\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (2.17c)$$

$$-Q_x + M_{x,x} + \frac{M_{x\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (2.17d)$$

$$-Q_{\theta} + M_{x\theta,x} + \frac{M_{\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (2.17e)$$

Ao se considerar as rotações perpendiculares à superfície média da casca as cinco equações de equilíbrio (2.17) são simplificadas e se transformam em apenas três ao se isolar  $Q_x$  e  $Q_{\theta}$  das Equações 2.17d e 2.17e, e substituir por suas respectivas derivadas na Equação 2.17c.

## 2.12. Solução para uma Casca Simplesmente Apoiada

Uma casca simplesmente apoiada em ambos os bordos deve obedecer às seguintes condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$

$$v = w = N_x = M_x = 0 \quad (2.18)$$

A solução analítica para o campo de deslocamentos de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada em ambos os bordos correspondente aos modos de vibração livre é dada por

$$u(x, \theta, t) = u_a \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.19a)$$

$$v(x, \theta, t) = v_a \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.19b)$$

$$w(x, \theta, t) = w_a \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.19c)$$

$$\beta_x(x, \theta, t) = \beta_{xa} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.19d)$$

$$\beta_{\theta}(x, \theta, t) = \beta_{\theta a} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.19e)$$

onde  $m$  é o número de semi-ondas longitudinais,  $n$  é o número de ondas circunferenciais, conforme ilustra a Figura 2.4, e  $\omega$  a frequência de vibração angular.

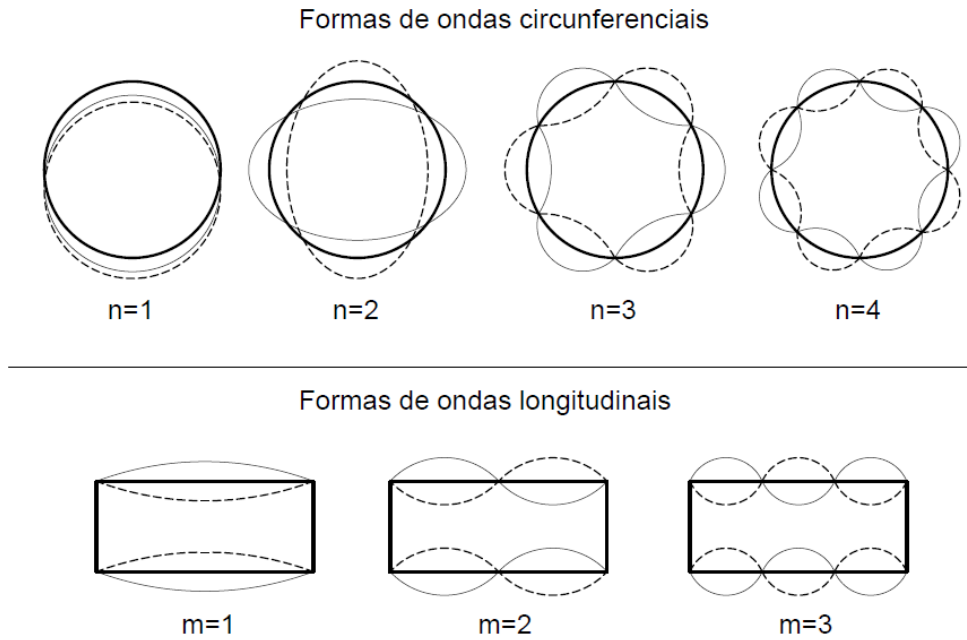


Figura 2.4 – Modos de deformação circunferencial e longitudinal  
Fonte: Autor (2019).

### 2.13. Frequências Naturais

As frequências naturais são obtidas a partir de um problema de autovalor generalizado da forma

$$([K] + \lambda[M])\{D\} = \{0\}; \lambda = -\omega^2 \quad (2.20)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez,  $[M]$  a matriz de massa e  $\{D\}$  o vetor de amplitudes modais.

A frequência angular  $\omega$  em rad/s está relacionada com a frequência natural  $f$  em Hz da forma:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.21)$$



### 2.13.1. Matriz de Rigidez

Considerando as equações de movimento (2.15), obtém-se para a matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde  $K_{ij}=K_{ji}$  são os elementos da matriz de rigidez dados por

$$K_{11} = R \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{n^2}{R} \quad (2.23a)$$

$$K_{12} = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{m\pi}{L} n\nu - \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{m\pi n}{L} \quad (2.23b)$$

$$K_{13} = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{m\pi}{L} \nu \quad (2.23c)$$

$$K_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{n^2}{R} + R \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \quad (2.23d)$$

$$K_{23} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{n}{R} \quad (2.23e)$$

$$K_{33} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{R} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ R \left[ \nu \left( \frac{m\pi n}{RL} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \right] + \nu \left( \frac{m\pi n}{L} \right)^2 + \frac{n^4}{R^2} \right\} + \frac{Eh^3}{6(1+\nu)} \left( \frac{m\pi n}{L} \right)^2 \frac{1}{R} \quad (2.23f)$$

Considerando as equações de movimento (2.16), obtém-se para a matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

cujos elementos são dados por

$$K_{11} = R \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{n^2}{R} \quad (2.25a)$$

$$K_{12} = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{m\pi}{L} n\nu - \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{m\pi n}{L} \quad (2.25b)$$

$$K_{13} = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{m\pi}{L} \nu \quad (2.25c)$$

$$K_{14} = 0 \quad (2.25d)$$

$$K_{15} = 0 \quad (2.25e)$$

$$K_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{n^2}{R} + R \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \quad (2.25f)$$

$$K_{23} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{n}{R} \quad (2.25g)$$

$$K_{24} = 0 \quad (2.25h)$$

$$K_{25} = 0 \quad (2.25i)$$

$$K_{33} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{R} + R \frac{Eh^3}{2(1+\nu)} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{Eh}{2(2+\nu)} \frac{n^2}{R} \quad (2.25j)$$

$$K_{34} = R \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{m\pi}{L} \quad (2.25k)$$

$$K_{35} = -\frac{Eh}{2(1+\nu)} n \quad (2.25l)$$

$$K_{44} = R \frac{Eh}{2(1+\nu)} \quad (2.25m)$$

$$K_{45} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{m\pi n}{L} \nu - \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \frac{m\pi n}{L} \quad (2.25n)$$

$$K_{55} = R \frac{Eh}{2(1+\nu)} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{n^2}{R} + R \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \quad (2.25o)$$

### 2.13.2. Matriz de Massa

Considerando as equações de movimento (2.15), obtém-se para a matriz de massa:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

cujos elementos são dados por

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = -\frac{\rho h L \pi}{2} \omega^2 \quad (2.27)$$

Considerando as equações de movimento (2.16), obtém-se para a matriz de massa:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

onde

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = -\frac{\rho h L \pi}{2} \omega^2 \quad (2.29a)$$

$$M_{44} = M_{55} = -\frac{\rho h^3 L \pi}{24} \omega^2 \quad (2.29b)$$

## 2.14. Cargas Críticas

Utilizando o critério de equilíbrio adjacente, ou seja, causado por uma perturbação no campo de deslocamento tem-se, conforme Brush e Almroth (1975), que:

$$u \rightarrow u_0 + u_1 \quad (2.30a)$$

$$v \rightarrow v_0 + v_1 \quad (2.30b)$$

$$w \rightarrow w_0 + w_1 \quad (2.30c)$$

onde  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  são os deslocamentos que descrevem a configuração de equilíbrio para um determinado tipo de carga aplicada e os deslocamentos  $u_1$ ,  $v_1$  e  $w_1$

descrevem uma perturbação arbitrária desta configuração de equilíbrio consistente com as condições de contorno.

Partindo da formulação não linear de Donnell e utilizando o campo de deslocamentos descrito pela Equação 2.1, têm-se as seguintes relações não lineares entre deformação e deslocamento:

$$\varepsilon_x = U_{,x} + \frac{1}{2} W_{,x}^2 \quad (2.31a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{V_{,\theta} + W}{R} + \frac{1}{2R^2} W_{,\theta}^2 \quad (2.31b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{U_{,\theta}}{R} + V_{,x} + \frac{W_{,x} W_{,\theta}}{R} \quad (2.31c)$$

onde a não-linearidade é decorrente dos termos quadráticos contendo derivadas do deslocamento transversal  $w$  (rotações).

A partir deste ponto, seguindo o mesmo procedimento dos itens 2.4 a 2.11, obtêm-se as seguintes equações não lineares de equilíbrio (Brush e Almroth, 1975):

$$RN_{x,x} + N_{x\theta,\theta} = 0 \quad (2.32a)$$

$$RN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} = 0 \quad (2.32b)$$

$$D\nabla^4(w) + \frac{N_\theta}{R} - \left( N_x w_x + \frac{2}{R} N_{x\theta} w_{x\theta} + \frac{1}{R^2} N_\theta w_\theta \right) = 0 \quad (2.32c)$$

onde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ (rigidez a flexão)} \quad (2.33a)$$

$$\nabla^4(w) = w_{,xxxx} + \frac{2}{R^2} w_{,xx\theta\theta} + \frac{1}{R^4} w_{,\theta\theta\theta\theta} \quad (2.33b)$$

Como os esforços  $N_x$ ,  $N_\theta$  e  $N_{x\theta}$  dependem dos deslocamentos, ao causar uma perturbação nos deslocamentos ( $u_I$ ,  $v_I$ ,  $w_I$ ), causa-se também perturbação nestes esforços ( $N_{xI}$ ,  $N_{\theta I}$  e  $N_{x\theta I}$ ). Por exemplo:

$$N_{x0} + N_{x1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ u_{0,x} + u_{1,x} + \frac{1}{2} w_{0,x}^2 + w_{0,x} w_{1,x} + \frac{1}{2} w_{1,x}^2 + \right. \\ \left. \nu \left( \frac{v_{0,\theta} + w_0}{R} + \frac{v_{1,\theta} + w_1}{R} + \frac{1}{2} \frac{w_{0,\theta}^2}{R^2} + \frac{w_{0,\theta} w_{1,\theta}}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{w_{1,\theta}^2}{R^2} \right) \right] \quad (2.34)$$

Assim, têm-se as seguintes componentes:

$$N_{x0} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ u_{0,x} + \frac{1}{2} w_{0,x}^2 + \nu \left( \frac{v_{0,\theta} + w_0}{R} + \frac{1}{2} \frac{w_{0,\theta}^2}{R^2} \right) \right] \quad (2.35a)$$

$$N_{x1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ u_{1,x} + w_{0,x} w_{1,x} + \frac{1}{2} w_{1,x}^2 + \nu \left( \frac{v_{1,\theta} + w_1}{R} + \frac{w_{0,\theta} w_{1,\theta}}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{w_{1,\theta}^2}{R^2} \right) \right] \quad (2.35b)$$

Utilizando o mesmo procedimento adotado para  $N_x$  e linearizando as expressões relativas aos esforços incrementais, obtém-se:

$$N_{x1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ u_{1,x} + w_{0,x} w_{1,x} + \nu \left( \frac{v_{1,\theta} + w_1}{R} + \frac{w_{0,\theta} w_{1,\theta}}{R^2} \right) \right] \quad (2.36a)$$

$$N_{\theta 1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{v_{1,\theta} + w_1}{R} + \frac{w_{0,\theta} w_{1,\theta}}{R^2} + \nu (u_{1,x} + w_{0,x} w_{1,x}) \right] \quad (2.36b)$$

$$N_{x\theta 1} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{u_{1,\theta}}{R} + v_{1,x} + \frac{w_{0,x} w_{1,\theta} + w_{1,x} w_{0,\theta} + w_{1,x} w_{1,\theta}}{R} \right) \quad (2.36c)$$

Voltando às equações de equilíbrio 2.32, obtêm-se as equações lineares de equilíbrio crítico

$$RN_{x1,x} + N_{x\theta 1,\theta} = 0 \quad (2.37a)$$

$$RN_{x\theta 1,x} + N_{\theta 1,\theta} = 0 \quad (2.37b)$$

$$D\nabla^4(w_1) + \frac{N_{\theta 1}}{R} - \left( N_{x0} w_{1,xx} + \frac{2}{R} N_{x\theta 0} w_{1,x\theta} + \frac{1}{R^2} N_{\theta 0} w_{1,\theta\theta} \right) = 0 \quad (2.37c)$$

Explicitando as equações de equilíbrio crítico em termos dos deslocamentos, obtém-se:

$$R^2 u_{1xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{1\theta\theta} + \frac{1+\nu}{2} R v_{1x\theta} + \nu R w_{1,x} = 0 \quad (2.38a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} R u_{1,x\theta} + \frac{1-\nu}{2} R^2 v_{1,xx} + v_{1,\theta\theta} + w_{1,\theta} = 0 \quad (2.38b)$$

$$D\nabla^4(w_1) + \frac{1}{R} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{v_{1,\theta} + w_1}{R} + \nu u_{1,x} \right) - \left( N_{x0} w_{1,xx} + \frac{2}{R} N_{x\theta 0} w_{1,x\theta} + \frac{1}{R^2} N_{\theta 0} w_{1,\theta\theta} \right) = 0 \quad (2.38c)$$

O sistema de equações acima é acoplado. Donnell (1935) desacoplou este sistema derivando duas vezes a Equação 2.38a com relação a  $x$  e explicitando  $v_{1,xxx\theta}$ . Depois, derivando duas vezes a Equação 2.38a com relação a  $\theta$ , obteve  $v_{1,x\theta\theta\theta}$ . A seguir, derivando a Equação 2.38b com relação a  $x$  e  $\theta$ , e substituindo nesta  $v_{1,xxx\theta}$  e  $v_{1,x\theta\theta\theta}$ , obteve:

$$-\nabla^4 u_1 = -\frac{w_{1,x\theta\theta}}{R^3} + \frac{\nu w_{1,xxx}}{R} \quad (2.39)$$

Derivando duas vezes a Equação 2.38b com relação a  $x$ , obteve  $u_{1,xxx\theta}$  e com relação a  $\theta$ , obteve  $u_{1,x\theta\theta\theta}$ . A seguir, derivando a Equação 2.38b com relação a  $x$  e  $\theta$ , e substituindo nesta  $u_{1,xxx\theta}$  e  $u_{1,x\theta\theta\theta}$ , obteve:

$$-\nabla^4 v_1 = (2+\nu) \frac{w_{1,xx\theta}}{R^2} + \frac{w_{1,\theta\theta\theta}}{R^4} \quad (2.40)$$

Finalmente, pré-multiplicando a Equação 2.38c pelo operador bi harmônico  $\nabla^4$ , derivando a Equação 2.39 com relação a  $x$  e a Equação 2.40 com relação a  $\theta$  e substituindo os resultados na terceira equação, obteve a seguinte equação em termos apenas do deslocamento transversal  $w$

$$D\nabla^8(w_1) + \frac{1}{R^2} \frac{Eh(1-\nu^2)}{1-\nu^2} w_{1,xxxx} - \nabla^4 \left( N_{x0} w_{1,xx} + \frac{2}{R} N_{x\theta 0} w_{1,x\theta} + \frac{1}{R^2} N_{\theta 0} w_{1,\theta\theta} \right) = 0 \quad (2.41)$$

onde

$$\nabla^8(w_1) = w_{1,xxxxxxx} + 4 \frac{w_{1,xxxxxx\theta\theta}}{R^2} + 6 \frac{w_{1,xxxx\theta\theta\theta\theta}}{R^4} + 4 \frac{w_{1,xx\theta\theta\theta\theta\theta\theta}}{R^6} + \frac{w_{1,\theta\theta\theta\theta\theta\theta\theta\theta}}{R^8} \quad (2.42)$$

As Equações 2.39, 2.40 e 2.41 formam o sistema desacoplado de equações de equilíbrio. Considerando, como de costume, um estado inicial de membrana, obtém-se para um dado carregamento o estado fundamental de equilíbrio descrito pelos esforços  $N_{x0}$ ,  $N_{x\theta 0}$  e  $N_{\theta 0}$ . Dos termos na Equação 2.41 contendo como coeficientes os esforços de membrana, obtém-se a matriz de rigidez geométrica.

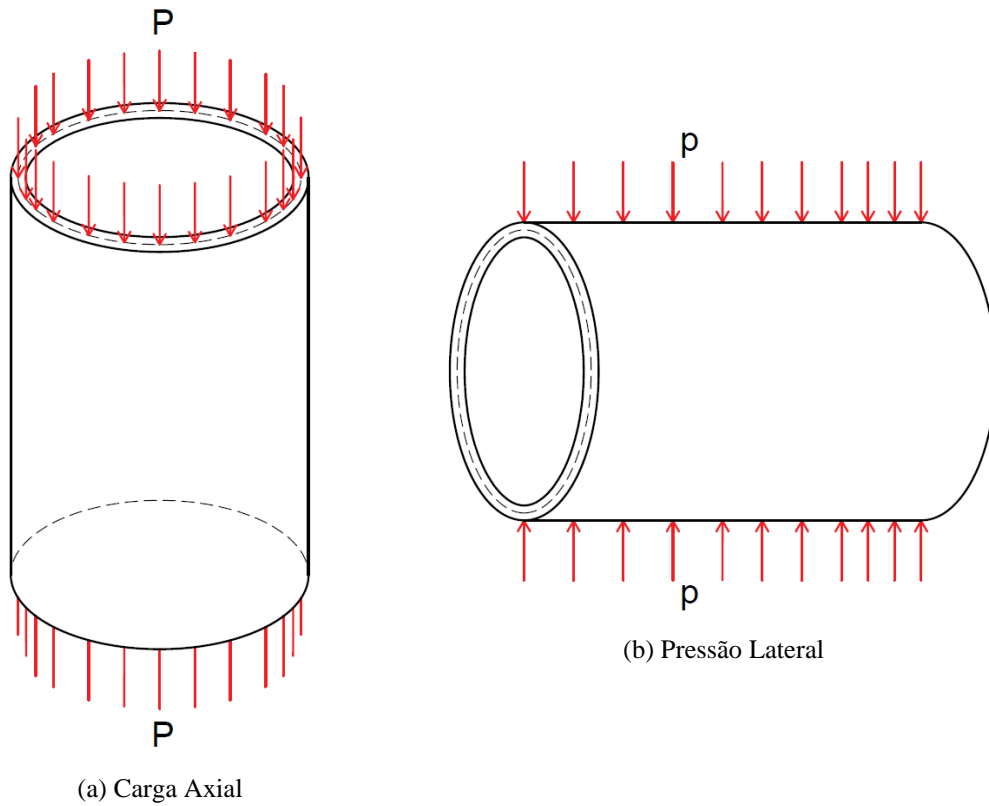


Figura 2.5 – Esquema de carregamentos axial e de pressão lateral na casca cilíndrica  
Fonte: Autor (2019).

O critério de equilíbrio adjacente também pode ser utilizado quando as rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  não são perpendiculares à superfície média da casca. Para este caso encontra-se o seguinte sistema de equações de equilíbrio crítico:

$$RN_{x1,x} + N_{x\theta 1,\theta} = 0 \quad (2.43a)$$

$$RN_{x\theta 1,x} + N_{\theta 1,\theta} = 0 \quad (2.43b)$$

$$D\nabla^4(w_1) + \frac{N_{\theta 1}}{R} - \left( N_{x0}w_{1,xx} + \frac{2}{R}N_{x\theta 0}w_{1,x\theta} + \frac{1}{R^2}N_{\theta 0}w_{1,\theta\theta} \right) = 0 \quad (2.43c)$$

$$Q_{x1} - M_{x1,x} - \frac{M_{x\theta 1,\theta}}{R} = 0 \quad (2.43d)$$

$$Q_{\theta 1} - M_{x\theta 1,x} - \frac{M_{\theta 1,\theta}}{R} = 0 \quad (2.43e)$$

### 2.14.1. Carga Axial

Para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada submetida a uma compressão uniforme  $P$ , como ilustra a Figura 2.4a, tem-se que o modo crítico é dado por:

$$w_1 = w_a \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \quad (2.44)$$

Por se tratar de compressão axial, tem-se que  $N_{x\theta 0}$  e  $N_{\theta 0}$  são nulos e que

$$N_{x0} = -\frac{P}{2\pi R} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.44) e (2.45) na Equação 2.41 tem-se:

$$D \left( \frac{m^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{Eh(1-\nu^2)}{R^2(1-\nu^2)} \frac{m^4\pi^4}{L^4} - \frac{P}{2\pi R} \left( \frac{m^3\pi^3}{L^3} + \frac{m\pi n^2}{R^2L} \right)^2 = 0 \quad (2.46)$$

Isolando  $P/2\pi R$ , tem-se:

$$\frac{P}{2\pi R} = \frac{Dk}{R^2} + \frac{Eh(1-\nu^2)}{1-\nu^2} \frac{1}{k}; \quad k = \frac{\left( \frac{m^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4}{\left( \frac{m^3\pi^3}{L^3} + \frac{m\pi n^2}{R^2L} \right)^2} \quad (2.47)$$

Ao minimizar a Equação 2.46 em relação a  $k$  podemos encontrar a carga crítica e observar que esta independe de  $m$  e  $n$ , sendo dada por



$$P_{cr} = \frac{2\pi E h^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (2.48)$$

Ao considerar as rotações como incógnitas, substituindo as funções de deslocamento nas equações de equilíbrio (Equação 2.43) obtém-se a matriz de rigidez geométrica para este caso:

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{m} = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \frac{1}{2\pi R} \quad (2.49)$$

A carga crítica axial,  $P$ , é obtida da solução do problema de autovalor:

$$([K] - P_{cr}[K_g])\{D\} = \{0\} \quad (2.50)$$

#### 2.14.2. Pressão Lateral

Para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada submetida a uma pressão lateral uniforme  $p$ , como ilustra a Figura 2.5b, tem-se que o modo crítico é dado por

$$w_1 = w_a \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \quad (2.51)$$

Por se tratar de pressão lateral, tem-se que  $N_{x0}$  e  $N_{x\theta 0}$  são nulos e que

$$N_{\theta 0} = -pR \quad (2.52)$$

Substituindo (2.51) e (2.52) na Equação 2.41 tem-se:

$$D \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{Eh(1-\nu^2)}{R^2(1-\nu^2)} \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - \frac{p}{R} \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^4 n^2 + 2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 n^4 + \frac{n^6}{R^4} \right] = 0 \quad (2.53)$$

Isolando  $p/R$  e multiplicando a Equação 2.53 por  $R^2$ , tem-se:

$$pR = D \frac{1}{n^2 R^2} \left( \frac{m^2 \pi^2 R^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 + \frac{Eh(1-\nu^2)}{1-\nu} \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^4 \left[ \left( \frac{L}{m\pi R} \right)^2 + \left( \frac{R}{n} \right)^2 \right]^2 \quad (2.54)$$

Para cada par de valores de  $m$  e  $n$  tem-se uma carga de bifurcação. O menor valor sempre será relacionado a  $m=1$ . Para determinadas relações geométricas de  $L/R$  e  $h/R$ , há um valor de  $n$  correspondente a uma pressão lateral crítica (menor autovalor).

Ao se considerar o efeito de cisalhamento, tem-se para a matriz de rigidez geométrica:

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{n} = \frac{n^2}{R} \quad (2.55)$$

e a pressão lateral crítica,  $p$ , é obtida a partir do problema de autovalor:

$$([K] - p_{cr}[K_g])\{D\} = \{0\} \quad (2.56)$$

### **3. Cascas cilíndricas sanduíche com gradação funcional**

Este capítulo apresenta a formulação matemática para uma casca cilíndrica com gradação funcional – as faces compostas de material de metal sólido e o núcleo de espuma de metal – derivando as equações de equilíbrio e de movimento. As matrizes de rigidez, rigidez geométrica e massa que permitem os cálculos das frequências naturais e cargas críticas são obtidas para uma casca simplesmente apoiada.

#### **3.1. Introdução**

As cascas com gradação funcional respeitam as mesmas hipóteses apresentadas na seção 2.1. A gradação funcional é a variação, em geral suave, da composição dos materiais ao longo da espessura da casca com o objetivo de se utilizar das características mecânicas e físicas mais convenientes de cada material. Essa variação obedece a uma determinada lei e evita descontinuidades de tensões ao longo da espessura e possíveis deslizamentos relativos que ocorrem em cascas constituídas de camadas de diferentes materiais unidas por algum tipo de colagem.

A casca cilíndrica em questão apresenta suas duas faces (externa e interna) de material metálico sólido e, ao se dirigir das faces para a superfície média da casca, a concentração deste material sólido vai diminuindo dando lugar a uma espuma metálica (Figura 3.1).

Esta composição propicia um melhor arranjo estrutural, pois é capaz de reduzir o peso total da estrutura sem comprometer seu desempenho como será mostrado ao longo deste trabalho.

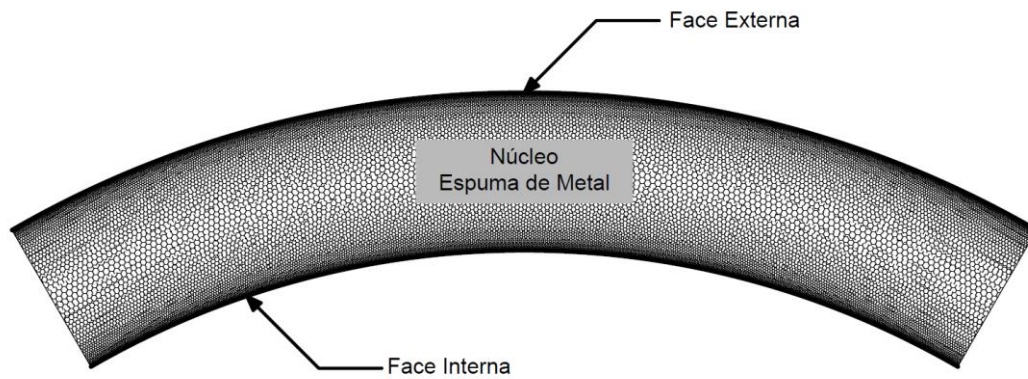


Figura 3.1 – Gradação de material constituinte da seção transversal da casca  
Fonte: Autor (2019).

### 3.2. Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos para uma casca cilíndrica com gradação funcional é o mesmo utilizado no capítulo anterior, Equação 2.1.

### 3.3. Relações cinemáticas

As equações que relacionam deformação com deslocamento para cascas cilíndricas com gradação funcional continuam sendo as mesmas das cascas isotrópicas e homogêneas apresentadas na Equação 2.3, assim como continuam válidas as considerações da Equação 2.4 para o cisalhamento.

### 3.4. Lei constitutiva

Novamente considera-se um material elástico e linear, obedecendo a Lei de Hooke. Por se tratar de material com gradação funcional, tanto o módulo de Young ( $E$ ) quanto o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) variam ao longo da espessura da casca. Desta forma, estes dois parâmetros do material são dependentes da coordenada  $z$  da casca. As leis de variação ao longo da espessura são:

$$E = (E_1 - E_2)V_b + E_2 \quad (3.1a)$$

$$\nu = (\nu_1 - \nu_2)V_b + \nu_2 \quad (3.1b)$$

onde o subscrito 1 se refere aos parâmetros relacionados a espuma metálica na superfície neutra e o subscrito 2 aos parâmetros do metal puro. O fator multiplicador  $V_b$  descreve a variação desses materiais ao longo da espessura. No presente trabalho adota-se a expressão:

$$V_b = \left[ \left( 1 - \frac{2z}{h} \right) \left( 1 + \frac{2z}{h} \right) \right]^{2S+1} \quad (3.2)$$

onde  $h$  é a espessura da casca,  $z$  é a distância à superfície média da casca variando entre  $-h/2$  e  $h/2$  e  $S$  é um número real maior que zero. A Figura 3.2 mostra a variação de  $V_b$  ao longo da espessura para valores seleccionados de  $S$ . Verifica-se que, à medida que  $S$  cresce, aumenta a espessura das camadas de material sólido nas duas faces. Quando  $S \rightarrow \infty$ , a solução converge para uma casca de material homogêneo.

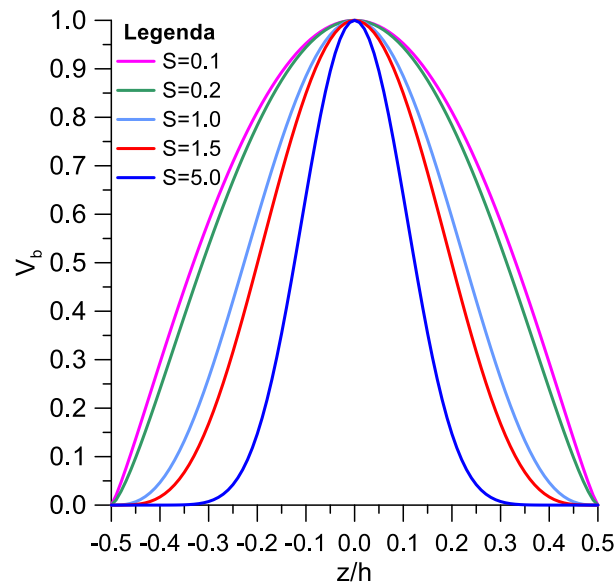


Figura 3.2 – Gráfico com a função de variação dos parâmetros físicos ao longo da casca com gradação funcional  
Fonte: Autor (2019).

### 3.5. Relação tensão-deformação

Tendo em mãos as relações cinemáticas e levando em conta a lei constitutiva descrita no item 3.4, as expressões das relações tensão-deformação continuam sendo dadas pela Equação 2.5.

### 3.6. Esforços Internos

Os esforços internos na casca são obtidos integrando as tensões ao longo de sua espessura. Como os parâmetros  $E$  e  $\nu$  dependem de  $z$ , para a teoria clássica tem-se que

$$N_x = \int \sigma_x dz = u_{,x} \int \frac{E}{1-\nu^2} dz + \frac{(v_{,\theta} + w)}{R} \int \frac{E\nu}{1-\nu^2} dz \quad (3.3a)$$

$$N_\theta = \int \sigma_\theta dz = \frac{(v_{,\theta} + w)}{R} \int \frac{E}{1-\nu^2} dz + u_{,x} \int \frac{E\nu}{1-\nu^2} dz \quad (3.3b)$$

$$N_{x\theta} = \int \tau_{x\theta} dz = \left( \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right) \int \frac{E}{2(1+\nu)} dz \quad (3.3c)$$

$$M_x = \int \sigma_x z dz = w_{,xx} \int \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz + \frac{w_{,\theta\theta}}{R^2} \int \frac{E\nu}{1-\nu^2} z^2 dz \quad (3.3d)$$

$$M_\theta = \int \sigma_\theta z dz = \frac{w_{,\theta\theta}}{R^2} \int \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz + w_{,xx} \int \frac{E\nu}{1-\nu^2} z^2 dz \quad (3.3e)$$

$$M_{x\theta} = \int \tau_{x\theta} z dz = \frac{w_{,x\theta}}{R} \int \frac{E}{2(1+\nu)} z^2 dz \quad (3.3f)$$

Quando se considera a deformação por cisalhamento, os esforços  $N_x$ ,  $N_\theta$  e  $N_{x\theta}$  são exatamente os mesmos da Equação 3.3a – c, e os momentos e cortantes são dados por:

$$M_x = \int \sigma_x z dz = \beta_{x,x} \int \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz + \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \int \frac{E\nu}{1-\nu^2} z^2 dz \quad (3.4a)$$

$$M_\theta = \int \sigma_\theta z dz = \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \int \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz + \beta_{x,x} \int \frac{E\nu}{1-\nu^2} z^2 dz \quad (3.4b)$$

$$M_{x\theta} = \int \tau_{x\theta} z dz = \left( \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right) \int \frac{E}{2(1+\nu)} z^2 dz \quad (3.4c)$$

$$Q_x = \int \tau_{xz} dz = (\beta_x + w_{,x}) \int \frac{E}{2(1+\nu)} dz \quad (3.4d)$$

$$Q_\theta = \int \tau_{\theta z} dz = \left(\beta_\theta + \frac{w_{,\theta}}{R}\right) \int \frac{E}{2(1+\nu)} dz \quad (3.4e)$$

Como mencionado anteriormente,  $N_x$ ,  $N_\theta$  e  $N_{x\theta}$  são as intensidades das forças normais e de cisalhamento no plano da casca;  $M_x$ ,  $M_\theta$  e  $M_{x\theta}$  são os momentos fletores e torsor; e  $Q_x$  e  $Q_\theta$  são as forças cisalhantes transversais.

### 3.7. Energia de deformação

A energia armazenada pela casca cilíndrica com graduação funcional ao se deformar é calculada através da integral de volume

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}) R dz d\theta dx \quad (3.5)$$

Tem-se, pois, considerando respectivamente três variáveis e cinco variáveis independentes:

$$U_d = \iint \frac{R}{2} \left[ \left( w_{,xx} + \frac{w_{,\theta\theta}}{R^2} \right)^2 \int \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz + \frac{4w_{,x\theta}^2}{R^2} \int \frac{E}{2(1+\nu)} z^2 dz \right] + \frac{R}{2} \left\{ \left[ u_{,x}^2 + \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right)^2 \right] \int \frac{E}{1-\nu^2} dz + \left( \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right)^2 \int \frac{E}{2(1+\nu)} dz + 2 \left[ \frac{u_{,x}(v_{,\theta} + w)}{R} \right] \right\} d\theta dx \quad (3.6)$$

$$U_d = \iint \frac{R}{2} \left[ \left( \beta_{x,x}^2 + \frac{\beta_{\theta,\theta}^2}{R^2} \right) \int \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz + \left( \beta_{\theta,x}^2 + \frac{2\beta_{x,\theta}\beta_{\theta,x}}{R} + \frac{\beta_{x,\theta}^2}{R^2} \right) \int \frac{E}{2(1+\nu)} z^2 dz + \frac{2\beta_{xx}\beta_{\theta\theta}}{R} \int \frac{Ev}{1-\nu^2} z^2 dz \right] + \frac{R}{2} \left\{ \left( u_x^2 + \frac{v_{\theta}^2 + w^2}{R^2} + \frac{2v_{\theta}w}{R^2} \right) \int \frac{E}{1-\nu^2} dz + \left[ \frac{u_{\theta}^2 + w_{\theta}^2}{R^2} + w_x^2 + v_x^2 + \beta_x^2 + \beta_\theta^2 + 2 \left( \frac{u_{\theta}v_{,x} + \beta_{\theta}w_{,\theta}}{R} + \beta_{,x}w_{,x} \right) \right] \int \frac{E}{2(1+\nu)} dz + 2 \left( \frac{u_x v_{\theta} + u_x w}{R} \right) \int \frac{Ev}{1-\nu^2} dz \right\} d\theta dx \quad (3.7)$$

Nas duas equações acima os termos relacionados às integrais com  $z^2$  estão associados à energia de flexão da casca e os demais estão associados à energia de membrana da casca.

### 3.8. Energia cinética

Nesse caso, para materiais com gradação funcional, a massa específica do material,  $\rho$ , assim como  $E$  e  $\nu$ , varia na direção radial da casca, ou seja, é dependente de  $z$ . A lei de variação é a mesma utilizada na Equação 3.1, ou seja:

$$\rho = (\rho_1 - \rho_2)V_b + \rho_2 \quad (3.8)$$

com  $V_b$  dado pela Equação 3.5 e os subscritos 1 e 2 se referindo, respectivamente, à massa específica da espuma metálica na superfície neutra e ao metal puro. Utilizando o campo de deslocamentos dado pela Equação 2.1, a energia cinética (Eq. 2.10) é integrada ao longo da espessura da casca e obtém-se, respectivamente, a energia considerando três variáveis e cinco variáveis independentes:

$$T = \iint \frac{R}{2} (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) \left( \int \rho dz \right) d\theta dx \quad (3.9)$$

$$T = \iint \frac{R}{2} (\beta_{x,t}^2 + \beta_{\theta,t}^2) \left( \int \rho z^2 dz \right) + \frac{R}{2} (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) \left( \int \rho dz \right) d\theta dx \quad (3.10)$$

### 3.9. Equações de Euler-Lagrange

As equações de Euler-Lagrange continuam as mesmas apresentadas nas Equações 2.13 e 2.14.



### 3.10. Frequências Naturais

Os modos de vibração de uma casca cilíndrica sanduíche simplesmente apoiada com gradação funcional são os mesmos utilizados na Equação 2.19. Substituindo tal solução diretamente nas equações de movimento linearizadas, obtêm-se as frequências naturais através de um problema de autovalor generalizado (Equação 2.20) que é função da matriz de rigidez e de massa.

#### 3.10.1. Matriz de Rigidez

Os elementos constituintes da matriz de rigidez (Eq. 2.22), no caso da teoria clássica, são dados por (onde  $K_{ij}=K_{ji}$ , devido à simetria)

$$K_{11} = R \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 I_1 + \frac{n^2}{R} I_7 \quad (3.11a)$$

$$K_{12} = -\frac{m\pi n}{L} (I_4 + I_7) \quad (3.11b)$$

$$K_{13} = -\frac{m\pi}{L} I_4 \quad (3.11c)$$

$$K_{22} = R \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 I_7 + \frac{n^2}{R} I_1 \quad (3.11d)$$

$$K_{23} = \frac{n}{R} I_1 \quad (3.11e)$$

$$K_{33} = \frac{I_1}{R} + \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{n^4}{R^3} \right] I_3 + \frac{2}{R} \left( \frac{m\pi n}{L} \right)^2 I_6 + \frac{1}{R} \left( \frac{m\pi n}{L} \right)^2 I_9 \quad (3.11f)$$

Para a formulação considerando o efeito do cortante (Eq. 2.24), os elementos da matriz são:

$$K_{11} = R \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 I_1 + \frac{n^2}{R} I_7 \quad (3.12a)$$

$$K_{12} = -\frac{m\pi n}{L} (I_4 + I_7) \quad (3.12b)$$

$$K_{13} = -\frac{m\pi}{L} I_4 \quad (3.12c)$$

$$K_{14} = 0 \quad (3.12d)$$

$$K_{15} = 0 \quad (3.12e)$$

$$K_{22} = R \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 I_7 + \frac{n^2}{R} I_1 \quad (3.12f)$$

$$K_{23} = \frac{n}{R} I_1 \quad (3.12g)$$

$$K_{24} = 0 \quad (3.12h)$$

$$K_{25} = 0 \quad (3.12i)$$

$$K_{33} = \frac{I_1}{R} + \left[ R \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R} \right] I_7 \quad (3.12j)$$

$$K_{34} = R \frac{m\pi}{L} I_7 \quad (3.12k)$$

$$K_{35} = -n I_7 \quad (3.12l)$$

$$K_{44} = R I_7 + R \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 I_3 + \frac{n^2}{R} I_9 \quad (3.12m)$$

$$K_{45} = -\frac{m\pi n}{L} (I_6 + I_9) \quad (3.12n)$$

$$K_{55} = R I_7 + R \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 I_9 + \frac{n^2}{R} I_3 \quad (3.12o)$$

Nas Equações 3.11 e 3.12 os termos  $I_i$  (com  $i = 1..9$ ) são integrais ao longo da espessura da casca e são funções dos parâmetros físicos  $E$  e  $\nu$  que dependem da coordenada  $z$ , sendo dados por:

$$I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1 - \nu^2} dz \quad (3.13a)$$

$$I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1 - \nu^2} z^2 dz \quad (3.13b)$$

$$I_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E\nu}{1 - \nu^2} dz \quad (3.13c)$$

$$I_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E\nu}{1 - \nu^2} z^2 dz \quad (3.13d)$$

$$I_7 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1 + \nu)} dz \quad (3.13e)$$

$$I_9 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} z^2 dz \quad (3.13f)$$

onde as integrais omitidas –  $I_2$ ,  $I_5$  e  $I_8$  – são nulas.

As matrizes de rigidez obtidas pela substituição da solução analítica nas equações de movimento, considerando três e cinco variáveis independentes, são apresentadas nos Apêndice A3 e A4, respectivamente.

### 3.10.2. Matriz de Massa

Os elementos da matriz de massa da casca sanduíche com gradação funcional são dados por:

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = -\frac{LR\pi}{2} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \right) \omega^2 \quad (3.14a)$$

$$M_{44} = M_{55} = -\frac{LR\pi}{2} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \right) \omega^2 \quad (3.14b)$$

Cabe salientar que para formulação com três variáveis, obviamente,  $M_{44}$  e  $M_{55}$  não são considerados.

### 3.11. Cargas Críticas

As Equações 2.37 e 2.43, que tratam das equações de equilíbrio, com os termos dos carregamentos ( $N_{x0}$ ,  $N_{x\theta 0}$  e  $N_{\theta 0}$ , que estão na Equação 2.37c e 2.43c) são novamente utilizadas para o cálculo das cargas críticas de cascas cilíndricas sanduíche com gradação funcional. As matrizes de rigidez geométrica para a carga axial (Eq. 2.49) e para pressão lateral (Eq. 2.55) permanecem válidas e as cargas críticas são obtidas dos problemas de autovalor definidos pelas equações 2.50 e 2.56.

## 4. Cascas cilíndricas sanduíche com cisalhamento no núcleo

Para efeito de comparação com a casca com graduação funcional apresentada no capítulo anterior, este capítulo apresenta a formulação matemática da teoria de cascas cilíndricas sanduíche que considera o efeito do cisalhamento no núcleo. As equações de equilíbrio e de movimento são derivadas. As cascas sanduíche são cascas compostas de três camadas bem definidas onde as faces externas de metal isotrópico estão separadas entre si pelo núcleo, no presente caso de espuma metálica. Novamente, as matrizes de rigidez, de rigidez geométrica e de massa que permitem os cálculos das frequências naturais e cargas críticas são obtidas.

### 4.1. Introdução

As hipóteses introduzidas no Capítulo 2 são também utilizadas aqui. A exceção feita é em relação às rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$ . Elas são, necessariamente, não perpendiculares à superfície média da casca resultando em um problema com cinco incógnitas (três translações e duas rotações). As faces de metal possuem espessura  $t_f$  e são homogêneas e isotrópicas. Já o núcleo apresenta espuma metálica com graduação funcional com espessura  $t_c$  (Figura 4.1).

Magnucka-Blandzi (2011) analisou uma placa sanduíche retangular simplesmente apoiada comprimida em seu próprio plano. Considera-se que apenas no núcleo o efeito do cisalhamento transversal é importante. A Figura 4.2 mostra esquematicamente a deformação da seção transversal da estrutura sanduíche.

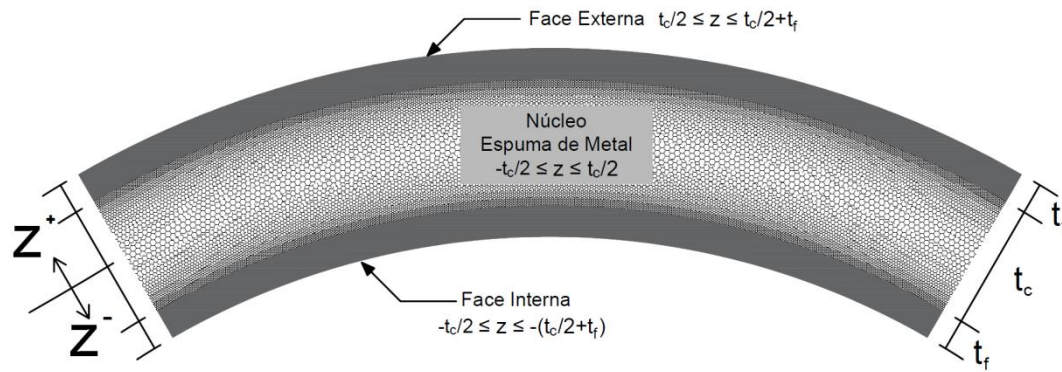


Figura 4.1 – Seção transversal da casca com as três camadas

Fonte: Autor (2019).

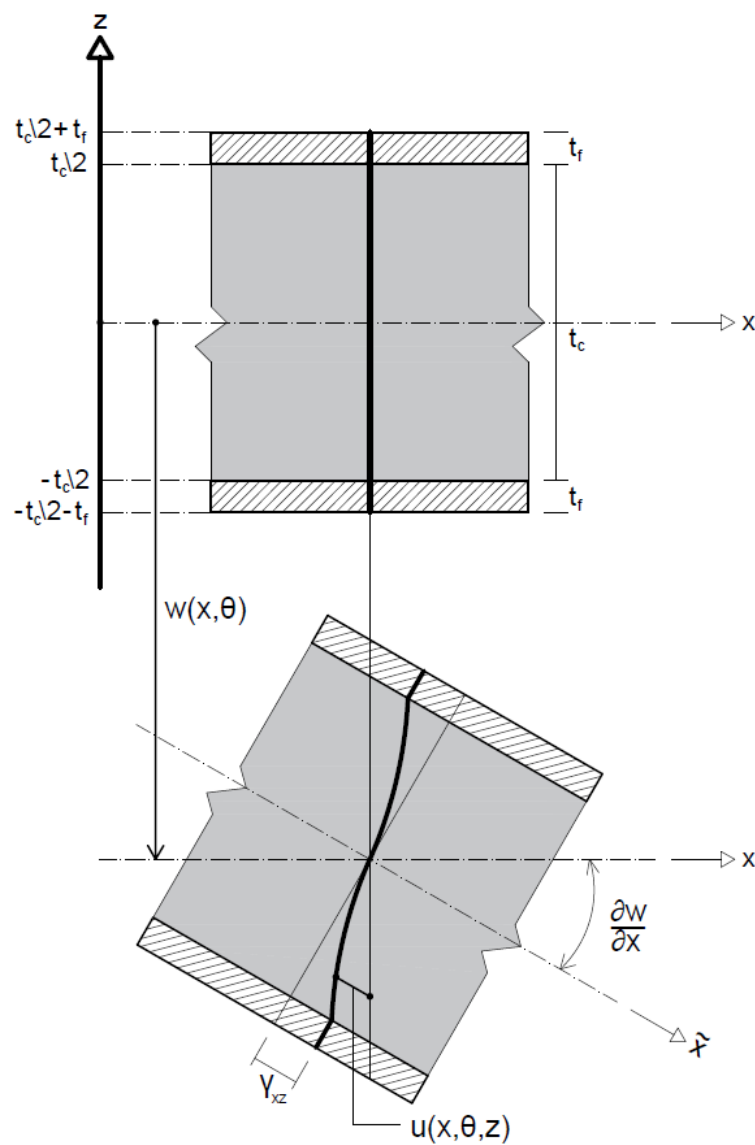


Figura 4.2 – Deformação da seção transversal da casca sanduíche

Fonte: Autor (2019).

## 4.2. Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos para a casca cilíndrica sanduíche para cada uma das três camadas é dado por:

$$U_i(x, \theta, z, t) = u(x, \theta, t) + z\beta_x(x, \theta, t) \quad (4.1a)$$

$$V_i(x, \theta, z, t) = v(x, \theta, t) + z\beta_\theta(x, \theta, t) \quad (4.1b)$$

$$W_i(x, \theta, t) = w(x, \theta, t) \quad (4.1c)$$

onde  $u$  é o deslocamento axial,  $v$  é o deslocamento circunferencial,  $w$  é a deflexão (ou deslocamento radial) da superfície média da casca,  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são as rotações em relação a esta superfície concernentes às coordenadas  $x$  e  $\theta$ . O subscrito  $i$  vai de 1 a 3 onde 1 e 3 referem-se às camadas da face superior e inferior, nesta ordem, e o subscrito 2 se refere à camada do núcleo da casca. Os limites dessas camadas estão definidos na Figura 4.1. Cabe ressaltar que se considera o efeito do cisalhamento apenas no núcleo.

## 4.3. Relações cinemáticas

As relações cinemáticas lineares para as três camadas da casca sanduíche são dadas por:

$$\varepsilon_{ix} = U_{i,x} \quad (4.2a)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = \frac{V_{i,\theta} + W_i}{R} \quad (4.2b)$$

$$\gamma_{ix\theta} = \frac{U_{i,\theta}}{R} + V_{i,x} \quad (4.2c)$$

com  $i$  variando de 1 a 3. Para a camada do núcleo se acrescentam as deformações distorcionais que caracterizam o efeito do cisalhamento nesta região

$$\gamma_{2xz} = \beta_{2x} + W_{2,x} \quad (4.3a)$$

$$\gamma_{2\theta z} = \beta_{2\theta} + \frac{W_{2,\theta}}{R} \quad (4.3b)$$

#### 4.4. Lei constitutiva

Seguindo o trabalho de Magnucka-Blandzi (2011), para as camadas das faces, o módulo de elasticidade ( $E_f$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu_f$ ) são constantes, assim como, o coeficiente de Poisson do núcleo  $\nu_c$ . Por considerar que a densidade da espuma metálica varia ao longo da espessura, considera-se que seu módulo de Young é dependente da coordenada  $z$  e segue a seguinte lei:

$$E_c = E_f \left[ 1 - \left( 1 - \frac{E_{c0}}{E_f} \right) \cos \left( \frac{\pi z}{t_c} \right) \right] \quad (4.4a)$$

$$\nu_c = \nu_{c0} \quad (4.4b)$$

onde o subscrito  $c$  se refere aos parâmetros relacionados à espuma metálica (núcleo) e o subscrito  $f$  aos parâmetros do metal puro (faces).  $E_{c0}$  e  $\nu_{c0}$  são, respectivamente, os valores do módulo de Young e o coeficiente de Poisson da espuma na posição  $z = 0$ .

A Figura 4.3 ilustra como variam os parâmetros físicos ao longo da espessura da casca sanduíche.

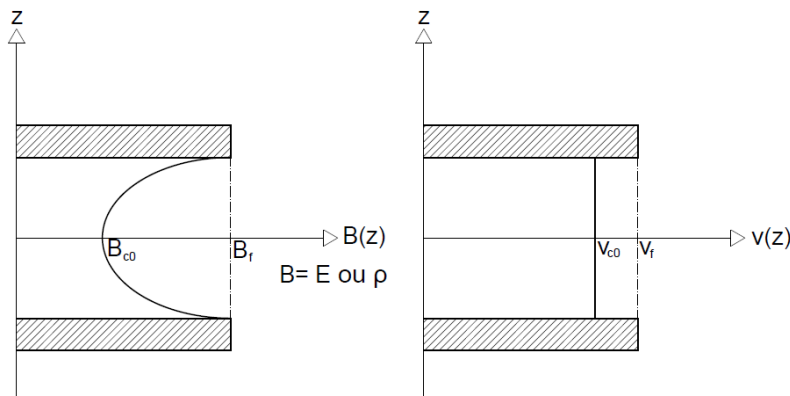


Figura 4.3 – Variação dos parâmetros físicos ao longo da seção transversal da casca sanduíche

Fonte: Autor (2019).

#### 4.5. Relação tensão-deformação

Com base nas Equações 4.2 e 4.3 de cada uma das camadas além da relação constitutiva descrita no item 4.4, as relações tensão-deformação dadas pela elasticidade são:

$$\sigma_{ix} = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{ix} + \nu_i \varepsilon_{i\theta}) \quad (4.5a)$$

$$\sigma_{i\theta} = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{i\theta} + \nu_i \varepsilon_{ix}) \quad (4.5b)$$

$$\tau_{ix\theta} = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \gamma_{ix\theta} \quad (4.5c)$$

$$\tau_{2xz} = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} \gamma_{2xz} \quad (4.5d)$$

$$\tau_{2\theta z} = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} \gamma_{2\theta z} \quad (4.5e)$$

com  $i$  assumindo valores de 1 a 3. Quando  $i$  for igual a 1 ou 3,  $E_i$  e  $\nu_i$  passam a ser  $E_f$  e  $\nu_f$ . Ao assumir o valor 2, tem-se  $E_c$  e  $\nu_c$ .

#### 4.6. Esforços Internos

Os esforços que atuam na casca são obtidos a partir da integração das tensões ao longo da espessura. Como a casca é composta de três camadas, dividem-se os esforços em três parcelas. Assim, os esforços internos para a camada da face superior são dados por:

$$N_{1x} = \int_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2} + t_f} \sigma_{1x} dz = \frac{E_f t_f}{1 - \nu_f^2} \left\{ \frac{\left( \beta_{x,x} + \nu_f \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \right) (t_c + t_f)}{2} + \left[ u_{,x} + \nu_f \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right) \right] \right\} \quad (4.6a)$$

$$N_{1\theta} = \int_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2} + t_f} \sigma_{1\theta} dz = \frac{E_f t_f}{1 - \nu_f^2} \left\{ \frac{\left( \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \nu_f \beta_{x,x} \right) (t_c + t_f)}{2} + \left[ \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \nu_f u_{,x} \right] \right\} \quad (4.6b)$$

$$N_{1x\theta} = \int_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2} + t_f} \tau_{1x\theta} dz = \frac{E_f t_f}{2(1 + \nu_f)} \left[ \frac{\left( \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right) (t_c + t_f)}{2} + \frac{u_{,\theta}}{R} + \nu_f v_{,x} \right] \quad (4.6c)$$



$$M_{1x} = \int_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}+t_f} \sigma_{1x} z dz = \frac{E_f t_f}{3(1-\nu^2)} \left( \beta_{x,x} + \nu_f \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \right) \left( \frac{3t_c^2}{4} + \frac{3t_c t_f}{2} + t_f^2 \right) + \frac{E_f t_f}{1-\nu_f^2} \left[ u_{,x} + \nu_f \left( \frac{v_{,\theta}+w}{R} \right) \right] \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \quad (4.6d)$$

$$M_{1\theta} = \int_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}+t_f} \sigma_{1\theta} z dz = \frac{E_f t_f}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \nu_f \beta_{x,x} \right) \left( \frac{3t_c^2}{4} + \frac{3t_c t_f}{2} + t_f^2 \right) + \frac{E_f t_f}{1-\nu_f^2} \left[ \frac{v_{,\theta}+w}{R} + \nu_f u_{,x} \right] \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \quad (4.6e)$$

$$M_{1x\theta} = \int_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}+t_f} \tau_{1x\theta} z dz = \frac{E_f t_f}{6(1+\nu_f^2)} \left[ \left( \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right) \left( \frac{3t_c^2}{4} + \frac{3t_c t_f}{2} + t_f^2 \right) + 3 \left( \frac{u_{\theta}}{R} + v_x \right) \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \right] \quad (4.6f)$$

para a camada do núcleo, por:

$$N_{2x} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \sigma_{2x} dz = \frac{t_c}{1-\nu_c^2} \left[ \frac{2(E_{c0} - E_f)}{\pi} + E_f \right] \left[ u_{,x} + \nu_c \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right) \right] \quad (4.7a)$$

$$N_{2\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \sigma_{2\theta} dz = \frac{t_c}{1-\nu_c^2} \left[ \frac{2(E_{c0} - E_f)}{\pi} + E_f \right] \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \nu_c u_{,x} \right) \quad (4.7b)$$

$$N_{2x\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \tau_{2x\theta} dz = \frac{t_c}{1+\nu_c} \left( \frac{E_{c0} - E_f}{\pi} + \frac{E_f}{2} \right) \left( \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right) \quad (4.7c)$$

$$M_{2x} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \sigma_{2x} z dz = \frac{t_c^3}{1-\nu_c^2} \left[ \frac{4(E_f - E_{c0})}{\pi^3} + \frac{E_{c0} - E_f}{2\pi} + \frac{E_f}{12} \right] \left( \beta_{x,x} + \nu_c \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \right) \quad (4.7d)$$

$$M_{2\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \sigma_{2\theta} z dz = \frac{t_c^3}{1-\nu_c^2} \left[ \frac{4(E_f - E_{c0})}{\pi^3} + \frac{E_{c0} - E_f}{2\pi} + \frac{E_f}{12} \right] \left( \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \nu_c \beta_{x,x} \right) \quad (4.7e)$$

$$M_{2x\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \tau_{2x\theta} dz = \frac{t_c^3}{1+\nu_c} \left[ \frac{2(E_f - E_{c0})}{\pi^3} + \frac{E_{c0} - E_f}{4\pi} + \frac{E_f}{24} \right] \left( \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right) \quad (4.7f)$$

$$Q_{2x} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \tau_{2xz} dz = \frac{t_c}{1+\nu_c} \left( \frac{E_{c0} - E_f}{\pi} + \frac{E_f}{2} \right) (\beta_x + w_{,x}) \quad (4.7g)$$

$$Q_{2\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \tau_{2\theta z} dz = \frac{t_c}{1+\nu_c} \left( \frac{E_{c0} - E_f}{\pi} + \frac{E_f}{2} \right) \left( \beta_\theta + \frac{w_{,\theta}}{R} \right) \quad (4.7h)$$

e, por fim, para a camada da face inferior, por:

$$N_{3x} = \int_{-\frac{t_c}{2}-t_f}^{-\frac{t_c}{2}} \sigma_{1x} dz = \frac{E_f t_f}{1-\nu_f^2} \left\{ -\frac{(\beta_{x,x} + \nu_f \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R})(t_c + t_f)}{2} + \left[ u_{,x} + \nu_f \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right) \right] \right\} \quad (4.8a)$$

$$N_{3\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}-t_f}^{-\frac{t_c}{2}} \sigma_{1\theta} dz = \frac{E_f t_f}{1-\nu_f^2} \left\{ -\frac{(\frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \nu_f \beta_{x,x})(t_c + t_f)}{2} + \left[ \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \nu_f u_{,x} \right] \right\} \quad (4.8b)$$

$$N_{3x\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}-t_f}^{-\frac{t_c}{2}} \tau_{1x\theta} dz = \frac{E_f t_f}{2(1+\nu_f)} \left[ -\frac{(\frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x})(t_c + t_f)}{2} + \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right] \quad (4.8c)$$

$$M_{3x} = \int_{-\frac{t_c}{2}-t_f}^{-\frac{t_c}{2}} \sigma_{1x} z dz = \frac{E_f t_f}{3(1-\nu^2)} \left( \beta_{x,x} + \nu_f \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \right) \left( \frac{3t_c^2}{4} + \frac{3t_c t_f}{2} + t_f^2 \right) - \frac{E_f t_f}{1-\nu_f^2} \left[ u_{,x} + \nu_f \left( \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right) \right] \left( \frac{t_c + t_f}{2} \right) \quad (4.8d)$$

$$M_{3\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}-t_f}^{-\frac{t_c}{2}} \sigma_{1\theta} z dz = \frac{E_f t_f}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \nu_f \beta_{x,x} \right) \left( \frac{3t_c^2}{4} + \frac{3t_c t_f}{2} + t_f^2 \right) - \frac{E_f t_f}{1-\nu_f^2} \left[ \frac{v_{,\theta} + w}{R} + \nu_f u_{,x} \right] \left( \frac{t_c + t_f}{2} \right) \quad (4.8e)$$

$$M_{3x\theta} = \int_{-\frac{t_c}{2}-t_f}^{-\frac{t_c}{2}} \tau_{1x\theta} z dz = \frac{E_f t_f}{6(1+\nu_f^2)} \left[ \left( \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right) \left( \frac{3t_c^2}{4} + \frac{3t_c t_f}{2} + t_f^2 \right) - 3 \left( \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right) \left( \frac{t_c + t_f}{2} \right) \right] \quad (4.8f)$$

Assim, as resultantes dos esforços internos da casca são dados por:

$$N_k = \sum_{i=1}^3 N_{ik}, k = x, \theta, x\theta \quad (4.9a)$$

$$M_k = \sum_{i=1}^3 M_{ik}, k = x, \theta, x\theta \quad (4.9b)$$

$$Q_k = Q_{2k}, k = x, \theta \quad (4.9c)$$

#### 4.7. Energia de deformação

A energia interna de deformação é calculada através da integral ao longo do volume para cada camada, ou seja:

$$U_{id} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{ix}\varepsilon_{ix} + \sigma_{i\theta}\varepsilon_{i\theta} + \tau_{ix\theta}\gamma_{ix\theta}) R dz d\theta dx; i = 1,3 \quad (4.10a)$$

$$U_{2d} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{2x}\varepsilon_{2x} + \sigma_{2\theta}\varepsilon_{2\theta} + \tau_{2x\theta}\gamma_{2x\theta} + \tau_{2xz}\gamma_{2xz} + \tau_{2\theta z}\gamma_{2\theta z}) R dz d\theta dx \quad (4.10b)$$

Integrando (4.10) ao longo da espessura da casca, obtém-se a energia de deformação por unidade de área da superfície de referência. Essas expressões são apresentadas no Apêndice B1 por se tratarem de expressões com elevado número de termos. A energia de deformação total é dada por

$$U_d = U_{1d} + U_{2d} + U_{3d} \quad (4.11)$$

#### 4.8. Energia cinética

Para as faces, a massa específica é constante e igual a  $\rho_f$ , já para o material do núcleo a lei de variação ao longo da espessura é a mesma utilizada na Equação 4.4a, ou seja:

$$\rho_c = \rho_f \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\rho_{c0}}{\rho_f} \right) \cos \left( \frac{\pi z}{t_c} \right) \right] \quad (4.12)$$

onde os subscritos  $c0$  e  $f$  se referem, respectivamente, à massa específica da espuma metálica e do metal puro. Utilizando o campo de deslocamentos da Equação 4.1 e integrando ao longo do volume tem-se que a expressão para a energia cinética para a  $i$ -ésima camada:

$$T_i = \frac{1}{2} \iiint \rho (U_{i,t}^2 + V_{i,t}^2 + W_{i,t}^2) R \, dz \, d\theta \, dx \quad (4.13)$$

onde  $i$  varia de 1 a 3. Integrando ao longo das três camadas da casca obtém-se:

$$T = \iint R \rho_f t_f \left[ \frac{(3t_c^2 + 6t_c t_f + 4t_f^2)(\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_\theta^2)}{12} + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right] + \frac{R t_c}{24\pi^3} \left[ (12\pi^3 \rho_f + 24\pi^2 \rho_{c0} - 24\pi^2 \rho_f)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + (\pi^3 t_c^2 \rho_f + 6\pi^2 t_c^2 \rho_{c0} - 6\pi^2 t_c^2 \rho_f - 48t_c^2 \rho_{c0} + 48t_c^2 \rho_f)(\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_\theta^2) \right] d\theta \, dx \quad (4.14)$$

#### 4.9. Equações de Euler-Lagrange

As equações de Euler-Lagrange continuam as mesmas apresentadas nas Equações 2.13 e 2.14.

#### 4.10. Equações de movimento

A partir das equações de Euler-Lagrange, têm-se as equações de movimento da casca cilíndrica sanduíche em função dos esforços internos, sendo estas dadas por:

$$N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} + \alpha \ddot{u} = 0 \quad (4.15a)$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} + \alpha \ddot{v} = 0 \quad (4.15b)$$

$$-\frac{N_\theta}{R} + Q_{x,x} + \frac{Q_{\theta,\theta}}{R} + \alpha \ddot{w} = 0 \quad (4.15c)$$

$$-Q_x + M_{x,x} + \frac{M_{x\theta,\theta}}{R} + \eta \ddot{\beta}_x = 0 \quad (4.15d)$$

$$-Q_\theta + M_{x\theta,x} + \frac{M_{\theta,\theta}}{R} + \eta \ddot{\beta}_\theta = 0 \quad (4.15e)$$

onde  $\alpha$  e  $\eta$  são constantes que dependem de parâmetros físicos e geométricos, sendo dadas por

$$\alpha = \frac{\pi \rho_f (t_c + 2t_f) + 2t_c (\rho_{c0} - \rho_f)}{\pi} \quad (4.16a)$$

$$\eta = \frac{\pi^3 \rho_f (t_c^3 + 6t_c^2 t_f + 12t_c t_f^2 + 8t_f^3) + t_c^3 (6\pi^2 - 48) (\rho_{c0} - \rho_f)}{12\pi^3} \quad (4.16b)$$

#### 4.11. Equações de equilíbrio

Ao se retirar das Equações 4.16 ou 4.17 os termos com derivadas em relação ao tempo, tem-se as equações de equilíbrio da casca sanduíche, a saber:

$$N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (4.17a)$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (4.17b)$$

$$-\frac{N_\theta}{R} + Q_{x,x} + \frac{Q_{\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (4.17c)$$

$$-Q_x + M_{x,x} + \frac{M_{x\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (4.17d)$$

$$-Q_\theta + M_{x\theta,x} + \frac{M_{\theta,\theta}}{R} = 0 \quad (4.17e)$$

#### 4.12. Vibração Livre

Os modos de vibração da casca cilíndrica sanduíche simplesmente apoiada são os mesmos dados pela Equação 2.19. Substituindo as expressões dos modos de vibração nas equações 4.17, obtêm-se as matrizes de massa e rigidez da casca sanduíche.

##### 4.12.1. Matriz de Rigidez

Os elementos constituintes da matriz de rigidez ([K]) possuem parcelas muito extensas e, em virtude desse fato, são apresentadas no Apêndice A6 deste trabalho.

#### 4.12.2. Matriz de Massa

Os elementos constituintes da matriz de massa são:

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = -\alpha\omega^2 \quad (4.23a)$$

$$M_{44} = M_{55} = -\eta\omega^2 \quad (4.23b)$$

onde  $\alpha$  e  $\eta$  são os citados na Equação 4.18.

#### 4.13. Frequências Naturais

Obtidas as matrizes de massa e rigidez, obtêm-se as frequências naturais através da Equação 2.20.

#### 4.14. Cargas Críticas

A Equação 2.43, que trata das equações de equilíbrio abordada no Capítulo 2, com os termos dos carregamentos ( $N_{x0}$ ,  $N_{x\theta\theta}$  e  $N_{\theta\theta}$ , Equação 2.43c) são novamente utilizadas para o cálculo das cargas críticas em cascas cilíndricas sanduíche. No caso da casca sanduíche, os esforços internos presentes nestas equações são, agora, dados pela Equação 4.9. As matrizes de rigidez geométrica são as mesmas das Equações 2.49 (para carga axial) e 2.55 (para pressão lateral). As cargas críticas são obtidas através das Equações 2.50 e 2.56.

## 5. Estudo das Frequências Naturais

Este capítulo traz um estudo das frequências naturais comparando as três teorias de cascas cilíndricas abordadas nos capítulos iniciais, em função das propriedades físicas dos materiais e dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ . Com a finalidade de ilustrar a eficiência e aplicabilidade das cascas sanduíche aqui estudadas, é feita uma análise das frequências para cascas com mesma massa e do peso das cascas conservando a frequência constante, em função das variações do material ao longo da espessura.

### 5.1. Introdução

As propriedades físicas do alumínio e da espuma de alumínio que são utilizadas neste e no próximo capítulo foram baseados na literatura disponível. Hibbeler (2010) adota para uma liga de alumínio forjada 6061-T6 um módulo de Young de 68,9 GPa, peso específico de 2710 kg/m<sup>3</sup> e coeficiente de Poisson de 0,35. Bart-Smith, Hutchinson e Evans (2001) utilizam a mesma liga de alumínio forjada com módulo de Young 69 GPa e para a espuma metálica (ALPORAS) um módulo de Young de 0,23 GPa, uma densidade relativa à liga de alumínio de 0,08 e coeficiente de Poisson de 0,3. Ramamurty e Paul (2004) realizaram testes em espécimes de espuma de alumínio ALPORAS encontrando para o módulo de elasticidade valores entre 0,124 e 0,547 GPa e peso específico entre 226 e 303 kg/m<sup>3</sup>. Miyoshi et al. (2000) definem que a densidade da espuma de alumínio ALPORAS varia entre 180 e 240 kg/m<sup>3</sup> e indicam que a densidade do alumínio sólido é cerca de 13 vezes maior que estes valores, ou seja, algo entre 2340 e 3120 kg/m<sup>3</sup>. Por fim, Ashby (2000) catalogou as principais espumas metálicas disponíveis no mercado e elencou suas propriedades físicas, sendo estas apresentadas na Tabela 5.1.

Fabricante	<i>Cymat</i>	<i>Alulight</i>	<i>ALPORAS</i>	<i>ERG</i>	<i>Inco</i>
Material	Al-SiC	Al	Al	Al	Ni
$\rho/\rho_s$	0.02 – 0.2	0.1 – 0.35	0.08 – 0.1	0.05 – 0.1	0.03 – 0.04
$\rho(kg/m^3)$	70 – 560	300 – 1000	200 – 250	160 – 250	260 – 370
$E (GPa)$	0.02 – 2.0	1.7 – 12.0	0.4 – 1.0	0.06 – 0.3	0.4 – 1.0
$\nu$	0.31 – 0.34	0.31 – 0.34	0.31 – 0.34	0.31 – 0.34	0.31 – 0.34

Tabela 5.1 – Propriedades físicas de espumas metálicas

Fonte: Ashby (2000), adaptado.

Para as cascas cilíndricas que serão utilizadas ao longo deste capítulo adotam-se, então, as seguintes propriedades físicas para seus materiais constituintes

Alumínio	$E (GPa)$	$\nu$	$\rho (kg/m^3)$
Sólido	68.9	0.35	2710
Espuma	1.0	0.32	250

Tabela 5.2 – Propriedades físicas dos materiais das cascas cilíndricas

Fonte: Autor (2019).

Para uma casca com gradação funcional, como visto anteriormente no item 3.4, a distribuição dos materiais depende do fator de variação  $S$ , como ilustra a Figura 5.1.



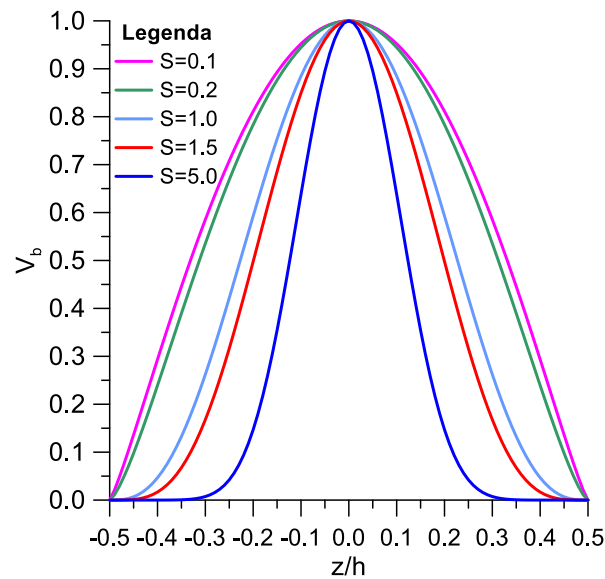


Figura 5.1 – Variação dos parâmetros físicos ao longo da casca com gradação funcional

Fonte: Autor (2019).

Os parâmetros geométricos das cascas comuns a todas as teorias abordadas são o raio ( $R$ ) e o comprimento ( $L$ ). A espessura ( $h$ ) é utilizada para cascas sólidas e com gradação funcional, ao passo que, na casca sanduíche, essa espessura é dada pela soma das espessuras das duas faces ( $t_f$ ) e do núcleo ( $t_c$ ).

Para iniciar o estudo das frequências naturais de uma casca cilíndrica é necessário o entendimento dos seus padrões de comportamento para cada uma das teorias. Ao se fixar seus parâmetros geométricos e físicos, as frequências naturais dependerão apenas do número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e longitudinais ( $m$ ).

O exemplo a seguir tem como objetivo mostrar o comportamento das primeiras frequências naturais obtidas pelas teorias abordadas nos capítulos iniciais, a saber, teoria clássica de primeira ordem (CH), teoria de casca com gradação funcional (CGF) e casca sanduíche com cisalhamento no núcleo (CSCN). Os parâmetros físicos são apresentados na Tabela 5.2 e os parâmetros geométricos na Tabela 5.3.

Teoria	L (m)	R (m)	h (m)	
CH	4	1	0.002	
CGF	4	1	0.002	
CSCN	4	1	$t_c$	0.0018
			$t_f$	0.0001

Tabela 5.3 – Propriedades geométricas das cascas utilizadas – Exemplo

Fonte: Autor (2019).

O comportamento das frequências naturais é ilustrado em função dos números de ondas longitudinais ( $m$ ) e circunferenciais ( $n$ ) nas Figuras 5.2 a 5.4 para a CH; nas Figuras 5.5 a 5.7 para o CGF (que utilizou a constante de variação  $S$  igual a 1,0) e nas Figuras 5.8 a 5.10 para a CSCN.

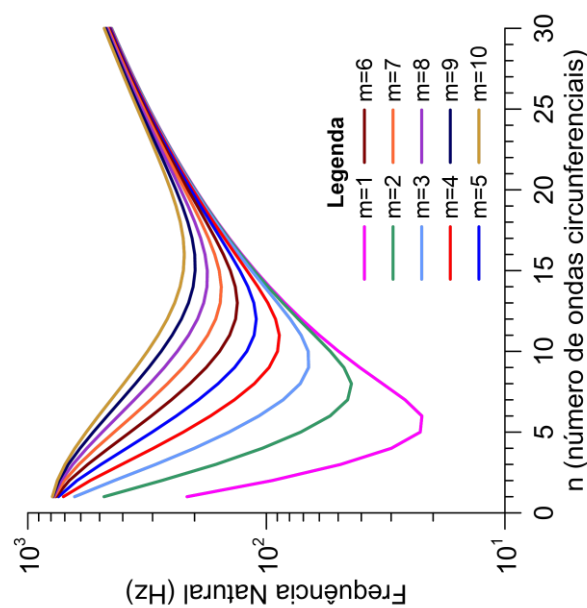


Figura 5.2 – 1ª Freqüência Natural – CH – 3

Variáveis

Fonte: Autor (2019).

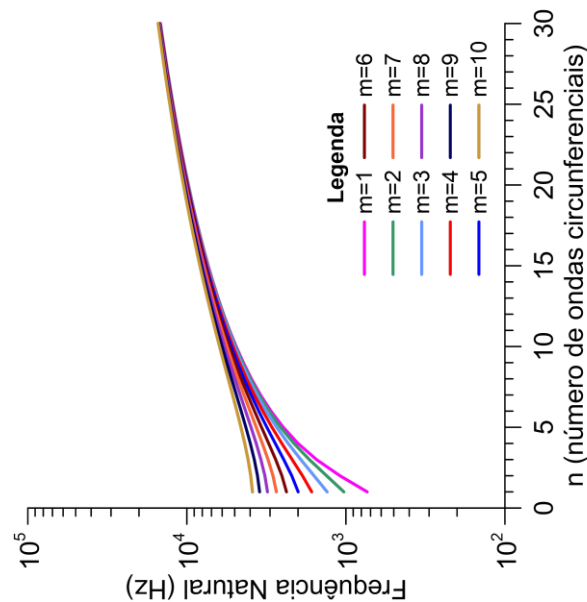


Figura 5.3 – 2ª Freqüência Natural – CH – 3

Variáveis

Fonte: Autor (2019).

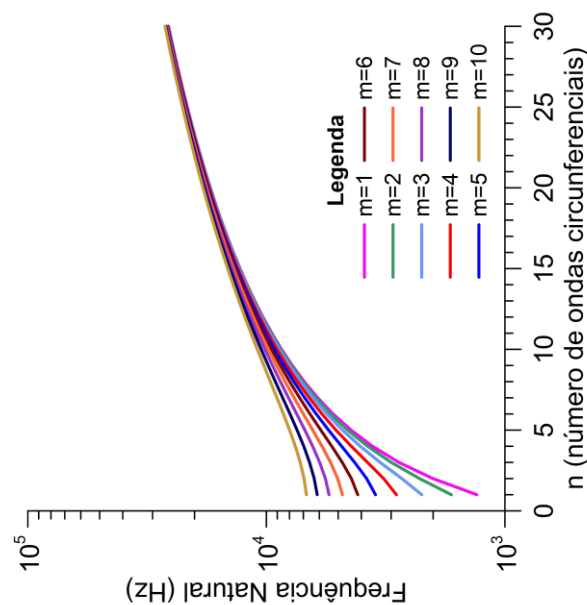


Figura 5.4 – 3ª Freqüência Natural – CH – 3

Variáveis

Fonte: Autor (2019).

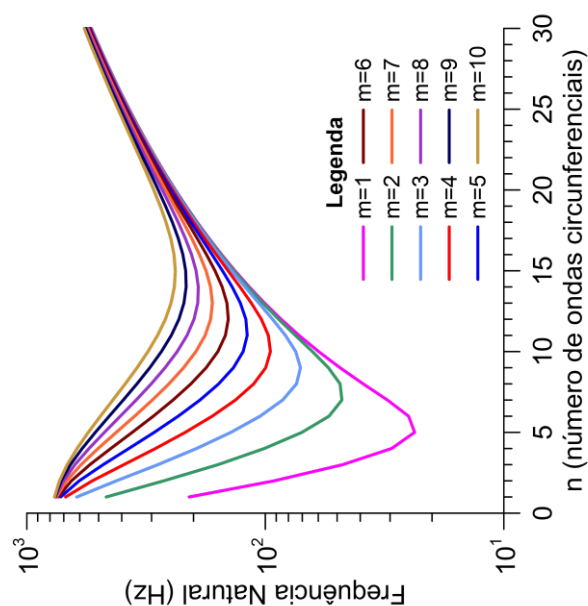


Figura 5.5 – 1ª Freqüência Natural – CGF – 3  
Variáveis –  $S=1.0$   
Fonte: Autor (2019).

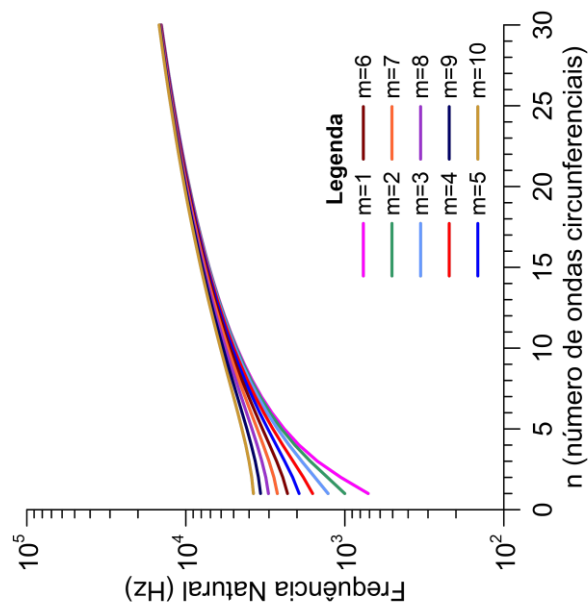


Figura 5.6 – 2ª Freqüência Natural – CGF – 3  
Variáveis –  $S=1.0$   
Fonte: Autor (2019).

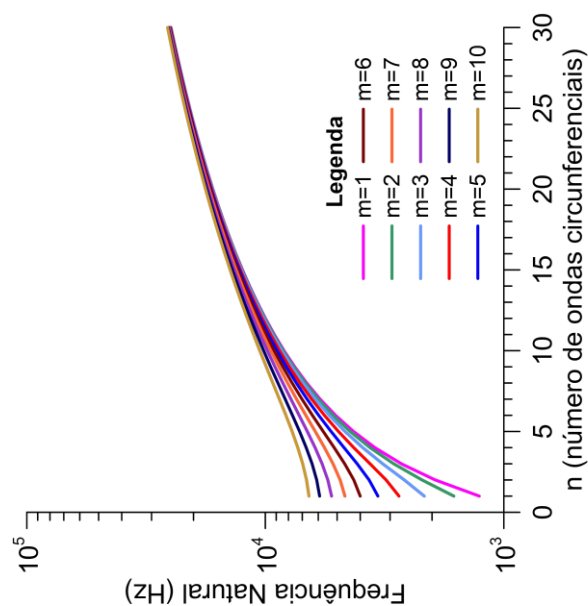


Figura 5.7 – 3ª Freqüência Natural – CGF – 3  
Variáveis –  $S=1.0$   
Fonte: Autor (2019).

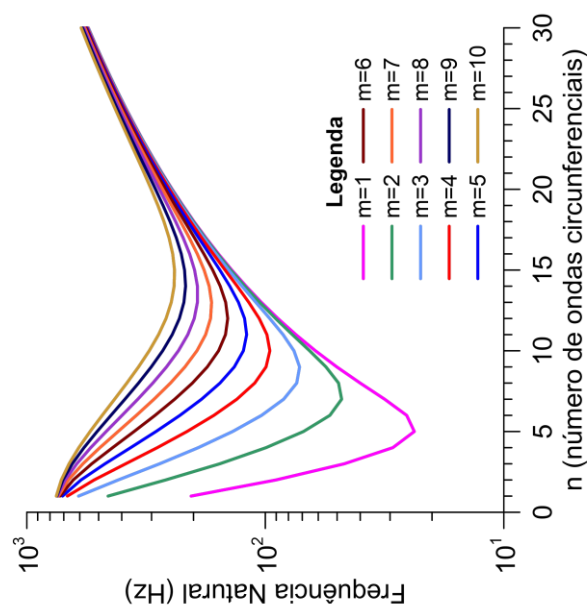


Figura 5.8 – 1ª Freqüência Natural – CSCN  
Fonte: Autor (2019).

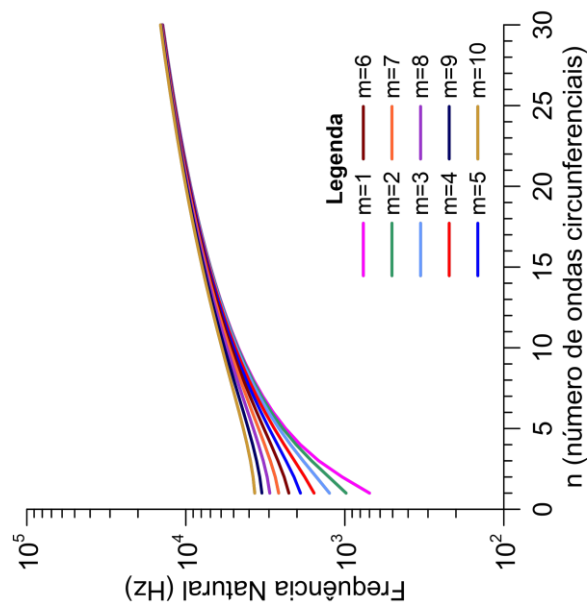


Figura 5.9 – 2ª Freqüência Natural – CSCN  
Fonte: Autor (2019).

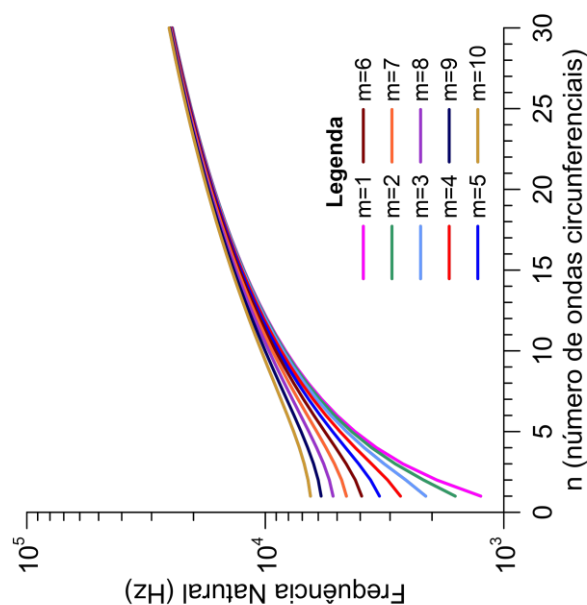


Figura 5.10 – 3ª Freqüência Natural – CSCN  
Fonte: Autor (2019).

Os resultados ilustrados nas Figuras 5.2 – 5.4 são iguais aos encontrados de Blevins e Plunkett (1980) (seção 12.2.3), para cascas cilíndricas simplesmente apoiadas sem restrição axial, cuja resolução matricial está no Apêndice C. Esses resultados servem de parâmetro de comparação entre as teorias.

O comportamento de cada uma das frequências naturais é semelhante em todas as teorias abordadas. A primeira frequência apresenta valores mínimos com  $n$  igual ou maior que cinco nestes exemplos, o que permite o uso de teorias de cascas abatidas. Esse fato é explicado através da Figura 5.11. Antes desses valores mínimos, a frequência natural é regida pela energia de membrana da casca e, posteriormente, pela energia de flexão. A segunda e terceira frequências apresentam comportamento crescente tendendo a uma mesma curva, independentemente do valor de  $m$ , após  $n$  igual a 30. Com números pequenos de ondas circunferenciais ( $n$ ) a terceira frequência apresenta resultados mais espaçados entre as curvas das meias ondas longitudinais ( $m$ ) do que a segunda frequência.

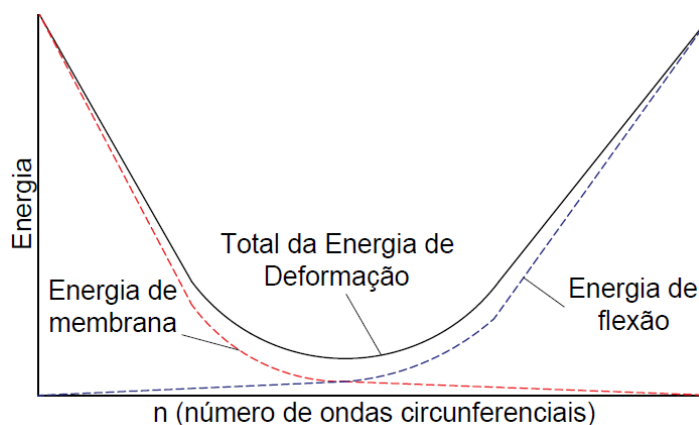


Figura 5.11 – Variação da energia de deformação na casca cilíndrica com o aumento do número de ondas circunferenciais

Fonte: Autor (2019).

A influência de  $S$  na frequência natural mínima é apresentada na Figura 5.12 para as mesmas propriedades físicas e geométricas da CGF utilizadas nas Tabela 5.2 e Tabela 5.3. Nota-se um valor ótimo para  $S=0,7$  com as maiores frequências naturais mínimas tanto para três quanto cinco variáveis. A partir desse valor, as frequências tornam-se cada vez menores. É observado, também, que as frequências mínimas para  $S=0,1$  e  $2,6$  são praticamente iguais.

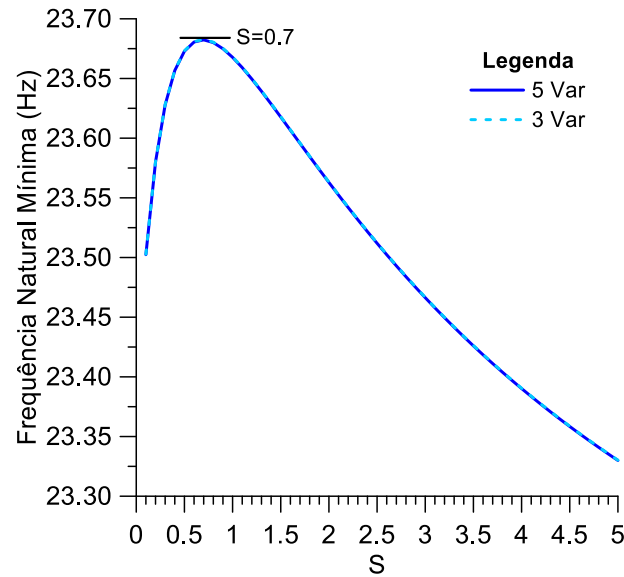


Figura 5.12 – Estudo da influência de  $S$  na frequência natural mínima (CGF)  
Fonte: Autor (2019).

Com base nos resultados das Figura 5.2, Figura 5.5 e Figura 5.8, comparem-se na Figura 5.13 as frequências obtidas pelas três teorias para  $m=1$ . Verifica-se que os resultados obtidos para a CGS e a CSCN são muito próximos, enquanto os resultados obtidos pela CH são um pouco inferiores na região onde predomina a energia de flexão.

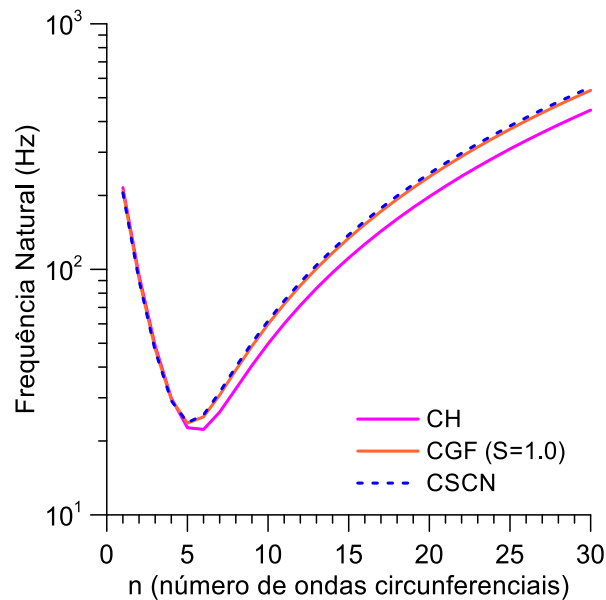


Figura 5.13 – Influência da teoria de cascas utilizada nas frequências naturais para  $m = 1$   
Fonte: Autor (2019).

## 5.2. Variação da Matriz de Massa

Nos itens 2.8, 3.8 e 4.8 que abordam as expressões de energia cinética para cada uma das três teorias, a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho (U_{,t}^2 + V_{,t}^2 + W_{,t}^2) R dz d\theta dx \quad (5.1)$$

Considerando-se o caso mais geral para o campo de deslocamentos, tem-se cinco variáveis independentes, os deslocamentos da superfície média,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , que correspondem aos termos de inércia translacional, e as rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$ , relativos à inércia a rotação. Uma primeira aproximação usual é considerar que os termos relativos à inércia a rotação podem ser desprezados face aos termos associados à inércia a translação. Uma segunda aproximação usual é considerar apenas o deslocamento radial ( $W$ ) tendo por base a hipótese que em cascas esbeltas os deslocamentos no plano da casca,  $U$  e  $V$ , são bem menores que o deslocamento transversal,  $W$ , o que leva a

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho (W_{,t}^2) R dz d\theta dx \quad (5.2)$$

A influência destas simplificações é ilustrada nas Figuras 5.14 (para 3 variáveis) e 5.15 (para 5 variáveis) para a CH e CGF e, na Figura 5.16 para a CSCN. É adotada na análise a seguinte notação: a energia cinética admitindo apenas o deslocamento radial ( $Mw$ ), admitindo os três deslocamentos translacionais ( $Muvw$ ) e, por fim, admitindo todos os deslocamentos ( $MComp$ ). As características físicas e geométricas para essas cascas são as mesmas presentes nas Tabelas 5.2 e 5.3, respectivamente.

Para as teorias que utilizam formulação com três variáveis (CH e CGF) observa-se que, ao se aumentar o número  $n$ , a diferença das frequências naturais, para as considerações da matriz de massa  $Mw$  e  $Muvw$ , diminuem consideravelmente, passando de 29,7% para  $n$  igual a 1 para 0,06% quando  $n$  é igual a 30. Ao se utilizar formulação com cinco variáveis (CH, CGF e CSCN) a diferença



das frequências naturais entre  $M_w$  e  $M_{Comp}$  decresce de 29,8% para 0,075% (intervalo de  $n$  entre 1 e 30). Ao se comparar  $M_{Comp}$  com  $M_{uvw}$  a diferença entre as menores frequências é desprezível e aumenta quanto maior valor de  $n$  (para  $n$  igual a 30 chega a 0,02%) em virtude da crescente influência das rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  à medida que  $n$  aumenta.

A Tabela 5.4 apresenta as reduções percentuais nas frequências naturais mínimas (menor primeira frequência) para cada uma das teorias abordadas.

Teoria	$M_w \rightarrow M_{uvw}$	$M_w \rightarrow M_{Comp}$	$M_{uvw} \rightarrow M_{Comp}$
<b>CH 3Var</b>	-1,3964%	-	-
<b>CGF 3Var</b>	-2,0118%	-	-
<b>CH 5Var</b>	-1,3964%	-1,3970%	-0,0006%
<b>CGF 5Var</b>	-2,0118%	-2,0124%	-0,0006%
<b>CSCN</b>	-2,0124%	-2,0130%	-0,0006%

Tabela 5.4 – Influência dos termos de inércia nas frequências naturais mínimas ( $m=1$ ).

Fonte: Autor (2019).

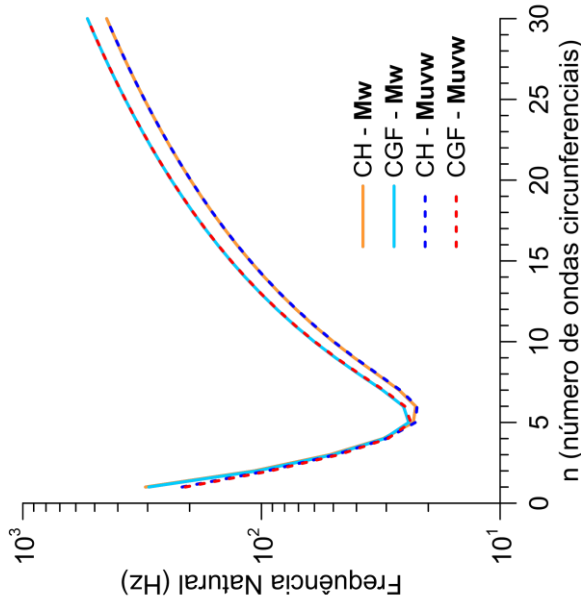


Figura 5.14 – 1ª Frequência Natural ( $m=1$ ) – CH e CGF (3 Variáveis,  $S=1.0$ ) – Variação dos termos da energia cinética

Fonte: Autor (2019).

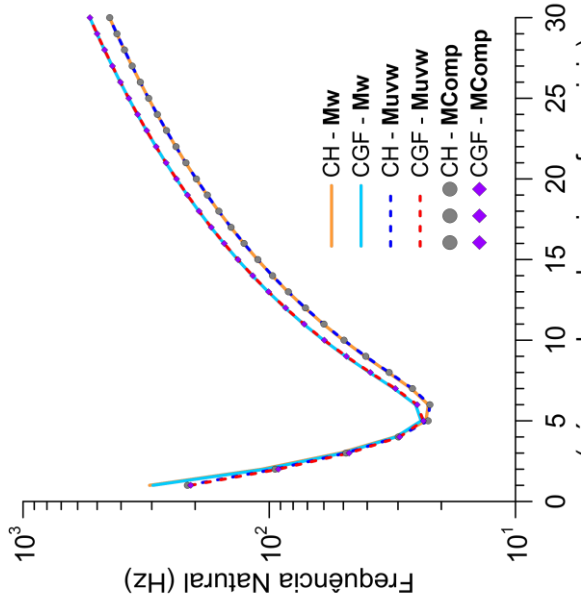


Figura 5.15 – 1ª Frequência Natural ( $m=1$ ) – CH e CGF (5 Variáveis,  $S=1.0$ ) – Variação dos termos da energia cinética

Fonte: Autor (2019).

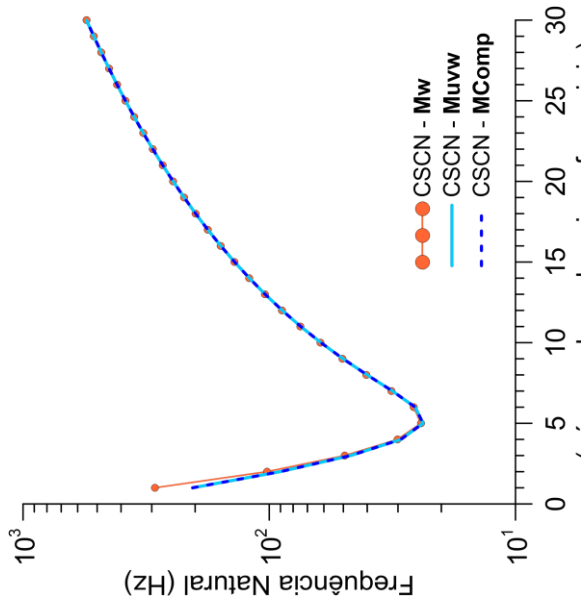


Figura 5.16 – 1ª Frequência Natural ( $m=1$ ) – CSCN – Variação dos termos da energia cinética

Fonte: Autor (2019).

### 5.3. Influência da geometria

A geometria da casca é basicamente definida pelas relações  $R/h$  e  $L/R$ . Sua influência é ilustrada nas Figuras 5.17 a 5.19 e baseadas na Tabela 5.5. As propriedades físicas são as apresentadas na Tabela 5.2.

$R/h$	50		100		200		300		400		500	
$L/R$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	

Tabela 5.5 – Relações geométricas utilizadas na análise paramétrica

Fonte: Autor (2019).

As Figuras 5.17 e 5.18 mostram, respectivamente, para CH e CGF (para  $S$  igual a 1,0), ambas com 5 variáveis (5Var), além da Figura 5.19 para CSCN, o comportamento das frequências naturais mínimas e o número de ondas circunferenciais associado ao se variar as propriedades geométricas  $R/h$  e  $L/R$ . A matriz de massa nesse caso levou em consideração todos os termos ( $MComp$ ). É importante salientar que os trechos das curvas que apresentam valores de  $n$  inferiores a 5 não são precisos, pois as teorias utilizadas consideram cascas abatidas.

Em qualquer uma das teorias, as frequências naturais mínimas são maiores quanto menor for a relação  $R/h$ . Quanto maior a relação  $R/h$ , o número  $n$  tende a ser maior na frequência natural mínima. Para cada relação  $R/h$ , conforme se aumenta a relação  $L/R$ , a frequência natural mínima diminui assim como o número de ondas circunferenciais  $n$ .

A diferença de magnitude da frequência natural entre a relação  $L/R$  igual a 0,5 é, em média, vinte vezes maior que para  $L/R$  igual a 10 em todas as teorias. Ao analisar a diferença de magnitudes em relação a  $R/h$  a diferença entre os resultados obtidos para  $R/h = 50$  é, em média, trinta vezes maior que para  $R/h = 500$ .

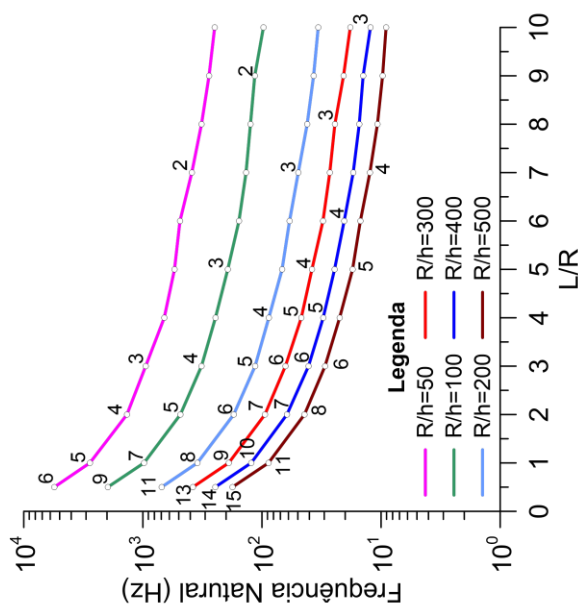


Figura 5.17 – Freqüências naturais com variação das relações geométricas da casca isotrópica ( $m=1$ ) – CH (5 Variáveis). Valores de  $n$  indicados  
Fonte: Autor (2019).

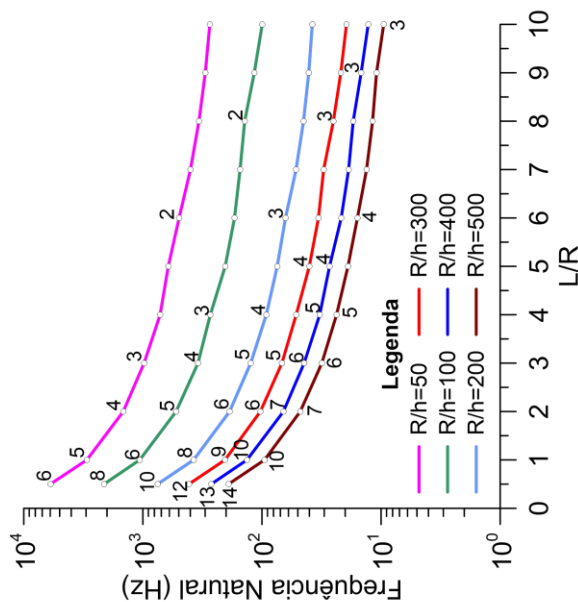


Figura 5.18 – Freqüências naturais com variação das relações geométricas ( $m=1$ ) – CGF (5 Variáveis,  $S=1.0$ ). Valores de  $n$  indicados  
Fonte: Autor (2019).

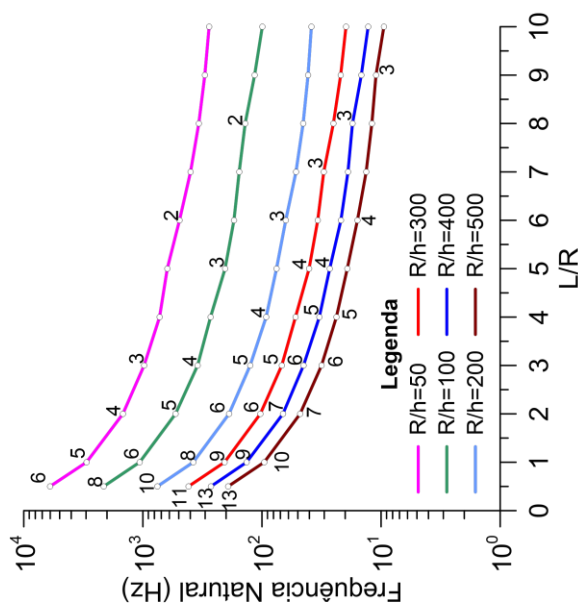


Figura 5.19 – Freqüências naturais com variação das relações geométricas ( $m=1$ ) – CSCN. Valores de  $n$  indicados

Fonte: Autor (2019).

A Figura 5.20 mostra a comparação dos resultados obtidos pelas três teorias para a frequência natural mínima e as relações  $R/h=50$ , 200 e 500. Observa-se que os resultados obtidos pela CGF com  $S=1,0$  e para a CSCN são muito próximos, enquanto os resultados usando a CH são um pouco inferiores, como já observado anteriormente.

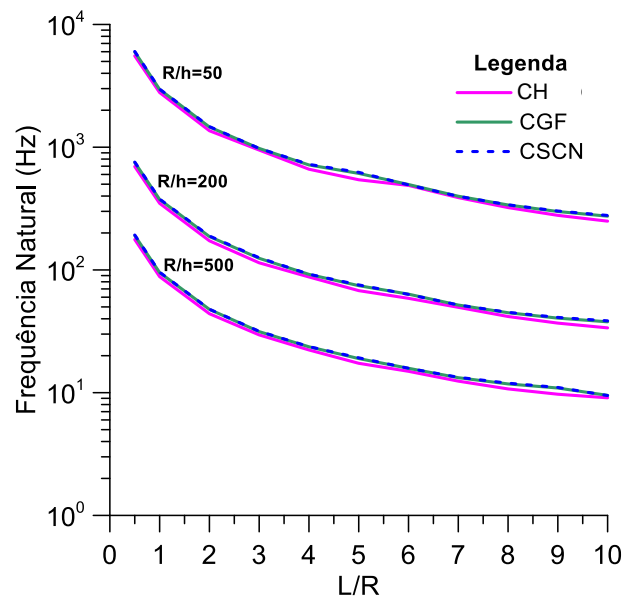


Figura 5.20 – Influência dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$  na frequência natural mínima obtida pelas três teorias

Fonte: Autor (2019).

#### 5.4. Cascas cilíndricas de mesma massa

Para se analisar os benefícios que podem decorrer do uso de cascas sanduíche com núcleo de espuma metálica, faz-se uma análise da influência do núcleo considerando uma casca com características variáveis ao longo da espessura, mas com mesmo raio, comprimento e massa (peso). Para se ter, então, a mesma massa é necessário que a integral de massa ao longo da espessura seja igual nas três teorias. Estabelecendo uma espessura ( $h$ ) para uma casca de material isotrópico e homogêneo (CH), a espessura ( $e$ ) de uma casca com gradação funcional (CGF) de mesma massa é dada por:

$$e = \frac{\rho_s h}{(\rho_1 - \rho_2)\zeta(S) + \rho_2} \quad (5.2)$$

onde  $\rho_s$  e  $h$  são, respectivamente, a massa específica e a espessura da casca isotrópica;  $\rho_2$  é a máxima massa específica da casca com gradação funcional (localizada nas faces) e  $\rho_1$  é a mínima massa específica do núcleo da casca com gradação funcional que ocorre em  $z = 0$ . Adicionalmente,  $\zeta$  é um coeficiente que depende do coeficiente de variação  $S$  da gradação funcional que é dado por

$$\zeta(S) = \frac{\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(1 - \frac{4z^2}{e^2}\right)^{2S+1} dz}{e} \quad (5.3)$$

Para a teoria que considera o efeito do cisalhamento no núcleo da casca, a relação é estabelecida a partir da espessura ( $e$ ) encontrada para a gradação funcional (Equação 5.2), encontrando-se primeiramente a espessura do núcleo ( $t_c$ ), composto de espuma metálica e, logo em seguida, a espessura das duas faces ( $t_f$ ), de tal forma que se mantenha a mesma massa. Neste caso tem-se que

$$t_c = \frac{\zeta(S)\pi e}{2} \quad (5.4a)$$

$$t_f = \frac{e - t_c}{2} \quad (5.4b)$$

$$t_{total} = 2t_f + t_c = e \quad (5.4c)$$

As Equações 5.4 representam a equivalência de espessuras entre as teorias de gradação funcional (CGF) e a que considera o cisalhamento do núcleo (CSCN).

Para cascas com raio 1 m, comprimento 4 m, tem-se as espessuras apresentadas na Tabela 5.6. Verifica-se que a espessura da casca com gradação funcional diminui à medida que  $S$  aumenta se aproximando assintoticamente da espessura da casca sem núcleo. Isto está de acordo com a Figura 5.1 (Eq. (3.5)) onde se mostra a variação das características do material ao longo da espessura, onde se verifica que, à medida que  $S$  aumenta, diminui a espessura do núcleo. O mesmo acontece com a casca sanduíche com cisalhamento no núcleo com características semelhantes à da casca com gradação funcional (espessura de núcleo

semelhante). É importante destacar que as espessuras da CGF e CSCN são iguais ( $h=t_c+2t_f$ ). As Figura 5.24 a Figura 5.26 mostram a variação da frequência natural para  $m=1$  em função de  $n$  para valores selecionados do parâmetro  $S$ . As Figura 5.24 e Figura 5.25 mostram os resultados para a CGF, considerando respectivamente três e cinco variáveis, e a Figura 5.26 mostra os resultados para a CSCN. À medida que  $S$  diminui, a espessura do núcleo e a espessura total da casca aumentam, crescendo também o valor da frequência natural, deslocando os primeiros picos de ressonância para frequências mais altas. Nota-se também um decréscimo no número de ondas  $n$  associado à frequência natural mínima. A diferença entre as frequências da CGF e CSCN para a casca isotrópica e homogênea se acentua a partir do momento em que a energia de flexão passa a dominar o comportamento da frequência natural.

CH	CGF	CSCN	
		$t_c$	$t_r$
2,000	$S = 0.1$	4,693	4,659
	$S = 0.2$	4,414	4,176
	$S = 1.0$	3,419	2,455
	$S = 1.5$	3,169	2,023
	$S = 5.0$	2,613	1,061

Tabela 5.6 – Espessuras (mm) de cascas com mesma massa  
Fonte: Autor (2019).

As Figura 5.21 a Figura 5.23 mostram, com base na Tabela 5.6 a variação das características do material ao longo da espessura para três valores de  $S$ , a saber,  $S=0.1$ ,  $S=1.0$  e  $S=5.0$  na casca com gradação funcional e na casca sanduíche com o  $t_c$  equivalente calculado através da Eq. (5.4). Verifica-se que a variação é praticamente a mesma exceto na região onde as propriedades da espuma metálica na casca com gradação funcional mudam suavemente para aquelas do material homogêneo, evitando as variações bruscas de tensão observadas usualmente em cascas sanduíche. Assim, espera-se que ambas as teorias levem a resultados semelhantes, como se observa nos resultados numéricos.

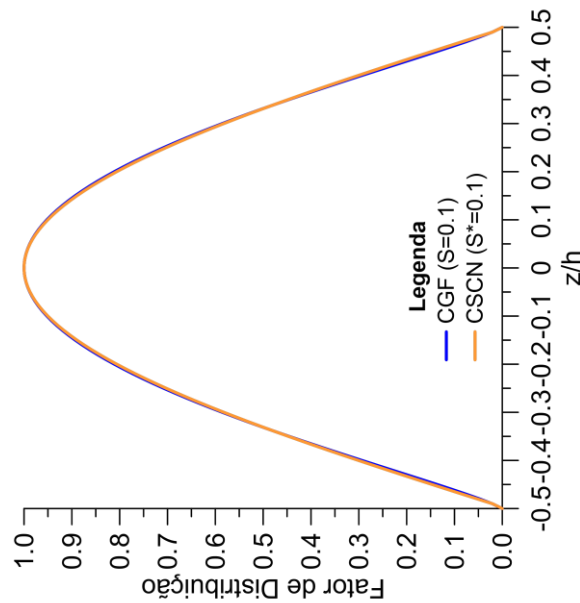


Figura 5.21 – Comparação da distribuição dos materiais ao longo da espessura – CGF e CSCN ( $S=S^*=0.1$ )  
Fonte: Autor (2019).

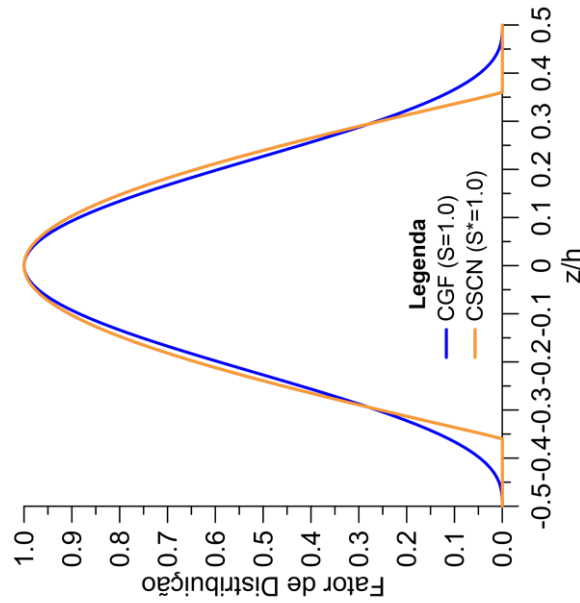


Figura 5.22 – Comparação da distribuição dos materiais ao longo da espessura – CGF e CSCN ( $S=S^*=1.0$ )  
Fonte: Autor (2019).

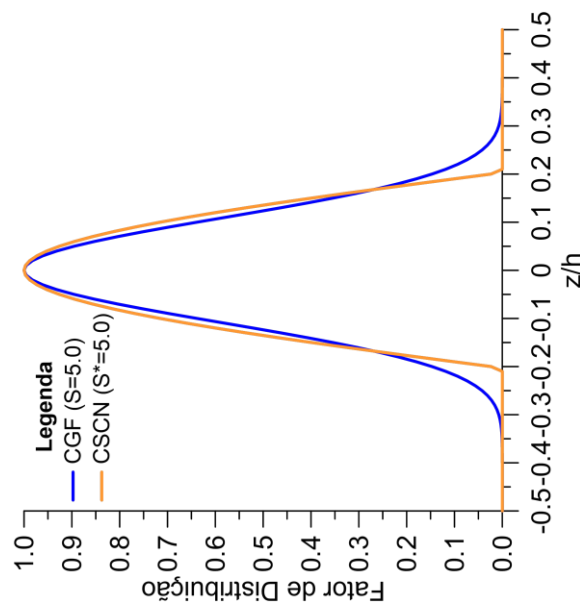


Figura 5.23 – Comparação da distribuição dos materiais ao longo da espessura – CGF e CSCN ( $S=S^*=5.0$ )  
Fonte: Autor (2019).



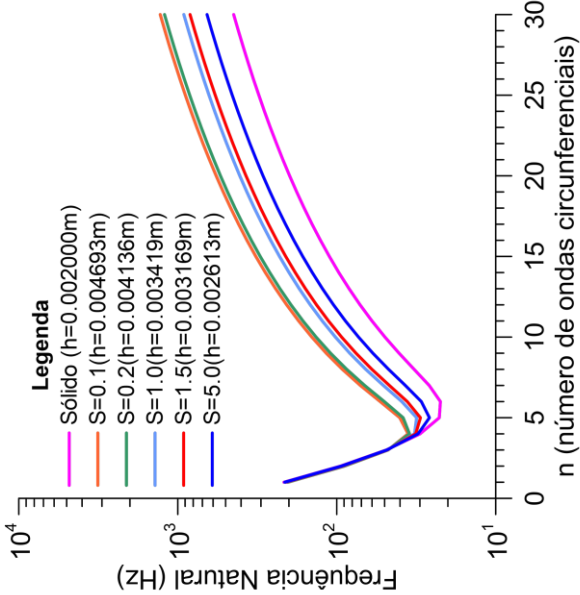


Figura 5.24 – Comparativo de cascas de mesma massa (m=1) – 3 Variáveis – 1<sup>a</sup> Frequência Natural  
Fonte: Autor (2019).

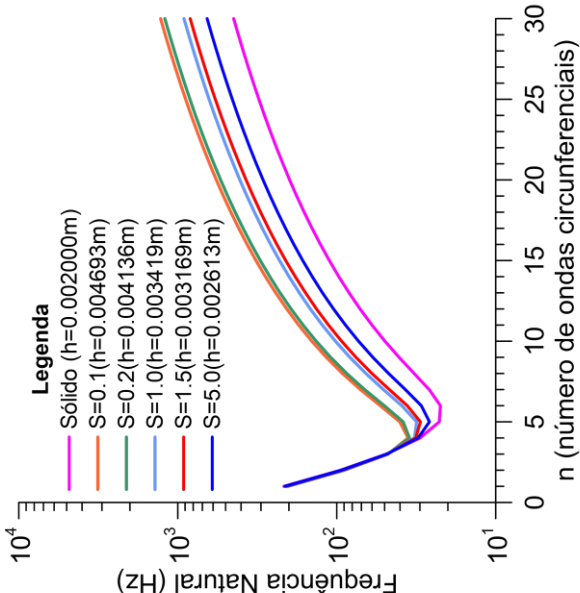


Figura 5.25 – Comparativo de cascas de mesma massa (m=1) – 5 Variáveis – 1<sup>a</sup> Frequência Natural  
Fonte: Autor (2019).

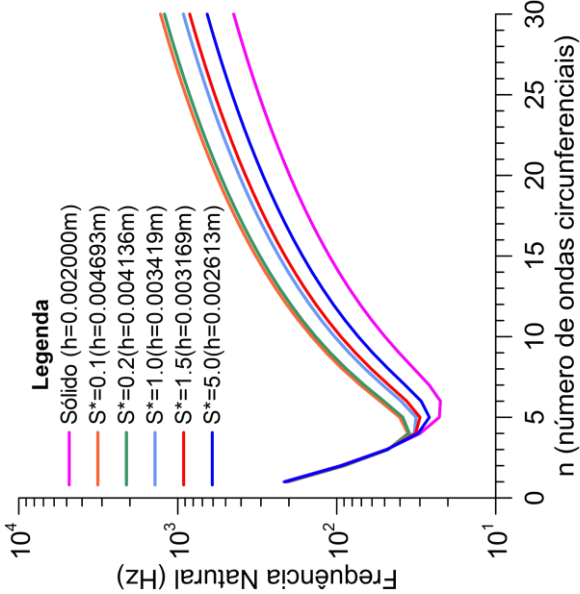


Figura 5.26 – Comparativo de cascas de mesma massa (m=1) – CSCN – 1<sup>a</sup> Frequência Natural. (\*) S equivalente a.  
Fonte: Autor (2019).

Na CGF considerando três variáveis os resultados da Figura 5.24 mostram que para  $S=5,0$  se obtém uma frequência natural mínima 17,22% maior que a casca de referência (material homogêneo); para um  $S=1,5$  tem-se uma frequência natural mínima 33,56% superior à de referência e, para  $S=1,0$ , uma frequência natural mínima 41,16% superior à da casca isotrópica e homogênea.

Na CGF considerando cinco variáveis os resultados da Figura 5.25 mostram que para  $S=5,0$  se obtém uma frequência natural mínima 17,22% maior que a casca de referência (material homogêneo), para  $S=1,5$ , uma frequência natural mínima 33,56% superior à de referência e, para  $S=1,0$ , uma frequência natural mínima 41,15% superior à de referência.

Na CSCN os resultados da Figura 5.26 mostram que para uma casca sanduíche com distribuição de material equivalente a uma casca com gradação funcional com  $S=5,0$ , a casca sanduíche obtém uma frequência natural mínima 17,42% maior que a de referência, para  $S=1,5$ , uma frequência natural mínima 34,38% superior a referência e, para um  $S=1,0$ , uma frequência natural mínima 42,24% superior a de referência.

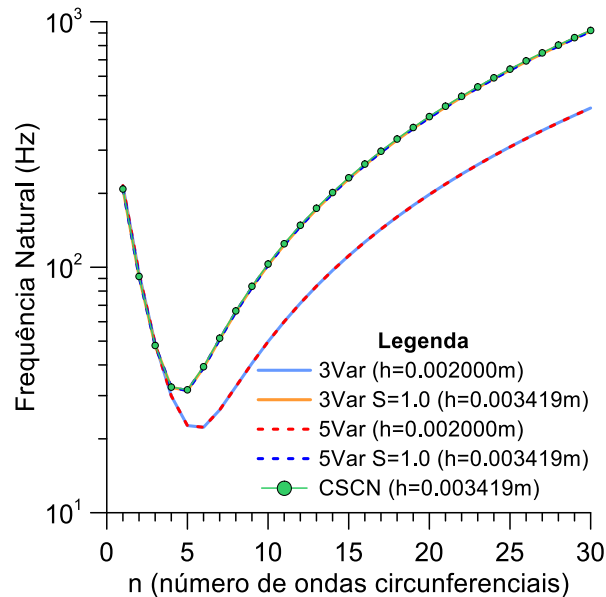


Figura 5.27 – Comparação das frequências naturais para cascas de mesma massa e  $m=1$  usando as três teorias de casca

Fonte: Autor (2019).

n	CH 3var	CGF 3var	CH 5var	CGF 5var	CSCN
4	29,9325	32,4102	29,9324	32,4095	32,5061
5	22,6425	<b>31,4559*</b>	22,6423	<b>31,4541*</b>	<b>31,6977*</b>
6	<b>22,2846*</b>	38,9523	<b>22,2842*</b>	38,9484	39,3545
7	26,2198	50,8892	26,2191	50,8818	51,4552
15	111,3650	229,1259	111,3480	228,9702	231,5404
30	445,2048	916,1151	444,9327	913,6384	922,3089

Tabela 5.7 – Frequências naturais de cascas com mesma massa em Hz em diferentes teorias. CGF e CSCN com  $S=S^*=1.0$ . (\*) menor frequência

Fonte: Autor (2019).

A Figura 5.27 e a Tabela 5.7 mostram a variação da frequência natural para  $m=1$  em função de  $n$  para a casca homogênea com  $h=2\text{mm}$ , considerando três e cinco variáveis, para a CGF considerando também três e cinco variáveis com  $h=3,419\text{mm}$  e  $S=1.0$  e CSCN com  $h=3,419\text{mm}$ . Verifica-se que os resultados para a CGF e a CSCN são muito próximos. Nota-se também, para uma casca de mesma massa, o aumento significativo (cerca de 41,5%) das frequências naturais com a consideração do núcleo de espuma metálica.

### 5.5. Variação da espessura para cascas com a mesma frequência natural

Faz-se agora uma análise paramétrica, tendo como variável de projeto a frequência fundamental da casca, que deve ser mantida constante. Para a comparação das várias teorias, considera-se como referência as frequências naturais obtidas da CH com 5 variáveis independentes (*5Var - MComp*). As propriedades físicas são as apresentadas na Tabela 5.2 para o material homogêneo. A espessura de referência é 2mm. Para determinadas relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$  a frequência natural é encontrada. Em seguida, usando-se a teoria de CGF com cinco variáveis, encontram-se as espessuras que levam à mesma frequência natural da CH.

As Tabelas 5.8 a 5.10 mostram a redução em porcentagem da espessura para  $L/R=4$  e valores selecionados de  $R/h$  relativos a CH. Verifica-se que há uma

redução significativa da espessura da casca quando a frequência é mantida constante.

<b>R/h</b>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>300</b>	15,2183	15,4939	14,8491	14,0116	10,1583
<b>400</b>	12,3652	12,9172	13,2601	12,6794	9,4113
<b>500</b>	12,6605	13,5947	15,4175	14,5908	10,4814

Tabela 5.8 – Reduções das espessuras (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca (CH) para relação L/R=4. Cascas de mesma frequência natural.

Fonte: Autor (2019).

<b>R/h</b>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>100</b>	13,9310	14,3321	14,1379	13,4145	9,8241
<b>200</b>	13,7416	14,1607	14,0315	13,3253	9,7743
<b>300</b>	15,2840	15,5527	14,8864	14,0421	10,1752
<b>400</b>	12,4791	13,0200	13,3248	12,7334	9,4417
<b>500</b>	15,2904	15,5581	14,8886	14,0448	10,1767

Tabela 5.9 – Reduções das espessuras (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca (CH) para relação L/R=2. Cascas de mesma frequência natural.

Fonte: Autor (2019).

<b>R/h</b>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>100</b>	15,1220	15,4066	14,7971	13,9676	10,1345
<b>200</b>	12,8340	13,3412	13,5238	12,9004	9,5354
<b>300</b>	12,9428	13,4392	13,5844	12,9510	9,5635
<b>400</b>	13,9386	14,3386	14,1413	13,4170	9,8255
<b>500</b>	14,7990	15,3437	14,7575	13,9349	10,1147

Tabela 5.10 – Reduções das espessuras (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca (CH) para relação L/R=1. Cascas de mesma frequência natural.

Fonte: Autor (2019).

De posse dessas espessuras é possível ter um melhor entendimento do que representam esses diferentes valores quando se comparam a massa por unidade de

área das cascas com tais espessuras. As Tabelas 5.11 a 5.13 mostram a redução de peso ocorrida nestas cascas.

<b>R/h</b>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>300</b>	63,8673	61,7057	50,1842	45,7294	31,2404
<b>400</b>	62,6515	60,5383	49,2545	44,8884	30,6687
<b>500</b>	62,7770	60,8453	50,5163	46,0948	31,4876

Tabela 5.11 – Reduções no peso (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação L/R=4

Fonte: Autor (2019).

<b>R/h</b>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>100</b>	63,3185	61,1795	49,7678	45,3522	30,9848
<b>200</b>	63,2382	61,1018	49,7059	45,2961	30,9465
<b>300</b>	63,8956	61,7325	50,2057	45,7487	31,2535
<b>400</b>	62,7001	60,5851	49,2922	44,9224	30,6921
<b>500</b>	63,8979	61,7351	50,2073	45,7502	31,2546

Tabela 5.12 – Reduções no peso (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação L/R=2

Fonte: Autor (2019).

<b>R/h</b>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>100</b>	63,8265	61,6664	50,1537	45,7017	31,2220
<b>200</b>	62,8514	60,7304	49,4086	45,0278	30,7636
<b>300</b>	62,8975	60,7748	49,4440	45,0602	30,7855
<b>400</b>	63,3221	61,1825	49,7699	45,3538	30,9855
<b>500</b>	63,6889	61,6378	50,1306	45,6807	31,2072

Tabela 5.13 – Reduções no peso (em %) das cascas na CGF 5Var em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH, para a relação L/R=1

Fonte: Autor (2019).

A Tabela 5.14 apresenta a massa por unidade de área em kg/m<sup>2</sup> da casca de material homogêneo e da casca com graduação funcional para valores selecionados

de  $S$ , onde se observa a vantagem de se utilizar a casca com núcleo de espuma metálica.

$L/R$	$R/h$	$S=0.1$	$S=0.2$	$S=1.0$	$S=1.5$	$S=5.0$	Sólido
4	100	1,926	2,045	2,676	2,919	3,712	5,420
	200	2,084	2,197	2,797	3,029	3,787	5,420
	300	1,958	2,076	2,700	2,941	3,727	5,420
	400	2,024	2,139	2,750	2,987	3,758	5,420
	500	2,017	2,122	2,682	2,922	3,713	5,420
2	100	1,988	2,104	2,723	2,962	3,741	5,420
	200	1,992	2,108	2,726	2,965	3,743	5,420
	300	1,957	2,074	2,699	2,940	3,726	5,420
	400	2,022	2,136	2,748	2,985	3,756	5,420
	500	1,957	2,074	2,699	2,940	3,726	5,420
1	100	1,961	2,078	2,702	2,943	3,728	5,420
	200	2,013	2,128	2,742	2,979	3,753	5,420
	300	2,011	2,126	2,740	2,978	3,751	5,420
	400	1,988	2,104	2,722	2,962	3,741	5,420
	500	1,968	2,079	2,703	2,944	3,729	5,420

Tabela 5.14 – Massa por unidade de área ( $\text{kg/m}^2$ ) – CH x CGF

Fonte: Autor (2019).

As espessuras totais das cascas na CSCN são exatamente as mesmas encontradas para a CGF. O que é alterado são as espessuras das faces ( $t_f$ ) e do núcleo ( $t_c$ ).

As reduções em peso das cascas sanduíche são apresentadas, para valores selecionados da relação  $L/R$ , nas Tabelas 5.15 a 5.17.

$R/h$	$S^*=0.1$	$S^*=0.2$	$S^*=1.0$	$S^*=1.5$	$S^*=5.0$
300	47,7829	49,0376	46,2262	43,0230	30,5329
400	40,2904	42,5629	44,0912	41,5603	29,8655
500	37,3390	40,2843	46,5576	43,5933	30,7950

Tabela 5.15 – Reduções no peso (em %) das cascas na CSCN em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação  $L/R=4$

Fonte: Autor (2019).

<b>R/h</b>	<b>S*=0.1</b>	<b>S*=0.2</b>	<b>S*=1.0</b>	<b>S*=1.5</b>	<b>S*=5.0</b>
<b>100</b>	44,6378	46,3687	45,5121	42,5852	30,5356
<b>200</b>	44,0127	45,8113	45,2401	42,3520	30,2827
<b>300</b>	47,9667	49,1939	46,2912	43,0733	30,5793
<b>400</b>	40,6100	42,8427	44,2003	41,6366	29,9132
<b>500</b>	47,9652	49,1876	46,2715	43,0550	30,5458

Tabela 5.16 – Reduções no peso (em %) das cascas na CSCN em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação L/R=2  
Fonte: Autor (2019).

<b>R/h</b>	<b>S*=0.1</b>	<b>S*=0.2</b>	<b>S*=1.0</b>	<b>S*=1.5</b>	<b>S*=5.0</b>
<b>100</b>	47,8798	49,1690	46,5157	43,3551	31,1256
<b>200</b>	41,6886	43,7993	44,6105	41,9550	30,1858
<b>300</b>	41,9090	43,9829	44,6282	41,9414	30,1051
<b>400</b>	44,5057	46,2348	45,3638	42,4273	30,2921
<b>500</b>	46,2985	48,6880	46,1284	42,9594	30,5203

Tabela 5.17 – Reduções no peso (em %) das cascas na CSCN em relação a espessura de referência (2,0 mm) da casca homogênea usando a CH para a relação L/R=1  
Fonte: Autor (2019).

A Tabela 5.18 apresenta a massa por unidade de área da casca homogênea e da casca sanduíche para os valores equivalentes de  $S$ .

<b>L/R</b>	<b>R/h</b>	<b>S*=0.1</b>	<b>S*=0.2</b>	<b>S*=1.0</b>	<b>S*=1.5</b>	<b>S*=5.0</b>	<b>Sólido</b>
<b>4</b>	<b>100</b>	2,635	2,599	2,862	3,049	3,741	5,420
	<b>200</b>	3,626	3,457	3,157	3,250	3,833	5,420
	<b>300</b>	2,830	2,762	2,915	3,088	3,765	5,420
	<b>400</b>	3,236	3,113	3,030	3,167	3,801	5,420
	<b>500</b>	3,396	3,237	2,897	3,057	3,751	5,420
<b>2</b>	<b>100</b>	3,001	2,907	2,953	3,112	3,765	5,420
	<b>200</b>	3,035	2,937	2,968	3,125	3,779	5,420
	<b>300</b>	2,820	2,754	2,911	3,085	3,763	5,420
	<b>400</b>	3,219	3,098	3,024	3,163	3,799	5,420
	<b>500</b>	2,820	2,754	2,912	3,086	3,764	5,420
<b>1</b>	<b>100</b>	2,825	2,755	2,899	3,070	3,733	5,420
	<b>200</b>	3,160	3,046	3,002	3,146	3,784	5,420

<i>Continuação da Tabela 5.18</i>							
<i>L/R</i>	<i>R/h</i>	<i>S*=0.1</i>	<i>S*=0.2</i>	<i>S*=1.0</i>	<i>S*=1.5</i>	<i>S*=5.0</i>	<b>Sólido</b>
<b>1</b>	<b>300</b>	3,149	3,036	3,001	3,147	3,788	5,420
	<b>400</b>	3,008	2,914	2,961	3,120	3,778	5,420
	<b>500</b>	2,911	2,781	2,920	3,092	3,766	5,420

Tabela 5.18 – Massa específica por unidade de área (kg/m<sup>2</sup>) – CH x CSCN. (\*) Os valores de  $t_c$  e  $t_f$  são os equivalentes aos respectivos  $S$  da CGF

Fonte: Autor (2019).

A redução no peso da CGF em relação à casca homogênea é superior à que ocorre na CSCN. A diferença entre as duas teorias é maior para valores de  $S$  igual a 0,1 e 0,2. Na CGF a redução média para  $S=0,1$  é de aproximadamente 63%, para  $S=0,2$  é de 61%, para  $S=1,0$  é de 50%, para  $S=1,5$  é de 45% e para  $S=5,0$  é de 31%. Os valores máximos e mínimos são muito próximos dos valores médios. Na CSCN a redução média para espessuras de camadas equivalentes a  $S=0,1$  é de 44% com variação entre 37,3% (menor) e 47,9% (maior); a  $S=0,2$  é de 46% com variação entre 40,3% e 49,2%; a  $S=1,0$  é de 45% variando entre 41,8% e 47,2%; a  $S=1,5$  é de 42% com variação entre 40,0% e 43,8%; e, por fim, a  $S=5,0$  é de 30% variando entre 29,3% e 31,1%.



## 6. Estudo das Cargas Críticas

Este capítulo traz um estudo das cargas críticas comparando as três teorias de cascas cilíndricas abordadas nos capítulos iniciais, em função das propriedades dos materiais e dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ . Com a finalidade de ilustrar a eficiência e aplicabilidade das cascas sanduíche aqui estudadas, é feita uma análise das cargas críticas sob compressão axial e pressão lateral para cascas com mesma massa e do peso das cascas quando se conserva a carga crítica constante, em função das variações do material ao longo da espessura.

### 6.1. Introdução

Para as cascas cilíndricas que utilizadas ao longo deste capítulo adotam-se, as propriedades para seus materiais constituintes apresentadas na Tabela 6.1.

Alumínio	$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Sólido	68.9	0.35	2710
Espuma	1.0	0.32	250

Tabela 6.1 – Propriedades físicas dos materiais das cascas cilíndricas  
Fonte: Autor (2019).

O primeiro exemplo tem como objetivo comparar as cargas críticas de cascas com a mesma geometria, mas diferentes distribuições das propriedades do material ao longo da espessura tanto para a casca sob compressão axial quanto para a casca sob pressão lateral, usando as teorias de casca apresentadas. Os parâmetros geométricos utilizados neste exemplo são apresentados na Tabela 6.2.

Teoria	L (m)	R (m)	h (m)	
CH	4	1	0.002	
CGF	4	1	0.002	
CSCN	4	1	$t_c$	0.0018
			$t_f$	0.0001

Tabela 6.2 – Propriedades geométricas das cascas  
Fonte: Autor (2019).

Para a CH com três variáveis (3Var) o resultado analítico da carga crítica axial é obtido de acordo com a Equação 2.48, que corresponde a uma carga crítica axial (CCA) de  $1,067 \times 10^6$  N para qualquer par ( $m$ ,  $n$ ). As Figuras 6.1 a 6.3 mostram a variação da carga de bifurcação em função de  $m$  e  $n$  considerando os três tipos de casca, correspondendo a carga crítica ao autovalor mínimo.

Pode-se observar que, em todos os casos, diversos pares ( $m$ ,  $n$ ) conduzem à mesma carga crítica, tendo-se assim um patamar mínimo que pode ser considerado como a carga crítica da casca. Estas são apresentadas na Tabela 6.3.

Observa-se que ocorre um decréscimo na capacidade de carga da casca, como esperado, já que a espessura da casca permanece constante e as propriedades físicas do material do núcleo são menores que as das faces na CGF e na CSCN, enquanto na casca de material homogêneo (CH) consideram-se as propriedades físicas da casca constantes e iguais à da face das cascas com gradação funcional e sanduíche.

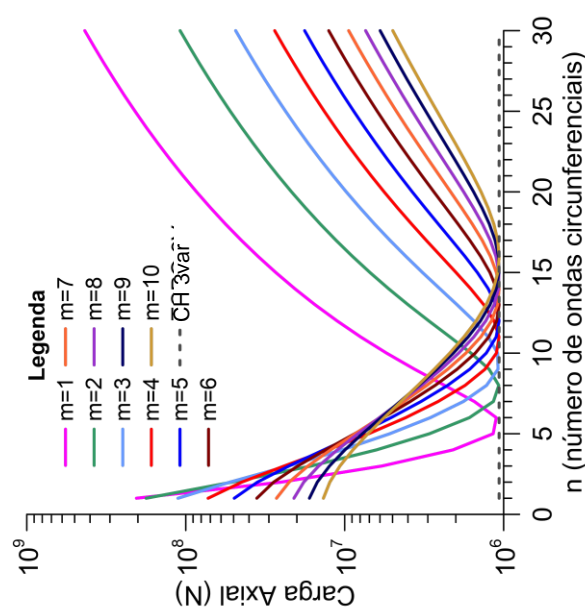


Figura 6.1 – Cargas críticas axiais – CH – 3 e 5 variáveis (m de 1 a 10)  
Fonte: Autor (2019).

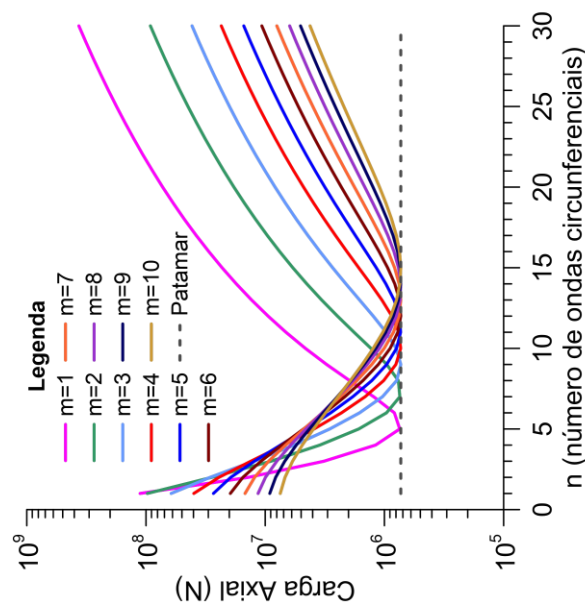


Figura 6.2 – Cargas críticas axiais – CGF – 5 variáveis,  $S=1.0$   
Fonte: Autor (2019).

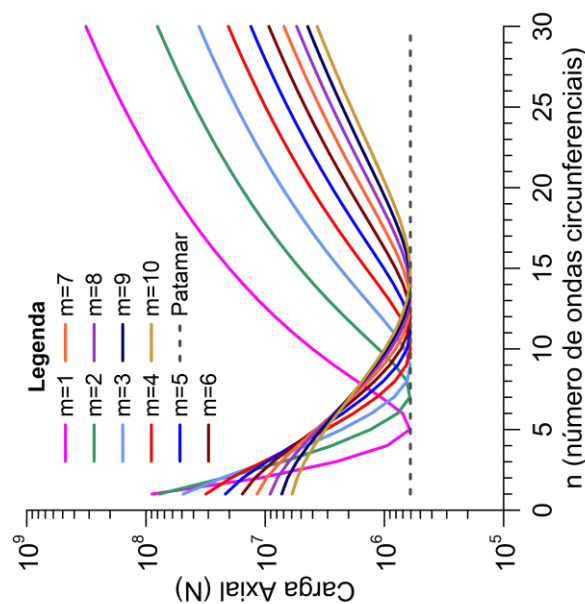


Figura 6.3 – Cargas críticas axiais – CSCN  
Fonte: Autor (2019).

	CH	CGF (S=1,0)	CSCN
<b>Patamar (N)</b>	$10,6728 \cdot 10^5$	$7,2847 \cdot 10^5$	$6,0570 \cdot 10^5$

Tabela 6.3 – Cargas axiais críticas

Fonte: Autor (2019).

Para as pressões laterais críticas as Figuras 6.6 a 6.8 ilustram a variação da carga de bifurcação em função de  $m$  e  $n$  considerando os três tipos de casca, correspondendo a carga crítica ao autovalor mínimo. Para a casca de material homogêneo e com graduação funcional são consideradas apenas três variáveis. Ao contrário da carga crítica axial, a pressão lateral crítica sempre ocorre para  $m=1$ , sendo o valor de  $n$  crítico dependente da geometria e material.

	CH	CGF (S=1,0)	CSCN
<b><math>p_{cr}</math> (N/m<sup>2</sup>)</b>	3035,8975	2249,9010	1915,6585
<b><math>n_{cr}</math></b>	6	6	6

Tabela 6.4 – Pressão lateral crítica

Fonte: Autor (2019).

Para este exemplo, a influência de  $S$  nas cargas críticas está ilustrada na Figura 6.4, para carga axial, e na Figura 6.5, para pressão lateral. Observa-se que, quanto maior o valor de  $S$ , maior é a carga crítica, tendendo assintoticamente à carga crítica da casca homogênea para valores de  $S$  elevados.

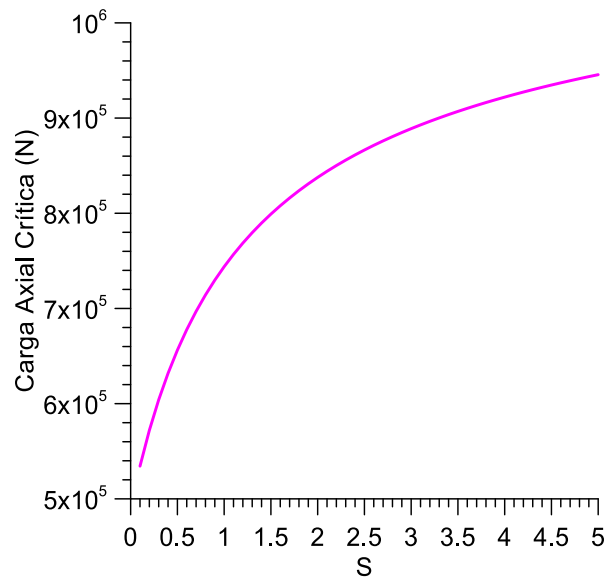


Figura 6.4 – Estudo da influência de S na carga axial crítica (CGF)

Fonte: Autor (2019).

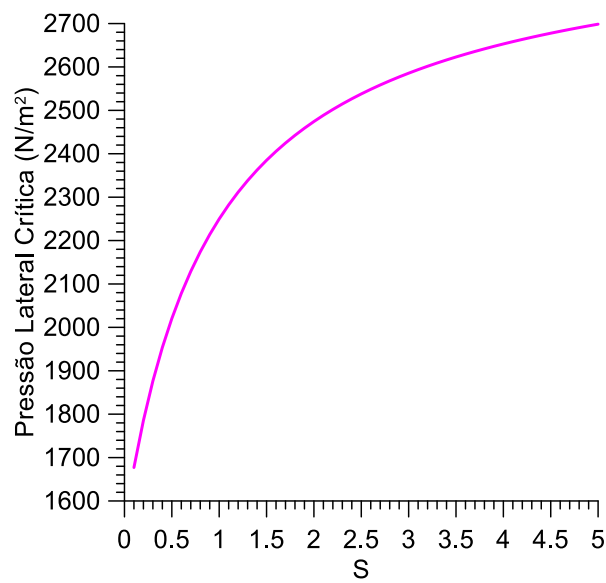


Figura 6.5 – Estudo da influência de S na pressão lateral crítica (CGF)

Fonte: Autor (2019).

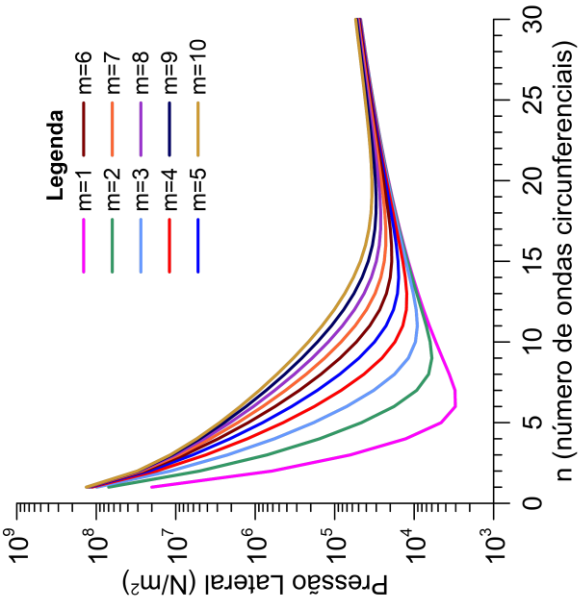


Figura 6.6 – Pressões laterais críticas – CH – 3 variáveis  
Fonte: Autor (2019).

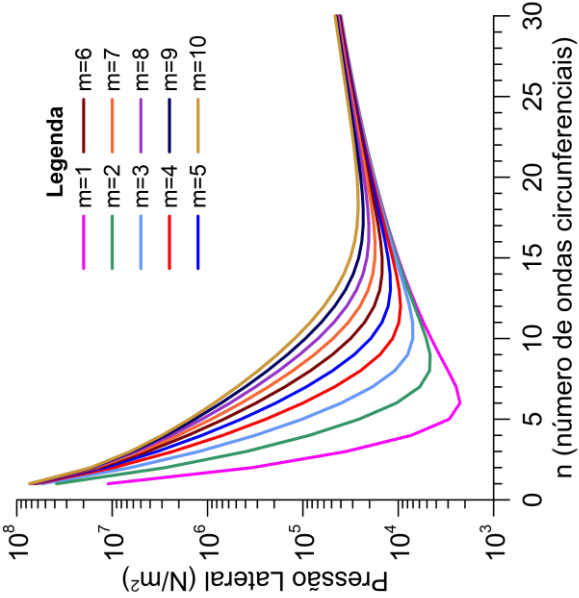


Figura 6.7 – Pressões laterais críticas – CGF – 3 variáveis, S=1.0  
Fonte: Autor (2019).

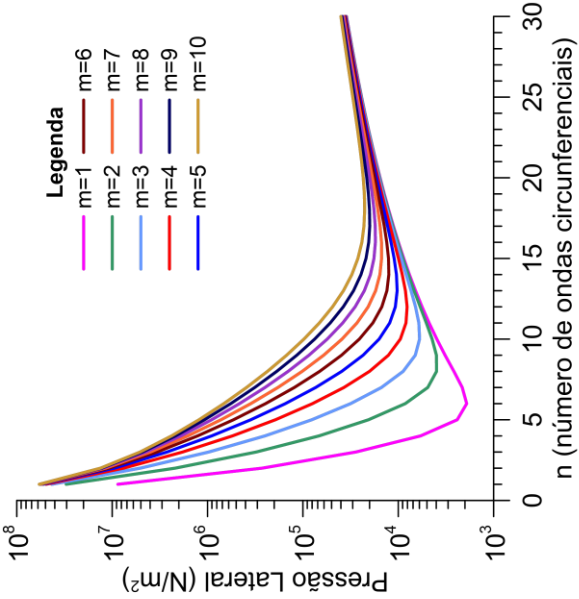


Figura 6.8 – Pressões laterais críticas – CSCN  
Fonte: Autor (2019).

## 6.2. Influência da Geometria

Estuda-se agora a influência das relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$  nas cargas críticas da casca considerando, para isso, as relações geométricas apresentadas na Tabela 6.5.

$R/h$	50		100		200		300		400		500	
$L/R$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	

Tabela 6.5 – Relações geométricas: cascas cilíndricas

Fonte: Autor (2019).

Para a carga axial, como mostram as Figuras 6.1 a 6.3, a carga crítica é constante para cada material independente dos valores de  $m$  e  $n$ . Cabe lembrar que, para o material homogêneo, a carga crítica axial é dada por:

$$P_{cr} = \frac{2\pi E h^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (6.1)$$

que é função apenas das propriedades do material e da espessura da casca e o esforço normal crítico por unidade de comprimento, por:

$$N_{cr} = \frac{P_{cr}}{2\pi R} = \frac{E h^2 / R}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (6.2)$$

que são independentes da relação geométrica  $L/R$ .

Assim tem-se para a tensão crítica:

$$\sigma_{cr} = \frac{E \left(\frac{h}{R}\right)}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (6.3)$$

que é função apenas das propriedades do material e da relação geométrica  $R/h$ , sendo inversamente proporcional a esta relação. O mesmo acontece para a CGF e a CSCN, sendo o valor do patamar associado à rigidez efetiva da estrutura.

Cabe ressaltar que as expressões acima são obtidas por um processo de minimização onde se consideram  $m$  e  $n$  como variáveis contínuas, enquanto na estrutura real os valores de  $m$  e  $n$  são inteiros (valores discretos), o que leva a pequenas flutuações no valor da carga crítica (Hunt, Lord, Peletier; 2003).



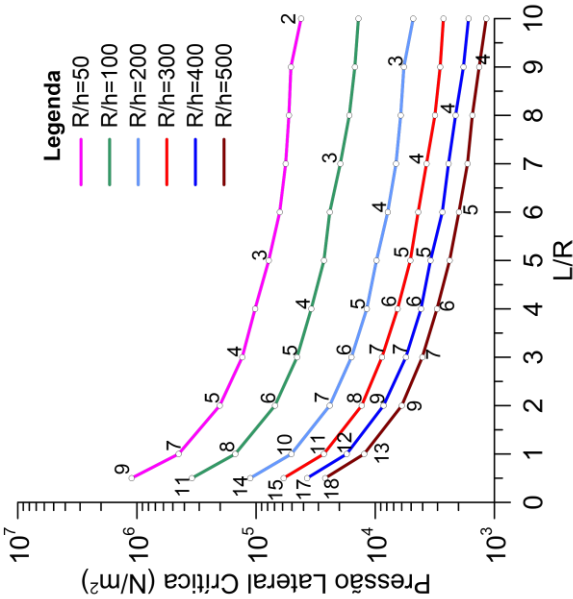


Figura 6.9 – Pressões laterais críticas com variação das relações geométricas da casca isotrópica (m=1) – CH (5 Variáveis). Valores de n indicados  
Fonte: Autor (2019).

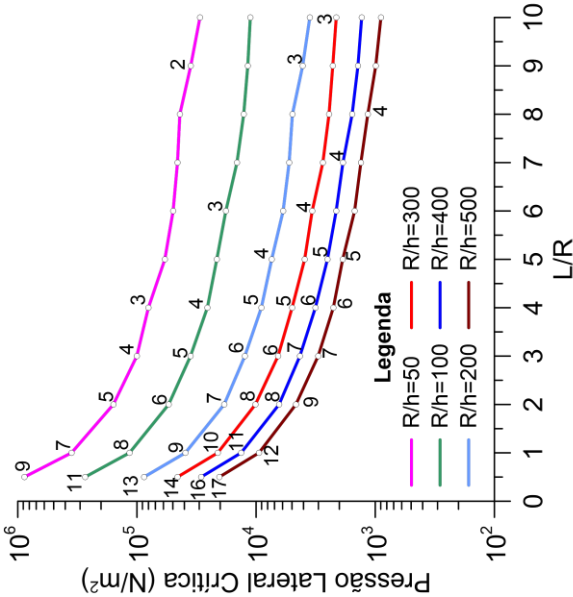


Figura 6.10 – Pressões laterais críticas com variação das relações geométricas da casca sanduíche (m=1) – CFG (5 Variáveis). Valores de n indicados  
Fonte: Autor (2019).

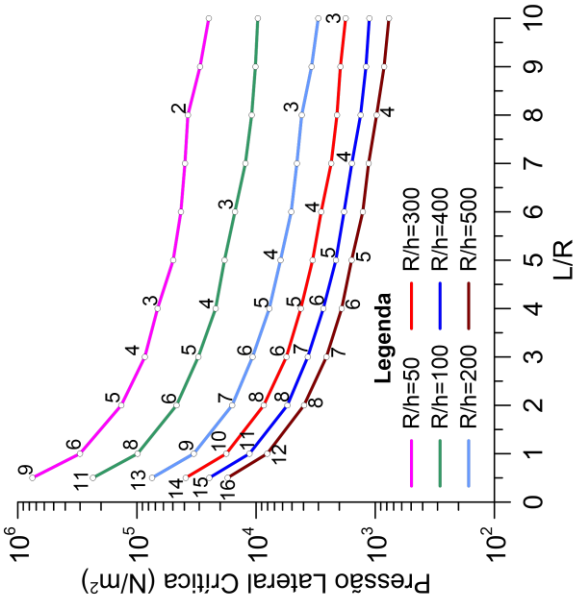


Figura 6.11 – Pressões laterais críticas com variação das relações geométricas da casca sanduíche (m=1) – CSCN. Valores de n indicados  
Fonte: Autor (2019).

As Figuras 6.9 a 6.11 mostram a variação da pressão lateral crítica com os parâmetros geométricos da casca. A pressão lateral crítica ocorre sempre para  $m=1$ . O valor de  $n$  crítico decresce com a relação  $L/R$  menor e com a relação  $R/h$ . Novamente, como esperado, a pressão lateral crítica é maior para a casca homogênea, como ilustra a Figura 6.12 onde se comparam as cargas críticas das três cascas para três relações de  $R/h$ , em função da espessura ser mantida constante, enquanto as propriedades dos materiais variam ao longo da espessura, como já observado para a carga axial crítica. As vantagens das cascas sanduíche e com graduação funcional, em termos de capacidade de carga e peso, são ressaltadas nos itens a seguir.

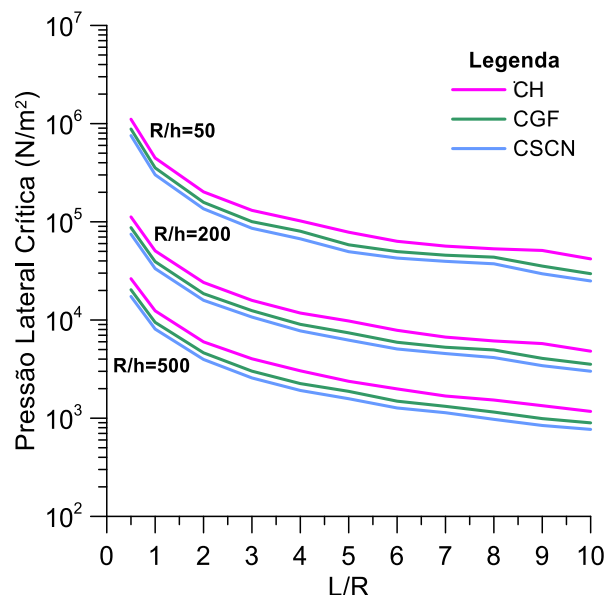


Figura 6.12 – Comparativo entre teorias para variação das relações geométricas – Pressão Lateral Crítica

Fonte: Autor (2019).

### 6.3. Cargas críticas para cascas com mesma massa

Estuda-se aqui a carga crítica de cascas com a mesma massa e diferentes propriedades ao longo da espessura. Para isto, utilizam-se as Equações 5.2 e 5.4 para determinar as espessuras das cascas com graduação funcional e sanduíche que possuam a mesma massa que a casca homogênea. As características geométricas

das cascas aqui utilizadas são:  $R=1$  m e  $L=4$  m. A espessura referência da casca homogênea é de 2,0 mm. Assim, têm-se as seguintes espessuras:

CH	CGF	CSCN	
		$t_c$	$t_f$
2,000	$S = 0.1$	4,693	4,659
	$S = 0.2$	4,414	4,176
	$S = 1.0$	3,419	2,455
	$S = 1.5$	3,169	2,023
	$S = 5.0$	2,613	1,061
			0,017
			0,119
			0,482
			0,573
			0,776

Tabela 6.6 – Espessuras (mm) de cascas com mesma massa  
Fonte: Autor (2019).

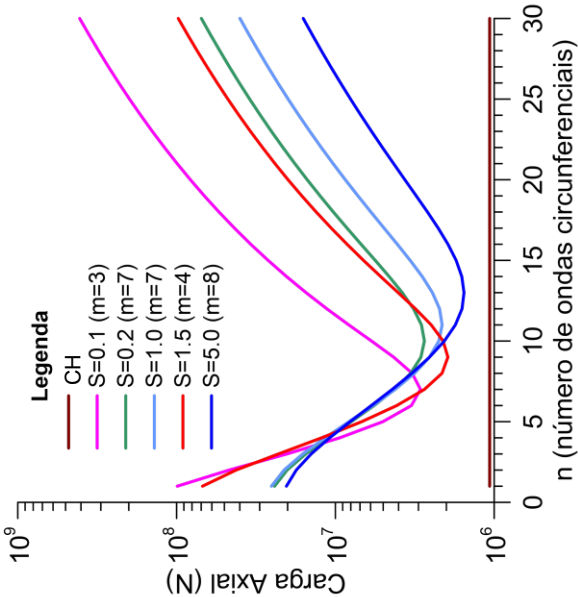


Figura 6.13 – Carga Axial em cascas de mesma massa (valores de m indicados) – CH e CGF (3 Variáveis)  
Fonte: Autor (2019).

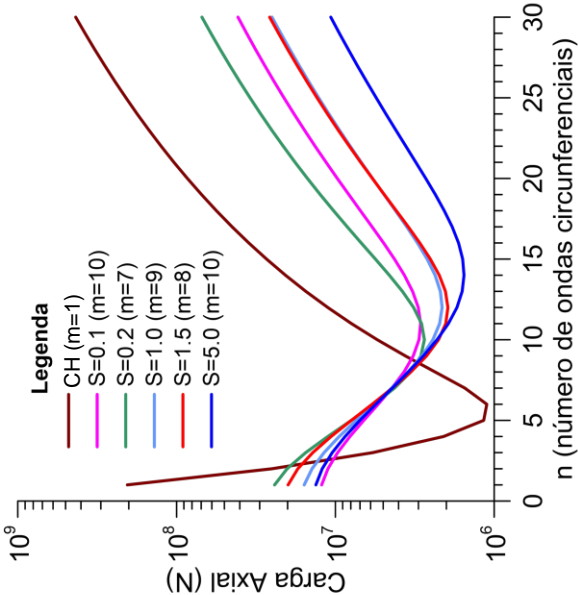


Figura 6.14 – Carga Axial em cascas de mesma massa para  $S=1.0$  (valores de m indicados) – CH e CGF (5 Variáveis)  
Fonte: Autor (2019).

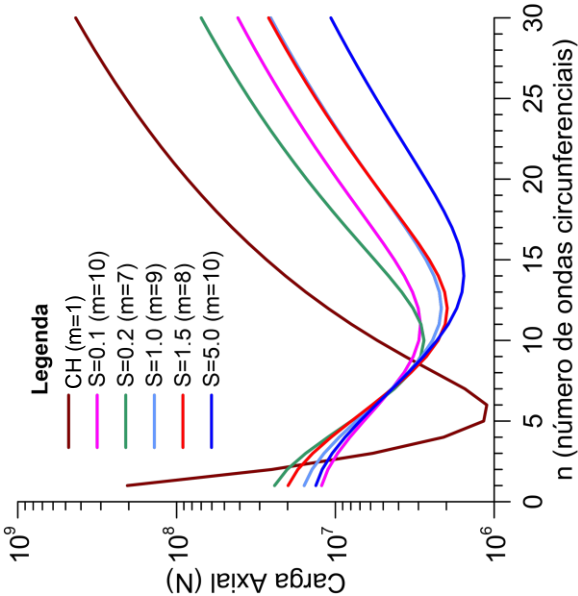


Figura 6.15 – Carga Axial em cascas de mesma massa (valores de m indicados) – CH e CSCN (5 Variáveis)  
Fonte: Autor (2019).

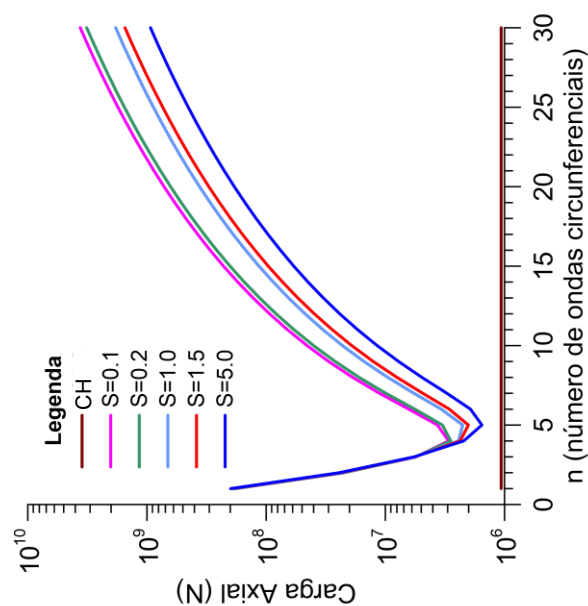


Figura 6.16 – Carga Axial em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CGF (3 Variáveis)  
Fonte: Autor (2019).

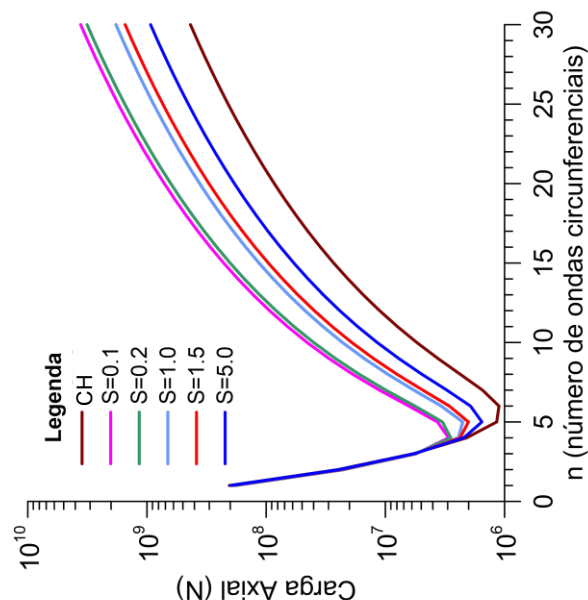


Figura 6.17 – Carga Axial em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CGF (5 Variáveis)  
Fonte: Autor (2019).

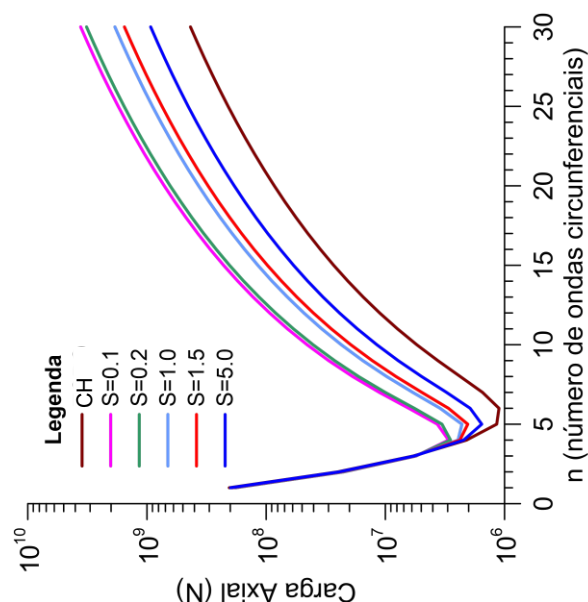


Figura 6.18 – Carga Axial em cascas de mesma massa ( $m=1$ ) – CH e CSCN (5 Variáveis)  
Fonte: Autor (2019).

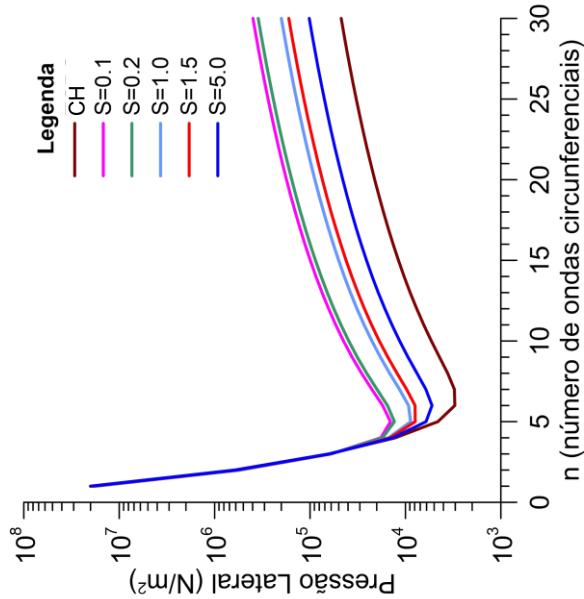


Figura 6.19 – Pressão lateral em cascas de mesma massa (m=1) – CH e CGF (3 Variáveis)

Fonte: Autor (2019).

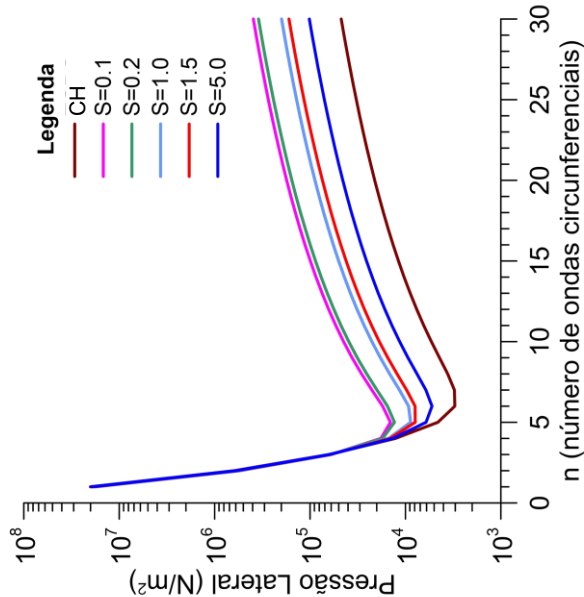


Figura 6.20 – Pressão lateral em cascas de mesma massa – CH e CGF (5 Variáveis)

Fonte: Autor (2019).

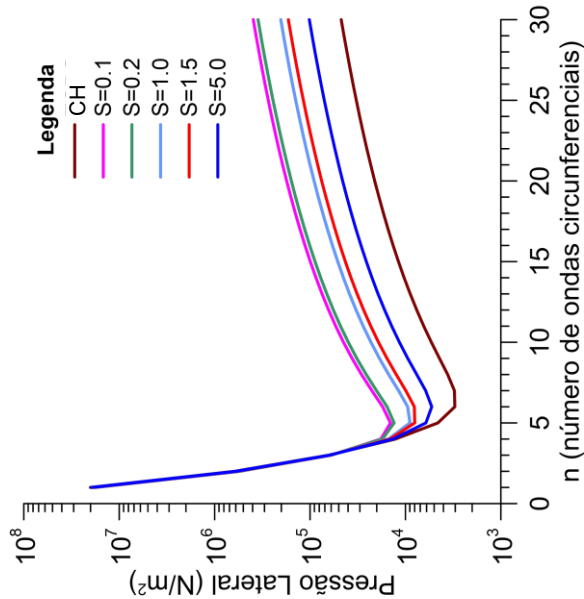


Figura 6.21 – Pressão lateral em cascas de mesma massa (m=1) – CH e CSCN (5 Variáveis)

Fonte: Autor (2019).

As Figuras 6.13 a 6.15 mostram a variação das cargas axiais de bifurcação com a mesma massa em função de  $n$  e considerando os valores de  $m$  obtidos no processo de minimização da carga. Estes valores de  $m$  estão indicados nas figuras. Vale lembrar que existe um patamar para cada caso, existindo apenas pequenas diferenças numéricas em virtude de, na estrutura, os valores de  $m$  e  $n$  serem inteiros, enquanto no processo de minimização considera-se  $m$  e  $n$  como variáveis contínuas. As cargas críticas axiais ( $P_{cr}$ ) da casca com gradação funcional considerando três variáveis independentes (deslocamentos) são superiores às da casca homogênea para cascas de mesma massa e cresce à medida que o parâmetro  $S$  diminui demonstrando a importância do material na capacidade de carga da estrutura. Tais diferenças são apresentadas na Tabela 6.7. Os resultados considerando cinco variáveis independentes (deslocamentos e rotações) são apresentados na Tabela 6.8, onde se observam praticamente os mesmos resultados que na Tabela 6.7.

	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>	<b>CH</b>
$P_{cr}$ (N)	$2,91 \cdot 10^6$	$2,75 \cdot 10^6$	$2,13 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,07 \cdot 10^6$
%	172,64	157,76	99,44	83,32	45,09	-

Tabela 6.7 – Aumento da carga crítica axial em função de  $S$  ( $m$  qualquer) – CH e CGF três variáveis

Fonte: Autor (2019).

	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>	<b>CH</b>
$P_{cr}$ (N)	$2,91 \cdot 10^6$	$2,75 \cdot 10^6$	$2,13 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^6$
%	161,21	146,99	91,14	75,71	39,06	-

Tabela 6.8 – Aumento da carga crítica axial em função de  $S$  ( $m$  qualquer) – CH e CGF cinco variáveis

Fonte: Autor (2019).

	<b>S=0.1*</b>	<b>S=0.2*</b>	<b>S=1.0*</b>	<b>S=1.5*</b>	<b>S=5.0*</b>	<b>CH</b>
$P_{cr}$ (N)	$3,01 \cdot 10^6$	$2,77 \cdot 10^6$	$2,15 \cdot 10^6$	$1,97 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^6$
%	170,38	148,46	93,28	77,40	39,41	-

Tabela 6.9 – Aumento da carga crítica axial em função de  $S$  ( $m$  qualquer) – CH e CSCN

Fonte: Autor (2019).

A comparação da carga crítica axial da casca homogênea com os resultados da casca sanduíche é apresentada na Tabela 6.9. Em todos os casos, observa-se o efeito benéfico do núcleo de espuma metálica na capacidade de carga da estrutura. Cabe ressaltar que em muitas estruturas, como as estruturas aeroespaciais, o peso da estrutura é uma das principais variáveis de projeto.

Apesar do valor de  $m$  associado ao modo crítico variar, como visto anteriormente, usualmente observa-se uma meia onda longitudinal nos experimentos. As Figuras 6.16 a 6.18 mostram a variação das cargas axiais de bifurcação com a mesma massa em função de  $n$  e considerando  $m=1$  e as Tabelas 6.10 a 6.12 mostram o aumento da carga crítica axial das cascas sanduíche e com gradação funcional. Como esperado, os resultados são semelhantes aos obtidos considerando  $m$  variável. Nota-se, comparando as Figuras 6.16 a 6.18 com as Figuras 6.13 a 6.15, que o valor de  $n$  crítico está intimamente relacionado com o valor de  $m$ . Cabe ressaltar que a variável contínua utilizada no processo de minimização é dada por

$$\frac{\bar{m}^2 + n^2}{\bar{m}^2}; \quad \bar{m} = m\pi R/L \quad (6.4)$$

que envolve  $m$  e  $n$  simultaneamente.

	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>	<b>CH</b>
$P_{cr}$ (N)	$2,95 \cdot 10^6$	$2,83 \cdot 10^6$	$2,25 \cdot 10^6$	$2,01 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,07 \cdot 10^6$
%	176,20	164,72	110,44	88,41	45,12	-

Tabela 6.10 – Aumento da carga crítica axial em função de  $S$  ( $m=1$ ) – CH e CGF 3 variáveis

Fonte: Autor (2019).

	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>	<b>CH</b>
$P_{cr}$ (N)	$2,95 \cdot 10^6$	$2,83 \cdot 10^6$	$2,25 \cdot 10^6$	$2,01 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^6$
%	164,79	153,78	101,75	80,63	39,13	-

Tabela 6.11 – Aumento da carga crítica axial em função de  $S$  ( $m=1$ ) – CH e CGF

Fonte: Autor (2019).



	<b>S*=0.1</b>	<b>S*=0.2</b>	<b>S*=1.0</b>	<b>S*=1.5</b>	<b>S*=5.0</b>	<b>CH</b>
$P_{cr}$ (N)	$2,95 \cdot 10^6$	$2,84 \cdot 10^6$	$2,28 \cdot 10^6$	$2,04 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^6$
%	164,92	154,97	104,89	82,85	39,61	-

Tabela 6.12 – Aumento da carga crítica axial em função de  $S$  ( $m=1$ ) – CH e CSCN  
Fonte: Autor (2019).

As Figuras 6.19 a 6.21 mostram a variação das cargas de bifurcação para uma pressão externa uniforme (PLC) em função de  $n$ . Neste caso a flambagem sempre ocorre para  $m=1$ , independente do material e geometria. Mais uma vez observa-se um aumento da capacidade de carga com o parâmetro  $S$ , e um leve decréscimo no número de ondas circunferenciais crítico. O aumento na capacidade de carga é ilustrado nas Tabelas 6.13 a 6.15. Observa-se que o aumento na capacidade de carga é bem superior a aquele observado para o caso da casca sob compressão axial. Nas pressões laterais críticas para cascas de mesma massa, a influência da teoria utilizada na análise é mínima.

	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>	<b>Sólido</b>
$p_{cr}$ (N/m <sup>2</sup> )	$1,44 \cdot 10^4$	$1,30 \cdot 10^4$	$8,82 \cdot 10^3$	$7,90 \cdot 10^3$	$5,27 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$
%	373,27	329,73	190,53	160,11	73,65	-

Tabela 6.13 – Aumento da carga crítica da casca sob pressão lateral externa em função de  $S$  – CH e CGF três variáveis  
Fonte: Autor (2019).

	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>	<b>Sólido</b>
$p_{cr}$ (N/m <sup>2</sup> )	$1,44 \cdot 10^4$	$1,30 \cdot 10^4$	$8,82 \cdot 10^3$	$7,90 \cdot 10^3$	$5,27 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$
%	373,19	329,68	190,52	160,10	73,64	-

Tabela 6.14 – Aumento da carga crítica da casca sob pressão lateral externa em função de  $S$  – CH e CGF cinco variáveis  
Fonte: Autor (2019).

	<b>S*=0.1</b>	<b>S*=0.2</b>	<b>S*=1.0</b>	<b>S*=1.5</b>	<b>S*=5.0</b>	<b>Sólido</b>
$p_{cr}$ (N/m <sup>2</sup> )	$1,44 \cdot 10^4$	$1,32 \cdot 10^4$	$8,96 \cdot 10^3$	$7,99 \cdot 10^3$	$5,30 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$
%	373,66	333,77	195,04	163,31	74,62	-

Tabela 6.15 – Aumento da carga crítica da casca sob pressão lateral externa em função de  $S$  – CH e CSCN

Fonte: Autor (2019).

É importante ressaltar que as espessuras da CGF e CSCN, para cascas de mesma massa, são iguais em ambas, em relação a espessura da casca na CH, possuem espessuras percentualmente maiores, a saber: 134,65% para  $S=0,1$ ; 106,80% para  $S=0,2$ ; 70,95% para  $S=1,0$ ; 58,45% para  $S=1,5$  e; 30,65% para  $S=5,0$ .

#### 6.4. Cascas de mesma carga crítica

Em muitos casos, a capacidade de carga do membro estrutural é uma das principais variáveis de projeto e, em cascas metálicas, o critério de estabilidade muitas vezes define a geometria da casca. Aqui se faz uma análise paramétrica, mantendo a carga crítica fixa, bem como o raio e altura da casca, tendo como variável de projeto a espessura e a variação das propriedades do material ao longo desta espessura. A carga crítica de referência é obtida em cada caso a partir da CH considerando o efeito do cisalhamento (5Var) fixando uma espessura de 2mm e utilizando relações geométricas para  $R/h$  (100, 200, 300, 400 e 500) e  $L/R$  (4, 2 e 1) compatíveis com as aplicações práticas. As propriedades físicas são as elencadas na Tabela 5.2 para o material homogêneo. Para estas relações geométricas as cargas críticas são encontradas. Em seguida, para a CGF de cinco variáveis, encontram-se as espessuras que levam à mesma carga crítica que a CH, sendo estas apresentadas na Tabela 6.16 para o caso da casca sob compressão axial e valores selecionados de  $S$ . Essas espessuras são as mesmas adotadas para a CSCN. Importante destacar que na Tabela 6.16 as relações geométricas ( $L/R$  e  $R/h$ ) e as CCA se referem às cascas de material homogêneo.

<i>L/R</i>	<i>R/h</i>	$P_{cr}$ ( $10^6$ N)	<i>S=0.1</i>	<i>S=0.2</i>	<i>S=1.0</i>	<i>S=1.5</i>	<i>S=5.0</i>
<b>4</b>	<b>100</b>	1,06545	2,843	2,748	2,420	2,341	2,170
	<b>200</b>	1,06673	2,844	2,750	2,421	2,341	2,170
	<b>300</b>	1,06705	2,842	2,750	2,421	2,341	2,169
	<b>400</b>	1,06717	2,843	2,749	2,421	2,341	2,169
	<b>500</b>	1,06713	2,843	2,749	2,421	2,340	2,170
<b>2</b>	<b>100</b>	1,06344	2,848	2,753	2,424	2,343	2,171
	<b>200</b>	1,06673	2,846	2,752	2,423	2,342	2,171
	<b>300</b>	1,06688	2,844	2,751	2,421	2,341	2,170
	<b>400</b>	1,06693	2,843	2,749	2,421	2,341	2,170
	<b>500</b>	1,06707	2,843	2,750	2,421	2,341	2,170
<b>1</b>	<b>100</b>	1,06344	2,848	2,753	2,422	2,341	2,171
	<b>200</b>	1,06509	2,845	2,751	2,422	2,341	2,170
	<b>300</b>	1,06588	2,844	2,750	2,422	2,341	2,170
	<b>400</b>	1,06631	2,844	2,750	2,421	2,341	2,170
	<b>500</b>	1,06671	2,844	2,750	2,422	2,341	2,170

Tabela 6.16 – Espessuras (mm) para uma mesma carga axial crítica – CH x CGF. Essas espessuras também são utilizadas na CSCN.

Fonte: Autor (2019).

Para cada valor de *S* é possível notar que, independentemente das relações geométricas, a espessura se mantém praticamente constante. Quanto maior o *S* menor a espessura requerida para a casca. A Tabela 6.17 apresenta a redução percentual, em relação à CH, da massa por unidade de área decorrente das espessuras encontradas na tabela acima. Para a CSCN a redução percentual da massa por unidade de área para uma mesma carga axial crítica é apresentada na Tabela 6.18. A redução da massa por unidade de área para a CSCN para as cargas axiais críticas são similares às obtidas para a CGF. Em ambos os casos se observa a grande redução da massa e, portanto, do peso da casca à medida que *S* diminui. Independente do valor de *S*, há sempre uma redução significativa no peso da estrutura, indicando a vantagem de se usar em certas aplicações a casca sanduíche com gradação funcional.

<i>L/R</i>	<i>R/h</i>	<i>S=0.1</i>	<i>S=0.2</i>	<i>S=1.0</i>	<i>S=1.5</i>	<i>S=5.0</i>
<b>4</b>	<b>100</b>	39,4194	37,7272	29,1985	26,1363	16,9585
	<b>200</b>	39,4071	37,6937	29,1723	26,1269	16,9791
	<b>300</b>	39,4305	37,6942	29,1790	26,1268	17,0055

<i>Continuação da Tabela 6.17</i>						
<i>L/R</i>	<i>R/h</i>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>4</b>	<b>400</b>	39,4214	37,7224	29,1775	26,1395	16,9815
	<b>500</b>	39,4252	37,7153	29,1827	26,1594	16,9765
<b>2</b>	<b>100</b>	39,3200	37,6308	29,1044	26,0745	16,9202
	<b>200</b>	39,3531	37,6445	29,1235	26,0916	16,9412
	<b>300</b>	39,3990	37,6738	29,1841	26,1161	16,9539
	<b>400</b>	39,4082	37,7097	29,1854	26,1268	16,9696
	<b>500</b>	39,4273	37,6957	29,1793	26,1357	16,9677
<b>1</b>	<b>100</b>	39,3198	37,6305	29,1397	26,1190	16,9202
	<b>200</b>	39,3839	37,6635	29,1616	26,1215	16,9650
	<b>300</b>	39,4002	37,6875	29,1622	26,1199	16,9650
	<b>400</b>	39,4065	37,6892	29,1689	26,1269	16,9646
	<b>500</b>	39,4041	37,6874	29,1661	26,1234	16,9657

Tabela 6.17 – Redução em % da massa por unidade de área (kg/m<sup>2</sup>) – CH x CGF  
Fonte: Autor (2019).

<i>L/R</i>	<i>R/h</i>	<b>S=0.1*</b>	<b>S=0.2*</b>	<b>S=1.0*</b>	<b>S=1.5*</b>	<b>S=5.0*</b>
<b>4</b>	<b>100</b>	39,4449	38,0428	29,8883	26,7706	16,2188
	<b>200</b>	39,4331	38,0157	29,9731	26,8656	16,9948
	<b>300</b>	39,4597	38,0141	30,0615	26,9337	17,2457
	<b>400</b>	39,4490	38,0595	30,0598	27,0059	17,2894
	<b>500</b>	39,4532	38,0489	30,0730	26,9727	17,3302
<b>2</b>	<b>100</b>	39,3382	37,8893	29,5212	26,1958	14,5757
	<b>200</b>	39,3777	37,9384	29,8520	26,7002	16,5306
	<b>300</b>	39,4244	37,9898	29,9756	26,8503	16,9364
	<b>400</b>	39,4353	38,0171	30,0601	26,8950	17,1378
	<b>500</b>	39,4548	38,0158	30,0613	26,9664	17,2017
<b>1</b>	<b>100</b>	39,3379	37,8900	29,6019	26,2379	14,5757
	<b>200</b>	39,4082	37,9595	29,8419	26,6553	16,1431
	<b>300</b>	39,4250	37,9897	29,9062	26,7446	16,5440
	<b>400</b>	39,4331	38,0060	29,9556	26,8119	16,8012
	<b>500</b>	39,4304	38,0015	29,9796	26,8478	16,9835

Tabela 6.18 – Redução em % da massa por unidade de área (kg/m<sup>2</sup>) – CH x CSCN  
– Carga axial crítica. (\*) S equivalente para espessuras  $t_c$  e  $t_f$   
Fonte: Autor (2019).

Na Tabela 6.19 apresentam-se as espessuras encontradas para o caso de pressão lateral externa crítica constante, tendo como referência a casca de material

homogêneo com 2mm de espessura. Essas espessuras são as mesmas obtidas para a CSCN com distribuição semelhante de material ao longo da espessura. Novamente se observa que a espessura para um dado valor de  $S$  é praticamente constante para os valores de  $L/R$  e  $R/h$  analisados, com a espessura crescendo à medida que  $S$  diminui. Importante destacar que na Tabela 6.19 as relações geométricas ( $L/R$  e  $R/h$ ) e as PLC se referem às cascas de material homogêneo.

$L/R$	$R/h$	$P_{cr}$ ( $10^3 \text{ N/m}^2$ )	$S=0.1$	$S=0.2$	$S=1.0$	$S=1.5$	$S=5.0$
<b>4</b>	<b>100</b>	34,44	2,506	2,448	2,247	2,198	2,096
	<b>200</b>	11,78	2,454	2,400	2,211	2,167	2,076
	<b>300</b>	6,50	2,523	2,461	2,238	2,182	2,061
	<b>400</b>	4,13	2,474	2,404	2,208	2,163	2,074
	<b>500</b>	3,04	2,515	2,458	2,253	2,203	2,100
<b>2</b>	<b>100</b>	69,49	2,477	2,412	2,193	2,150	2,066
	<b>200</b>	24,14	2,485	2,419	2,210	2,165	2,076
	<b>300</b>	13,00	2,498	2,437	2,216	2,161	2,066
	<b>400</b>	8,52	2,495	2,438	2,237	2,188	2,087
	<b>500</b>	5,99	2,500	2,439	2,218	2,163	2,071
<b>1</b>	<b>100</b>	149,80	2,471	2,409	2,206	2,162	2,073
	<b>200</b>	50,58	2,479	2,421	2,215	2,165	2,064
	<b>300</b>	27,05	2,484	2,426	2,218	2,166	2,069
	<b>400</b>	17,38	2,481	2,423	2,221	2,171	2,068
	<b>500</b>	12,39	2,495	2,433	2,221	2,174	2,077

Tabela 6.19 – Espessuras (mm) para uma mesma pressão lateral crítica – CH x CGF  
Fonte: Autor (2019).

A redução de massa por unidade de área nas cascas CGF é apresentada na Tabela 6.20 e para a CSCN, na Tabela 6.21. As reduções de massa por unidade de área das cascas é maior para as pressões laterais que para cargas axiais, chegando a quase 50% para  $S=0.1$ .

$L/R$	$R/h$	$S=0.1$	$S=0.2$	$S=1.0$	$S=1.5$	$S=5.0$
<b>4</b>	<b>100</b>	46,6086	44,5232	34,2839	30,6503	19,7921
	<b>200</b>	47,7167	45,6266	35,3111	31,6276	20,5433
	<b>300</b>	46,2359	44,2348	34,5253	31,1274	21,1327
	<b>400</b>	47,2819	45,5254	35,4215	31,7326	20,6237
	<b>500</b>	46,4037	44,3186	34,0914	30,4670	19,6501

<i>Continuação da Tabela 6.20</i>						
<i>L/R</i>	<i>R/h</i>	<b>S=0.1</b>	<b>S=0.2</b>	<b>S=1.0</b>	<b>S=1.5</b>	<b>S=5.0</b>
<b>2</b>	<b>100</b>	47,2084	45,3458	35,8574	32,1490	20,9467
	<b>200</b>	47,0414	45,1821	35,3542	31,6692	20,5751
	<b>300</b>	46,7615	44,7808	35,1696	31,8067	20,9401
	<b>400</b>	46,8327	44,7567	34,5646	30,9488	20,1458
	<b>500</b>	46,7184	44,7352	35,1097	31,7415	20,7599
<b>1</b>	<b>100</b>	47,3540	45,4161	35,4700	31,7812	20,6654
	<b>200</b>	47,1840	45,1518	35,2074	31,6930	21,0094
	<b>300</b>	47,0692	45,0415	35,1313	31,6337	20,8376
	<b>400</b>	47,1413	45,0915	35,0438	31,4862	20,8781
	<b>500</b>	46,8422	44,8818	35,0366	31,4011	20,5062

Tabela 6.20 – Redução em % da massa por unidade de área (kg/m<sup>2</sup>) – CH x CGF  
– Pressão lateral crítica

Fonte: Autor (2019).

<i>L/R</i>	<i>R/h</i>	<b>S*=0.1</b>	<b>S*=0.2</b>	<b>S*=1.0</b>	<b>S*=1.5</b>	<b>S*=5.0</b>
<b>4</b>	<b>100</b>	46,6524	45,0193	35,7995	32,1372	20,4041
	<b>200</b>	47,7625	46,1427	36,9742	33,3156	21,4838
	<b>300</b>	46,2766	44,6909	35,8350	32,3860	21,7257
	<b>400</b>	47,3148	45,8878	37,1125	33,4595	21,6672
	<b>500</b>	46,4486	44,8189	35,6353	32,0037	20,4913
<b>2</b>	<b>100</b>	47,2436	45,7413	37,4817	33,7516	21,2803
	<b>200</b>	47,0769	45,5805	37,0023	33,3280	21,3991
	<b>300</b>	46,8021	45,2310	36,4583	33,0403	21,9693
	<b>400</b>	46,8774	45,2555	36,1100	32,4878	20,9618
	<b>500</b>	46,7590	45,1869	36,4103	32,9914	21,8187
<b>1</b>	<b>100</b>	47,3902	45,8353	36,9249	33,1252	20,1409
	<b>200</b>	47,2259	45,6249	36,6057	33,0387	21,6110
	<b>300</b>	47,1117	45,5155	36,5382	33,0014	21,6846
	<b>400</b>	47,1850	45,5786	36,5290	32,9491	21,5862
	<b>500</b>	46,8818	45,3231	36,6230	32,9906	21,3508

Tabela 6.21 – Redução em % da massa por unidade de área (kg/m<sup>2</sup>) – CH x CSCN  
– Pressão lateral crítica

Fonte: Autor (2019).

## 6.5. Cascas sob carga axial e pressão lateral

A Figura 6.22 traz o comportamento paramétrico de cascas, de mesma massa, submetidas, simultaneamente, a uma carga axial e uma pressão lateral. Os valores positivos indicam uma compressão axial e pressão externa, ao passo que valores negativos indicam uma tração axial e pressão interna. O comportamento é linear para as três teorias, com leve aumento para a CSCN em relação a CGF, e uma vantagem considerável entre ambas com relação à CH, principalmente em tração axial. No ponto de carga axial/ $P_{cr}$  igual a -4, as pressões laterais/ $p_{cr}$  na CSCN e CGF chegam a ser, aproximadamente, 1,74 vezes maiores que para a CH. O ponto de intersecção das curvas, ou seja, onde as cascas CSCN e CGF ( $S=1,0$ ) tem o mesmo desempenho da CH são apresentados na Tabela 6.22.

	CH	
	Carga Axial/ $P_{cr}$	Pressão Lateral/ $p_{cr}$
CGF	$\approx +4,31$	$\approx -3,31$
CSCN	$\approx +4,42$	$\approx -3,42$

Tabela 6.22 – Estudo paramétrico de cascas sob carga axial e pressão lateral  
Fonte: Autor (2019).

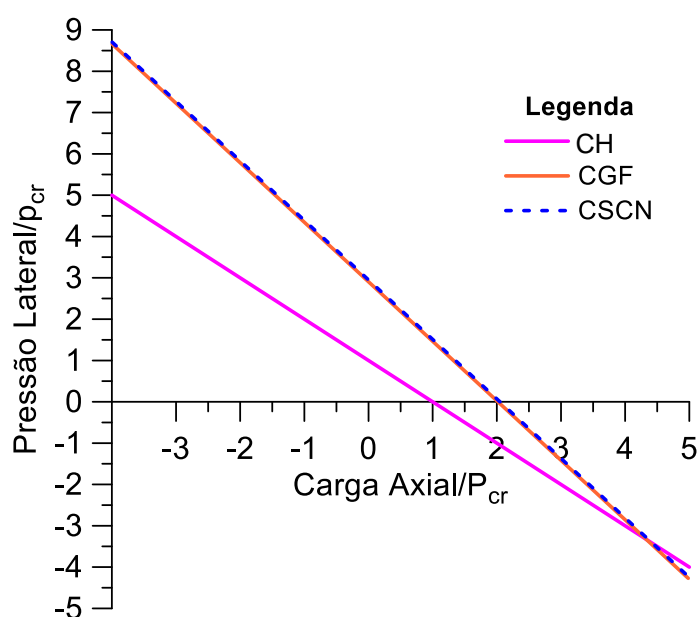


Figura 6.22 – Estudo paramétrico de cascas sob carga axial e pressão lateral  
Fonte: Autor (2019).

## 7. Conclusões e Sugestões

Neste trabalho, foram estudadas as frequências naturais e cargas críticas de cascas cilíndricas sanduíche, com cisalhamento no núcleo e com gradação funcional com um núcleo de espuma metálica, sendo os resultados comparados com os obtidos para cascas de material isotrópico e homogêneo.

### 7.1. Frequências naturais

Estuda-se em todos os casos (casca homogênea, com gradação funcional e sanduíche) a influência das inércias translacionais e rotacionais nas frequências naturais de vibração. Analisa-se o problema considerando: (1) somente a inércia translacional na direção transversal (hipótese usual), (2) as três inércias translacionais e (3) as três inércias translacionais e as duas rotacionais. Observa-se, em todos os casos, que as frequências decrescem à medida que o número de termos não nulos na diagonal principal da matriz de massa cresce em função do aumento da flexibilidade do sistema. Para valores pequenos do número de ondas circunferenciais o decréscimo nos valores da frequência natural é mínimo, mas esta diferença cresce com o aumento do número de ondas circunferenciais.

Ao se variar os parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ , constata-se que, em todos os casos, as frequências naturais decrescem à medida que  $R/h$  e/ou  $L/R$  crescem. Observa-se também que o número de ondas circunferenciais associada à frequência natural mínima (frequência fundamental) decresce com  $R/h$  e  $L/R$ . A frequência mínima sempre ocorre para um modo com meia onda longitudinal.

Para se pesquisar a vantagem da casca com núcleo de espuma metálica, comparam-se as frequências naturais de cascas de mesma massa. Observa-se que tanto cascas com gradação funcional quanto cascas sanduíche apresentam frequências naturais superiores a cascas isotrópicas e homogêneas, graças ao aumento da espessura. A gradação da espuma metálica é função de um parâmetro  $S$ , onde a espessura da espuma metálica decresce com  $S$  ( $S$  equivalente para cascas sanduíche). Verifica-se que à medida que  $S$  cresce as frequências naturais



decrecem se aproximando assintoticamente das frequências naturais da casca de material homogêneo. Observa-se, também, que o cisalhamento no núcleo da casca sanduíche aumenta a frequência natural, tal aumento é discreto ao se comparar com uma casca de gradação funcional.

Para cascas com mesma frequência fundamental, quanto menor o  $S$  (ou o  $S$  equivalente) maior é a espessura  $e$ , conseqüentemente, a camada de espuma metálica, conduzindo a uma maior redução de peso. Para as relações  $L/R$  analisadas, as reduções nas espessuras das cascas ficam entre 9% e 15%, dependendo do  $R/h$ . Nas cascas com gradação funcional quanto menor o  $S$  maior é a redução de peso, ficando para as geometrias analisadas entre 63% e 30%. Essas reduções se mantêm, aproximadamente, constantes para cada respectivo valor de  $S$  independentemente das relações geométricas.

## 7.2. Cargas críticas

No que se refere às cargas críticas, estudou-se o comportamento das cascas sob carga axial e pressão lateral.

Para a carga axial, observa-se, como no caso de cascas homogêneas um patamar relativo à carga mínima, independentemente das relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$ , que pode assim ser considerada constante para uma dada distribuição de espuma metálica.

Para pressões laterais o modo crítico está associado com uma meia onda longitudinal. O número de ondas circunferenciais crítico aumenta com a relação  $R/h$  e decresce com a relação  $L/R$ . Observa-se também que, quanto maior  $R/h$  e/ou  $L/R$  menor a pressão lateral crítica.

Para cascas de mesma espessura, tanto as cargas críticas axiais quanto as laterais são maiores para a casca homogênea. Assim, quanto maior o valor de  $S$  maior a carga crítica.

Para cascas de mesma massa, as cascas sanduíche chegam a apresentar cargas críticas axiais quase três vezes superiores à da casca isotrópica e homogênea, além de ter um desempenho levemente superior às cascas com gradação funcional. Para as pressões laterais, as cascas sanduíche chegam a apresentar pressões laterais críticas cerca de 4,75 vezes superiores à cascas isotrópicas e homogêneas, mesmo desempenho encontrado para as cascas com gradação funcional.

As cascas com mesma carga crítica axial possuem, para um determinado valor de  $S$ , espessuras praticamente constantes e independentes das relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$ . Tanto a casca com gradação funcional quanto a casca sanduíche apresentam reduções de peso semelhantes para cada valor de  $S$  (ou  $S$  equivalente). Quanto menor o valor de  $S$  maior a redução percentual.

As cascas com gradação funcional e sanduíche que apresentam a mesma pressão lateral crítica da casca homogênea apresentam reduções de peso semelhantes para respectivos  $S$  variando entre 47% e 20% para as geometrias analisadas. As espessuras se mantêm constantes independentes das relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$  de acordo com o valor de  $S$ .

O desempenho das cascas com gradação funcional e cascas sanduíche, quando comparadas às cascas homogêneas, é melhor para as pressões laterais que para compressão axial, sempre com leve vantagem para a casca sanduíche com cisalhamento no núcleo.

Com base nos resultados obtidos neste trabalho e no intuito de ampliar o entendimento do comportamento das cascas cilíndricas sanduíche alguns estudos são sugeridos nesse tema:

- a) Análise não linear, utilizando a teoria de Donnell e/ou Sanders, da relação frequência-amplitude e dos caminhos pós-críticos para a casca sanduíche e com gradação funcional;
- b) Estudo de vibrações forçadas das cascas sanduíche e com gradação funcional com formulação não linear;
- c) Influência da temperatura;
- d) Influência das imperfeições geométricas nas cargas críticas das cascas sanduíche;
- e) Análise linear e não linear de frequências e cargas críticas para diferentes condições de contorno das cascas sanduíche e com gradação funcional;
- f) Estudo da ligação (metálica ou por colagem) entre camadas estabelecendo um modelo constitutivo para entendimento de vibrações amortecidas;
- g) Estudo de cascas cilíndricas sanduíche e com gradação funcional submetidas a fluxo interno e/ou externo de fluidos;
- h) Otimizar as camadas da casca sanduíche para elevar a redução de peso.

## 8. Referências

- AMABILI, M.; REDDY, J. N. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 45, n. 4, p. 409-418, 2010.
- AMABILI, M. Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. **Composite Structures**, v. 94, n. 1, p. 207-220, 2011.
- AMABILI, M. Nonlinear vibrations and stability of laminated shells using a modified first-order shear deformation theory. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, v. 68, p. 75-87, 2018.
- ASHBY, M. F.; EVANS, T.; FLECK, N. A.; HUTCHINSON, J. W.; WADLEY, H. N. G.; GIBSON, L. J. **Metal foams: a design guide**. Elsevier, 2000.
- BANHART, J.; BAUMEISTER, J. Deformation characteristics of metal foams. **Journal of Materials Science**, v. 33, n. 6, p. 1431-1440, 1998.
- BANHART, J.; SEELIGER, H. W. Aluminium foam sandwich panels: Manufacture, metallurgy and applications. **Advanced Engineering Materials**, v. 10, n. 9, p. 793-802, 2008.

BANHART, J.; SEELIGER, H.W. Recent trends in aluminum foam sandwich technology. **Advanced Engineering Materials**, v. 14, n. 12, p. 1082-1087, 2012.

BART-SMITH, H.; HUTCHINSON, J. W.; EVANS, A. G. Measurement and analysis of the structural performance of cellular metal sandwich construction. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 43, n. 8, p. 1945-1963, 2001.

BLEVINS, R. D.; PLUNKETT, R. **Formulas for natural frequency and mode shape**. 1980.

BRUSH, D.O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of bars, plates, and shells**. New York: McGraw-Hill, 1975.

CARRERA, E.; BRISCHETTO, S. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates. **Applied mechanics reviews**, v. 62, n. 1, p. 010803, 2009.

CHENG, T.H.; LI, Z.Z.; SHEN, Y.D. Vibration analysis of cylindrical sandwich aluminum shell with viscoelastic damping treatment. **Advances in Materials Science and Engineering**, v. 2013, 2013.

DAVIES, G.J.; ZHEN, S. Review metallic foams: their production, properties and applications. **Journal of Materials Science**, Sheffield, v. 18, n. 1, p.1899-1908, 1983.

DA SILVA, F. M. A.; MONTES, R. O. P.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Nonlinear vibrations of fluid-filled functionally graded cylindrical shell considering a time-dependent lateral load and static preload. **Proceedings**

**of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 230, n. 1, p. 102-119, 2016.

DONNELL, L. H. **Stability of thin-walled tubes under torsion**. 1935.

FARSHAD, M. **Design and analysis of shell structures**. Kluwer Academic Publishers, 1993.

FORABOSCHI, P. Three-layered sandwich plate: Exact mathematical model. **Composites Part B: Engineering**, v. 45, n. 1, p. 1601-1612, 2013.

HARTE, A. M.; FLECK, N. A.; ASHBY, M. F. Sandwich panel design using aluminum alloy foam. **Advanced Engineering Materials**, v. 2, n. 4, p. 219-222, 2000.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HOHE, J.; LIBRESCU, L. A nonlinear theory for doubly curved anisotropic sandwich shells with transversely compressible core. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 5, p. 1059-1088, 2003.

HOSSEINI-HASHEMI, S.; ILKHANI, M. R.; FADAEI, M. Identification of the validity range of Donnell and Sanders shell theories using an exact vibration analysis of functionally graded thick cylindrical shell panel. **Acta Mechanica**, v. 223, n. 5, p. 1101-1118, 2012.

HUNT, G. W.; LORD, G. J.; PELETIER, M. A. Cylindrical shell buckling: a characterization of localization and periodicity. In: **Discrete and Continuous Dynamical Systems B**. 2003.

HUTCHINSON, J. W.; HE, M. Y. Buckling of cylindrical sandwich shells with metal foam cores. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 46-47, p. 6777-6794, 2000.

JING, L.; WANG, Z.; ZHAO, L. Dynamic response of cylindrical sandwich shells with metallic foam cores under blast loading—numerical simulations. **Composite Structures**, v. 99, p. 213-223, 2013.

JING, L.; WANG, Z.; ZHAO, L. An approximate theoretical analysis for clamped cylindrical sandwich shells with metallic foam cores subjected to impulsive loading. **Composites Part B: Engineering**, v. 60, p. 150-157, 2014.

KORMANÍKOVÁ, E.; MAMUZIC, I. Shear deformation laminate theory used for sandwiches. **Metalurgija-Zagreb**, v. 50, n. 3, p. 193, 2011.

KÖRNER, C.; SINGER, R. F. Processing of metal foams – challenges and opportunities. **Advanced Engineering Materials**, v. 2, n. 4, p. 159-165, 2000.

LEISSA, A. W. **Vibration of shells**. Washington: Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration, 1973.

LI, S. R.; BATRA, R. C. Buckling of axially compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer. **Thin-Walled Structures**, v. 44, n. 10, p. 1039-1047, 2006.

LIU, R. H.; LI, J. Non-linear vibration of shallow conical sandwich shells. **International Journal of Non-linear Mechanics**, v. 30, n. 2, p. 97-109, 1995.

LOY, C. T.; LAM, K. Y.; REDDY, J. N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 41, n. 3, p. 309-324, 1999.

LUO, H.; LIN, H.; ZHAO, Z.; LIU, Y.; YAO, G. Preparation of aluminum foam sandwich reinforced by steel sheets. **Procedia Materials Science**, v. 4, p. 39-43, 2014.

MAGNUCKA-BLANDZI, E. Mathematical modelling of a rectangular sandwich plate with a metal foam core. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 49, n. 2, p. 439-455, 2011.

MIN, J.; GHOSN, L.; LERCH, B.; RAJ, S.; HOLLAND, F.; HEBSUR, M. Analysis of stainless steel sandwich panels with a metal foam core for lightweight fan blade design. In: **45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference**. 2004. p. 1836.

MIYOSHI, T.; ITOH, M.; AKIYAMA, S.; KITAHARA, A. ALPORAS aluminum foam: production process, properties, and applications. **Advanced engineering materials**, v. 2, n. 4, p. 179-183, 2000.

PETERS, S. T. (Ed.). **Handbook of composites**. Springer Science & Business Media, 1998.

RADFORD, D. D.; McSHANE, G. J.; DESHPANDE, V. S.; FLECK, N. A. The response of clamped sandwich plates with metallic foam cores to simulated

blast loading. **International Journal of solids and structures**, v. 43, n. 7-8, p. 2243-2259, 2006.

RAMAMURTY, U.; PAUL, A. Variability in mechanical properties of a metal foam. **Acta Materialia**, v. 52, n. 4, p. 869-876, 2004.

SEVOSTIANOV, I.; KOVÁČIK, J.; SIMANČÍK, F. Elastic and electric properties of closed-cell aluminum foams: cross-property connection. **Materials Science and Engineering: A**, v. 420, n. 1-2, p. 87-99, 2006.

SHOKROLLAHI, H.; KARGARNOVIN, M. H.; FALLAH, F. Deformation and stress analysis of sandwich cylindrical shells with a flexible core using harmonic differential quadrature method. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 37, n. 1, p. 325-337, 2015.

SOFIYEV, A. H. The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure. **Composite Structures**, v. 117, p. 124-134, 2014.

SZYNISZEWSKI, S.; SMITH, B. H.; HAJJAR, J. F.; ARWADE, S. R.; SCHAFER, B. W. Local buckling strength of steel foam sandwich panels. **Thin-Walled Structures**, v. 59, p. 11-19, 2012.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin plates and shells**. New York: Marcel Dekker, 2001.

VINSON, J. R. **The behavior of shells composed of isotropic and composite materials**. Kluwer Academic Publishers, 1993.



WANG, X.; SHI, G. A simple and accurate sandwich plate theory accounting for transverse normal strain and interfacial stress continuity. **Composite Structures**, v. 107, p. 620-628, 2014.

YANG, J.; KITIPORNCHAI, S.; LIEW, K. M. Nonlinear local bending of FGM sandwich plates. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 3, n. 10, p. 1977-1992, 2008.

ZHAI, Y.; CHAI, M.; SU, J.; LIANG, S. Dynamics properties of composite sandwich open circular cylindrical shells. **COMPOSITE STRUCTURES-BARKING-**, v. 189, n. 1, p. 148-159, 2018.

ZHU, L.; GUO, K.; LI, Y.; YU, T. X.; ZHOU, Q. Dynamic Responses of Aluminum Foam Sandwich Plates in the Repeated Impact at Low Temperature. In: **The 27th International Ocean and Polar Engineering Conference**. International Society of Offshore and Polar Engineers, 2017.

## APÊNDICE A

### A1 – Elementos Constituintes da Matriz de Rigidez – Energia de Deformação – 3 Variáveis (Capítulo 2)

$$K_{11} = \frac{Eh\pi}{4(1-\nu^2)} \left[ \frac{2\pi^2 R^2 m^2 + L^2 n^2 (1-\nu)}{LR} \right]$$

$$K_{12} = -\frac{Eh}{4(1-\nu)} nm\pi^2$$

$$K_{13} = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} m\nu\pi^2$$

$$K_{22} = \frac{Eh\pi}{4(1-\nu^2)} \left[ \frac{2L^2 n^2 + m^2 R^2 \pi^2 (1-\nu)}{LR} \right]$$

$$K_{23} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \frac{nL\pi}{R}$$

$$K_{33} = \frac{Eh\pi}{24(1-\nu^2)} \left[ \frac{(\pi R h m)^2 (\pi^2 R^2 m^2 + 2L^2 n^2) + L^4 (h^2 n^4 + 12R^2)}{L^3 R^3} \right]$$

### A2 – Elementos Constituintes da Matriz de Rigidez – Energia de Deformação – 5 Variáveis (Capítulo 2)

$$K_{11} = \frac{Eh\pi}{4(1-\nu^2)} \left[ \frac{2\pi^2 R^2 m^2 + L^2 n^2 (1-\nu)}{LR} \right]$$

$$K_{12} = -\frac{Eh}{4(1-\nu)} nm\pi^2$$

$$K_{13} = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} m\nu\pi^2$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{15} = 0$$

$$K_{22} = \frac{Eh\pi}{4(1-\nu^2)} \left[ \frac{2L^2 n^2 + m^2 R^2 \pi^2 (1-\nu)}{LR} \right]$$

$$\begin{aligned}
K_{23} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \frac{nL\pi}{R} \\
K_{24} &= 0 \\
K_{25} &= 0 \\
K_{33} &= \frac{Eh\pi}{24(1-\nu^2)} \left[ \frac{2(L\pi h m n \nu)^2 (R-1) + \pi^4 R^2 h^2 m^4 + L^4 h^2 n^4 + 2(L\pi h m n)^2 + 12L^4}{L^3 R} \right] \\
K_{34} &= -\frac{Eh^3 \pi^2 m}{24(1-\nu^2)} \left[ \frac{L^2 n^2 \nu (R-1) + \pi^2 R^2 m^2 + L^2 n^2}{L^3 R} \right] \\
K_{35} &= \frac{Eh^3 \pi n}{24(1-\nu^2)} \left( \frac{\pi^2 m^2 R + L^2 n^2}{L^3 R} \right) \\
K_{44} &= \frac{Eh^3 \pi}{48(1-\nu^2)} \left[ \frac{2\pi^2 R^2 m^2 + L^2 n^2 (1-\nu)}{LR} \right] \\
K_{45} &= -\frac{Eh^3}{48(1-\nu)} n m \pi^2 \\
K_{55} &= \frac{Eh^3 \pi}{48(1-\nu^2)} \left[ \frac{2L^2 n^2 + \pi^2 R^2 m^2 (1-\nu)}{LR} \right]
\end{aligned}$$

### A3 – Elementos Constituintes da Matriz de Rigidez – Energia de Deformação – 3 Variáveis (Capítulo 3)

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\pi[(\pi R m)^2 I_1 + (L n)^2 I_7]}{2LR} \\
K_{12} &= -\frac{\pi^2 m n (I_4 + I_7)}{2LR} \\
K_{13} &= -\frac{\pi^2 m}{2} I_4 \\
K_{22} &= \frac{\pi[(\pi R m)^2 I_7 + (L n)^2 I_1]}{2LR} \\
K_{23} &= \frac{\pi L n}{2R} I_1 \\
K_{33} &= \frac{\pi[(\pi R m)^4 I_3 + (\pi L R m n)^2 (2I_6 + 4I_9) + (L n)^4 I_3 + 12L^4 R^2 I_1]}{2L^3 R^3}
\end{aligned}$$

### A4 – Elementos Constituintes da Matriz de Rigidez – Energia de Deformação – 5 Variáveis (Capítulo 3)

$$K_{11} = \frac{\pi[(\pi R m)^2 I_1 + (L n)^2 I_7]}{2LR}$$

$$K_{12} = -\frac{\pi^2 m n (I_4 + I_7)}{2LR}$$

$$K_{13} = -\frac{\pi^2 m}{2} I_4$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{15} = 0$$

$$K_{22} = \frac{\pi[(\pi R m)^2 I_7 + (L n)^2 I_1]}{2LR}$$

$$K_{23} = \frac{\pi L n}{2R} I_1$$

$$K_{24} = 0$$

$$K_{25} = 0$$

$$K_{33} = \frac{\pi[(\pi R m)^2 I_7 + (L n)^2 I_7 + L^2 I_1]}{2LR}$$

$$K_{34} = \frac{\pi^2 R m}{2} I_7$$

$$K_{35} = -\frac{\pi L n}{2} I_7$$

$$K_{44} = \frac{\pi[(\pi R m)^2 I_3 + (L R)^2 I_7 + (L n)^2 I_9]}{2LR}$$

$$K_{45} = -\frac{\pi^2 m n (I_6 + I_9)}{2}$$

$$K_{55} = \frac{\pi[(\pi R m)^2 I_9 + (L n)^2 I_3 + (L R)^2 I_7]}{2LR}$$

#### A5 - Elementos Constituintes da Matriz de Rigidez – Energia de Deformação (Capítulo 4)

$$K_{11} = \left( R \left( -\frac{2 E_f m^2 \pi^2 t_f}{L^2 (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c \left( -\frac{E_f \pi^3 m^2 R}{L^2} - \frac{2 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} + \frac{2 E_f m^2 \pi^2 R}{L^2} \right)}{R (v_c^2 - 1) \pi} \right) - \frac{2 E_f n^2 t_f}{R (2 + 2 v_f)} + \frac{1}{2} \frac{t_c (-E_f \pi n^2 - 2 E_{c0} n^2 + 2 E_f n^2)}{(1 + v_c) \pi R} \right)$$

$$K_{12} = \left( R \left( \frac{2 E_f v_f m \pi n t_f}{L R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c \left( \frac{v_c m \pi^2 n E_f}{L} + \frac{2 v_c E_{c0} m \pi n}{L} - \frac{2 v_c m \pi n E_f}{L} \right)}{R (v_c^2 - 1) \pi} \right) \right. \\ \left. + \frac{2 E_f m \pi n t_f}{L (2 + 2 v_f)} + \frac{1}{2} \frac{t_c \left( \frac{E_f m \pi^2 n R}{L} + \frac{2 E_{c0} m \pi n R}{L} - \frac{2 E_f m \pi n R}{L} \right)}{(1 + v_c) \pi R} \right)$$

$$K_{13} = R \left( \frac{2 E_f v_f m \pi t_f}{L R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c \left( \frac{v_c m \pi^2 E_f}{L} + \frac{2 v_c E_{c0} m \pi}{L} - \frac{2 v_c m \pi E_f}{L} \right)}{R (v_c^2 - 1) \pi} \right)$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{15} = 0$$

$$K_{22} = \left( R \left( -\frac{2 E_f m^2 \pi^2 t_f}{L^2 (2 + 2 v_f)} + \frac{1}{2} \frac{t_c \left( -\frac{E_f \pi^3 m^2 R}{L^2} - \frac{2 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} + \frac{2 E_f m^2 \pi^2 R}{L^2} \right)}{(1 + v_c) \pi R} \right) \right. \\ \left. - \frac{2 E_f n^2 t_f}{R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c (-E_f \pi n^2 - 2 E_{c0} n^2 + 2 E_f n^2)}{R (v_c^2 - 1) \pi} \right)$$

$$K_{23} = \left( -\frac{2 E_f n t_f}{R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c (-E_f \pi n - 2 E_{c0} n + 2 E_f n)}{R (v_c^2 - 1) \pi} \right)$$

$$K_{24} = 0$$

$$K_{25} = 0$$

$$K_{33} = \left( \frac{2 E_f t_f}{R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c (E_f \pi + 2 E_{c0} - 2 E_f)}{R (v_c^2 - 1) \pi} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{R t_c \left( -\frac{m^2 \pi^3 E_f}{L^2} - \frac{2 m^2 \pi^2 E_{c0}}{L^2} + \frac{2 m^2 \pi^2 E_f}{L^2} \right)}{(1 + v_c) \pi} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{t_c (-E_f \pi n^2 - 2 E_{c0} n^2 + 2 E_f n^2)}{(1 + v_c) \pi R} \right)$$

$$K_{34} =$$

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{E_f v_f m \pi \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^2 - \frac{1}{4} t_c^2 \right)}{L \left( -v_f^2 + 1 \right)} - \frac{1}{2} \frac{E_f v_f m \pi \left( \frac{1}{4} t_c^2 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^2 \right)}{L \left( -v_f^2 + 1 \right)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{R t_c \left( -\frac{m \pi^2 E_f}{L} - \frac{2 m \pi E_{c0}}{L} + \frac{2 m \pi E_f}{L} \right)}{(1 + v_c) \pi} \right)$$

$$K_{35} = \left( \frac{1}{2} \frac{E_f n \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^2 - \frac{1}{4} t_c^2 \right)}{R \left( -v_f^2 + 1 \right)} + \frac{1}{2} \frac{E_f n \left( \frac{1}{4} t_c^2 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^2 \right)}{R \left( -v_f^2 + 1 \right)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{t_c (E_f \pi R n + 2 E_{c0} R n - 2 E_f R n)}{(1 + v_c) \pi R} \right)$$

$$K_{44} =$$

$$\left( R \left( -\frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L^2 \left( -v_f^2 + 1 \right)} \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \frac{1}{R \left( v_c^2 - 1 \right) \pi^3} \left( t_c^3 \left( -\frac{E_f \pi^5 m^2 R}{L^2} - \frac{6 E_{c0} \pi^4 m^2 R}{L^2} + \frac{6 E_f \pi^4 m^2 R}{L^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{48 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} - \frac{48 E_f m^2 \pi^2 R}{L^2} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L^2 \left( -v_f^2 + 1 \right)} \right) \\ \left. - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{R \left( 2 + 2 v_f \right)} \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \frac{t_c^3 \left( -E_f \pi^3 n^2 - 6 E_{c0} \pi^2 n^2 + 6 E_f \pi^2 n^2 + 48 E_{c0} n^2 - 48 E_f n^2 \right)}{(1 + v_c) \pi^3 R} \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{R \left( 2 + 2 v_f \right)} - \frac{1}{2} \frac{R t_c (E_f \pi + 2 E_{c0} - 2 E_f)}{(1 + v_c) \pi} \right)$$

$$K_{45} =$$

$$\begin{aligned} & \left( R \left( \frac{1}{3} \frac{E_f v_f m \pi n \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L R \left( -v_f^2 + 1 \right)} \right. \right. \\ & - \frac{1}{12} \frac{1}{R \left( v_c^2 - 1 \right) \pi^3} \left( t_c^3 \left( \frac{v_c E_f m \pi^4 n}{L} + \frac{6 v_c E_{c0} m \pi^3 n}{L} - \frac{6 v_c E_f m \pi^3 n}{L} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{48 v_c E_{c0} m \pi n}{L} + \frac{48 v_c m \pi n E_f}{L} \right) \right) + \frac{1}{3} \frac{E_f v_f m \pi n \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L R \left( -v_f^2 + 1 \right)} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{E_f m \pi n \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L \left( 2 + 2 v_f \right)} \\ & + \frac{1}{24} \frac{1}{\left( 1 + v_c \right) \pi^3 R} \left( t_c^3 \left( \frac{E_f m \pi^4 n R}{L} + \frac{6 E_{c0} m \pi^3 n R}{L} - \frac{6 E_f m \pi^3 n R}{L} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{48 E_{c0} m \pi n R}{L} + \frac{48 E_f m \pi n R}{L} \right) \right) + \frac{1}{3} \frac{E_f m \pi n \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L \left( 2 + 2 v_f \right)} \right) \end{aligned}$$

$$K_{55} =$$

$$\begin{aligned} & \left( R \left( -\frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L^2 \left( 2 + 2 v_f \right)} \right. \right. \\ & + \frac{1}{24} \frac{1}{\left( 1 + v_c \right) \pi^3 R} \left( t_c^3 \left( -\frac{E_f \pi^5 m^2 R}{L^2} - \frac{6 E_{c0} \pi^4 m^2 R}{L^2} + \frac{6 E_f \pi^4 m^2 R}{L^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{48 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} - \frac{48 E_f m^2 \pi^2 R}{L^2} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L^2 \left( 2 + 2 v_f \right)} \right) \\ & - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{R \left( -v_f^2 + 1 \right)} \\ & - \frac{1}{12} \frac{t_c^3 \left( -E_f \pi^3 n^2 - 6 E_{c0} \pi^2 n^2 + 6 E_f \pi^2 n^2 + 48 E_{c0} n^2 - 48 E_f n^2 \right)}{\left( v_c^2 - 1 \right) \pi^3 R} \\ & - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{R \left( -v_f^2 + 1 \right)} - \frac{1}{2} \frac{t_c \left( E_f \pi R + 2 E_{c0} R - 2 E_f R \right)}{\left( 1 + v_c \right) \pi} \right) \end{aligned}$$

## A6 - Elementos Constituintes da Matriz de Rigidez – Equações de Equilíbrio (Capítulo 4)

$$K_{11} = \left( R \left( -\frac{2 E_f m^2 \pi^2 t_f}{L^2 (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c \left( -\frac{E_f m^2 \pi^3 R}{L^2} - \frac{2 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} + \frac{2 m^2 \pi^2 E_f R}{L^2} \right)}{(v_c^2 - 1) \pi R} \right) \right. \\ \left. - \frac{2 E_f n^2 t_f}{R (2 + 2 v_f)} + \frac{1}{2} \frac{t_c (-E_f \pi n^2 - 2 E_{c0} n^2 + 2 E_f n^2)}{(1 + v_c) \pi R} \right)$$

$$K_{12} = \left( R \left( \frac{2 E_f v_f m \pi n t_f}{L R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c \left( \frac{E_f v_c \pi^2 m n}{L} + \frac{2 v_c E_{c0} m \pi n}{L} - \frac{2 v_c m \pi n E_f}{L} \right)}{(v_c^2 - 1) \pi R} \right) \right. \\ \left. + \frac{2 E_f m \pi n t_f}{L (2 + 2 v_f)} + \frac{1}{2} \frac{t_c \left( \frac{E_f m \pi^2 n R}{L} + \frac{2 E_{c0} m \pi n R}{L} - \frac{2 E_f m \pi n R}{L} \right)}{(1 + v_c) \pi R} \right)$$

$$K_{13} = R \left( \frac{2 E_f v_f m \pi t_f}{L R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c \left( \frac{E_f v_c \pi^2 m}{L} + \frac{2 v_c E_{c0} m \pi}{L} - \frac{2 v_c m \pi E_f}{L} \right)}{(v_c^2 - 1) \pi R} \right)$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{15} = 0$$

$$K_{22} = \left( R \left( -\frac{2 E_f m^2 \pi^2 t_f}{L^2 (2 + 2 v_f)} + \frac{1}{2} \frac{t_c \left( -\frac{E_f m^2 \pi^3 R}{L^2} - \frac{2 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} + \frac{2 m^2 \pi^2 E_f R}{L^2} \right)}{(1 + v_c) \pi R} \right) \right. \\ \left. - \frac{2 E_f n^2 t_f}{R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c (-E_f \pi n^2 - 2 E_{c0} n^2 + 2 E_f n^2)}{(v_c^2 - 1) \pi R} \right)$$

$$K_{23} = \left( -\frac{2 E_f n t_f}{R (-v_f^2 + 1)} - \frac{t_c (-E_f \pi n - 2 E_{c0} n + 2 E_f n)}{(v_c^2 - 1) \pi R} \right)$$

$$K_{24} = 0$$

$$K_{25} = 0$$



$$K_{33} = \left( -\frac{2E_f t_f}{R(-v_f^2 + 1)} + \frac{t_c(E_f \pi + 2E_{c0} - 2E_f)}{(v_c^2 - 1)\pi R} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{R t_c \left( -\frac{m^2 \pi^3 E_f}{L^2} - \frac{2m^2 \pi^2 E_{c0}}{L^2} + \frac{2E_f m^2 \pi^2}{L^2} \right)}{(1 + v_c)\pi} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{t_c(-E_f \pi n^2 - 2E_{c0} n^2 + 2E_f n^2)}{(1 + v_c)\pi R} \right)$$

$$K_{34} = \left( \frac{1}{2} \frac{E_f v_f m \pi \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^2 - \frac{1}{4} t_c^2 \right)}{L(-v_f^2 + 1)} + \frac{1}{2} \frac{E_f v_f m \pi \left( \frac{1}{4} t_c^2 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^2 \right)}{L(-v_f^2 + 1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{R t_c \left( -\frac{m \pi^2 E_f}{L} - \frac{2m \pi E_{c0}}{L} + \frac{2m \pi E_f}{L} \right)}{(1 + v_c)\pi} \right)$$

$$K_{35} = \left( -\frac{1}{2} \frac{E_f n \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^2 - \frac{1}{4} t_c^2 \right)}{R(-v_f^2 + 1)} - \frac{1}{2} \frac{E_f n \left( \frac{1}{4} t_c^2 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^2 \right)}{R(-v_f^2 + 1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{t_c(E_f \pi R n + 2E_{c0} R n - 2E_f R n)}{(1 + v_c)\pi R} \right)$$

$$\begin{aligned}
K_{44} = & \left( -\frac{1}{2} \frac{R t_c (E_f \pi + 2 E_{c0} - 2 E_f)}{(1 + \nu_c) \pi} + R \left( -\frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L^2 (-\nu_f^2 + 1)} \right. \right. \\
& - \frac{1}{12} \frac{1}{(\nu_c^2 - 1) \pi^3 R} \left( t_c^3 \left( -\frac{E_f \pi^5 m^2 R}{L^2} - \frac{6 E_{c0} \pi^4 m^2 R}{L^2} + \frac{6 E_f \pi^4 m^2 R}{L^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{48 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} - \frac{48 m^2 \pi^2 E_f R}{L^2} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L^2 (-\nu_f^2 + 1)} \Bigg) \\
& - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{R (2 + 2 \nu_f)} \\
& + \frac{1}{24} \frac{t_c^3 (-E_f \pi^3 n^2 - 6 E_{c0} \pi^2 n^2 + 6 E_f \pi^2 n^2 + 48 E_{c0} n^2 - 48 E_f n^2)}{(1 + \nu_c) \pi^3 R} \\
& \left. - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{R (2 + 2 \nu_f)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{45} = & \left( R \left( \frac{1}{3} \frac{E_f \nu_f m \pi n \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L R (-\nu_f^2 + 1)} \right. \right. \\
& - \frac{1}{12} \frac{1}{(\nu_c^2 - 1) \pi^3 R} \left( t_c^3 \left( \frac{\nu_c E_f \pi^4 m n}{L} + \frac{6 \nu_c E_{c0} \pi^3 m n}{L} - \frac{6 \nu_c E_f \pi^3 m n}{L} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{48 \nu_c E_{c0} m \pi n}{L} + \frac{48 \nu_c E_f m \pi n}{L} \right) \right) + \frac{1}{3} \frac{E_f \nu_f m \pi n \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L R (-\nu_f^2 + 1)} \Bigg) \\
& + \frac{1}{3} \frac{E_f m \pi n \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L (2 + 2 \nu_f)} \\
& + \frac{1}{24} \frac{1}{(1 + \nu_c) \pi^3 R} \left( t_c^3 \left( \frac{E_f \pi^4 m n R}{L} + \frac{6 E_{c0} \pi^3 m n R}{L} - \frac{6 E_f \pi^3 m n R}{L} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{48 E_{c0} m \pi n R}{L} + \frac{48 E_f m \pi n R}{L} \right) \right) + \frac{1}{3} \frac{E_f m \pi n \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L (2 + 2 \nu_f)} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{55} = & \left( -\frac{1}{2} \frac{t_c (E_f \pi R + 2 E_{c0} R - 2 E_f R)}{(1 + \nu_c) \pi} + R \left( -\frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{L^2 (2 + 2 \nu_f)} \right. \right. \\
& + \frac{1}{24} \frac{1}{(1 + \nu_c) \pi^3 R} \left( t_c^3 \left( -\frac{E_f \pi^5 m^2 R}{L^2} - \frac{6 E_{c0} \pi^4 m^2 R}{L^2} + \frac{6 E_f \pi^4 m^2 R}{L^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{48 E_{c0} m^2 \pi^2 R}{L^2} - \frac{48 m^2 \pi^2 E_f R}{L^2} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{E_f m^2 \pi^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{L^2 (2 + 2 \nu_f)} \Bigg) \\
& - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( \left( \frac{1}{2} t_c + t_f \right)^3 - \frac{1}{8} t_c^3 \right)}{R (-\nu_f^2 + 1)} \\
& - \frac{1}{12} \frac{t_c^3 \left( -E_f \pi^3 n^2 - 6 E_{c0} \pi^2 n^2 + 6 E_f \pi^2 n^2 + 48 E_{c0} n^2 - 48 E_f n^2 \right)}{(\nu_c^2 - 1) \pi^3 R} \\
& - \frac{1}{3} \frac{E_f n^2 \left( -\frac{1}{8} t_c^3 - \left( -\frac{1}{2} t_c - t_f \right)^3 \right)}{R (-\nu_f^2 + 1)} \Bigg)
\end{aligned}$$

## APÊNDICE B

### B1 - Equações da Energia de Deformação (Capítulo 4)

$$U_{1d} = \iint \frac{RE_f t_f}{2(1+\nu_f)} \left\{ \left[ \frac{t_c^2}{8} + \frac{t_c t_f}{4} + \frac{t_f^2}{6} \right] \left( \frac{\beta_{x,\theta}^2}{R^2} + \beta_{\theta,x}^2 \right) + \left[ \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \left( \frac{u_\theta}{R} + v_x \right) \right] \left( \beta_{\theta,x} + \frac{\beta_{x,\theta}}{R} \right) + \left( \frac{t_c^2}{4} + \frac{t_c t_f}{2} + \frac{t_f^2}{3} \right) \frac{\beta_{\theta,x} \beta_{x,\theta}}{R} + \left( \frac{u_\theta}{R} + v_{,x} \right)^2 \right\} - \frac{RE_f t_f}{1-\nu_f^2} \left\{ \left[ \frac{t_c^2}{8} + \frac{t_c t_f}{4} + \frac{t_f^2}{6} \right] \left( \beta_{x,x}^2 + \frac{\beta_{\theta,\theta}^2}{R^2} \right) + \left[ \left( \frac{t_c^2}{4} + \frac{t_c t_f}{2} + \frac{t_f^2}{3} \right) v_f \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \left( u_{,x} + v_f \frac{v_{\theta+w}}{R} \right) \right] \beta_{x,x} + \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \left( \frac{v_{\theta+w}}{R} + v_f u_{,x} \right) \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \left[ u_{,x}^2 + \left( \frac{v_{\theta+w}}{R} \right)^2 + 2v_f \left( \frac{v_{\theta+w}}{R} \right) \right] \right\} d\theta dx$$

$$U_{2d} = \iint \frac{R t_c^3}{1-\nu_c^2} \left\{ \left[ \frac{2(E_f-E_{c0})}{\pi^3} + \frac{E_{c0}-E_f}{4\pi} + \frac{E_f}{24} \right] \left( \beta_{x,x}^2 + \frac{\beta_{\theta,\theta}^2}{R^2} \right) + \left[ \frac{(E_{c0}-E_f)(1-\nu_c)}{\pi^3} + \frac{(E_{c0}-E_f)(1-\nu_c)}{8\pi} + \frac{E_f(1-\nu_c)}{48} \right] \left( \frac{\beta_{x,\theta}^2}{R^2} + \beta_{\theta,x}^2 \right) + \frac{t_c^3}{1-\nu_c^2} \left\{ \left[ \frac{2(E_{c0}-E_f)(1-\nu_c)}{\pi^3} + \frac{(E_{c0}-E_f)(1-\nu_c)}{4\pi} + \frac{E_f(1-\nu_c)}{24} \right] \left( \beta_{\theta,\theta} \beta_{x,x} \right) + v_c \left[ \frac{4(E_f-E_{c0})}{\pi^3} + \frac{(E_{c0}-E_f)}{2\pi} + \frac{E_f}{12} \right] \left( \beta_{\theta,\theta} \beta_{x,x} \right) \right\} + \frac{t_c R}{1-\nu_c^2} \left\{ \left[ \frac{(E_{c0}-E_f)(1-\nu_c)}{\pi} + \frac{E_f(1-\nu_c)}{2} \right] \left[ \beta_x w_{,x} + \frac{\beta_{\theta} w_{,\theta}}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_{,\theta}^2 + w_{,\theta}^2}{R^2} + v_{,x}^2 + w_{,x}^2 + \beta_x^2 + \beta_{\theta}^2 + \frac{v_{,x} u_{,\theta}}{R} \right) \right] + \left( \frac{E_{c0}-E_f}{\pi} + \frac{E_f}{2} \right) \left( u_{,x}^2 + \frac{v_{,\theta}^2 + w^2}{R^2} \right) \right\} + \frac{t_c}{1-\nu_c^2} \left[ \frac{2(E_{c0}-E_f)}{\pi} + E_f \right] \left[ w \left( \frac{v_{,\theta}}{R} + v_c u_{,x} \right) \right] \right\} d\theta dx$$

$$U_{3d} = \iint \frac{RE_f t_f}{2(1+\nu_f)} \left\{ \left[ \frac{t_c^2}{8} + \frac{t_c t_f}{4} + \frac{t_f^2}{6} \right] \left( \frac{\beta_{x,\theta}^2}{R^2} + \beta_{\theta,x}^2 \right) - \left[ \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \left( \frac{u_\theta}{R} + v_x \right) \right] \left( \beta_{\theta,x} + \frac{\beta_{x,\theta}}{R} \right) - \left( \frac{t_c^2}{4} + \frac{t_c t_f}{2} + \frac{t_f^2}{3} \right) \frac{\beta_{\theta,x} \beta_{x,\theta}}{R} + \left( \frac{u_\theta}{R} + v_{,x} \right)^2 \right\} - \frac{RE_f t_f}{1-\nu_f^2} \left\{ \left[ \frac{t_c^2}{8} + \frac{t_c t_f}{4} + \frac{t_f^2}{6} \right] \left( \beta_{x,x}^2 + \frac{\beta_{\theta,\theta}^2}{R^2} \right) + \left[ - \left( \frac{t_c^2}{4} + \frac{t_c t_f}{2} + \frac{t_f^2}{3} \right) v_f \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \left( u_{,x} + v_f \frac{v_{\theta+w}}{R} \right) \right] \beta_{x,x} + \left( \frac{t_c+t_f}{2} \right) \left( \frac{v_{\theta+w}}{R} + v_f u_{,x} \right) \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} + \left[ u_{,x}^2 + \left( \frac{v_{\theta+w}}{R} \right)^2 + 2v_f \left( \frac{v_{\theta+w}}{R} \right) \right] \right\} d\theta dx$$

## APÊNDICE C

### C1 – Formulação Matricial – Blevins e Plunkett (1980)

$$[K]\{D\} = \{0\}$$

$[K]$  é a matriz de Rigidez e de Massa

$\{D\}$  é o vetor das amplitudes modais

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{Bmatrix} = 0$$

Onde

$$k_{11} = -\xi^2 - \frac{(1-\nu)}{2}n^2 + \lambda^2$$

$$k_{12} = \frac{(1+\nu)}{2}\xi n$$

$$k_{13} = \nu\xi$$

$$k_{21} = k_{12}$$

$$k_{22} = -\frac{(1-\nu)}{2}\xi^2 - n^2 + \lambda^2$$

$$k_{23} = -n$$

$$k_{31} = -\nu\xi$$

$$k_{32} = n$$

$$k_{33} = 1 + k(\xi^2 + n^2)^2 - \lambda^2$$

$$\lambda^2 = \frac{\rho(1-\nu^2)R\omega^2}{E}$$

$$k = \frac{h^2}{12R^2}$$

$$\xi = \frac{m\pi R}{L}$$