



**Cristiano Sandroni**

**Desenvolvimento de Modelo Computacional do  
Comportamento Dinâmico de um Kart com Base em  
Medições Experimentais**

**Dissertação de mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Metrologia da PUC-Rio. Área de concentração: Metrologia para Qualidade e Inovação.

Orientador: Prof. Carlos Roberto Hall Barbosa  
Coorientador: Prof. Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro  
maio de 2019



**Cristiano Sandroni**

**Desenvolvimento de Modelo Computacional do  
Comportamento Dinâmico de um Kart com Base em  
Medições Experimentais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-  
graduação em Metrologia da PUC-Rio. Área de  
concentração: Metrologia para Qualidade e Inovação.  
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof. Carlos Roberto Hall Barbosa**

Orientador

Programa de Pós-Graduação em Metrologia – PUC-Rio

**Prof. Mauro Speranza Neto**

Departamento de Engenharia Mecânica– PUC-Rio

**Prof. José Alberto dos Reis Parise**

Departamento de Engenharia Mecânica– PUC-Rio

**Prof. Ricardo Teixeira**

Departamento de Engenharia Mecânica - IME

Rio de Janeiro, 10 de maio de 2019

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Cristiano Sandroni**

Graduado em Engenharia Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), em 2002. Atualmente mestrando do Programa de Pós-Graduação em Metrologia (PósMQI) pela PUC-Rio.

### Ficha Catalográfica

Sandroni, Cristiano

Desenvolvimento de modelo computacional do comportamento dinâmico de um kart com base em medições experimentais / Cristiano Sandroni ; orientador: Carlos Roberto Hall Barbosa ; co-orientador: Mauro Speranza Neto. – 2019.

136 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Centro Técnico Científico, Programa de Pós-Graduação em Metrologia, 2019.

Inclui bibliografia

1. Metrologia – Teses. 2. Metrologia para Qualidade e Inovação – Teses. 3. Metrologia. 4. Kart elétrico e a combustão. 5. Testes veiculares. 6. Análise experimental. I. Barbosa, Carlos Roberto Hall. II. Speranza Neto, Mauro. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Centro Técnico Científico. Programa de Pós-Graduação em Metrologia. IV. Título.

CDD: 389.1



## Agradecimentos

A Deus, por iluminar o meu caminho.

Ao meu orientador Carlos Roberto Hall Barbosa e ao meu coorientador Mauro Speranza Neto, pelos ensinamentos, paciência, dedicação e disponibilidade, em todo o tempo, para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao professor e amigo Jorge Lage, pela amizade, apoio e incentivo.

Ao professor Parise, amigo e conselheiro.

À professora Fátima Ludovico, pela dedicação.

Ao técnico Edson Gonçalves do Departamento de Engenharia Mecânica (DEM), ao mecânico preparador de karts Altamir Cardoso e ao amigo piloto Ricardo Lioy pela assistência nos testes de pista.

Aos professores, funcionários e alunos companheiros do Programa de Pós-graduação em Metrologia, destacando-se especialmente os amigos Vicente, João Carlos e Jefferson, pelos ensinamentos e pela ajuda.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

À minha mãe, meu pai, meus irmãos e todos os familiares e amigos pela ajuda, apoio e compreensão.

A todos que de alguma forma contribuíram para esta dissertação se tornar realidade.

Muito obrigado!

## Resumo

Sandroni, Cristiano; Hall Barbosa, Carlos Roberto; Speranza Neto, Mauro. **Desenvolvimento de modelo computacional do comportamento dinâmico de um kart com base em medições experimentais**. Rio de Janeiro, 2019. 136p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Metrologia. Área de concentração: Metrologia para Qualidade e Inovação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A ascensão da tecnologia dos automóveis elétricos no mercado mundial induz a pequena indústria dos karts recreativos a percorrer caminhos semelhantes. O comércio dos karts recreativos com motorização elétrica já existe, mas ainda é incipiente. A propulsão elétrica no kart proporcionaria, entre outras vantagens, a possibilidade de inserção de tecnologias automotivas já conhecidas, tais como um sistema de frenagem sem bloqueio e um sistema de controle de estabilidade. O sucesso da inserção destas tecnologias em um kart seria um avanço muito significativo para um produto que apresenta avanços tecnológicos modestos desde a sua criação. Contudo, para obter o sucesso tecnológico do kart tradicional, o modelo elétrico depende da aplicação de métodos modernos de engenharia e da metrologia, tal como a modelagem matemática computadorizada, objetivo principal desta dissertação. Assim, esta dissertação apresenta inicialmente as características físicas e dinâmicas de um kart movido à combustão, obtidas por meio de ensaios e medições realizadas em pista e em bancada. Utilizou-se como instrumento principal de medição o equipamento Alfano® Pro III Evo, cujas indicações foram submetidas a processos simplificados de validação. Desenvolveram-se então, com base nos dados experimentais, modelos matemáticos computadorizados em Matlab/Simulink® que simulam o comportamento dinâmico do kart, e os resultados das simulações foram comparados aos resultados das medições feitas em pista, para fins de validação. A propulsão à combustão do modelo computacional validado foi então substituída por propulsão elétrica, e simulações do novo modelo foram realizadas, permitindo a observação do comportamento dinâmico simulado de um kart elétrico.

## Palavras-chave

Metrologia; kart elétrico e a combustão; testes veiculares; análise experimental;

## Abstract

Sandroni, Cristiano; Hall Barbosa, Carlos Roberto (Advisor); Speranza Neto, Mauro (Co-Advisor). **Development of computational model of the dynamic behavior of a go-kart based on experimental measurements**. Rio de Janeiro, 2019. 136p. M.Sc. Dissertation – Programa de Pós-Graduação em Metrologia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The rise of electric car technology on the world market induces the small recreational go-karts industry to follow similar paths. The trade of recreational go-karts with electric motorization already exists but is still incipient. The electric drive in the go-kart would provide, among other advantages, the possibility of insertion of known automotive technologies, such as an Anti-lock Braking System and a Stability Control System. The successful insertion of these technologies into a go-kart would be a very significant breakthrough for a product that has undergone modest technological advances since its inception. However, to obtain the technological success of traditional go-kart, the electric model depends on the application of modern methods of engineering and metrology, such as computerized mathematical modeling, the main objective of this dissertation. Thus, this dissertation initially presents the physical and dynamic characteristics of a combustion driven go-kart, obtained through tests and measurements made on track and bench. The Alfano<sup>®</sup> Pro III Evo equipment, whose indications were submitted to simplified validation procedures, was used as the main measuring instrument. Based on the experimental data, Matlab / Simulink<sup>®</sup> computerized mathematical models simulating the dynamic behavior of the go-kart were then developed, and the results of the simulations were compared to the results of the measurements made on the track for validation purposes. The combustion propulsion of the validated computational model was then replaced by electric propulsion, and simulations of the new model were performed, allowing the observation of the simulated dynamic behavior of an electric go-kart.

## Key words

Metrology; electric go-kart and combustion; vehicle testing; experimental analysis

# Sumário

1	Introdução .....	14
1.1	Contextualização .....	15
1.2	Motivação .....	17
1.3	Objetivos gerais e específicos.....	28
1.4	Estrutura da dissertação .....	29
2	Descrição geral do veículo .....	30
2.1	Características gerais .....	30
2.1.1	Chassi.....	30
2.1.2	Motor .....	31
2.1.3	Transmissão .....	32
2.1.3	Freio.....	33
2.1.4	Direção.....	34
2.1.5	Rodas e pneus .....	42
2.2	Centro de gravidade.....	44
2.3	Momento de inércia (M.I.) .....	47
2.3.1	M.I. das rodas dianteira, traseira, e do conjunto de transmissão .....	47
2.3.2	M.I. de guinada (yaw).....	52
3	Caracterização Experimental do Veículo .....	60
3.1	Sistema de medição e sensores .....	60
3.2	Posicionamento dos pedais (acelerador e freio) .....	62
3.2	Posicionamento do volante.....	69
3.3	Rotação do motor e velocidade pelo GPS .....	71
3.4	Acelerômetros, aceleração lateral e longitudinal.....	74
3.5	Mapeamento do circuito (GPS) .....	78
3.6	Teste skidpad .....	80
4	Modelo dinâmico do veículo .....	83
4.1	Dinâmica longitudinal .....	83
4.2	Dinâmica lateral.....	88
4.2.1	Modelo Matlab/Simulink® e simulações .....	98
5	Simulações com motorização elétrica .....	102



5.1 Modelo do motor elétrico .....	103
5.2 Simulação da dinâmica longitudinal com motor elétrico ME0709 .....	107
5.3 Potência elétrica.....	108
5.4 Consumo da bateria .....	110
5.5 Eficiência do motor elétrico .....	112
5.6 Modelo completo.....	113
6 Conclusões, discussão e trabalhos futuros.....	115
6.1 Conclusões.....	115
6.2 Discussão .....	116
6.3 Trabalhos futuros.....	116
Apêndice 1 .....	125
Apêndice 2.....	130
Apêndice 3.....	136

## Lista de Figuras

Figura 1-1: Kart Mini M2 imagem comercial .....	17
Figura 1-2: Tesla modelo S .....	18
Figura 1-3: Variação das ações da Tesla inc. ....	19
Figura 1-4: Kart elétrico da Bosch-FIA 2016.....	22
Figura 1-5: Reservas mundiais de lítio em toneladas métricas .....	25
Figura 1-6: Utilização do lítio pela indústria.....	26
Figura 2-1: Dimensões externas do kart em milímetros.....	30
Figura 2-2: Motor Honda GX 390, preparado para kart.....	31
Figura 2-3: Curvas de torque e potência do motor preparado para 21 hp .....	31
Figura 2-4: Transmissão do kart.....	32
Figura 2-5: Detalhe da pinça, do disco de freio e do eixo traseiro .....	33
Figura 2-6: Ângulos de alinhamento ( <i>toe</i> ) e de câmbor ( <i>camber</i> ).....	34
Figura 2-7: Ângulo de câster formado pela fixação do suporte da manga de direção no quadro estrutural do chassi. ....	34
Figura 2-8: Um automóvel em curva.....	35
Figura 2-9: Representação do desnivelamento máximo nas rodas dianteiras formado pelo ângulo de câster ao se esterçar todo o volante do kart. ....	36
Figura 2-10: Flagrante das rodas internas suspensas com o kart em curva .....	37
Figura 2-11: Mecanismo de direção. ....	38
Figura 2-12: Dimensões do mecanismo da direção em milímetros.....	38
Figura 2-13: Detalhes do triângulo basculante da direção .....	38
Figura 2-14: Representação do triângulo basculante da direção .....	39
Figura 2-15: Análise geométrica do triângulo basculante da direção .....	39
Figura 2-16: Análise geométrica do conjunto de direção.....	40
Figura 2-17: Medição do ângulo de direção com luz laser.....	41
Figura 2-18: Medição do diâmetro das rodas com pneus.....	42
Figura 2-19: Roda e o pneu em deformação estática devido ao carregamento. ....	43
Figura 2-20: Posicionamento dos elementos com massa relevante. Dimensões em milímetros.....	45
Figura 2-21: Posição do CG do kart. ....	46
Figura 2-22: Descrição geométrica para obtenção da equação momento de inércia. .....	48
Figura 2- 23: Roda descendo a rampa para medição do momento de inércia. Em (A) a roda aparece parada, em (B) no movimento de descida da rampa. ....	49
Figura 2-24: Transmissão traseira em ensaio de obtenção do momento de inércia. .....	49
Figura 2-25: Ensaio para obtenção do momento de inércia com arranjo trifilar. ..	53
Figura 2-26: Ensaio para obtenção do momento de inércia com arranjo quadrifilar. .....	55

Figura 2-27: Distância entre os elementos relevantes e o CG do kart.....	58
Figura 3-1: Painel de indicação e gravação de dados Alfano® Pro III Evo .....	61
Figura 3-2: Módulo GPS Alfano® GPS4iV.....	61
Figura 3-3: Disposição dos sensores do sistema Alfano Pro III Evo. ....	62
Figura 3-4: Sensor de posicionamento do pedal do acelerador. ....	63
Figura 3-5: Efeito Hall com uso de ímã .....	64
Figura 3-6: Medição da posição de repouso do pedal do acelerador.....	65
Figura 3-7: Posição esperada e posição medida do pedal .....	67
Figura 3-8: Indicação do painel e indicação corrigida a partir das medições experimentais.....	67
Figura 3-9: Indicação da posição do acelerador durante uma volta completa no kartódromo de Volta Redonda – RJ .....	68
Figura 3-10: Sensor de posição do volante.....	70
Figura 3-11: Cabo de vela com o fio do sensor de RPM engastado.....	72
Figura 3-12: Indicação de RPM e velocidade GPS para fins de comparação .....	73
Figura 3-13: Velocidade por GPS <i>versus</i> velocidade por conversão da rotação do motor.....	74
Figura 3-14: Kart suspenso como um pêndulo simples.....	75
Figura 3-15: Representação do ensaio de oscilação pendular do kart .....	76
Figura 3-16: Circuito do kartódromo de Volta Redonda com a indicação das voltas feitas pelo kart medido pelo GPS.....	79
Figura 3-17: As cinco sessões <i>skidpad</i> indicadas pelo GPS.....	80
Figura 3-18: Indicação de posição do volante durante o <i>skidpad</i> .....	81
Figura 3-19: Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita, geometria de Ackerman.....	81
Figura 3-20: Indicação GPS de velocidade durante o <i>skidpad</i> .....	82
Figura 4-1: Bloco do Simulink® que calcula o torque a partir da velocidade de rotação e da posição percentual do pedal. ....	84
Figura 4-2: Bloco do Simulink® que calcula a força longitudinal exercida sobre o kart a partir do torque do motor.....	84
Figura 4-3: Bloco Simulink® que calcula a velocidade do kart a partir da força longitudinal exercida .....	85
Figura 4-4: Bloco Simulink® que transforma os valores de velocidade do kart para velocidade angular (rpm) do motor .....	85
Figura 4-5: Simulink®, modelo de dinâmica longitudinal.....	86
Figura 4-6: Alfano®, aceleração do kart na reta do kartódromo .....	86
Figura 4-7: Imagens sobrepostas; Simulação Simulink® e indicação Alfano® de aceleração do kart na reta do kartódromo.....	87
Figura 4-8: Referenciais global e local, variáveis e parâmetros.....	88
Figura 4-9: Velocidades dos eixos dianteiro e traseiro do veículo em curva. ....	91
Figura 4-10: Variáveis e parâmetros associados à cinemática lateral. ....	92
Figura 4-11: Ângulo de deriva do pneu dianteiro esquerdo. ....	94
Figura 4-12: Força lateral como função do ângulo de deriva.....	95
Figura 4-13: Ângulos de deriva dianteiro e traseiro aproximados. ....	95

Figura 4-14: Modelo simulink®, blocos da dinâmica lateral .....	98
Figura 4-15: Simulação do teste <i>skidpad</i> .....	99
Figura 4-16: Imagens sobrepostas do teste <i>skidpad</i> experimental e simulado ....	100
Figura 4-17: Sequência dos esterçamentos das rodas para o movimento de ultrapassagem .....	101
Figura 4-18: Simulação de movimento de ultrapassagem.....	101
 Figura 5-1: Curvas de desempenho do motor ME0709.....	104
Figura 5-2: Curvas características do motor ME0709.....	105
Figura 5-3: Curvas características do motor ME0709 extrapoladas.....	106
Figura 5-4: Modelo simulink® da dinâmica longitudinal com motor elétrico.....	107
Figura 5-5: Simulação da aceleração do kart.....	107
Figura 5-6: Simulação da rotação do motor .....	108
Figura 5-7: Modelo Simulink® para obtenção da potência elétrica consumida pelo motor elétrico.....	109
Figura 5-8: Simulação de corrente elétrica instantânea .....	109
Figura 5-9: Simulação de potência elétrica instantânea. ....	110
Figura 5-10: Modelo simulink® para característica do consumo de bateria.....	111
Figura 5-11: Simulação de consumo da bateria.....	111
Figura 5-12: Modelo simulink® da expressão de eficiência do motor elétrico ...	112
Figura 5-13: Simulação de eficiência do motor elétrico.....	113
Figura 5-14: Modelo de dinâmica longitudinal de um kart elétrico .....	113
 Figura 6-1: Esquema de um kart elétrico monomotor .....	117
Figura 6-2: Mecanismo diferencial comum.....	118
Figura 6-3: Kart hipotético com dois motores.....	119
Figura 6-4: Fluxograma da lógica de funcionamento de um sistema ESC. ....	120
Figura 6-5: Exemplificação do sistema ESC .....	120
Figura 6-6: Sistema ESC para um kart .....	121

## Lista de Tabelas

Tabela 1-1: Ford T a gasolina 1920 x Ford T elétrico imaginário 1920 .....	20
Tabela 1-2: Comparativo de tecnologias contemporâneas .....	21
Tabela 1-3: Comparativo energético kart a gasolina x kart elétrico.....	21
 Tabela 2-1: Dados gerais do chassi de testes.....	31
Tabela 2-2: Dados do motor Honda GX390 preparado para 21hp.....	32
Tabela 2-3: Resultados do modelo e das medições .....	41
Tabela 2-4: Dados dos pneus.....	44

Tabela 2-5: Valor da massa dos elementos com massa relevante .....	46
Tabela 2-6: Resultado dos ensaios com a roda dianteira .....	50
Tabela 2-7: Resultado dos ensaios com a roda traseira .....	50
Tabela 2-8: Resultado dos ensaios com o conjunto de transmissão .....	50
Tabela 2-9: Variáveis utilizadas e resultados obtidos .....	51
Tabela 2-10: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo trifilar para o kart livre (sem massa adicional) .....	54
Tabela 2-11: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo trifilar para o kart com massa adicional de 60 kg .....	54
Tabela 2-12: Resultados das medições do momento de inércia de guinada do kart utilizando-se o método trifilar. ....	54
Tabela 2-13: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo quadrifilar para o kart livre (sem massa adicional) .....	56
Tabela 2-14: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo quadrifilar para o kart com massa adicional de 60 kg .....	56
Tabela 2-15: Resultados das medições do momento de inércia de guinada do kart utilizando-se o método quadrifilar .....	57
Tabela 2-16: Consolidação de resultados para momento de inércia de guinada ( <i>yaw</i> ) do kart .....	58
 Tabela 3-1: Indicação da posição <i>versus</i> posição do pedal em centímetros .....	65
Tabela 3-2: Indicação da posição <i>versus</i> posição do pedal em centímetros, com a referência na posição de repouso .....	66
Tabela 3-3: Indicação da posição <i>versus</i> posição verdadeira em centímetros .....	66
Tabela 3-4: Tabela de ajustes para o posicionamento do pedal .....	68
Tabela 3-5: Medição do ângulo de esterçamento do volante <i>versus</i> dados de indicação de ângulo de esterçamento do volante feito pelo instrumento Alfano® .....	71
Tabela 3-6: Comparação entre as indicações de velocidade do GPS e a velocidade estimada por conversão da indicação da rotação do motor .....	73
Tabela 3-7: Comparação entre rotação do motor e velocidade GPS .....	73
Tabela 3-8: Períodos, em segundos, medidos no ensaio pendular do kart .....	77
Tabela 3-9: Distância percorrida <i>versus</i> tempo de volta .....	79
Tabela 3-10: Consolidação de informações do teste <i>skidpad</i> .....	82
 Tabela 4-1: Parâmetros do teste experimental e da simulação de dinâmica longitudinal .....	87
Tabela 4-2: Parâmetros da simulação da dinâmica lateral ( <i>skidpad</i> ) .....	99
Tabela 4-3: Parâmetros da simulação do movimento de ultrapassagem .....	101
 Tabela 5-1: Massas de karts com motores a gasolina .....	102
Tabela 5-2: Massas de karts com motores elétricos .....	103
Tabela 5-3: pontos discretizados da Figura 5-1 .....	105
Tabela 5-4: Extrapolação de pontos coletados da Figura 5-2 .....	106
Tabela 5-5: Parâmetros da simulação; kart Mini M2 com motor ME0709 .....	114

# 1

## Introdução

A modelagem matemática computadorizada de sistemas dinâmicos é uma ciência relativamente nova e vem aprimorando-se notavelmente na indústria automobilística. Nesta indústria a modelagem e a metrologia são ciências complementares uma à outra, pois os resultados de um modelo precisam ter verossimilhança com a realidade. Conhecer os erros e as incertezas dos resultados de um modelo são fundamentais para a sua validação, e isto se dá por meio da utilização das boas práticas da metrologia, com a realização de testes e ensaios para a obtenção de dados experimentais.

Um modelo computadorizado validado com dados experimentais resulta em economia e avanços tecnológicos para a grande indústria automobilística, sendo, portanto, bem provável que o mesmo possa ocorrer para uma indústria igualmente automobilística apesar de incipiente, que é a indústria dos veículos leves e recreativos, os chamados karts.

Um kart é um pequeno veículo monoposto terrestre de quatro rodas, utilizado em pistas exclusivamente construídas para o seu uso, e é referência nesta dissertação. Trata-se de um veículo de caráter experimental não homologado pelo Inmetro ou por qualquer outro órgão governamental, sendo o kartismo uma mera prática desportiva não-formal caracterizada pela liberdade lúdica de seus participantes. É reconhecida pela CBA (Confederação Brasileira de Automobilismo), associação máxima nacional de administração do desporto do automobilismo, e por algumas federações estaduais de automobilismo; no caso do Rio de Janeiro, a Faerj. A CBA, uma associação civil de caráter social, organiza diversos campeonatos de kart em nível nacional, destacando-se o Campeonato Brasileiro de Kart, de renome internacional e reconhecido pela FIA (Federação Internacional de Automobilismo) e pela CIKFIA (comissão internacional de kartismo da FIA).

Como resultado prático deste cenário, karts não pagam impostos governamentais para circulação, tal como o IPVA, e não dispõem de documentação

ou de placas. Qualquer pessoa pode construir seu próprio veículo e circular em um kartódromo público ou privado.

## 1.1

### Contextualização

O automóvel moderno usufrui de resultados obtidos por modelos computadorizados, por meio da aplicação de sistemas de controle. Motores mais eficientes, sistemas eletrônicos de frenagem e de estabilidade, piloto automático, enfim, o automóvel de hoje está repleto de novidades tecnológicas provenientes da modelagem computadorizada [1]. Em paralelo, constata-se um similar nível de avanço tecnológico nos karts, em especial em relação à modelagem computadorizada. Já em relação a sistemas de controle, contudo, não há ainda grande penetração no ambiente dos karts.

Em aparência e design, o kart atual pouco difere tecnologicamente do original, construído por Art Ingels em 1956 [2]. Contudo, os karts evoluíram notavelmente nas análises mecânicas estruturais, na utilização de materiais modernos e nas técnicas construtivas. A sua indústria atual é profissionalizada e utiliza softwares CAD, bem como softwares de simulação dinâmica, tal como ocorre na indústria automobilística tradicional. Todavia, sob o prisma conceitual, manteve-se quase o mesmo, desfrutando de uma mecânica centenária: motor a combustão de dois ou quatro tempos com carburador; tração traseira com um único eixo rígido conectando as duas rodas; freio hidráulico não assistido atuante somente no eixo traseiro; mecanismo de direção simples e direto; transmissão tipo pinhão-coroa e corrente; e inexistência de um mecanismo tradicional de suspensão, limitando-se para efeitos de amortecimento à deformação dos pneus e à torção do quadro estrutural. Além de tudo isso, não há qualquer sistema de controle eletrônico instalado em um kart.

Um argumento para a manutenção do *status quo* tecnológico do kart é sustentado pelos puristas, que prezam pela velha escola de pilotagem e são contra a introdução de tecnologias de assistência automática ao piloto. Além deste, há também um segundo argumento, de que a introdução das tecnologias de controle aumentaria os custos de algo que é meramente recreativo. Torna-se, portanto,

imperativo constatar a verdade destes argumentos, pois pouco foi desenvolvido para atualizar o kart à era dos sistemas de controle automotivos.

Contudo, se o automóvel evoluiu com a modelagem computadorizada e os sistemas de controle o mesmo pode acontecer com o kart, mas é preciso notar que os mecanismos de controle existentes no automóvel moderno dependem de uma série de equipamentos e sistemas pouco práticos para um pequeno kart. Um sistema ABS (*Anti-lock Braking System*) de frenagem, por exemplo, demanda sensores, bombas hidráulicas e baterias elétricas, e um sistema de estabilidade ESC (*Electronic Stability Control*) demanda todo o aparato do sistema ABS de frenagem, além de freios independentes em cada roda [3] mas, conforme dito, o kart recreativo tem um único sistema de freio atuante no eixo traseiro para frenagem conjunta das duas rodas traseiras.

Portanto, a ideia de desenvolver sistemas de controle para karts é cientificamente interessante, mas com a tecnologia atual é, também, pouco provável. Deve-se frisar que a história de uma boa ideia que enfrentou barreiras tecnológicas não é novidade. O ABS, por exemplo, tem um princípio de funcionamento que já era conhecido pelos pilotos de carros de corrida do início do século XX, mas os projetos baseados em sistemas puramente mecânicos, ou com eletrônica analógica, simplesmente não funcionavam [4], e o ABS só obteve sucesso técnico com o desenvolvimento dos sistemas digitais.

Então, se com o nível tecnológico atual dos karts é pouco provável o desenvolvimento dos sistemas de controle, o kart precisará evoluir tecnologicamente e, para este fim, a motorização elétrica pode ser um caminho viável. Motores elétricos têm uma ágil resposta mecânica ao estímulo do controle de rotação, algo não tão notável nos motores a combustão, e podem atuar como freios de forma controlada, utilizando um sistema de regeneração de energia (KERS - *Kinetic Energy Recovery Systems*). Estas duas características dos motores elétricos são estimulantes para o desenvolvimento de um sistema de controle de frenagem e de estabilidade para um kart, tal como dispõe o automóvel moderno do ABS e do ESC. Contudo, a questão do eixo rígido traseiro do kart gera um entrave para a questão, pois as rodas precisariam de controles independentes e, assim sendo, uma proposta para o desenvolvimento de um sistema de controle de frenagem e de estabilidade para um kart necessitaria da instalação de dois motores elétricos independentes, um em cada roda traseira. Todavia, um modelo experimental com



esta solução deve ser, conforme goza a boa prática da engenharia moderna, antes de mais nada, modelada matematicamente e simulada em computador, e tal modelagem em si carece, também, da obtenção das características dinâmicas do kart.

Portanto, se a motorização elétrica é uma proposta para a modernização tecnológica dos karts, é preciso analisar sua viabilidade técnica traçando os devidos paralelos com o automóvel elétrico pois, guardadas as diferenças na ordem de escala, algumas das barreiras tecnológicas do automóvel elétrico, tais como a autonomia das baterias, seu tempo de carga e longevidade, também incidem sobre o kart elétrico.

Assim, como fator motivador para os estudos de inovações tecnológicas aplicadas ao kart, há o advento desafiador do automóvel elétrico, cujo futuro como substituto total ou parcial do automóvel a combustão é, também, assunto de discussão.



**Figura 1-1: Kart Mini M2 imagem comercial**

Fonte: [www.kartmini.com.br](http://www.kartmini.com.br)

## **1.2 Motivação**

Os primeiros automóveis elétricos foram construídos nos anos 1830 [5] e alguns modelos foram comercializados no final daquele século. Contudo, com a aparição dos motores a gasolina e sua notável capacidade de percorrer longas

distâncias, associado aos módicos preços do combustível na época, mudou-se o rumo do mercado. A partir dos anos 1910 os automóveis movidos a gasolina venceram a batalha comercial contra os elétricos e estes perderam relevância no mercado mundial. Deu-se início à era de ouro do automóvel, sendo este movido a gasolina.

Contudo, a era dos automóveis movidos a gasolina, se não estiver acabando, certamente está se transformando. Não se trata somente de um avanço para a ecologia e para o bem-estar nas cidades por via da diminuição da poluição gasosa e sonora no ar, trata-se também de uma atenção fascinante do mercado consumidor de automóveis a uma novidade tecnológica. O mercado se agitou com a aparição do modelo S (Figura 1-2), veículo 100% elétrico da Tesla Motors que, aparentemente, selou o destino do sempre questionado automóvel elétrico.

A Tesla Motors foi fundada em 2003 pelos engenheiros Martin Eberhard e Marc Tarpenning e em 2004 foi comprada pelo empresário e acelerador de empresas sul africano Elon Musk, cuja paixão pelo projeto, autodeterminação e a expressiva comprovação de viabilidade técnica do produto, cativou o mercado consumidor, fazendo com que as ações da Tesla, lançadas ao mercado em 2010, disparassem em 2013 (Figura 1-3) ao ponto da empresa obter, já no ano seguinte, um valor de mercado semelhante ao das grandes montadoras, e isso tudo tendo uma fatia de mercado (mercado norte americano) abaixo dos 1%.



**Figura 1-2: Tesla modelo S**

Fonte: [www.tesla.com](http://www.tesla.com)



**Figura 1-3: Variação das ações da Tesla inc.**

Fonte: Bloomberg

Assim sendo, as primeiras motivações deste trabalho encontram-se no ressurgimento dos automóveis elétricos, ocorrido com expressão na década de 2010. Mas, para obter suas chances de competição com os veículos movidos a gasolina (ou álcool no caso brasileiro), o automóvel precisa(ou) superar alguns desafios tecnológicos e comerciais fundamentais, a serem observados a seguir.

- a) Autonomia e desempenho;
- b) Tempo de carga e ciclo de vida das baterias;
- c) Balanço ecológico; e
- d) Mercado consumidor e infraestrutura.

#### **a) Autonomia e desempenho**

Para notar a evolução dos veículos elétricos na batalha de autonomia e desempenho travada com os veículos movidos a gasolina, fez-se uma comparação entre o primeiro veículo movido a gasolina de grande sucesso comercial, o Ford T, com o mesmo veículo sendo equipado com motores elétricos e baterias de diversas tecnologias, começando pela tecnologia disponível na ocasião do lançamento do veículo em 1920 e terminando com as baterias da atualidade.

Segundo [1], os motores a combustão do século XX têm eficiência térmica conhecida por variar na casa dos 20%, enquanto que nos elétricos a eficiência pode chegar a 90%. Por outro lado, 1 kg de gasolina contém poder calorífico equivalente a 9000 Wh, enquanto que uma bateria tradicional chumbo-ácido de 1 kg fornece apenas 30 Wh. A Tabela 1-1 apresenta a composição mássica e volumétrica do reservatório energético (tanque de combustível) existente em um Ford T 1920 movido a gasolina e como seria o mesmo modelo, imaginário, portando baterias com a tecnologia disponível em sua época, para efeitos de comparação.

**Tabela 1-1: Ford T a gasolina 1920 x Ford T elétrico imaginário 1920**

Gasolina			Bateria chumbo-ácido de 1920		
Densidade	0,77	kg/l	Densidade	3,00	kg/l
Gravimetria	9 000	Wh/kg	Gravimetria	30	Wh/kg
Volumetria	6 930	Wh/l	Volumetria	90	Wh/l
Ford T original dos anos 1920 (20 hp)			Ford T elétrico imaginário em 1920		
Potência Máxima	15	kW	Potência máxima	15	kW
<b>Massa do tanque</b>	<b>29</b>	<b>kg</b>	<b>Massa do tanque</b>	<b>2 195</b>	<b>kg</b>
<b>Volume do tanque</b>	<b>38</b>	<b>litros</b>	<b>Volume do tanque</b>	<b>732</b>	<b>litros</b>
Energia disponível	263 340	Wh	Energia disponível	65 835	Wh
Eficiência	20%	BTE	Eficiência	80%	BTE
Energia aproveitada	52 668	Wh	Energia aproveitada	52 668	Wh

Um Ford T movido a baterias seria impraticável nos anos 1920, pois carregaria mais de duas toneladas em baterias em um volume de mais de 730 litros. Já o modelo a gasolina é perfeitamente factível e, de fato, o Ford T foi um dos maiores sucessos da história da indústria automobilística mundial.

Contudo, o mercado atual dispõe de veículos movidos a gasolina com desempenho bastante superior ao de um FORD T de 1920, portanto é preciso atualizar a comparação. Para tal, fez-se a mesma comparação com um dos automóveis líderes de mercado, o Toyota Corolla.

Segundo [6], a japonesa Toyota anunciou um motor a gasolina convencional de 2,0 litros com 126 kW (170 hp) e 40% de eficiência térmica. Apesar deste motor ainda não ser um produto efetivo no mercado, foram considerados os dados anunciados para efeitos de comparação, com um veículo utilizando tecnologia contemporânea de propulsão elétrica, como na Tabela 1-2.

**Tabela 1-2: Comparativo de tecnologias contemporâneas**

Gasolina			Bateria de íons de lítio (atual)		
Densidade	0,77	kg/l	Densidade	2,77	kg/l
Gravimetria	9 000	Wh/kg	Gravimetria	250	Wh/kg
Volumetria	6 930	Wh/l	Volumetria	693	Wh/l
Toyota Corolla 2019			Veículo elétrico similar		
Potência Máxima	126	kW	Potência máxima	126	kW
<b>Massa do tanque</b>	<b>35</b>	<b>kg</b>	<b>Massa do tanque</b>	<b>554</b>	<b>kg</b>
<b>Volume do tanque</b>	<b>45</b>	<b>litros</b>	<b>Volume do tanque</b>	<b>200</b>	<b>litros</b>
Energia disponível	311 850	Wh	Energia disponível	138 600	Wh
Eficiência	40%	BTE	Eficiência	90%	BTE
Energia aproveitada	124 740	Wh	Energia aproveitada	124 740	Wh

Portanto, para obter desempenho similar ao de um Toyota Corolla com o mais moderno dos motores a gasolina, seriam necessários 200 litros de baterias de íons de lítio que somariam cerca de 550 kg ao veículo. A título de comparação, 550 kg é justamente a ordem de grandeza de massa em baterias que o modelo S da Tesla Motors carrega. A mesma análise feita para um kart elétrico indicou a necessidade de 60 a 70 kg de massa em baterias, valor consideravelmente alto, conforme indicado na Tabela 1-3.

**Tabela 1-3: Comparativo energético kart a gasolina x kart elétrico**

Gasolina			Bateria de íons de lítio (atual)		
Densidade	0,77	kg/l	Densidade	2,77	kg/l
Gravimetria	9 000	Wh/kg	Gravimetria	250	Wh/kg
Volumetria	6 930	Wh/l	Volumetria	693	Wh/l
Kart recreativo à gasolina			Kart recreativo elétrico		
Potência Máxima	15	kW	Potência máxima	15	kW
<b>Massa do tanque</b>	<b>6</b>	<b>kg</b>	<b>Massa do tanque</b>	<b>62</b>	<b>kg</b>
<b>Volume do tanque</b>	<b>8</b>	<b>litros</b>	<b>Volume do tanque</b>	<b>22</b>	<b>litros</b>
Energia disponível	55 440	Wh	Energia disponível	15 400	Wh
Eficiência	25%	BTE	Eficiência	90%	BTE
Energia aproveitada	13 860	Wh	Energia aproveitada	13 860	Wh

De fato, o modelo experimental elétrico da BOSCH-FIA debutante em 2016 (Figura 1-4) carrega dois grandes bancos de baterias localizados nas laterais do

quadro do chassi. Portanto, se comparado com um kart movido a gasolina, o kart elétrico tende a levar uma desvantagem no quesito da massa deslocada.



**Figura 1-4: Kart elétrico da Bosch-FIA 2016**

Fonte: site oficial da FIA ([www.fia.com](http://www.fia.com))

O intuito desta comparação de um mesmo automóvel em épocas diferentes usufruindo de tecnologias diferentes é o de expor o avanço da tecnologia das baterias, hoje ao nível de boa competitividade com a gasolina no âmbito dos automóveis.

#### **b) Tempo de carga e ciclo de vida das baterias**

O Tesla modelo S é um veículo 100% elétrico comercializado com garantia de 8 anos do banco de baterias de íons de lítio. Assim, a questão de exaustão das baterias, para aquele automóvel elétrico, aparentemente não é um problema, pois a expectativa é que as baterias durem mais tempo que o carro em si [7]. Mas, sob o prisma do kart elétrico, é preciso observar melhor a questão, uma vez que por princípio ele deverá ser equipado com baterias comercializáveis e de fácil acesso no mercado.

Segundo [8], baterias de íons de lítio padrão 18650 (facilmente encontradas no mercado) suportam até 4 mil ciclos com uma taxa de descarga 0.5C. Taxas de carga e descarga das baterias são regidas pelas taxas C. A capacidade de uma bateria

é geralmente avaliada em 1C, o que significa que uma bateria totalmente carregada demandada em 1 Ah deve fornecer 1 A por uma hora. A mesma bateria descarregando a 0.5C deve fornecer 500 mA por duas horas, e a 2C ela deve fornecer 2 A por 30 minutos.

As baterias de íons de lítio padrão 18650 com taxas de 0.5C ou 1C são apropriadas para a construção de um kart elétrico por atenderem às necessidades técnicas e econômicas de um projeto deste tipo, sendo por sinal as mesmas comumente encontradas nos *packs* de baterias de bicicletas elétricas. Mas, conforme mostra o estudo [Apêndice 1], o tempo para carga pode chegar a 1 hora e, assim sendo, ao proprietário do kart só restarão duas opções, ou aguardar o carregamento das baterias, ou dispor de um conjunto extra de baterias e efetuar uma substituição em campo, algo viável e sem maiores complicações, pois a massa total de baterias está na ordem dos 60 kg e pode-se dividir em 2 bancos com 30 kg cada, sendo esta uma sugestão de *layout* bastante adequada e usada pela Bosch (Figura 1-4).

Quanto ao ciclo de vida das baterias Li-íon 18650 aplicadas no kartismo, uma característica positiva é que o uso do kart é restrito ao circuito do kartódromo, portanto a carga da bateria pode ser utilizada de uma só vez, caracterizando o chamado ciclo profundo, evitando os ciclos rasos de carregamento, o que ajuda na preservação da bateria. Por outro lado, há o calor do asfalto e a proximidade dos chassis do kart a ele (cerca de 2 cm), o que pode prejudicar a eficiência da bateria.

### c) Balanço ecológico

O tema, sempre polêmico e extenso, converge para pelo menos três pontos de fundamental observação quando o assunto é o advento dos veículos elétricos:

- Poluição sonora e do ar;
- Exploração dos recursos naturais; e
- Descarte das baterias exaustas.

- **Poluição sonora e do ar**

A demanda por energia elétrica para alimentar uma eventual grande frota de veículos elétricos demandará novos projetos de geração de energia elétrica, muitos conhecidos por serem “ecologicamente deficitários”, com exceção dos chamados geradores de energia limpa, tais como as fazendas eólicas e solares. Contudo, tais empreendimentos, salvo raras exceções, são afastados dos centros urbanos, de forma que os impactos ambientais, tais como a emissão de gases poluentes e ruídos, não afetará as cidades diretamente. Assim, as vantagens dos veículos elétricos ficam em evidência, pois os motores elétricos são mais silenciosos do que os motores à combustão e não emitem nenhum gás para a atmosfera. Segundo [9], uma frota de carros totalmente elétricos reduziria os níveis médios de ruído urbano em 3 a 4 dB e o “efeito de aborrecimento” da poluição sonora ao cidadão em mais de 30%.

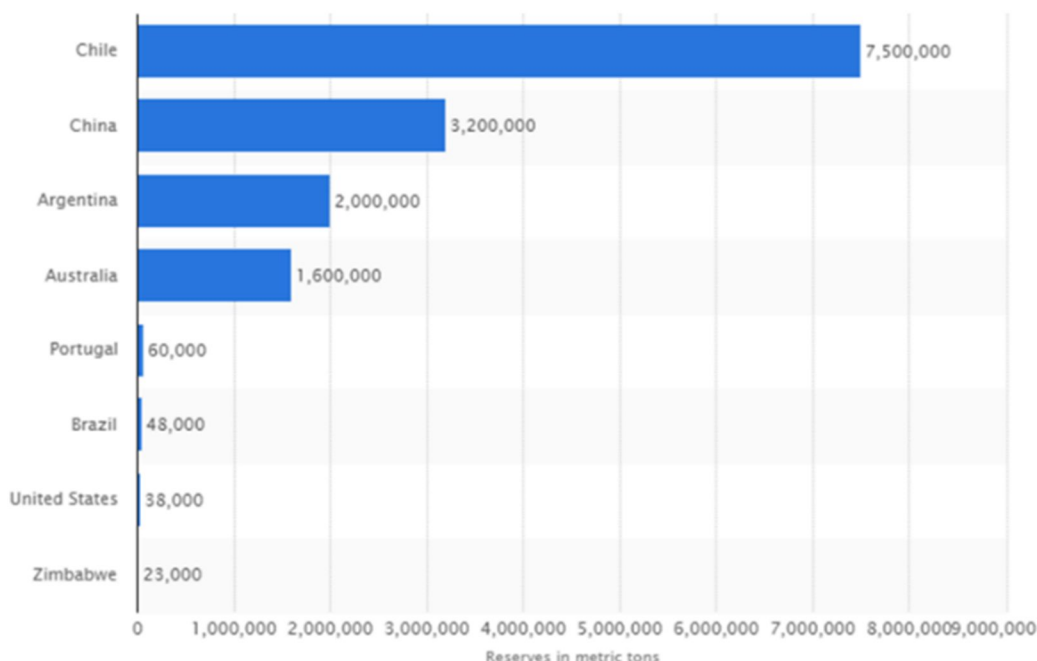
As observações feitas acima são pertinentes ao automóvel comum, mas no tocante ao kart a questão fica em total evidência. Karts não dispõem de catalisadores e seus motores não têm sistemas de mapeamento e controle ou mesmo o compromisso com o baixo consumo de combustível. No caso dos motores de dois tempos há, para além da não muito eficiente queima da gasolina, a queima direta de óleo pelo motor. A fumaça emitida pelos karts é evidente, segundo um estudo [10] realizado pelo Instituto de Química da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, que analisou kartódromos da cidade do Rio de Janeiro e concluiu que o nível de poluição do ar nas corridas de kart é alto e dependente do tipo de kartódromo. No kartódromo aberto, a maior dispersão dos poluentes faz com que o teor destes no ar seja bem menor se comparado à mesma atividade em um local fechado. Entretanto, em ambos os casos se observa a presença de benzeno, algo a ser encarado com preocupação por conta de sua alta toxicidade.

Não restam dúvidas, portanto, que o kart elétrico é, sob o ponto de vista da poluição, muito mais saudável para os participantes do que o kart convencional à gasolina.



- **Exploração dos recursos naturais**

A tecnologia atual promissora para as baterias do automóvel elétrico utiliza lítio como matéria prima. Lítio vem do grego *lithos* que significa “pedra”, sendo um metal macio de coloração prata e branca e pertencente ao grupo de elementos químicos ‘metais alcalinos’ e marcado com o símbolo Li. É o mais leve entre todos os metais. A Figura 1-5 apresenta o panorama de disponibilidade deste material natural.



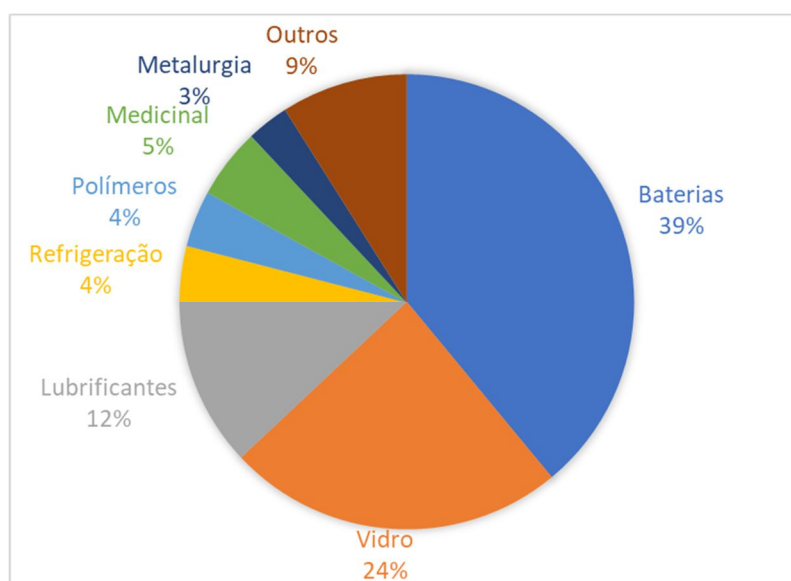
**Figura 1-5: Reservas mundiais de lítio em toneladas métricas**

Fonte: [www.statista.com](http://www.statista.com)

O Brasil, apesar de sua grande área, detém menos reservas comprovadas de lítio do que Portugal. Contudo, esse panorama pode mudar, pois a procura por lítio aumentou após a comprovação de sua utilidade na produção de baterias para veículos elétricos e a área de busca para exploração no Brasil é grande.

Contudo, o lítio não está exclusivamente dedicado às baterias. Apesar de ser a maior fonte atual de consumo de lítio no mundo, o mercado de baterias não é o único a utilizar tal matéria prima. Em 2009, a demanda total de lítio atingiu quase 92 000 toneladas métricas, das quais as baterias consomem 26%. A Figura 1-6 ilustra usos típicos do lítio no ano de 2015, que incluem lubrificantes, vidro,

cerâmica, produtos farmacêuticos e refrigeração. Pode-se notar que a utilização para baterias saltou dos 26% de 2009 para 39% em 2015.



**Figura 1-6: Utilização do lítio pela indústria**

Fonte: [http://batteryuniversity.com/learn/article/availability\\_of\\_lithium](http://batteryuniversity.com/learn/article/availability_of_lithium)

Apesar deste panorama de avanço na exploração do minério, as reservas comprovadas de lítio são extensas o suficiente para a produção de cerca de 3,7 bilhões de automóveis elétricos de pequeno porte, pois são 15 milhões de toneladas exploráveis comprovadas e um veículo pequeno tal como o Nissan Leaf demanda cerca de 4 kg do minério bruto.

- **Descarte de baterias Li-íon**

Atualmente não existe tecnologia de reciclagem de baterias Li-íon capaz de produzir lítio puro o suficiente para um segundo uso em baterias, portanto a reciclagem destas baterias ainda não é rentável, devendo ser subsidiada pelos governos para fins de recuperação do cobalto, sendo o lítio extraído usado para fabricação de lubrificantes, vidro, cerâmica e outras aplicações [11].

Segundo [12], baterias Li-íon são razoavelmente inofensivas, mas devem ser descartadas adequadamente pois contém elementos no mesmo nível de toxicidade dos dispositivos eletrônicos. O site americano não governamental ‘americandisposal.com’ sugere que as baterias Li-íon sigam a rota do lixo

extraordinário e não do lixo reciclável, pois, além de não serem recicláveis, podem causar incêndio nos caminhões compactadores quando esmagadas. O problema é que a diversidade de tecnologias de baterias dificulta a identificação por parte do público, que em geral não tem a devida atenção sequer ao correto descarte de baterias, seja de qual tecnologia forem. Demandar a população a identificar e a descartar corretamente as baterias é uma tarefa complexa.

No Brasil não há produção de baterias Li-íon e não há legislação específica para o descarte final deste tipo de produto. A resolução 401 do CONAMA de 2008 é a mais atual sobre o tema e dispõe sobre os descartes finais para as baterias com tecnologias Chumbo-Ácido, Zinco-Manganês e Alcalino-Manganês, Níquel-Cádmio e Óxido de Mercúrio. De uma forma genérica, por ser o lítio um metal alcalino e existirem duas composições de baterias Li-íon que utilizam o manganês, o LMO ou Lítio-Oxido-de-manganês ( $\text{LiMn}_2\text{O}_4$ ) e o NMC ou Lítio-Níquel-Manganês ( $\text{LiNiMnCoO}_2$ ) talvez apenas estas duas formas se enquadrem na resolução, mas não há ainda legislação que trate do lítio.

A pesquisadora Linda Gaines [7] discute o assunto como sendo ainda extremamente controverso, pois as baterias tipo Li-Íon aplicadas no automóvel elétrico são extremamente duráveis, podendo durar o tempo de vida inteiro do automóvel, algo que ainda não se sabe exatamente, mas que é a perspectiva, portanto, o descarte deste tipo de bateria ainda não atingiu nível de escala suficiente para qualquer conclusão sobre alguma viabilidade econômica em todo o processo de reciclagem. Além disso, as eventuais leis sobre o assunto ainda estão sendo discutidas (nos Estados Unidos), sendo assim, no momento, o despejo em aterro sanitário a melhor opção.

#### **d) Mercado consumidor e infraestrutura**

O atual mercado mundial de automóveis está na ordem dos 1,3 a 1,4 bilhões de unidades, sendo a fatia do automóvel elétrico na ordem dos 3 milhões de unidades. No Brasil, a frota atual está na ordem dos 43 milhões de automóveis, sendo a fatia dos modelos elétricos ainda desprezível [13]. Para substituir toda a frota nacional por veículos elétricos com ‘tanques de bateria’ de 100 kWh, por exemplo, (exemplo do Tesla modelo S P100D), seriam necessários investimentos

estruturantes para o atendimento a uma nova demanda de energia elétrica. Contudo, este cenário de necessidades não é pertinente ao kartismo.

O mercado mundial de karts não tem estimativas oficiais de tamanho, pois trata-se de um veículo meramente recreativo e de caráter experimental, mas uma pesquisa da revista IBIS World diz que o mercado americano movimentou cerca de 51 milhões de dólares americanos em 2013. É, portanto, um mercado muito pequeno de esporte e diversão, tal como as arenas de golfe e boliche.

O mercado brasileiro dos karts recreativos detém uma fatia muito pequena do mercado mundial. Existem cerca de 125 kartódromos em todo país, sendo que cada um deles detém tipicamente 40 unidades, fazendo a ordem de grandeza do mercado em torno das 5 mil unidades. Portanto, a substituição da frota dos karts à gasolina para karts elétricos não demandaria investimentos estruturantes no país, mesmo que a frota nacional fosse o dobro ou mesmo o triplo do tamanho estimado. O kart elétrico recreativo ainda é debutante no mundo inteiro, sendo no Brasil realidade apenas em Campinas/SP no kartódromo ‘Kart Fly Electric Racing’.

### **1.3**

#### **Objetivos gerais e específicos**

##### **Objetivo geral**

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento, com base em dados experimentais, de um modelo computadorizado capaz de simular as características dinâmicas de um kart recreativo convencional.

##### **Objetivos específicos**

São três os objetivos específicos, abaixo apresentados em ordem condicional, pois o primeiro objetivo precisa ser plenamente realizado para que o segundo possa o ser, e assim sucessivamente.

1. Medir as características dinâmicas de um kart, por meio de testes de bancada e em pista.

2. Construir um modelo computadorizado com dados experimentais, capaz de simular os comportamentos dinâmicos longitudinal e lateral de um kart conduzido por um piloto não profissional com motor à combustão.
3. Substituir, no modelo computadorizado, o motor à combustão por um motor elétrico, simular e analisar resultados.

## 1.4

### Estrutura da dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos.

O 1º (primeiro) capítulo é introdutório, busca contextualizar o assunto de forma ampla e justificar o empenho intelectual dispendido.

O 2º (segundo) capítulo trata da apresentação das características do veículo e das medições de bancada feitas para obtenção de dados complementares específicos necessários.

O 3º (terceiro) capítulo mostra as características da instrumentação utilizada no veículo e os ajustes necessários para a adequação das indicações.

O 4º (quarto) capítulo apresenta a modelagem computadorizada das dinâmicas longitudinal e lateral do veículo, com base nos dados experimentais obtidos nos capítulos 2º e 3º, e compara resultados da modelagem com os dados experimentais equivalentes.

O 5º (quinto) capítulo expõe simulações da mesma modelagem computadorizada desenvolvida, com motorização elétrica.

O 6º (sexto) e último capítulo traz as conclusões do trabalho, expõe argumentos para debate referente ao tema e sugere a continuidade do trabalho de pesquisa.

Referências bibliográficas e apêndices estão organizados após o último capítulo da dissertação.

## 2 Descrição geral do veículo

### 2.1 Características gerais

O veículo utilizado nos testes de bancada e de pista é um kart modelo M2 ano 2009 da Mini, uma tradicional fabricante brasileira de karts recreativos e de competição em atividade desde 1959 [14]. As principais características que são relevantes para esta dissertação são descritas a seguir.

#### 2.1.1 Chassi

O chassi de um kart é o conjunto de todos os elementos que compõem o kart, com exceção apenas dos pneus e do motor. A Figura 2-1 mostra as dimensões externas do kart Mini M2 e a Tabela 2-1 apresenta dados gerais do mesmo.

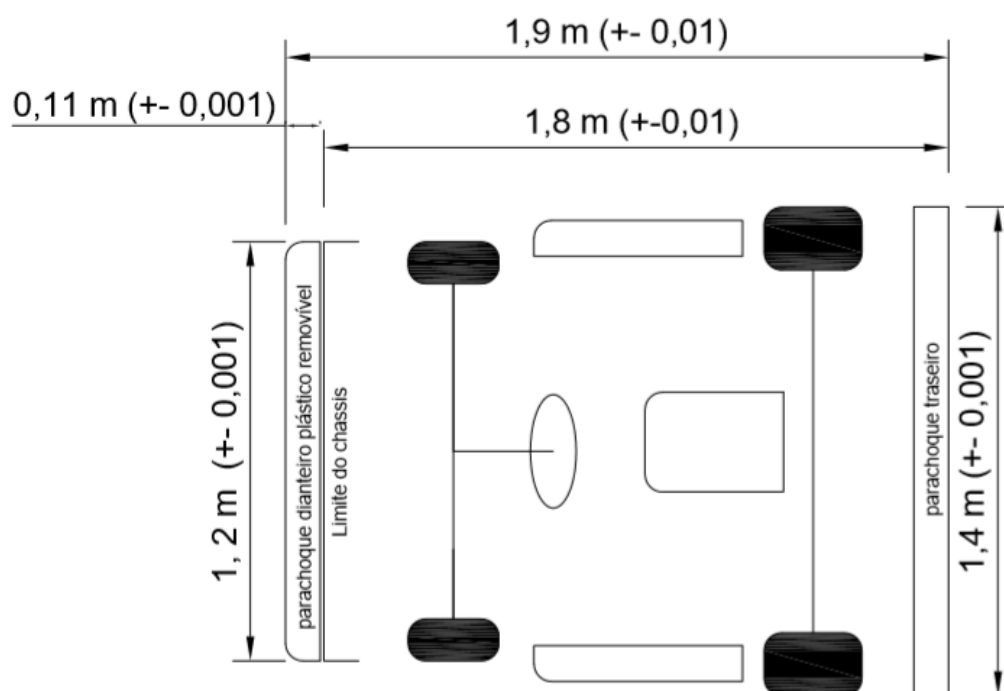


Figura 2-1: Dimensões externas do kart em milímetros.

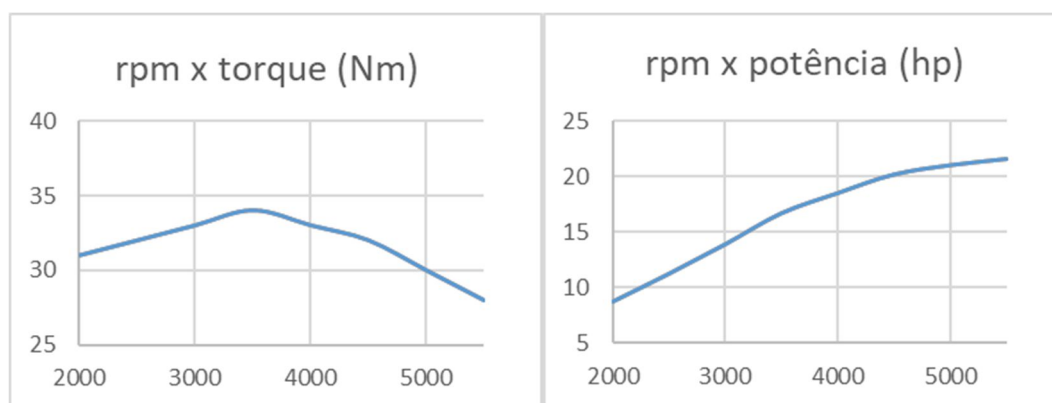
**Tabela 2-1: Dados gerais do chassi de testes**

Massa do quadro livre	53 kg	Altura (com pneus)	650 mm
Massa do quadro com rodas e pneus	61 kg	Tubos estruturais	Ø20 mm
Massa do chassi pronto para uso tanque com $\frac{3}{4}$ da capacidade	107 kg	Cor predominante	Azul
Bitola traseira padrão*	1 220 mm	Bitola dianteira padrão*	1 083 mm

\*As bitolas traseira e dianteira são reguláveis.

### 2.1.2 Motor

Para os testes de pista foi utilizado um motor a combustão marca HONDA GX390 mostrado na Figura 2-2, provido de carburador, preparado para 21 hp e adaptado para o kart. A Figura 2-3 apresenta as curvas características do motor e a Tabela 2-2 apresenta os dados gerais do motor utilizado nos testes.

**Figura 2-2: Motor Honda GX 390, preparado para kart.****Figura 2-3: Curvas de torque e potência do motor preparado para 21 hp**

**Tabela 2-2: Dados do motor Honda GX390 preparado para 21hp**

Marca	Honda	Combustível	Gasolina
Regime de operação	Estacionário	Ciclo	4 tempos
Modelo	GX 390 (21hp)	Óleo	4T 20W-40
Comprimento	405 mm	Arrefecimento	Ar forçado
Largura	470 mm	Cilindrada	389 cm <sup>3</sup>
Altura	437 mm	Massa	35 kg

### 2.1.3 Transmissão

A transmissão do kart, mostrada na Figura 2-4, é feita por uma embreagem centrífuga com um pinhão de 13 dentes e uma coroa de 45 dentes conectados por uma corrente de passo ½”, formando uma relação de transmissão fixa de 13:45 ou  $N_t = 3,462$ .

**Figura 2-4: Transmissão do kart**

A coroa transmite potência para o eixo traseiro de 40 mm de diâmetro, fixado ao chassi por rolamentos UC208. O eixo traseiro é único e solidário às duas rodas traseiras, portanto transmite movimento para ambas de forma dependente. Por estarem engastadas no mesmo eixo tem-se, para qualquer situação, por definição

$$\omega R_{te} = \omega R_{td} \quad (1)$$

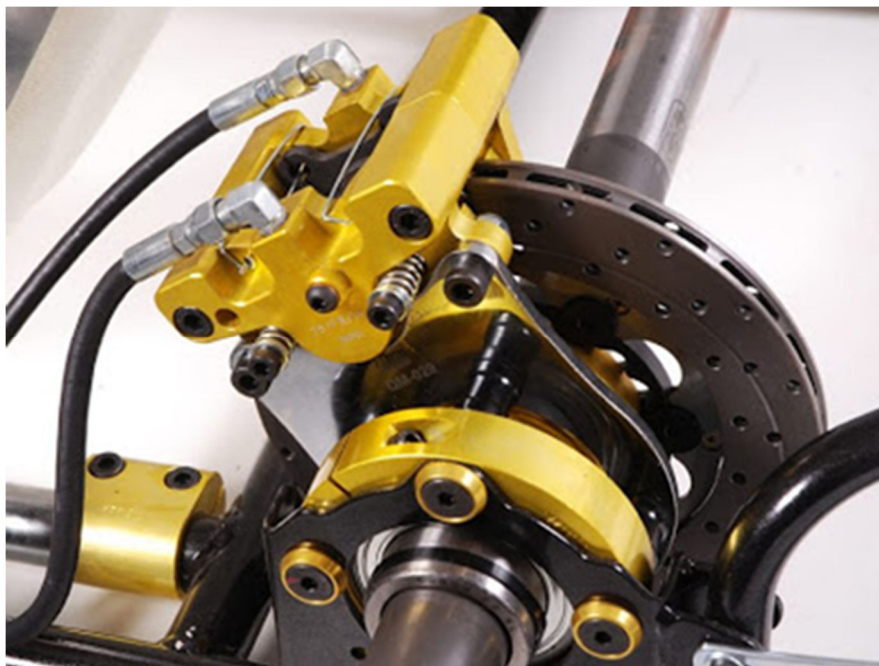
onde  $\omega$  = velocidade angular;  $R_{te}$  = raio da roda traseira esquerda e  $R_{td}$  = raio da roda traseira direita.



### 2.1.3 Freio

O freio do kart atua exclusivamente no eixo traseiro, portanto somente as rodas traseiras sofrem o efeito da frenagem. Trata-se de um sistema hidráulico composto por cinco elementos fundamentais: pedal, cilindro mestre, duto, pinça provida de pastilhas de freio e disco de freio.

O pedal, quando pressionado pelo piloto, aciona mecanicamente o cilindro mestre que gera e transmite pressão hidráulica por via de um duto (mangote) para as pinças de freio. A força da pressão hidráulica empurra as pastilhas das pinças em direção ao disco de freio, pressionando-os e causando uma força de atrito. O disco de freio é solidário ao eixo traseiro e este às rodas traseiras do kart, assim o atrito gerado pelas pastilhas no disco de freio freia o kart. A Figura 2-5 apresenta a pinça, o disco e o eixo traseiro. A força de frenagem depende e é proporcional à força de acionamento do pedal de freio, realizada pelo piloto.



**Figura 2-5: Detalhe da pinça, do disco de freio e do eixo traseiro**

Fonte: [www.kartmini.com.br](http://www.kartmini.com.br)

### 2.1.4 Direção

Tal como nos automóveis os karts também dispõem das geometrias tradicionais de direção: ângulos de alinhamento (*Toe*) e de câmbor (*camber*) (Figura 2-6), e o ângulo de cáster (*caster*) (Figura 2-7).

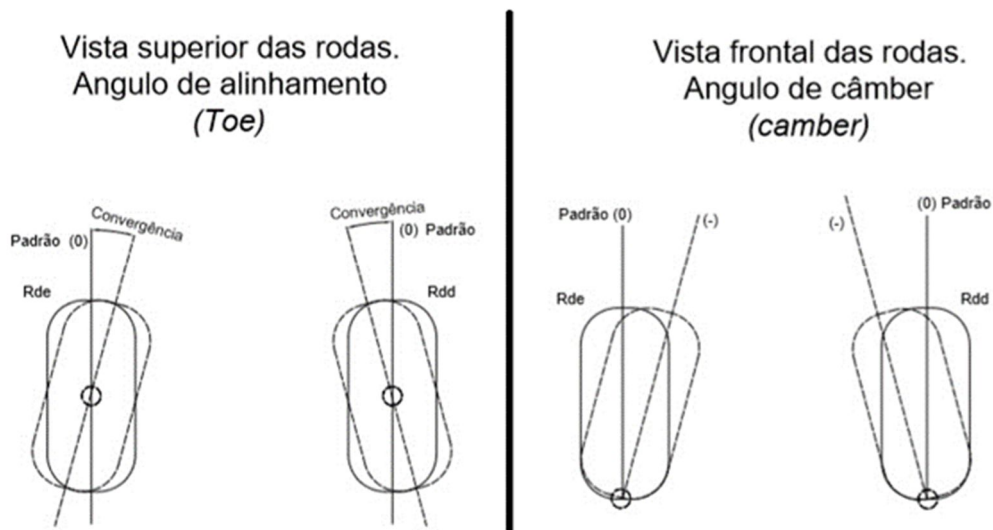


Figura 2-6: Ângulos de alinhamento (*toe*) e de câmbor (*camber*)

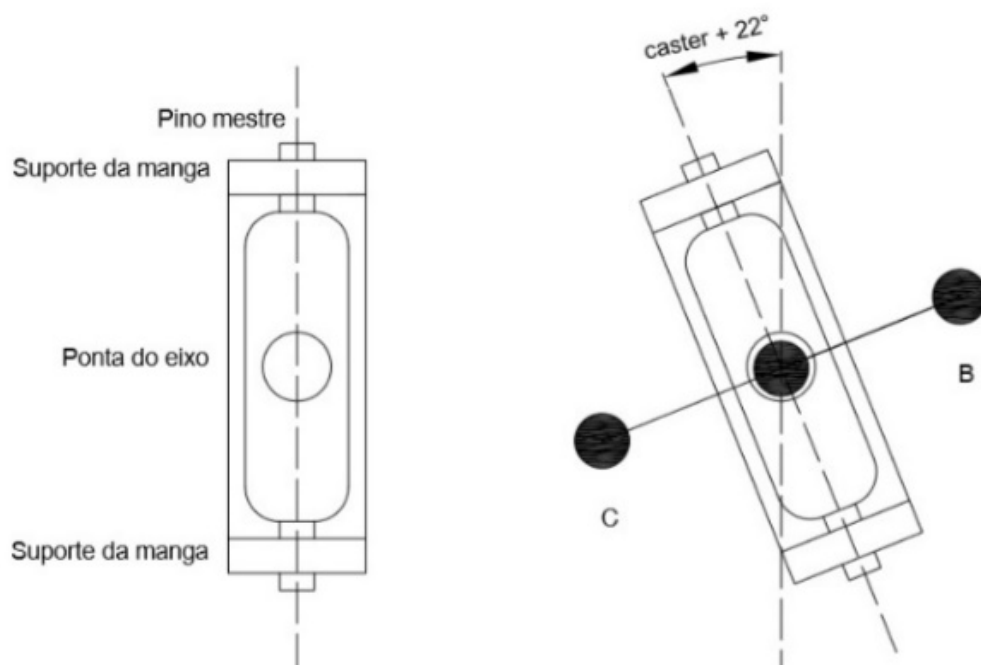


Figura 2-7: Ângulo de cáster formado pela fixação do suporte da manga de direção no quadro estrutural do chassi.

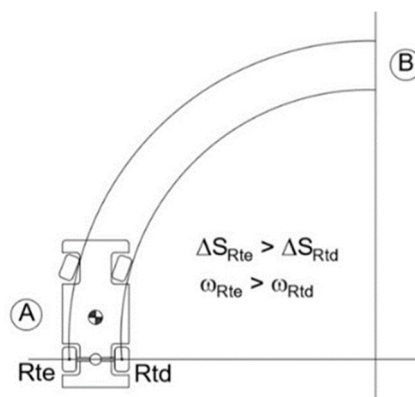
O ângulo de alinhamento (*toe*) é a única geometria regulável do kart conforme os padrões de fábrica. É possível regular cáster e camber de um kart substituindo os pinos mestres por modelos especiais, um procedimento comum em competições, mas o kart de testes deste trabalho dispõe dos pinos mestres originais, portanto cáster e câmber não são reguláveis.

O kart de testes tem as seguintes regulagens geométricas:

- Alinhamento – Convergência nula. Padrão do fabricante;
- Câmber – Pino mestre original do fabricante, ângulo de câmber nulo; e
- Cáster – Suporte da manga de direção fixado (por soldagem) ao quadro estrutural com inclinação de 22 graus em relação ao solo, formando um ângulo de cáster de mesmo valor (Figura 2-8). Padrão de fábrica.

Nos automóveis com suspensão tradicional o ângulo de caster tem a função de retornar as rodas e o volante para a posição natural (de linha reta) quando o volante é solto pelo condutor em meio a uma curva [15], mas no kart o ângulo de cáster realiza uma função a mais: provoca torção no quadro estrutural para auxiliar a suspender a roda traseira interna do kart quando o mesmo está fazendo uma curva.

A Figura 2-8 mostra o caminho percorrido pelas rodas traseiras de um automóvel comum em curva do ponto A até o ponto B. A ‘R<sub>te</sub>’ (Roda traseira esquerda) percorre um caminho maior do que a ‘R<sub>td</sub>’ (roda traseira direita) mas para tal sua velocidade angular também tem de ser maior. Isso só é possível com o auxílio de um elemento mecânico, chamado de diferencial, acoplado ao eixo de transmissão, mas este mecanismo o kart não dispõe; como visto, a transmissão do kart se dá por meio de um eixo rígido que conecta as duas rodas.

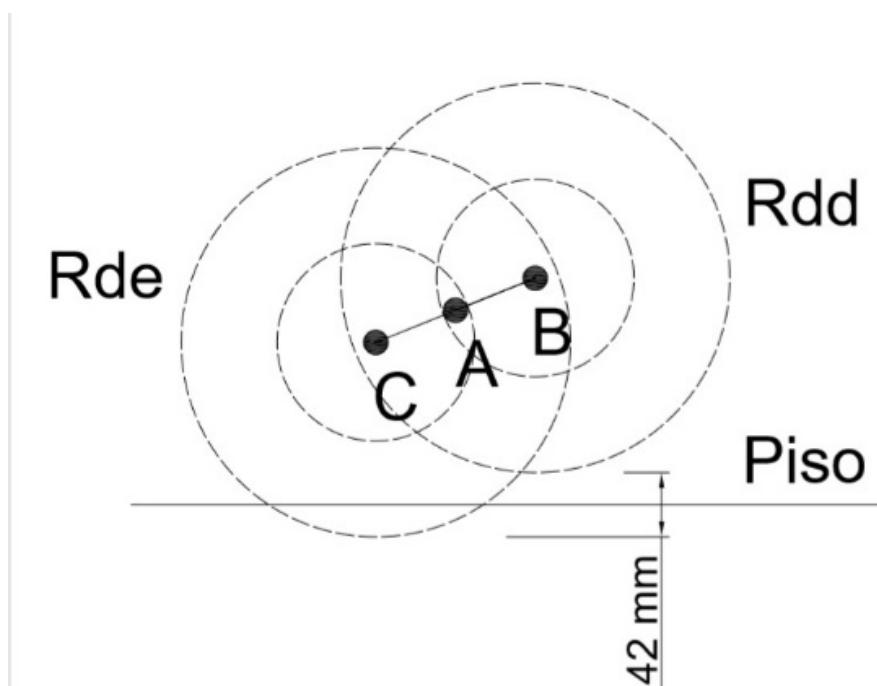


**Figura 2-8: Um automóvel em curva**

Assim, levantar a roda traseira interna à curva é a forma com que o kart compensa a inexistência do mecanismo diferencial. Uma vez sem o contato com o solo, a roda não gera atrito de arraste. A elevação da roda traseira externa à curva se dá por meio da torção do quadro estrutural do chassi, e a torção do quadro é uma consequência direta da existência de um elevado ângulo de cáster no sistema de direção.

A Figura 2-7 apresenta um desenho do suporte da manga de direção do kart formando o ângulo de cáster de 22 graus. Os pontos B e C correspondem às posições finais das pontas de eixo das mangas de direção esquerda e direita quando se gira o volante totalmente para a esquerda. A Figura 2-9 apresenta um desnivelamento de 42 mm teórico em relação ao piso nas rodas dianteiras direita ( $R_{dd}$ ) e esquerda ( $R_{de}$ ) produzido pelo ângulo de cáster, quando o volante é totalmente esterçado para a esquerda. O desnivelamento em questão ocorre simetricamente no lado oposto quando o volante é esterçado para a direita.

Um kart em curvas de média e alta velocidade perde visivelmente o contato da roda traseira interna à curva com o solo, mas o movimento de torção acaba por suspender também a roda dianteira (menos perceptível) interna, o que em teoria não seria desejado, mas ocorre devido aos limites de deformação elástica do quadro.



**Figura 2-9: Representação do desnivelamento máximo nas rodas dianteiras formado pelo ângulo de cáster ao se esterçar todo o volante do kart.**

A constatação da dinâmica de perda de contato com o solo das rodas internas do kart em curva (Figura 2-10) é importante pois, segundo [4], a modelagem das rodas dianteiras de um automóvel pode ser feita com o ângulo médio das duas rodas dianteiras, contudo, no caso do kart a proposta é utilizar o ângulo da roda externa, uma vez que a roda interna à curva não exerce influência significativa nas forças de alteração de direção do kart



**Figura 2-10: Flagrante das rodas internas suspensas com o kart em curva**

O mecanismo de direção do kart (Figura 2-11) é constituído por um volante solidário a uma coluna de direção, provida, em sua extremidade, de um pequeno triângulo basculante (Figura 2-13) que puxa e empurra as barras de direção, de acordo com o esterçamento feito no volante. As barras de direção, por sua vez, acionam as mangas de direção, que giram em torno do pino mestre formando os ângulos de direção das rodas. Na Figura 2-12 a roda está ausente da ponta de eixo para uma melhor visualização do mecanismo de direção. A Figura 2-13 apresenta as dimensões relevantes do mecanismo de direção.



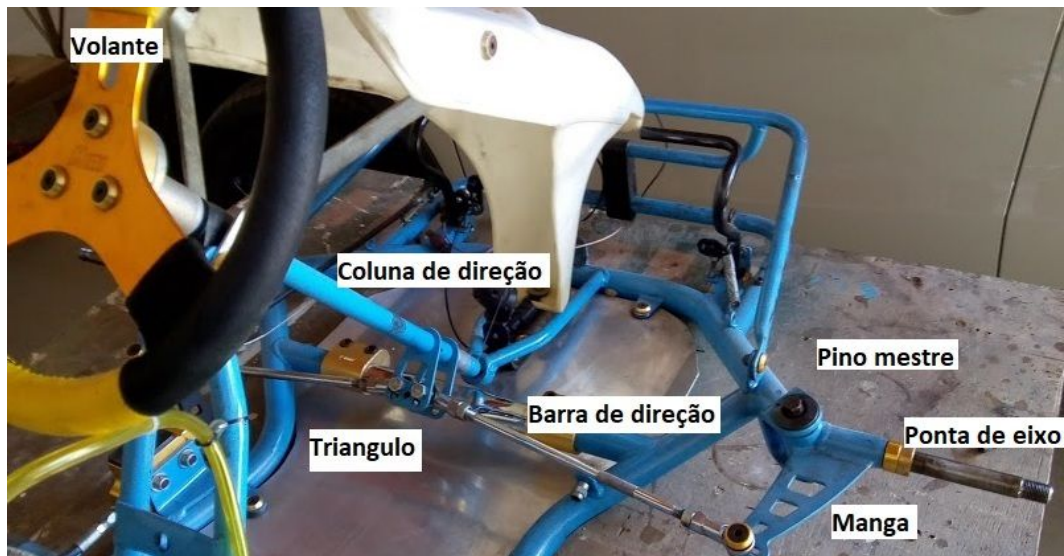


Figura 2-11: Mecanismo de direção.

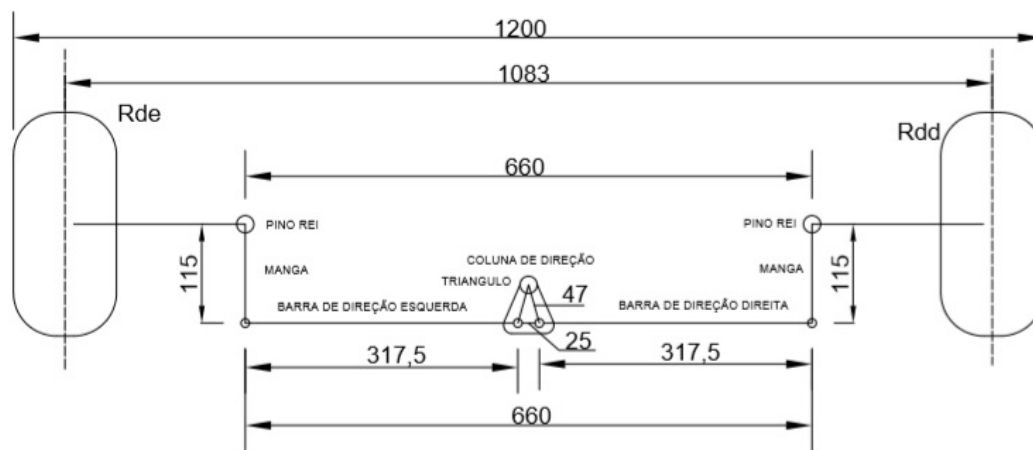
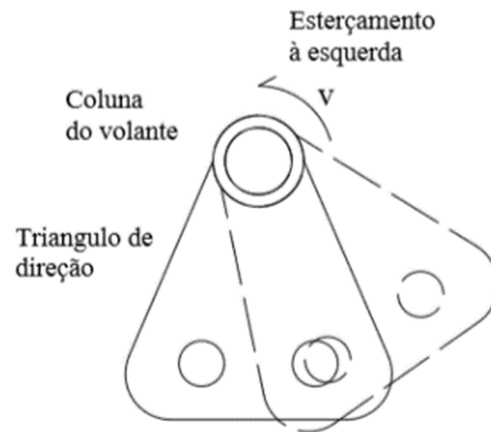


Figura 2-12: Dimensões do mecanismo da direção em milímetros



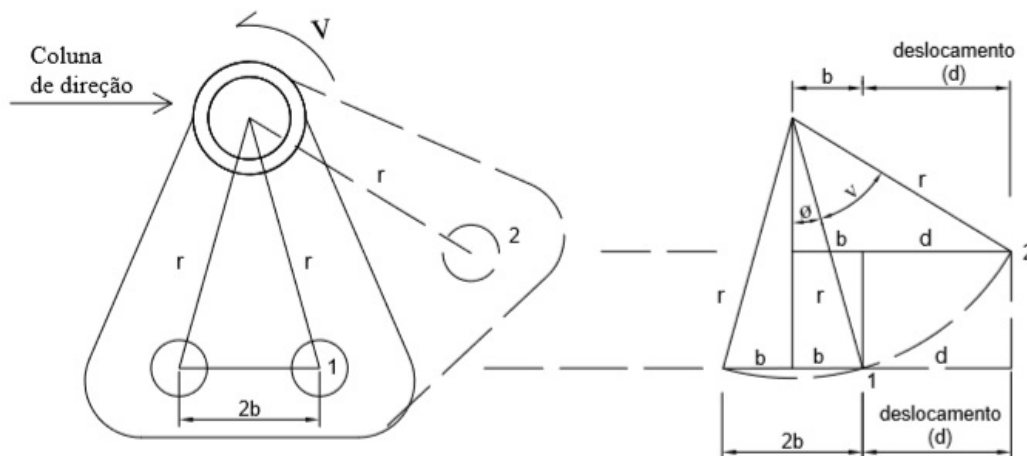
Figura 2-13: Detalhes do triângulo basculante da direção



**Figura 2-14: Representação do triângulo basculante da direção**

Para efeitos da realização do modelo computadorizado é preciso verificar a relação mecânica existente entre o esterçamento no volante e o consequente esterçamento das mangas de direção e das rodas.

Considerando um esterçamento do volante ( $v$ ) à esquerda, o triângulo basculante empurra a barra de direção direita com um deslocamento lateral ( $d$ ). A Figura 2-15 ilustra o movimento. O parafuso de engaste da barra de direção está representada pelo ponto 1 que se desloca até o ponto 2 caracterizando o movimento basculante em torno do eixo da coluna de direção.



**Figura 2-15: Análise geométrica do triângulo basculante da direção**

Assim, fazendo a análise geométrica tem-se que

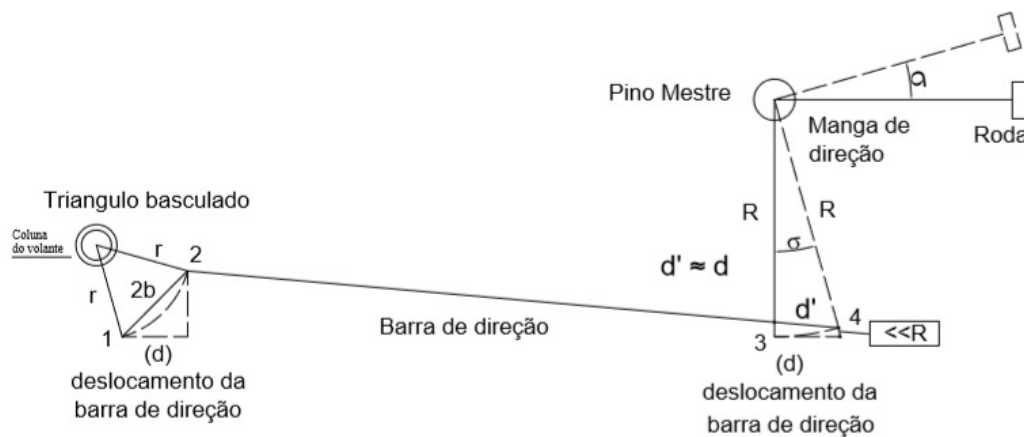
$$b + d = r \cdot \text{sen}(\phi + v) \quad (2)$$

$$d = r \cdot \text{sen}(\phi + v) - b, \quad (3)$$

Onde  $\nu$  é o ângulo de giro do volante, e  $d$  é o deslocamento lateral da barra de direção.

Tendo, portanto, o deslocamento lateral da barra de direção como uma função do esterçamento do volante (2), é preciso verificar a consequência do movimento da mesma na manga de direção.

A Figura 2-16 ilustra o ângulo  $\sigma$  formado na manga de direção e consequentemente na roda dianteira, mediante o movimento lateral da barra de direção. Considerou-se o ângulo formado entre  $d$  e  $d'$  como muito pequeno, portanto  $d \approx d'$ .



**Figura 2-16: Análise geométrica do conjunto de direção**

Assim, tem-se

$$\text{sen } \sigma = \frac{d}{R}. \quad (4)$$

Substituindo  $d$  pela equação (3) tem-se

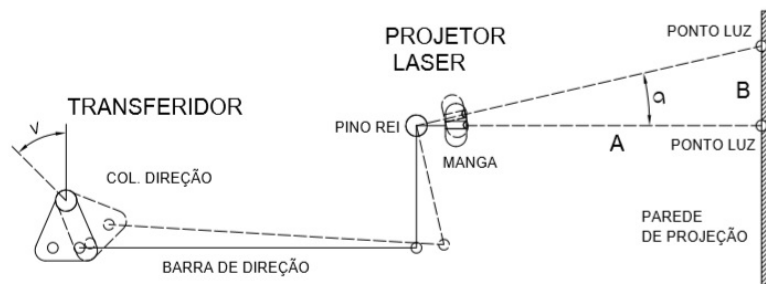
$$\sigma = a \text{sen} \left( \frac{(r \cdot \text{sen}(\varnothing + \nu) - b)}{R} \right). \quad (5)$$

A equação (5) é um modelo matemático desenvolvido para a obtenção do ângulo de esterçamento da roda externa a uma curva em relação ao ângulo de esterçamento do volante do kart, bastando, para sua aplicabilidade, mensurar fisicamente no kart os valores de  $b$ ,  $r$ ,  $R$  e  $\varnothing$ , sabendo-se também que:



$$\phi = a \operatorname{sen} \left( \frac{b}{r} \right). \quad (6)$$

De forma a obter comprovação do modelo matemático proposto, fez-se uma medição direta dos ângulos formados pela manga de direção em função do ângulo de esterçamento do volante. Tal medição foi feita com a luz de um aparelho projetor de raio laser, um equipamento de alinhamento próprio para kart. O projetor laser foi acoplado à manga de direção e mediram-se as variações de posição do ponto de luz na parede de projeção, desde o ponto inicial com o volante na posição  $v=0^\circ$  (zero grau) até o esterçamento  $v=40^\circ$ . O ângulo de esterçamento do volante ( $v$ ) foi medido com uma grande régua tipo transferidor. A Figura 2-17 ilustra o procedimento de medição. Conhecendo-se as distâncias A e B tem-se o ângulo  $\sigma$ .



**Figura 2-17: Medição do ângulo de direção com luz laser**

A Tabela 2-3 apresenta os resultados da aplicação do modelo matemático e das medições feitas, para fins de comparação. Os valores medidos de  $r$  e  $R$  no kart são 47 mm e 135 mm, respectivamente.

**Tabela 2-3: Resultados do modelo e das medições**

Modelo Matemático Eq. (5)	Volante	Ângulo ( $v$ )	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$
	Roda	Ângulo ( $\sigma$ )	$1,9^\circ$	$3,7^\circ$	$5,5^\circ$	$7,2^\circ$	$8,8^\circ$	$10,2^\circ$	$11,6^\circ$	$12,8^\circ$
Medição com laser	Volante	Ângulo ( $v$ )	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$
	Roda	Ângulo ( $\sigma$ )	$2,0^\circ$	$4,0^\circ$	$6,0^\circ$	$7,5^\circ$	$9,0^\circ$	$10,5^\circ$	$11,5^\circ$	$12,5^\circ$

Os resultados numéricos da aplicação do modelo matemático e da medição feita em bancada são iguais, considerando-se os números inteiros. A aproximação numérica se justifica mediante a sensibilidade do conjunto de direção: não é perceptível a alteração no curso da direção do veículo com angulações nas rodas

menores do que  $1^\circ$  (um grau) estando a histerese do conjunto de direção, provavelmente, próxima dos  $2^\circ$  (dois graus).

### 2.1.5

#### Rodas e pneus

##### a) Diâmetro e massa dos pneus dianteiros e traseiros.

Com a roda sobre a bancada, duas réguas com escalas em milímetros foram postas na vertical, uma à direita e outra à esquerda da roda, e uma terceira régua foi posicionada na horizontal, apoiada na parte superior da roda. Quando o valor medido na régua à direita coincidiu com o da régua à esquerda, obteve-se o valor do diâmetro da roda. A Figura 2-18 ilustra o procedimento.



**Figura 2-18: Medição do diâmetro das rodas com pneus.**

Para medir a massa das rodas dianteira e traseira foi usada a balança do Laboratório de Introdução à Engenharia da PUC-Rio (LIENGE). As rodas foram colocadas na balança por 3 vezes cada uma delas e os resultados foram consistentes.

Os resultados estão na Tabela 2-4, com os valores medidos dentro da faixa de tolerância do fabricante de  $\pm 1$  mm para o diâmetro e  $\pm 10\%$  para a massa [16].

## b) Raio efetivo das rodas

Devido à deformação da borracha dos pneus no solo mediante o peso do kart, há uma alteração na geometria do conjunto roda/pneu. Assim, o raio efetivo da roda, aquele a ser considerado quando o kart está em pista, não será a metade do diâmetro de bancada mas, segundo [17], o raio efetivo é dado por

$$r_{eff} = \frac{\sin\{\cos^{-1}(\frac{r_{stat}}{r_w})\}}{\cos^{-1}(\frac{r_{stat}}{r_w})} \cdot r_w, \quad (7)$$

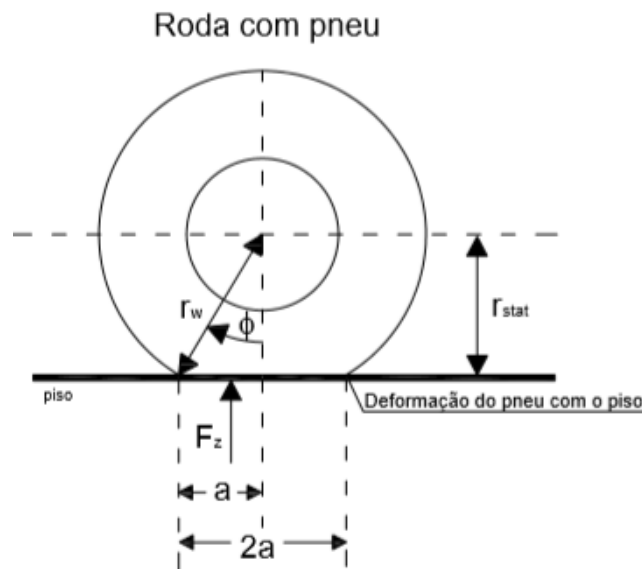
onde

$r_{eff}$  = Raio efetivo da roda com pneu

$r_{stat}$  = Raio da roda com pneu em estado estático deformada com o chão

$r_w$  = Raio nominal da roda com pneu

A Figura 2-19 ilustra a roda com o pneu deformado contra o piso e indica as variáveis previstas na equação (7).



**Figura 2-19: Roda e o pneu em deformação estática devido ao carregamento.**

Para obter o “raio estático” ( $r_{stat}$ ) da roda repetiu-se o procedimento adotado de medição do diâmetro das rodas, mas com as rodas montadas no kart, o mesmo apoiado no chão e com o piloto (autor) sentado ao banco, de forma a obter-se, assim, a deformação estática dos pneus com o kart devidamente carregado.

Os resultados das aplicações da equação (7) estão apresentados na Tabela 2-4 na linha ‘Raio efetivo’ e serão os valores utilizados na modelagem dinâmica.

**Tabela 2-4: Dados dos pneus**

Dianteiros		Traseiros	
Fabricante	MG	Fabricante	MG
Origem	Brasil	Origem	Brasil
Tipo	vermelho	Tipo	vermelho
Massa do pneu	1,2 kg	Massa do pneu	1,6 kg
Massa do pneu + roda	1,8 kg	Massa do pneu + roda	2,3 kg
Diâmetro	254 mm	Diâmetro	280 mm
Raio	127 mm	Raio	140 mm
Raio efetivo	125 mm	Raio efetivo	137 mm
Largura nominal	117 mm	Largura nominal	180 mm
Pressão padrão	14 psi	Pressão padrão	14 psi

## 2.2 Centro de gravidade

Segundo [18] p.167, no movimento de translação de um corpo, um de seus pontos, à medida que o tempo passa, sofre o mesmo deslocamento que qualquer outro, de tal maneira que o movimento de uma partícula representa o movimento de todo o corpo. Mas, mesmo quando o corpo roda ou vibra, enquanto se desloca, há um ponto no corpo, chamado centro de gravidade (CG) (ou de massa - CM), que se desloca da mesma maneira que se deslocaria uma única partícula, sujeita ao mesmo sistema de forças externas. Por esta razão, o movimento do centro de massa de um corpo é chamado de movimento de translação do corpo. Neste trabalho o centro de massa do veículo será a posição de referência do veículo em si, portanto, quando a “posição do veículo” for citada em um eixo de coordenadas, o ponto de referência será o CG do veículo.

Obteve-se a posição do CG do kart no plano horizontal (x,y), não sendo necessária a posição no eixo vertical (z) pois as dinâmicas de rolamento (*roll*) e de aclive e declive (*pitch*) não serão consideradas. Diferentemente dos veículos de suspensão tradicional com molas e amortecedores, o kart tem um comportamento dinâmico de rolagem lateral desprezível, apesar da torção de seu chassi em situação de curva. Além disso, a pista de testes é plana, sem aclives ou declives, portanto não há dinâmica *pitch* a ser considerada. A obtenção das coordenadas (x,y) de

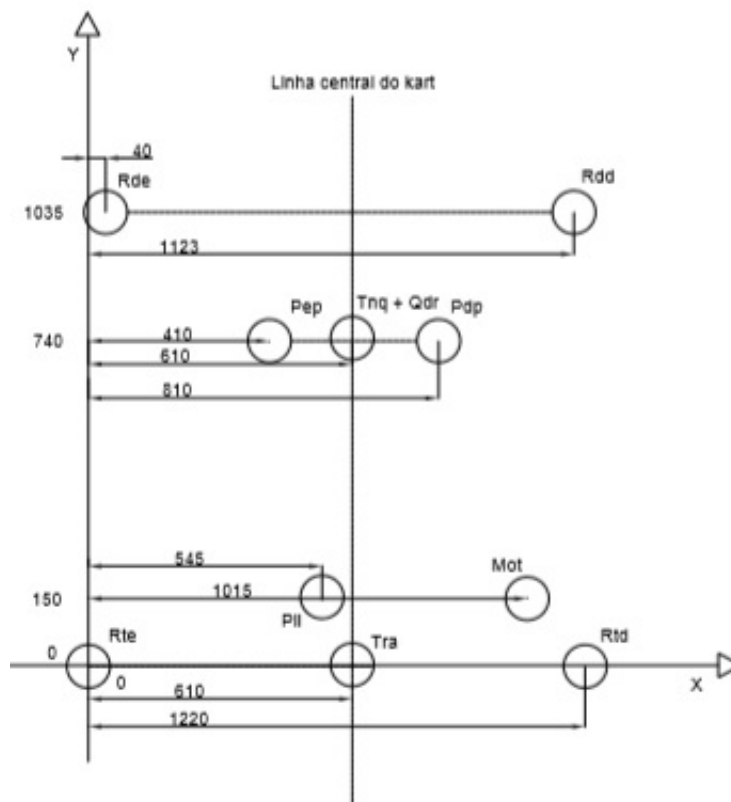
posição do centro de massa foi feita mediante a medição das massas dos elementos relevantes (em termos de massa) e seus respectivos posicionamentos, e então utilizadas as equações da mecânica clássica

$$x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \text{e} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad (9)$$

sendo  $M$  a soma de todas as massas dos elementos considerados para o cálculo,  $m_i$  a massa de cada um dos elementos considerados,  $x_i$  e  $y_i$  as respectivas posições dos elementos em relação ao referencial (0,0).

A Figura 2-20 mostra a posição dos elementos pesados do kart, em relação ao centro da roda traseira esquerda ( $R_{te}$ ). É interessante notar que, por necessidade de espaço para alojar o motor, o banco do piloto não se alinha perfeitamente com a linha central do kart.

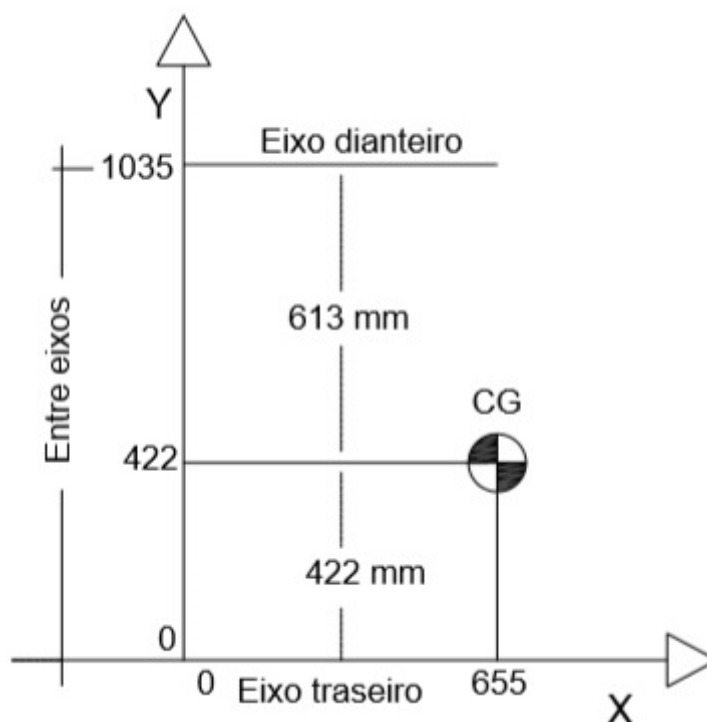


**Figura 2-20: Posicionamento dos elementos com massa relevante. Dimensões em milímetros.**

**Tabela 2-5: Valor da massa dos elementos com massa relevante**

Elemento	Referência	Massa (kg)
Quadro estrutural e periféricos	Qdr	53,0
Roda dianteira esquerda com pneu	R <sub>de</sub>	1,8
Roda dianteira direita com pneu	R <sub>dd</sub>	1,8
Roda traseira esquerda com pneu (pos. 0;0)	R <sub>te</sub>	2,3
Roda traseira direita com pneu	R <sub>td</sub>	2,3
Tanque de gasolina (com $\frac{3}{4}$ da capacidade)	Tnq	4,5
Motor Honda GX 390	Mot	35,0
Conjunto da Transmissão (sem as rodas)	Tra	6,0
<b>Massa livre</b>		<b>106,7</b>
Perna esquerda do piloto*	P <sub>ep</sub>	17,5
Perna direita do piloto*	P <sub>dp</sub>	17,5
Banco (tronco, braços e cabeça do piloto) *	Pil	65,0
<b>Massa do piloto</b>		<b>100,0</b>
<b>Massa total</b>		<b>206,7 <math>\approx</math> 207</b>

Tendo a massa e a posição dos elementos pesados, com as equações (8) e (9) obtêm-se as coordenadas  $(x,y)$  de posição do CG do kart (Figura 2-21) com a posição de referência  $(0,0)$  sendo o centro da roda traseira esquerda (R<sub>te</sub>) que é alinhada em y com o eixo traseiro do kart. A Figura 2-21 apresenta também as distâncias entre o CG e os eixos traseiro e dianteiro, valores relevantes para o modelo matemático desenvolvido.

**Figura 2-21: Posição do CG do kart.**

## 2.3

### Momento de inércia (M.I.)

Segundo [19], grandezas da mesma natureza, em um dado sistema de grandezas, têm a mesma dimensão. Contudo, grandezas de mesma dimensão não são necessariamente da mesma natureza. As grandezas momento de uma força não são, por convenção, consideradas da mesma natureza, apesar de possuírem a mesma dimensão.

O momento de inércia de área, grandeza utilizada nos cálculos estáticos, não deve ser confundido com o momento de inércia de massa de uma roda, utilizado nos cálculos dinâmicos. Apesar de ambos serem referenciados como ‘momentos de inércia’, não têm a mesma natureza, tal como descrito no VIM. O momento de inércia referenciado neste trabalho é o de massa e expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação, e cuja unidade no SI (Sistema Internacional de unidades) [20] é  $\text{kg.m}^2$ .

#### 2.3.1

#### M.I. das rodas dianteira, traseira, e do conjunto de transmissão

Considerando a descrição geométrica apresentada na Figura 2-22, segundo [21] para obtenção do momento de inércia de uma roda temos

$$\sum_{\text{assim}} M_p = 0 \quad (10)$$

$$0 = r \cdot m \cdot a_x + I - r \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta \quad (11)$$

se não há deslizamento, então

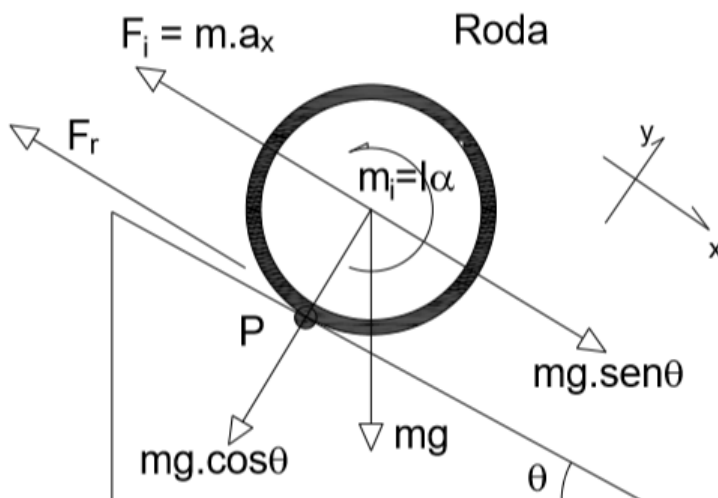
$$v = \omega \cdot r \quad (12)$$

derivando (12) temos

$$a_x = r \cdot \alpha \quad (13)$$

portanto

$$I = r^2 \left[ \frac{mg}{a_x} \sin \theta - m \right] \quad (14)$$



**Figura 2-22: Descrição geométrica para obtenção da equação momento de inércia.**

onde  $r$  = raio da roda;  $m$  = massa da roda;  $g$  = aceleração da gravidade;  $a_x$  = aceleração da roda na direção  $x$  e o ângulo  $\theta$ . As forças de resistência provenientes dos atritos são consideradas nulas, então  $F_r = 0$  (Figura 2-19).

O raio e a massa das rodas já são conhecidos, o valor para a gravidade ( $g$ ) será o indicado no SI igual a  $980,665 \text{ cm/s}^2$ , faltando os valores do ângulo  $\theta$  e da aceleração  $a_x$ , medidos mediante o procedimento experimental descrito a seguir. Nota: O raio de roda utilizado neste cálculo é o estático sem carregamento e não o efetivo, pois durante o experimento a roda não se encontra sobre a força peso do kart.

Para a obtenção da aceleração  $a_x$  de uma roda, solta-se a mesma inicialmente parada do alto de uma rampa de angulação conhecida e cronometra-se o tempo  $T$  em que ela percorre uma distância  $\Delta s$  também conhecida (Figura 2-20). Com a posse destes dados (distância e tempo) é possível calcular a aceleração  $a_x$ , mediante a aplicação da equação da física clássica

$$\Delta s = a \cdot \frac{T^2}{2} \quad (15)$$

Estabeleceu-se uma rampa para a rolagem dos elementos a terem seus respectivos momentos de inércia mensurados (rodas e conjunto de transmissão) com um ângulo  $\theta = 12,19 \text{ graus} \therefore \sin \theta = 0,21$ . Demarcou-se na rampa um



ponto de partida e de chegada, com 1,8 metros entre si. Teve então início o procedimento de ensaio, soltando a roda estática no ponto de partida e cronometrando o tempo de deslocamento entre a partida e o ponto de chegada. Este procedimento foi repetido por 10 vezes para uma roda dianteira (Figura 2-23), para uma roda traseira, e para todo o conjunto de transmissão (inclusas as rodas traseiras) (Figura 2-24).



**Figura 2-23: Roda descendo a rampa para medição do momento de inércia. Em (A) a roda aparece parada, em (B) no movimento de descida da rampa.**



**Figura 2-24: Transmissão traseira em ensaio de obtenção do momento de inércia.**

Realizados os procedimentos experimentais, apresentam-se os resultados das medições para a roda dianteira na Tabela 2-6, para a roda traseira na Tabela 2-7 e para o conjunto de transmissão na Tabela 2-8.

**Tabela 2-6: Resultado dos ensaios com a roda dianteira**

Tempo (s)	Distância (m)	Velocidade final		Aceleração (m/s <sup>2</sup> )	Grubbs ( $\eta$ )
		(m/s)	(km/h)		
1,70	1,80	2,12	7,62	1,25	0,22
1,68	1,80	2,14	7,71	1,28	0,02
1,64	1,80	2,20	7,90	1,34	0,38
1,63	1,80	2,21	7,95	1,35	0,48
1,70	1,80	2,12	7,62	1,25	0,22
1,60	1,80	2,25	8,10	1,41	0,78
1,55	1,80	2,32	8,36	1,50	1,29
1,80	1,80	2,00	7,20	1,11	1,23
1,88	1,80	1,91	6,89	1,02	2,03
1,60	1,80	2,25	8,10	1,41	0,78
<b>1,68</b>	<b>Média aritmética</b>			<b>1,29</b>	-
<b>0,10</b>	<b>Incerteza padrão (dp)</b>			<b>0,14</b>	-
<b>6%</b>	<b>Incerteza relativa</b>			<b>11%</b>	-

**Tabela 2-7: Resultado dos ensaios com a roda traseira**

Tempo (s)	Distância (m)	Velocidade final		Aceleração (m/s <sup>2</sup> )	Grubbs ( $\eta$ )
		(m/s)	(km/h)		
1,71	1,80	2,11	7,58	1,23	0,22
1,80	1,80	2,00	7,20	1,11	0,02
1,75	1,80	2,06	7,41	1,18	0,38
1,85	1,80	1,95	7,01	1,05	0,48
1,83	1,80	1,98	7,12	1,09	0,22
1,81	1,80	1,99	7,16	1,10	0,78
1,78	1,80	2,02	7,28	1,14	1,29
1,75	1,80	2,06	7,41	1,18	1,23
1,78	1,80	2,02	7,28	1,14	2,03
1,80	1,80	2,00	7,20	1,11	0,78
<b>1,79</b>	<b>Média aritmética</b>			<b>1,13</b>	-
<b>0,04</b>	<b>Incerteza padrão (dp)</b>			<b>0,05</b>	-
<b>2%</b>	<b>Incerteza relativa</b>			<b>5%</b>	-

**Tabela 2-8: Resultado dos ensaios com o conjunto de transmissão**

Tempo (s)	Distância (m)	Velocidade final		Aceleração (m/s <sup>2</sup> )	Grubbs ( $\eta$ )
		(m/s)	(km/h)		
1,51	1,80	2,38	8,58	1,58	0,38
1,56	1,80	2,31	8,31	1,48	0,80
1,63	1,80	2,21	7,95	1,35	1,39
1,35	1,80	2,67	9,60	1,98	0,97
1,32	1,80	2,73	9,82	2,07	1,22
1,31	1,80	2,75	9,89	2,10	1,31
1,53	1,80	2,35	8,47	1,54	0,55
1,46	1,80	2,47	8,88	1,69	0,04
1,38	1,80	2,61	9,39	1,89	0,72
1,60	1,80	2,25	8,10	1,41	1,14
<b>1,47</b>	<b>Média aritmética</b>			<b>1,71</b>	-
<b>0,12</b>	<b>Incerteza padrão (dp)</b>			<b>0,28</b>	-
<b>8%</b>	<b>Incerteza relativa</b>			<b>16%</b>	-

Para verificar a existência de *outliers* entre os valores mensurados, aplicou-se o critério de Grubbs [22],

$$\eta_{crítico} = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{t^2}{n-2+t^2}}. \quad (16)$$

Aplicando em (16)  $n = 10$  e  $t\text{-student} = 4,86$ , obtém-se  $\eta_{crítico} = 2,46$  não identificando-se assim, nenhum *outlier* entre as medições apresentadas nas Tabelas 2-6; 2-7; 2-8.

Assim, aplicando os valores das variáveis correspondentes na equação (14), obtiveram-se os resultados desejados, apresentados na Tabela 2-9.

**Tabela 2-9: Variáveis utilizadas e resultados obtidos**

Roda dianteira	Roda Traseira	Conjunto Transmissão
$r = 0,127 \text{ m}$	$r = 0,140 \text{ m}$	$r = 0,140 \text{ m}$
$m = 1,6 \text{ kg}$	$m = 2,1 \text{ kg}$	$m = 7,2 \text{ kg}$
$a_x = 1,29 \text{ m/s}^2$	$a_x = 1,13 \text{ m/s}^2$	$a_x = 1,71 \text{ m/s}^2$
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$		
$\sin\theta = 0,21$		
M.I. roda dianteira	M.I. roda traseira	M.I. Conj. Transmissão
<b>0,016 kg. m<sup>2</sup></b>	<b>0,033 kg. m<sup>2</sup></b>	<b>0,046 kg. m<sup>2</sup></b>

O resultado obtido para o MI da roda dianteira é o mesmo obtido pelo prof. French, M da Purdue Polytechnic Institute dos EUA [21] que realizou a medição com uma roda de kart de padrão internacional, tal como a deste ensaio, utilizando uma câmera de alta velocidade com um cronômetro digital associado. Assim sendo, o confronto dos resultados corrobora não só os resultados em si como também o método utilizado.

O resultado obtido para o MI da roda traseira é satisfatório e esperado, pois a roda traseira tem mais massa afastada do seu centro de rotação em comparação com a roda dianteira, o que caracteriza o aumento no valor do momento de inércia.

O resultado obtido para o MI do conjunto da transmissão também é satisfatório e esperado, uma vez que o incremento de massa por si só não caracteriza a alteração no momento de inércia, mas sim a massa e a sua posição em relação ao centro de rotação. Neste caso, a massa incrementada, apesar de significativa, está

bastante concentrada no eixo de rotação e, portanto, o valor obtido na medição não é surpreendente se comparado aos demais.

### 2.3.2

#### M.I. de guinada (yaw)

Para obtenção do momento de inércia de guinada (*yaw*) do kart por via de medição, foram utilizadas duas metodologias semelhantes, o pêndulo de torção oscilante de arranjo trifilar e o pêndulo de torção oscilante de arranjo quadrifilar. Ambos os métodos têm o mesmo princípio: o veículo é suspenso por três cabos (no caso trifilar) ou quatro cabos (no caso quadrifilar) com comprimentos e posições das fixações estabelecidas; faz-se a medição do período de oscilação de torção e aplica-se a equação matemática correspondente ao método.

Paralelamente aos ensaios realizados, fez-se se o cálculo pela metodologia tradicional da engenharia mecânica considerando apenas a massa dos elementos mais relevantes e sua distância até o eixo de rotação (centro de gravidade).

##### a) Metodologia do arranjo trifilar

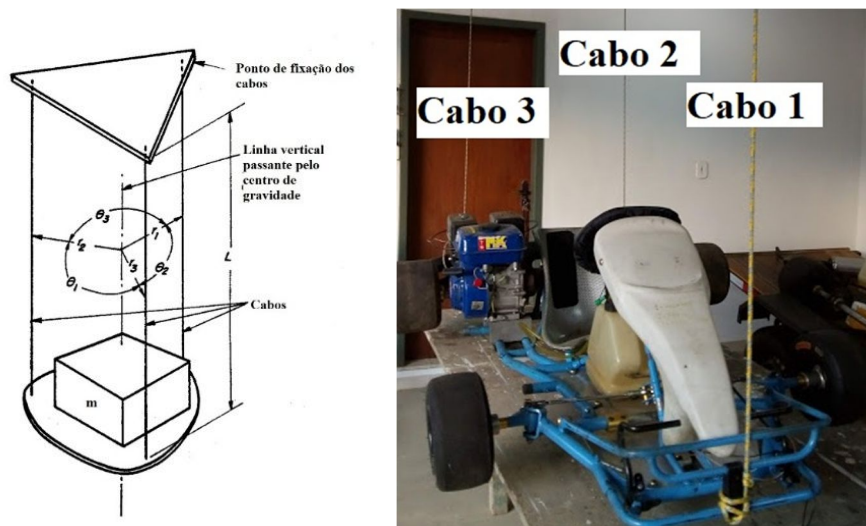
O veículo é suspenso por três cabos, formando um triângulo cujo ponto central deve coincidir com o seu centro de gravidade (CG). É então torcido em cerca de 20 graus no plano horizontal e liberado, realizando oscilações harmônicas simples em torno do seu CG. Algumas premissas devem ser observadas: desconsideram-se eventuais amortecimentos do movimento oscilatório, a massa e a flexibilidade axial dos cabos.

Segundo [23], a equação correspondente ao método trifilar de obtenção do momento de inércia é

$$J_z = \frac{r^2 m g \tau^2}{4\pi^2 L} \quad (17)$$

onde  $J_z$  é o momento de inércia no plano horizontal,  $r$  é a distância entre o CG do kart e os cabos de fixação,  $m$  é a massa do veículo,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\tau$  é o período da oscilação de torção e  $L$  é a altura entre o plano horizontal que contém o CG do veículo e o plano horizontal paralelo de fixação dos cabos. A Figura 2-25 ilustra o ensaio e apresenta uma fotografia do mesmo sendo realizado.

As variáveis da equação (13) têm de ser conhecidas para obter-se o valor do momento de inércia ( $J_z$ ) de guinada do kart. A medição a ser feita é a do período de oscilação  $\tau$ , uma vez que as demais variáveis são conhecidas ou de fácil obtenção.



**Figura 2-25: Ensaio para obtenção do momento de inércia com arranjo trifilar.**

Para medir o período de oscilação  $\tau$  foi utilizado um cronômetro digital manual e a observação visual das paradas que caracterizam a mudança de sentido da oscilação do bico dianteiro do kart, apontando o fim de um período e o imediato início de outro.

Foram feitas medições com o kart livre (sem massa adicional) e com uma massa adicional inserida no banco do kart, de 60 kg. Foram feitos 5 ensaios com 10 medições de período para cada configuração, obtendo-se assim um total de 50 medidas (amostras) para o kart livre e mais 50 medidas (amostras) para o kart com a massa adicional de 60 kg.

Os resultados das medições estão apresentados nas Tabelas 2-10 e 2-11.

Para verificar a existência de *outliers* entre os valores mensurados, aplicou-se o critério de Grubbs, conforme a equação (12).

Aplicando em (12):  $n = 50$  e  $t\text{-student} = 4,45$ , obtém-se:  $\eta_{\text{crítico}} = 3,75$  identificando-se assim, 1 (um) *outlier* nas medições feitas na Tabela 2-10 e nenhum *outlier* na Tabela 2-11.

Os resultados estatísticos apresentados nas Tabelas 2-10 e 2-11 já consideram a rejeição das medições reprovadas pelo critério de Grubbs.

**Tabela 2-10: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo trifilar para o kart livre (sem massa adicional)**

1		2		3		4		5	
Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )
2,51	2,40	2,55	1,60	2,60	0,59	2,59	0,79	2,53	2,00
2,67	0,82	2,70	1,42	2,65	0,41	2,60	0,59	2,67	0,82
2,61	0,39	<del>2,40</del>	<del>4,61</del>	2,63	0,01	2,66	0,62	2,65	0,41
2,48	3,01	2,67	0,82	2,79	3,23	2,64	0,21	2,66	0,62
2,74	2,22	2,84	4,24	2,57	1,19	2,53	2,00	2,60	0,59
2,65	0,41	2,65	0,41	2,74	2,22	2,83	4,04	2,58	0,99
2,56	1,62	2,48	3,01	2,60	0,59	2,70	1,42	2,61	0,39
2,65	0,41	2,65	0,41	2,59	0,79	2,53	2,00	2,62	0,19
2,66	0,62	2,67	0,82	2,68	1,02	2,64	0,21	2,68	1,02
2,70	1,42	2,60	0,59	2,71	1,62	2,59	0,79	2,56	1,40
Média aritmética das 50 amostras								2,63	
Incerteza padrão (desvio padrão)								0,05	
Incerteza relativa								2%	

**Tabela 2-11: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo trifilar para o kart com massa adicional de 60 kg**

1		2		3		4		5	
Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )
2,28	1,92	2,25	1,51	2,09	0,69	2,00	1,93	2,10	0,56
2,09	0,69	2,16	0,27	2,14	0,01	2,28	1,92	2,13	0,14
2,12	0,28	2,10	0,56	2,07	0,97	2,16	0,27	2,10	0,56
2,15	0,13	2,16	0,27	2,25	1,51	2,25	1,51	2,11	0,42
2,13	0,14	2,18	0,54	2,19	0,68	2,24	1,37	2,07	0,97
2,25	1,51	2,00	1,93	2,11	0,42	2,16	0,27	2,20	0,82
2,20	0,82	2,15	0,13	2,03	1,52	2,10	0,56	2,08	0,83
2,07	0,97	2,23	1,23	2,21	0,96	2,04	1,38	2,11	0,42
2,19	0,68	2,16	0,27	2,13	0,14	2,21	0,96	2,14	0,01
1,97	2,34	2,09	0,69	2,12	0,28	2,11	0,42	2,16	0,27
Média aritmética das 50 amostras								2,14	
Incerteza padrão (desvio padrão)								0,07	
Incerteza relativa								3%	

Por fim, a Tabela 2-12 apresenta os valores das grandezas medidas nos ensaios e os resultados obtidos com a aplicação da equação (13) para obtenção do momento de inércia de guinada do kart ( $J_z$ ). A memória de cálculo das incertezas de medição encontra-se no Apêndice 2.

**Tabela 2-12: Resultados das medições do momento de inércia de guinada do kart utilizando-se o método trifilar.**

Kart livre	Kart + massa de 60 kg
$r = 0,85$ metros	
$L = 3,02$ metros	
$g = 9,81$ m/s <sup>2</sup>	
$massa = 107$ kg	$massa = 167$ kg
$\tau$ (período) = 2,63 segundos	$\tau$ (período) = 2,14 segundos
$J_z = 44(\pm 3)$ kg.m <sup>2</sup>	$J_z = 45(\pm 6)$ kg.m <sup>2</sup>

## b) Metodologia do arranjo quadrifilar

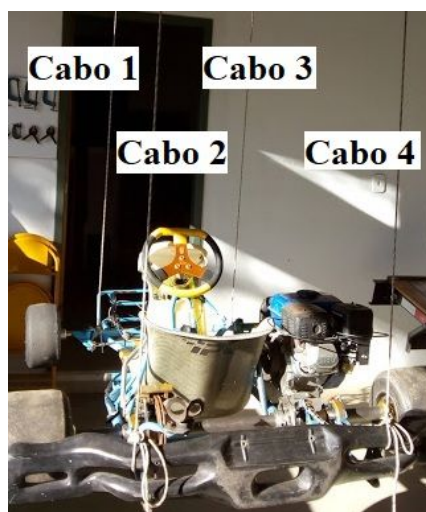
O veículo é suspenso por quatro cabos, formando um retângulo cujo ponto central deve coincidir com o seu centro de gravidade (CG). É então torcido em cerca de 20 graus no plano horizontal e liberado, realizando oscilações harmônicas simples em torno do seu CG. Novamente, algumas premissas devem ser observadas: desconsideram-se eventuais amortecimentos do movimento oscilatório, a massa e a flexibilidade axial dos cabos.

Segundo [24], a equação correspondente ao método quadrifilar de obtenção do momento de inércia é

$$J_z = \frac{m \times g \times D^2 \times T^2}{16 \times \pi^2 \times L} \quad (18)$$

onde  $J_z$  é o momento de inércia no plano horizontal,  $m$  é a massa do veículo,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $D$  é a distância entre os cabos (aresta maior do retângulo)  $\tau$  é o período da oscilação de torção e  $L$  é a altura entre o plano horizontal que contém o CG do veículo e o plano horizontal paralelo de fixação dos cabos. A Figura 2-26 apresenta uma fotografia do ensaio sendo realizado.

As variáveis da equação (18) têm de ser conhecidas para obter-se o valor do momento de inércia ( $J_z$ ) de guinada do kart. A medição a ser feita é a do período de oscilação  $\tau$ , uma vez que as demais variáveis são conhecidas ou de fácil obtenção.



**Figura 2-26: Ensaio para obtenção do momento de inércia com arranjo quadrifilar.**

Os procedimentos de medição do período de oscilação  $\tau$  são os mesmos do método trifilar, obtendo-se também 50 amostras (medições) para ensaios com e sem a massa adicional de 60 kg. Os resultados das medições estão apresentados nas Tabelas 2-13 e 2-14.

Observou-se, durante o procedimento dos ensaios, pequena oscilação circular do conjunto, caracterizando o desalinhamento do centro de massa com o centro de torção do conjunto, algo não desejado para o ensaio. Não se obteve sucesso nas tentativas de correção do ensaio para fins de maior estabilidade do movimento oscilatório.

**Tabela 2-13: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo quadrifilar para o kart livre (sem massa adicional)**

1		2		3		4		5	
Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )
3,43	1,10	3,17	1,11	3,29	0,09	3,16	1,19	3,41	0,93
3,29	0,09	3,35	0,42	3,23	0,60	3,33	0,25	3,34	0,33
3,18	1,03	<del>3,23</del>	0,60	3,15	1,28	3,16	1,19	3,27	0,26
3,18	1,03	3,25	0,43	3,49	1,61	3,28	0,18	3,28	0,18
3,14	1,36	3,39	0,76	3,44	1,18	3,37	0,59	3,35	0,42
3,32	0,16	3,33	0,25	3,17	1,11	3,38	0,67	3,29	0,09
3,19	0,94	3,22	0,69	3,61	2,62	3,62	2,71	3,22	0,69
3,15	1,28	3,19	0,94	3,21	0,77	3,29	0,09	3,29	0,09
3,23	0,60	3,35	0,42	3,22	0,69	3,40	0,84	3,45	1,27
3,25	0,43	3,54	2,03	3,43	1,10	3,19	0,94	3,34	0,33
Média aritmética das 50 amostras								3,30	
Incerteza padrão (desvio padrão)								0,12	
Incerteza relativa								3,6%	

**Tabela 2-14: Períodos de oscilação mensurados no ensaio de arranjo quadrifilar para o kart com massa adicional de 60 kg**

1		2		3		4		5	
Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )	Tempo (s)	Grubbs ( $\eta$ )
2,61	0,76	2,55	1,58	2,72	0,73	2,70	0,46	2,68	0,18
2,62	0,63	2,70	0,46	2,75	1,13	2,74	1,00	2,70	0,46
2,70	0,46	<del>2,67</del>	0,05	2,59	1,04	2,67	0,05	2,79	1,68
2,68	0,18	2,62	0,63	2,77	1,41	2,66	0,09	2,67	0,05
2,57	1,31	2,57	1,31	2,67	0,05	2,70	0,46	2,74	1,00
2,55	1,58	2,61	0,76	2,73	0,86	2,74	1,00	2,56	1,44
2,77	1,41	2,57	1,31	2,60	0,90	2,57	1,31	2,76	1,27
2,52	1,99	2,63	0,49	2,75	1,13	2,75	0,13	2,63	0,49
2,69	0,32	2,76	1,27	2,79	1,68	2,66	0,09	2,73	0,86
2,57	1,31	2,60	0,90	2,60	0,90	2,63	0,49	2,71	0,59
Média aritmética das 50 amostras								2,67	
Incerteza padrão (desvio padrão)								0,07	
Incerteza relativa								2,8%	



Tal como no método trifilar, foram calculados os valores de  $\eta$  do critério de Grubbs sendo o  $\eta_{crítico} = 3,75$ . Não foi encontrado nenhum valor *outlier* nas Tabelas 2-13 e 2-14.

A Tabela 2-15 apresenta os valores das variáveis utilizadas nos ensaios e os resultados obtidos com a aplicação da equação (14) para obtenção do momento de inércia de guinada do kart ( $J_z$ ). A memória de cálculo das incertezas de medição encontra-se no Apêndice 2.

**Tabela 2-15: Resultados das medições do momento de inércia de guinada do kart utilizando-se o método quadrifilar**

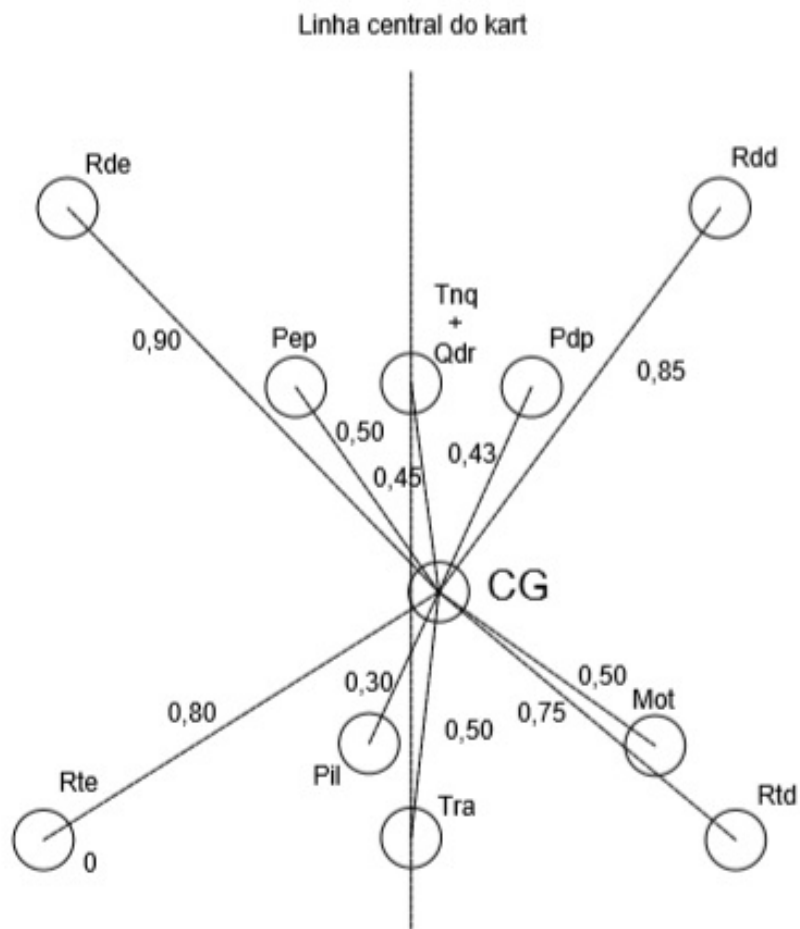
Kart livre	Kart + massa de 60 kg
$D = 1,32$ metros	
$L = 3,02$ metros	
$g = 9,81$ m/s <sup>2</sup>	
$massa$ (com piloto) = 107 kg	$massa$ (sem piloto) = 167 kg
$\tau$ (período) = 3,30 segundos	$\tau$ (período) = 2,67 segundos
$J_z = 42 (\pm 6)$ kg.m <sup>2</sup>	$J_z = 43 (\pm 4)$ kg.m <sup>2</sup>

### c) Cálculo pela metodologia tradicional da engenharia mecânica

A mecânica clássica apresenta a equação (19) para obtenção do momento de inércia ( $J$ ) para  $n$  massas pontuais, sendo  $m$  a massa do corpo deslocado e  $r$  a distância entre a posição da massa e o centro de rotação. Em um veículo, o centro de rotação está no centro de gravidade.

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad (19)$$

A Figura 2-27 apresenta as distâncias entre os elementos com massa relevante para a composição do CG do kart, e o CG do kart em si. O valor da massa destes elementos está relacionado no item 2.2.



**Figura 2-27: Distância entre os elementos relevantes e o CG do kart**

A aplicação da equação (15) com as variáveis  $m$  da Tabela 2-5 e  $r$  da Figura 2-27, resulta no momento de inércia  $J = 41 \text{ kg.m}^2$ .

#### d) Análise dos resultados

A Tabela 2-16 apresenta uma consolidação dos resultados obtidos para análise. A memória de cálculo das incertezas de medição encontra-se no Apêndice 2.

**Tabela 2-16: Consolidação de resultados para momento de inércia de guinada ( $yaw$ ) do kart.**

Método utilizado	Kart livre ( $\text{kg.m}^2$ )	Kart + 60 kg ( $\text{kg.m}^2$ )
Ensaio torção trifilar	44 ( $\pm 3$ )	45 ( $\pm 6$ )
Ensaio torção quadrifilar	42 ( $\pm 6$ )	43 ( $\pm 4$ )
Estimativa calculada do kart com o piloto = 41 $\text{kg.m}^2$		

Como premissa para a análise dos resultados, faz-se as seguintes observações:

1. Não se achou, na literatura, valores de referência para as medições e os resultados.
2. Não se achou, na literatura, um valor padronizado ou mesmo estimado para o momento de inércia de guinada de um kart.
3. Não é possível identificar um valor verdadeiro.

Quanto aos resultados, pode-se concluir que:

1. Os valores obtidos com métodos distintos resultaram em valores próximos entre si, sendo a maior diferença entre os resultados para mesma a configuração medida, de apenas 4%.
2. O aumento de 60 kg na massa do conjunto ensaiado não resultou em aumento expressivo no momento de inércia. Este fenômeno se explica pelo fato de a massa adicional ter sido colocada no banco do kart, muito próximo ao centro de gravidade do conjunto.
3. Mediante o observado no item 2 acima, o aumento ou a diminuição na massa do piloto não ocasiona alterações significativas no momento de inércia de guinada.
4. O valor obtido com o cálculo padronizado tem como função a confirmação da ordem de grandeza dos resultados dos ensaios, e não deve ser utilizado como valor de referência. Itens relevantes para os resultados, como as posições de centro de gravidade do motor, do quadro estrutural, e até do próprio piloto, não estão disponíveis na literatura e tampouco são de fácil obtenção, estando suas posições estimadas.
5. O valor a ser considerado no modelo matemático a seguir será o valor obtido pelo ensaio do arranjo trifilar com o kart livre, uma vez que o ensaio ocorreu bem, expressa o conjunto de forma integral, e obteve a menor incerteza de medição.

### 3

## Caracterização Experimental do Veículo

Neste capítulo são caracterizadas experimentalmente as características dos movimentos de dois elementos mecânicos do kart que são diretamente manipulados pelo piloto:

- Pedais (acelerador e freio): movimentos de avanço e recuo controlados pelos pés do piloto; e
- Volante: esterçamento controlado pelas mãos do piloto.

São observadas também as dinâmicas consequentes do movimento dos pedais e do volante, mas sem a associação, neste momento, de causa e efeito, a saber:

- acelerações longitudinais, e
- acelerações laterais no veículo (curvas).

Para medir estes movimentos foram instalados no veículo sensores eletrônicos, um GPS e um sistema de gravação e de leitura de dados, cujas características são medidas.

Para observar as características das indicações dos sensores, fizeram-se medições dos movimentos com instrumentos comuns e analógicos de medição, e por meio de cálculo. Compararam-se os resultados das medições com as indicações obtidas pelos sensores eletrônicos.

Toda a caracterização experimental do veículo apresentada neste capítulo 3 será considerada na simulação computadorizada apresentada no capítulo 4.

### 3.1

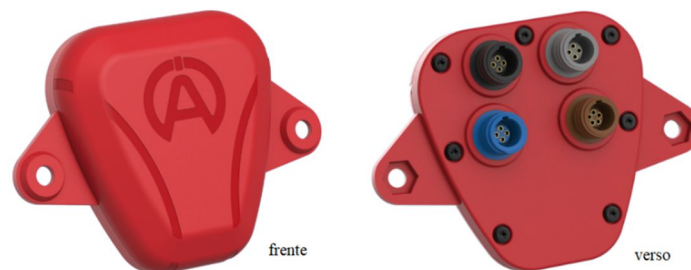
#### Sistema de medição e sensores

O sistema de medição utilizado nesta dissertação é baseado no painel de indicação e gravação de dados ALFANO<sup>®</sup> PRO III EVO (Figura 3-1), associado ao módulo GPS modelo GPS4iV (Figura 3-2), ambos produtos da Alfano<sup>®</sup> Chronometric Systems ([www.alfano.com](http://www.alfano.com)), lançados no mercado em 2017. A

Alfano® é uma tradicional fabricante de instrumentos para automobilismo de origem belga, fundada em 1950 por Ângelo Alfano [25].



**Figura 3-1: Painel de indicação e gravação de dados Alfano® Pro III Evo**



**Figura 3-2: Módulo GPS Alfano® GPS4iV**

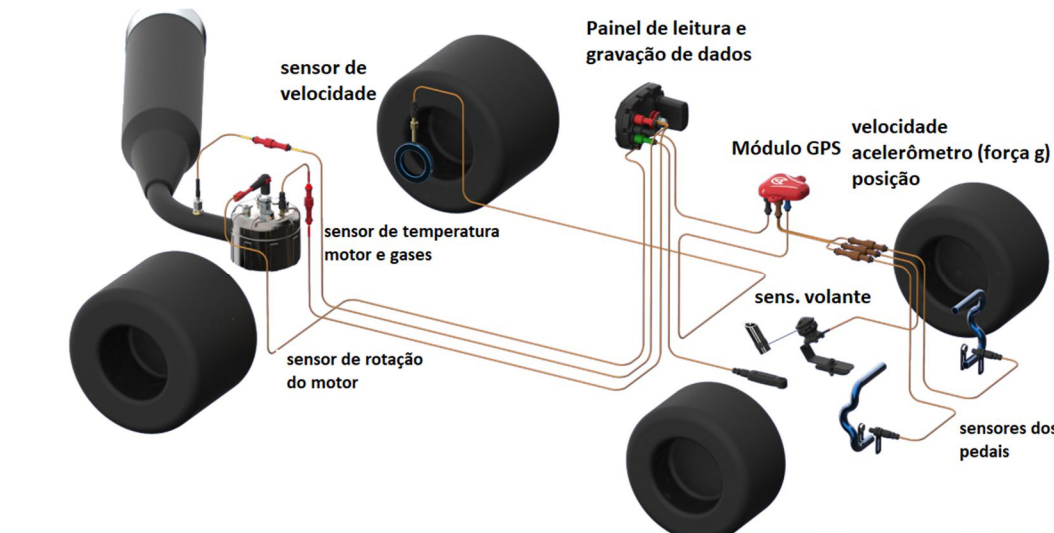
Este painel, associado a sensores instalados no veículo, é capaz de ler e armazenar informações de múltiplos parâmetros, sendo as de interesse para este trabalho:

- Posição do volante: sensor Alfano® modelo A2401;
- Posição do pedal do acelerador: sensor Alfano® modelo A2405;
- Posição do pedal do freio: sensor Alfano® modelo A2405;
- Acelerações (força g) verticais, longitudinais e horizontais: GPS Alfano® modelo GPSiV
- Velocidade do veículo:
  - GPS Alfano® modelo GPSiV;
  - Rotação do eixo traseiro: fio sensor;
- Rotação do motor (apenas para motores a combustão, não aplicável no caso em estudo); e
- Contador de voltas concluídas (por faixa magnética e/ou GPS)

Os demais parâmetros que podem ser obtidos pelo sistema de medição, mas não são alvo deste trabalho, são:

- Temperatura do motor; e
- Temperatura dos gases do escapamento.

A Figura 3-3 apresenta a disposição dos sensores no kart. A coleta de dados é feita na frequência de 100 Hz, ou seja, são gerados e armazenados 100 dados por segundo para cada um dos parâmetros. A Alfano® não fornece informações sobre as incertezas de medição de seus produtos, assim as incertezas do tipo B não serão consideradas nesta dissertação.



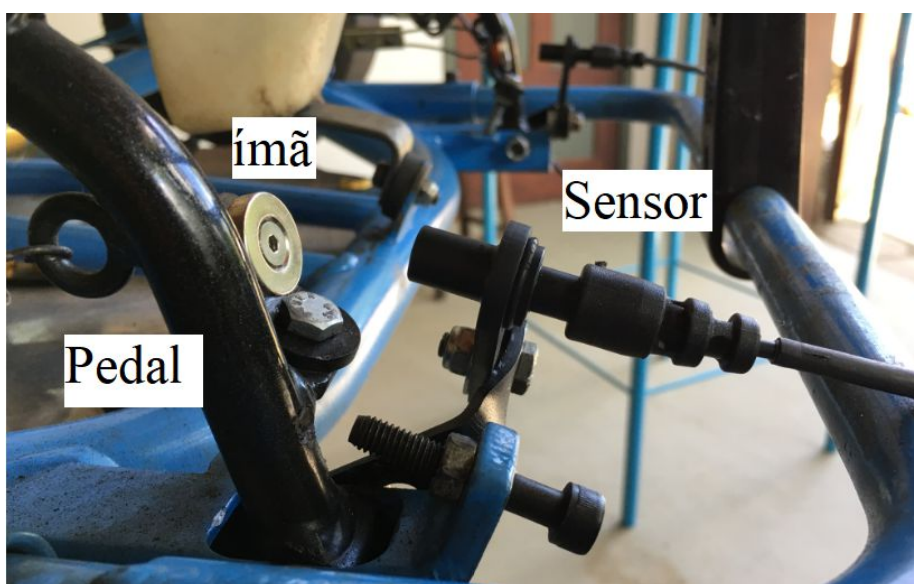
**Figura 3-3: Disposição dos sensores do sistema Alfano Pro III Evo.**

### 3.2 Posicionamento dos pedais (acelerador e freio)

Foram instalados no kart de testes sensores de posição de pedais (Alfano® modelo A2405). Como a fabricante não divulga informações técnicas detalhadas sobre seus produtos, além das instruções de instalação e operação, fez-se necessário comparar as indicações de posicionamento dos pedais no painel com medições de posicionamento realizadas nos próprios pedais.

O sensor A2405 utilizado nos pedais é um sensor de efeito Hall. Sua montagem dá-se conforme mostra a Figura 3-4, com um ímã fixado ao pedal do

acelerador ou freio e o sensor de campo magnético (Hall) fixado ao chassi do veículo. Assim, quando o piloto aciona o pedal, o ímã aproxima-se do sensor.

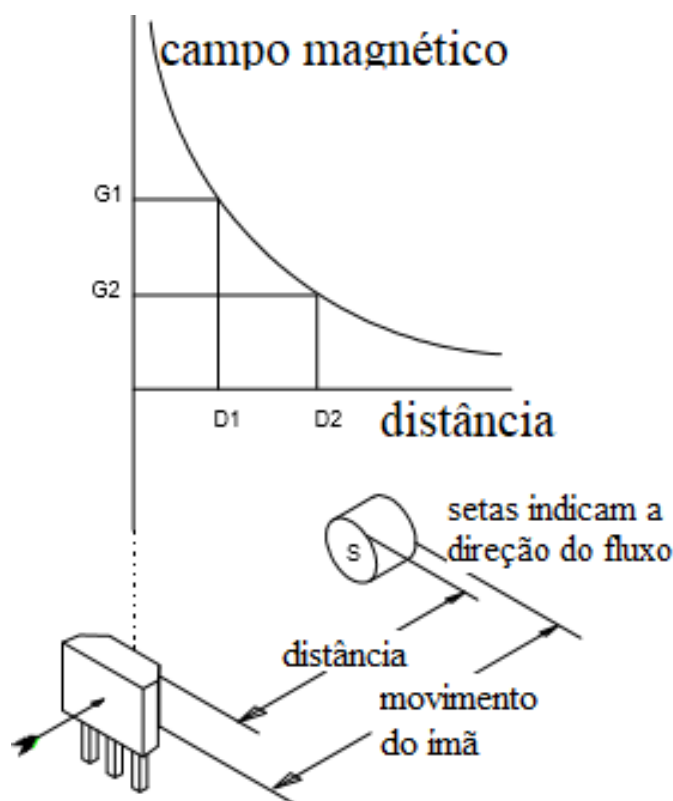


**Figura 3-4: Sensor de posicionamento do pedal do acelerador.**

Um sensor de efeito Hall é um transdutor que, quando exposto a um campo magnético (neste caso gerado pelo ímã), responde com uma variação em sua tensão de saída. Utilizando-se do princípio do efeito Hall, o conjunto sensor-transdutor é capaz de enviar um sinal, sob forma de tensão elétrica, para o painel do sistema de medição, cuja interpretação dos valores deste sinal será devidamente programada para obter uma relação que pode ser entendida como uma medida [26].

É importante notar que o avanço do pedal e, conseqüentemente, do ímã a ele solidário, não realiza um movimento em linha reta, mas sim um movimento em curva com eixo de rotação no parafuso de fixação do pedal. Esta geometria deve ser observada, pois tem influência no movimento de aproximação do ímã ao sensor. Não obstante, as conseqüências práticas desta influência estarão naturalmente contidas nos resultados das medições e indicações feitas, portanto não é necessário um estudo detalhado desta geometria.

A questão a ser verificada nestas medições relaciona-se com a indicação de posição do pedal (solidária ao ímã) feita pelo instrumento. Sabe-se que o fluxo do campo magnético gerado pelo ímã varia de forma quadrática com sua posição em relação ao sensor de efeito hall. A Figura 3-5 mostra a curva característica do fluxo magnético de um ímã em relação à distância ao sensor de efeito Hall.



**Figura 3-5: Efeito Hall com uso de ímã**

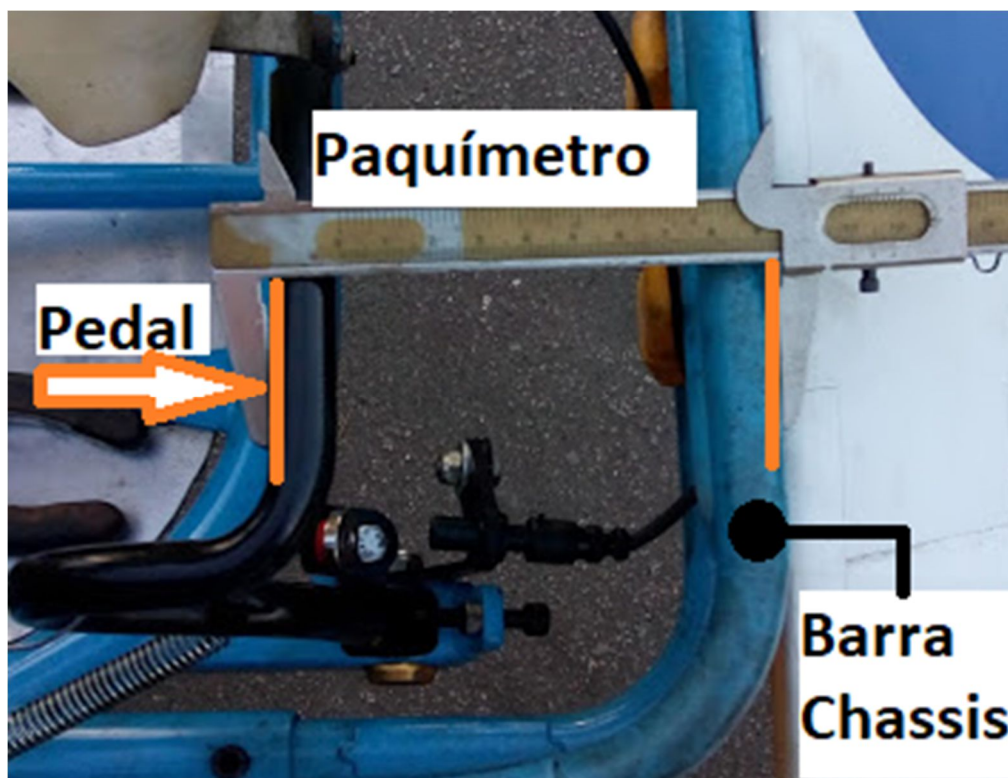
Fonte: Honeywell, Hall Effect Sensing and Application, p.12

Assim sendo, deseja-se obter as características de indicação do instrumento, mais precisamente a curva gerada pela variação de posição do pedal (e, portanto, da intensidade do campo magnético gerado pelo ímã), ao aproximar-se gradativamente do sensor Hall. Para isto, foi realizada uma série de medições, conforme os procedimentos descritos a seguir.

O pedal do acelerador do veículo tem curso ajustável de acordo com o curso do carburador (para motores a gasolina) ou o curso do potenciômetro (para motores elétricos). Neste caso, considerou-se o motor à gasolina (carburador), sendo o curso medido o do pedal de acelerador do veículo equipado com um motor HONDA GX390 à gasolina e seu carburador original.

Os pontos de referência para a medição do avanço do pedal são a parte anterior do pedal, local onde o piloto apoia o pé direito, e a barra de suporte do para-choque dianteiro, parte integrante do chassi. A Figura 3-6 mostra a colocação de um paquímetro medindo a posição de repouso do pedal.





**Figura 3-6: Medição da posição de repouso do pedal do acelerador**

Com o instrumento Alfano® Pro 3 Evo ligado, seguiram-se as instruções do fabricante [27] para a calibração do leitor de posição do pedal. Informa-se ao instrumento os pontos de posição do pedal em repouso (0%) e na posição de aceleração máxima (100%), respectivamente. Este é o procedimento solicitado pelo manual do fabricante para ajustar as indicações de posição do pedal.

Assim, com o instrumento Alfano® Pro 3 Evo ajustado, avançou-se lentamente o pedal do acelerador até que o painel indicasse as posições 25%, 50%, 75% e 100% e, com o paquímetro, mediu-se a posição verdadeira do pedal para cada indicação, respectivamente.

O mesmo procedimento foi repetido dez vezes e os resultados estão apresentados na Tabela 3-1.

**Tabela 3-1: Indicação da posição *versus* posição do pedal em centímetros.**

Indicação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Média	D.P.
0% (repouso)	11,4	11,3	11,2	11,2	11,2	11,4	11,2	11,2	11,2	11,3	11,3	0,08
25%	10,1	9,9	9,8	9,9	9,2	10,3	10,0	9,9	10,9	9,9	10,0	0,16
50%	9,2	9,2	9,0	9,2	9,2	9,1	9,1	9,1	9,1	9,0	9,1	0,07
75%	8,6	8,6	8,4	8,6	8,6	8,5	8,5	8,5	8,5	8,6	8,6	0,08
100%	8,1	8,0	7,8	8,1	8,1	7,9	7,9	8,0	8,0	7,9	8,0	0,11

Deseja-se estimar o deslocamento do pedal tendo como referência o ponto de repouso do mesmo (0%), para saber o deslocamento do pedal conforme acionado pelo piloto. Assim, a medida do ponto em repouso (0%) passou a ser o ponto de partida 0 (zero) e os valores subsequentes são calculados como as diferenças entre os valores medidos e o valor de referência. O resultado deste simples ajuste matemático está apresentado na Tabela 3-2.

**Tabela 3-2: Indicação da posição *versus* posição do pedal em centímetros, com a referência na posição de repouso.**

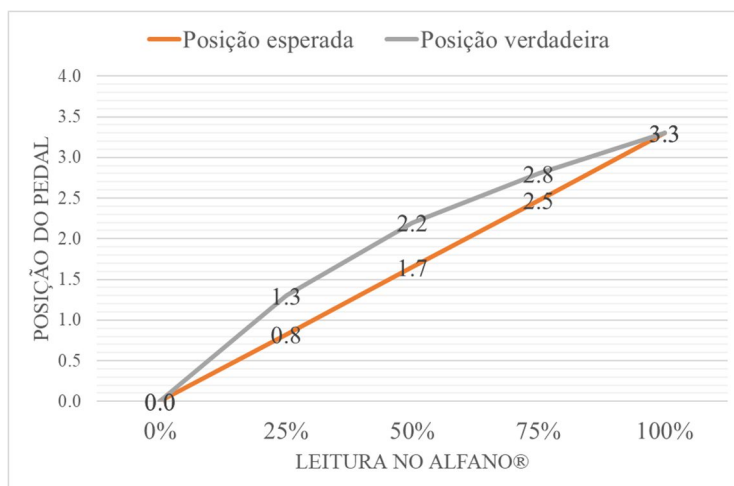
Indicação	Posição (cm)
0%	0,0
25%	1,3
50%	2,2
75%	2,7
100%	3,3

A Tabela 3-3 apresenta, além das posições medidas com o paquímetro (e referenciadas à posição de repouso do pedal), as posições esperadas considerando os percentuais indicados.

**Tabela 3-3: Indicação da posição *versus* posição verdadeira em centímetros**

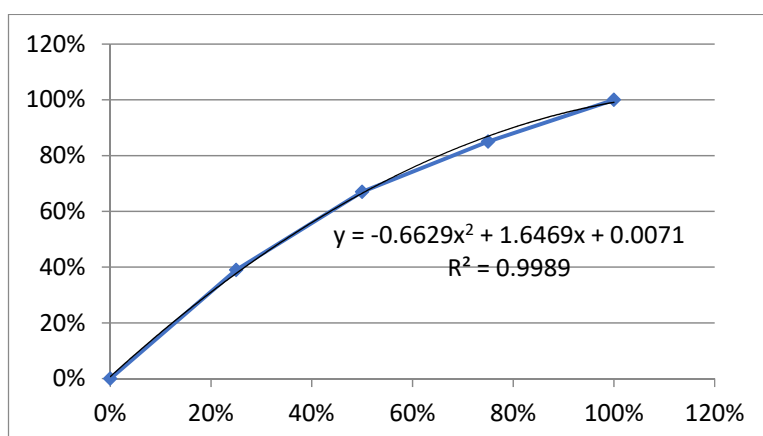
Indicação	Posição esperada (cm)	Posição medida (cm)	Posição medida (%)	Erro na indicação (p.p.)
0%	0,0	0,0	0%	0%
25%	0,8	1,3	39%	-14%
50%	1,7	2,2	67%	-17%
75%	2,5	2,7	85%	-10%
100%	3,3	3,3	100%	0%

Os valores medidos para posição em repouso (0%) e aceleração máxima (100%) não contêm erros significativos, algo esperado, pois foram previamente ajustados, mas os valores intermediários de 25%, 50% e 75% contêm erros significativos. A Figura 3-7 apresenta um gráfico com a posição esperada e a posição medida do pedal para cada indicação do painel, para melhor ilustração do erro de indicação feito pelo instrumento.



**Figura 3-7: Posição esperada e posição medida do pedal**

Já a Figura 3-8 a apresenta a curva de correção das indicações do painel, com base nos dados da Tabela 3-3.



**Figura 3-8: Indicação do painel e indicação corrigida a partir das medições experimentais.**

Segundo [28] a incerteza é o parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando, sendo que um parâmetro para avaliação da incerteza-padrão é o desvio padrão calculado para cada série de medições. Já o erro é o resultado de uma medição menos o valor verdadeiro do mensurando, mas, uma vez que o valor verdadeiro não pode ser determinado utiliza-se, na prática, um valor verdadeiro convencional. Neste caso o valor verdadeiro convencional considerado é o valor esperado.

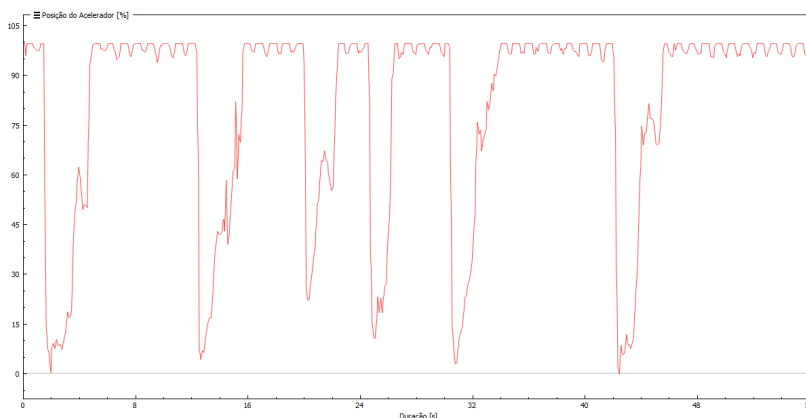
Assim sendo, duas afirmativas podem ser feitas: a primeira é que o erro na indicação das posições intermediárias do pedal, feitas pelo instrumento, não é

desprezível. A segunda é que, apesar de significativo, este erro é sistemático, uma vez que os desvios padrões calculados nas amostras indicam repetibilidade nos resultados. Portanto, os dados intermediários do instrumento passam a ser confiáveis se submetidos a um processo de correção dos erros sistemáticos, com base na curva da Figura 3-8 e nos dados da Tabela 3-3. A Figura 3-8 apresenta ainda a curva quadrática ajustada aos dados experimentais e a Tabela 3-4 indica as correções necessárias para os casos medidos.

**Tabela 3-4: Tabela de ajustes para o posicionamento do pedal**

Valor da indicação	0%	25%	50%	75%	100%
Correção	0	+14%	+17%	+10%	0
Valor corrigido	0%	39%	67%	85%	100%

Os ajustes na indicação do pedal do acelerador serão relevantes para os estudos do kart de motorização elétrica, pois a relação entre a demanda de potência (posição do pedal) e a reação do motor é conhecida. No caso do motor a combustão, a relação entre a demanda de potência feita pelo pedal do acelerador e a reação verdadeira do motor não é conhecida, principalmente para as posições intermediárias do pedal; esta é uma característica comum dos motores a combustão providos de carburadores. É importante lembrar, também, que o painel de indicação utilizado é apropriado para corridas de kart, nas quais as posições intermediárias do pedal são, quase sempre, meramente transitórias. A título de ilustração, a Figura 3-9 apresenta curvas de posicionamento do pedal do acelerador (não corrigidas) medidas durante um ensaio em pista.



**Figura 3-9: Indicação da posição do acelerador durante uma volta completa no kartódromo de Volta Redonda – RJ**

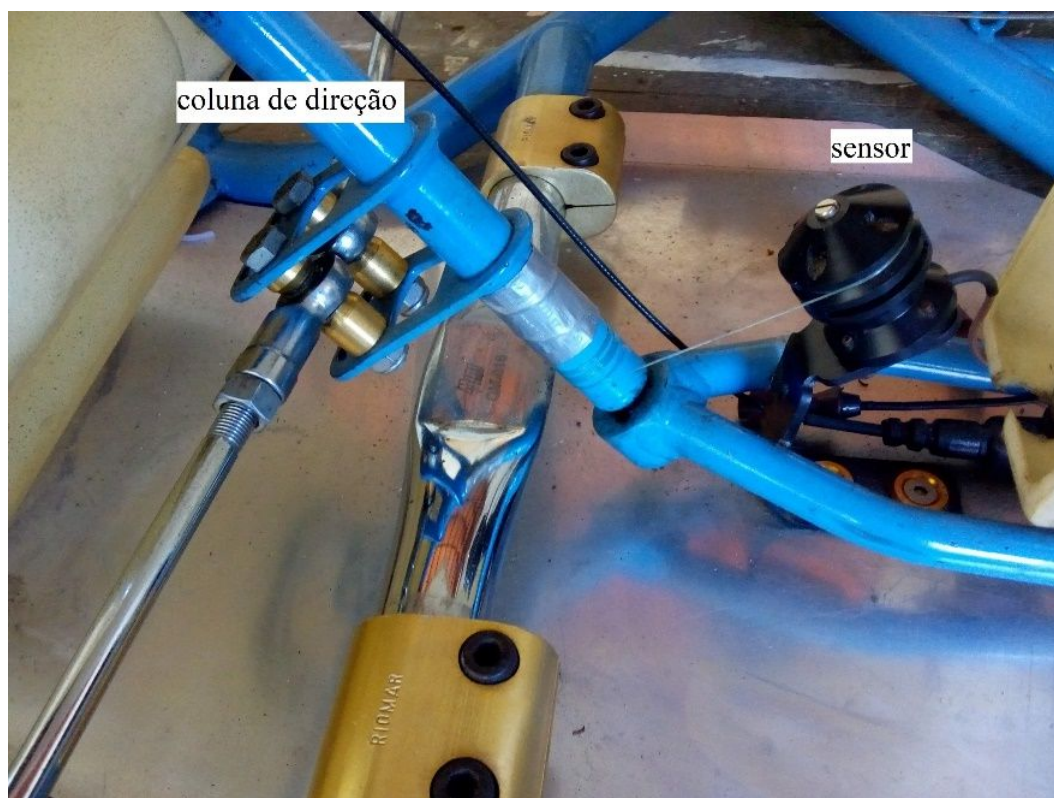
Quanto ao freio, cujo pedal é idêntico ao do acelerador, com um sensor de posição do mesmo modelo, poder-se-iam utilizar os mesmos fatores de correção para obter-se o posicionamento correto do pedal, mas o freio do kart tem algumas características próprias. Sofre constantemente com o efeito *brake fade*, uma perda considerável no poder de frenagem devido ao aquecimento de todo o sistema de freios e tem alto desgaste nas pastilhas, o que também interfere na relação entre a intensidade da frenagem e a posição do pedal. Assim sendo, a posição do pedal não tem uma consequência constante na frenagem do kart. No mais, tal como no caso do acelerador, também o freio de um kart não é muito demandado em suas posições intermediárias.

### **3.2**

#### **Posicionamento do volante**

Foi instalado no kart de testes um sensor de posição do volante (Alfano® modelo A2401). Como o fabricante não divulga informações técnicas detalhadas sobre seus produtos, além das instruções de instalação e operação, fez-se necessário comparar as indicações de posicionamento do instrumento com medições de posicionamento realizadas no próprio volante.

O sensor de posição do volante é um potenciômetro mecanicamente acoplado à coluna de direção do kart por meio de um fio de nylon. A Figura 3-10 apresenta o sensor instalado no kart. Ao se girar o volante, a coluna de direção atua como um carretel, recolhendo e liberando o fio de nylon, e assim o movimento do fio causa movimento semelhante no sensor, que também funciona como um carretel provido de uma mola que mantém a tensão no fio. Assim o movimento feito pelo carretel do sensor é de rotação nos dois sentidos, tal como o da coluna de direção.



**Figura 3-10: Sensor de posição do volante**

Segundo o manual do fabricante [27], para que o sistema passe a medir a posição do volante é preciso realizar um processo simples de ajuste. Grava-se no Painel Alfano® as posições de esterçamento máximo à esquerda, central, e máximo à direita. Ao funcionar o leitor entrega ao usuário um valor percentual de esterçamento, sendo 100% para o volante completamente esterçado para a esquerda, 50% para a posição central e 0% para o volante completamente esterçado para a direita. Cabe ao usuário converter os valores percentuais para valores numéricos a fim de obter os ângulos de esterçamento do volante e, consequentemente, os ângulos de esterçamento das rodas.

Assim, para confirmar as indicações feitas pelo Painel, fez-se a calibração, conforme o manual de instruções, e mediram-se os ângulos de esterçamento máximo do volante para ambos os lados (com uma régua tipo transferidor). Compararam-se então os resultados das medições feitas de 10 em 10 graus com os valores percentuais indicados pelo Instrumento Alfano® e converteram-se os valores percentuais para os valores correspondentes em graus. O resultado das medições encontra-se na Tabela 3-5.

**Tabela 3-5: Medição do ângulo de esterçamento do volante *versus* dados de indicação de ângulo de esterçamento do volante feito pelo instrumento Alfano®**

Esterçamento à esquerda											
Medição no volante	Máx.92°	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
Indicação do instrumento	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50
Indicação convertida	92°	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
Esterçamento à direita											
Medição no volante	Máx.92°	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
Indicação do instrumento	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Indicação convertida	92°	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°

Considerando o valor da medição no volante como referência, pode-se dizer que o instrumento entrega valores satisfatórios.

### 3.3

#### Rotação do motor e velocidade pelo GPS

Dois dados distintos do sistema de medição Alfano® Pro III Evo podem se complementar na estimativa da velocidade do veículo: a indicação direta de rotação do motor e a indicação de velocidade estimada pelo módulo GPS.

Por existir uma transmissão de relação fixa e, considerando não haver deslizamentos na embreagem quando o motor é demandado a sua potência máxima, além de não haver deslizamentos nas rodas traseiras ao longo dos percursos feitos pelo kart em linha reta, pode-se, nestas condições, converter os valores de rotação do motor para a velocidade do kart.

O sistema de medição de rotação do motor do instrumento conta com um fio de cobre comum sobreposto ao cabo de vela do motor, com a outra ponta do fio conectada no painel de indicação e armazenamento de dados do instrumento. A Figura 3-11 apresenta a conexão do fio ao cabo de vela.

Não há no manual do instrumento nenhuma referência sobre o funcionamento do sistema de medição de rotação do motor, mas sabe-se, pelas características da conexão estabelecida (Figura 3-10), que o instrumento mede a frequência dos pulsos elétricos da vela de ignição e traduz essa frequência para valores em RPM (rotações por minuto) que são apresentadas tanto no painel de indicação do piloto, em tempo real, como também armazenadas na memória.

Para preparar o instrumento à indicação correta é preciso informar ao software o tipo de motor associado. Por ser um motor de 4 tempos adaptado ao kart, os valores informados pelo sistema Alfano® estão multiplicados por dois, pois no kartismo profissional os motores são de dois tempos.



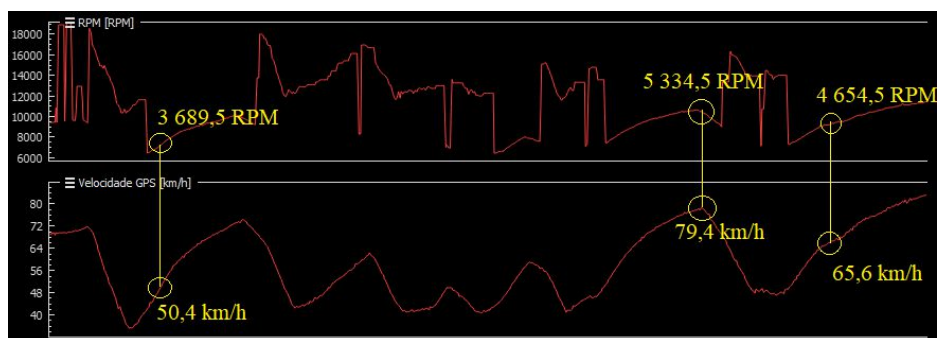
**Figura 3-11: Cabo de vela com o fio do sensor de RPM engastado**

Fonte: [www.alfano.com](http://www.alfano.com)

O módulo GPS Alfano® modelo GPSiV funciona de maneira automática, sem necessidade ou mesmo possibilidade de qualquer intervenção ou calibração, restando ao usuário aguardar o reconhecimento de pelo menos 3 satélites pelo sistema. A partir do momento em que o motor é ligado e o equipamento começa a medir suas rotações, ocorre sincronamente a gravação dos dados de posição do kart e também de sua velocidade. A Figura 3-12 apresenta um gráfico com a indicação de rotação do motor sincronizado com a velocidade informada pelo GPS. Foram escolhidos três pontos distintos que atendem às condições já citadas, onde a indicação do RPM do motor é a ideal para conversão em velocidade do kart.

Assim, tendo o valor do RPM do motor, a relação de transmissão e o raio efetivo da roda traseira, é possível encontrar um fator de conversão do RPM do motor para a velocidade longitudinal do kart. A Tabela 3-6 mostra a conversão dos pontos escolhidos e a comparação entre as indicações.





**Figura 3-12: Indicação de RPM e velocidade GPS para fins de comparação**

**Tabela 3-6: Comparação entre as indicações de velocidade do GPS e a velocidade estimada por conversão da indicação da rotação do motor**

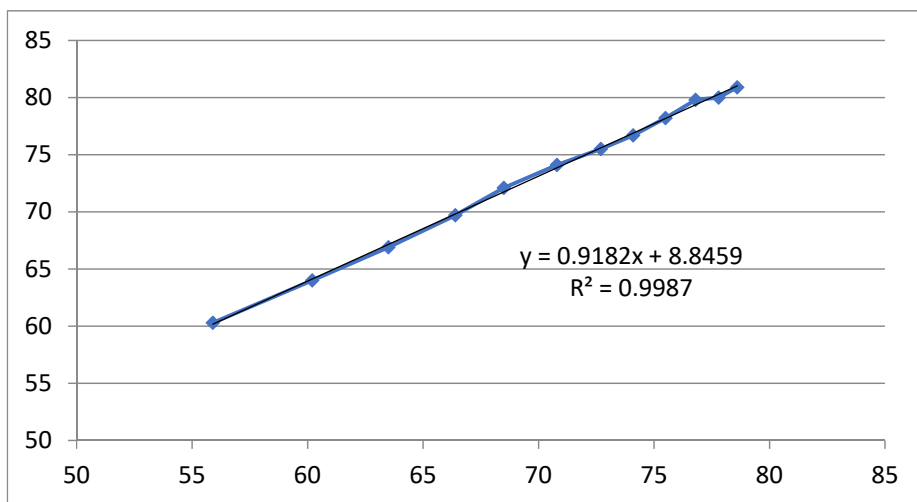
Velocidade indicada pelo GPS, em km/h	Rotação indicada do motor, em RPM	Fator de conversão	Velocidade por conversão da rotação do motor, em km/h
50,4	3 689,5	0,01492047	55,0
65,6	4 654,5	0,01492047	69,5
79,4	5 334,5	0,01492047	79,6

Não havendo um valor para ser considerado verdadeiro, não é possível estimar o erro da medição. Contudo, observa-se que a diferença entre os valores de velocidade indicada pelo GPS e de velocidade estimada por conversão da rotação do motor é menor nas velocidades maiores. A fim de verificar esta observação, foi feita uma nova conversão para as indicações de RPM e de velocidade pelo GPS. A Tabela 3-7 mostra a conversão feita com valores obtidos com intervalos de tempo de meio segundo entre si, enquanto o kart percorria em aceleração na reta principal do kartódromo de Volta Redonda.

**Tabela 3-7: Comparação entre rotação do motor e velocidade GPS**

Velocidade indicada pelo GPS, em km/h	Velocidade por conversão da rotação do motor, em km/h	Diferença em km/h	Diferença percentual (%)
55,9	60,3	4,4	7%
60,2	64,0	3,8	6%
63,5	66,9	3,4	5%
66,4	69,7	3,3	5%
68,5	72,1	3,6	5%
70,8	74,1	3,3	4%
72,7	75,5	2,8	4%
74,1	76,7	2,6	3%
75,5	78,2	2,7	3%
76,8	79,8	3,0	4%
77,8	80,0	2,2	3%
78,6	80,9	2,3	3%

Para uma melhor visualização, os números da Tabela 3-6 formam o gráfico apresentado na Figura 3-13.



**Figura 3-13: Velocidade por GPS versus velocidade por conversão da rotação do motor**

Existe uma diferença consistente entre os valores de velocidade indicados pelo GPS e os valores de velocidade obtidos pela rotação do motor. Essa diferença varia entre 7% e 3% estando a velocidade indicada pelo GPS sempre abaixo da velocidade indicada pela rotação do motor. A medição de rotação do motor é mais simples e direta, portanto seus valores convertidos em velocidade são confiáveis frente as condições consideradas. Contudo, em curvas, as rodas traseiras deslizam e a embreagem desacopla, e portanto nestas condições a rotação do motor convertida para velocidade longitudinal não gera valores fidedignos. Portanto, para fins de simulação do modelo matemático, será considerado o valor de velocidade do GPS corrigida pela equação linear indicada na Figura 3-13, e aqui repetida por conveniência, a fim de obter-se uma melhor aproximação do valor verdadeiro da velocidade do veículo:

$$v = 0,9182 v_{GPS} + 8,8459 \quad (20)$$

### 3.4

#### **Acelerômetros, aceleração lateral e longitudinal**

O módulo GPS Alfano<sup>®</sup> modelo GPSiV dispõe de acelerômetros capazes de medir as acelerações laterais, longitudinais e verticais do kart. As acelerações verticais não são objeto deste estudo. A unidade de medida destes acelerômetros é

a aceleração da gravidade ( $g$ ), unidade usual no automobilismo, tendo o instrumento resolução de centésimos de  $g$ . O Alfano<sup>®</sup> tem por característica iniciar a gravação de dados quando o veículo está com o motor ligado e em movimento. Segundo o fabricante [29], os dados começam a ser gravados quando o veículo se encontra com velocidade igual ou superior a 5 km/h, ou quando ultrapassam uma faixa magnética do circuito.

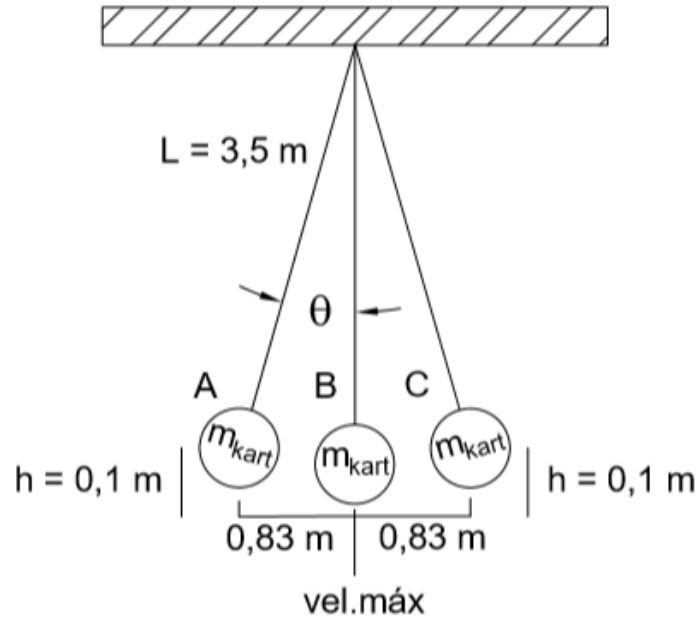
Para verificar as características de medição do acelerômetro Alfano<sup>®</sup> fez-se um ensaio de oscilação pendular do kart, pois a aceleração da massa de um pêndulo simples pode ser obtida de forma confiável por meio de cálculo. Assim sendo, pendurou-se o kart tal como um pêndulo simples, conforme mostra a Figura 3-14, e realizaram-se pequenas oscilações no veículo, com o motor ligado. O painel do Alfano<sup>®</sup> indicou dados de aceleração momentânea, mas não foi possível obter dados gravados pois a oscilação não atingiu velocidades constantes superiores a 5 km/h.

Compararam-se então as acelerações indicadas pelo Alfano<sup>®</sup> com as acelerações obtidas por meio de cálculo.



**Figura 3-14: Kart suspenso como um pêndulo simples**

A Figura 3-15 apresenta um desenho representativo da Figura 3-14 com os dados do arranjo do ensaio de oscilação pendular do kart.



**Figura 3-15: Representação do ensaio de oscilação pendular do kart**

Utilizando-se princípio da conservação de energia da mecânica clássica [18], obtém-se a velocidade máxima do pêndulo simples. Assim:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2, \quad (21)$$

onde  $m$  = massa do pêndulo;  $g$  = aceleração da gravidade,  $h$  = altura de partida do pêndulo e  $v$  = velocidade do pêndulo.

Simplificando, tem-se

$$gh = \frac{1}{2}v^2 \quad (22)$$

e substituindo  $h$  pelo valor apresentado na Figura 3-15 tem-se

$$v_{máxima} = 1,4 \text{ m/s} . \quad (23)$$

Para calcular a aceleração do pêndulo é preciso saber seu período de oscilação. Para pequenas oscilações, a aproximação  $\sin\theta \cong \theta$  (Figura 3-15) fornece a seguinte expressão para o período do pêndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (24)$$

Assim, substituindo o valor de  $L$  (Figura 3-5) tem-se o valor calculado do período do pêndulo:

$$T = 3,75 \text{ s} \quad (25)$$

Para observar uma eventual imperfeição no ensaio do arranjo apresentado na Figura 3-14, fez-se uma medição do período do pêndulo com o auxílio de um cronômetro digital de acionamento manual. Foram realizadas duas medições de período com dez amostras cada. A Tabela 3-8 apresenta as medições feitas.

**Tabela 3-8: Períodos, em segundos, medidos no ensaio pendular do kart**

-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ª amostragem	3,80	3,76	3,91	3,81	3,76	3,85	3,72	3,83	3,83	3,81
2ª amostragem	3,86	2,71	3,93	3,87	3,76	3,73	3,80	3,75	3,79	3,80
Média									3,80	
Incerteza padrão									0,06	

O erro entre o valor calculado e o valor médio medido é de 1,3%, portanto não há indício de imperfeições significativas no ensaio do arranjo apresentado na Figura 3-14.

Assim, tendo-se as velocidades inicial (repouso), final (máxima), e o tempo (período) percorrido, pode-se estimar a aceleração do pêndulo, considerando-se as seguintes premissas:

- A aceleração entre os pontos A e B tem o mesmo valor, em módulo, que a desaceleração entre B e C (Figura 3-15);
- Considerou-se, para efeitos do cálculo da aceleração, o período médio medido, uma vez que o valor calculado considera por princípio um pêndulo ideal, o que não é o caso; e
- A velocidade máxima do pêndulo é alcançada quando o mesmo passa pelo ponto B, tendo consumido metade  $\left(\frac{1}{2}\right)$  do período oscilatório médio medido, ou seja, 1,9 s.

Segundo a mecânica clássica, tem-se

$$v = v_0 + at, \quad (26)$$

onde  $v$  = velocidade final,  $v_0$  = velocidade inicial,  $a$  = aceleração e  $t$  = tempo. Portanto, tem-se

$$a = 0,73 \text{ m/s}^2. \quad (27)$$

Mas, como dito anteriormente, a unidade de medição do acelerômetro do Alfano<sup>®</sup> é a aceleração da gravidade ( $g$ ), sendo assim o valor estimado da aceleração do pêndulo, convertido para  $g$ , é:

$$a = 0,076 \text{ g} \approx 0,08 \text{ g} \quad (28)$$

As indicações no painel Alfano<sup>®</sup> Pro III Evo para as pequenas oscilações do kart como massa pendular variaram entre 0 (na partida) e 0,07  $g$ , sendo este último o maior valor observado. A diferença entre o valor medido pelo instrumento e o valor esperado é, portanto, de 0,01  $g$ , ou 8,5%, correspondendo à resolução do instrumento. A diferença observada não é significativa, pois a faixa de medição do instrumento não alcança a terceira casa decimal. O instrumento, portanto, não necessita de ajuste.

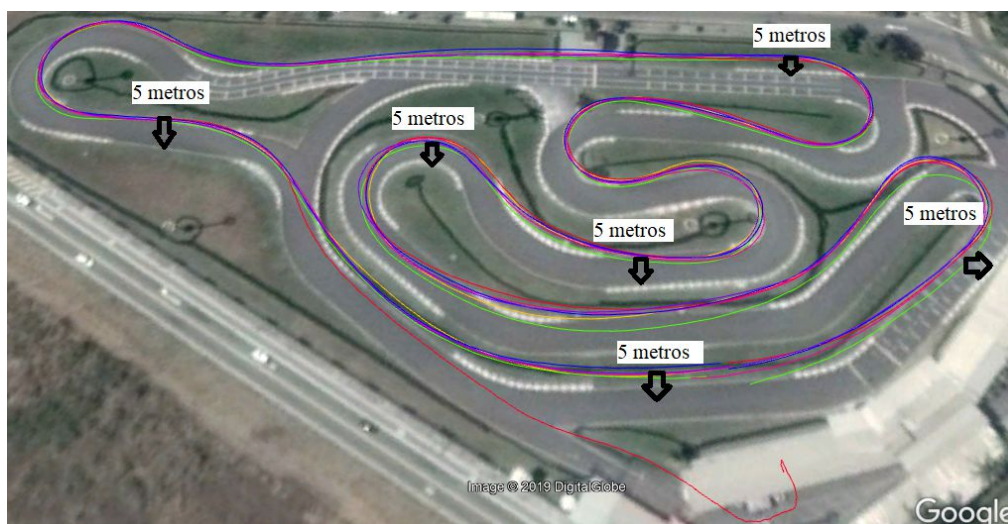
### 3.5 Mapeamento do circuito (GPS)

A pista de testes utilizada neste trabalho foi a do kartódromo internacional de Volta Redonda – RJ, homologada pela CBA. O circuito do kartódromo tem aproximadamente 1 050 metros e uma largura de pista mínima de 8 metros. Não tem aclives ou declives perceptíveis.

A Figura 3-16 apresenta uma imagem do kartódromo extraída do Google Earth. As linhas coloridas sobrepostas representam as passagens feitas pelo kart no circuito, de acordo com as medições de posição feitas pelo GPS.

Percebe-se na imagem da Figura 3-16 o traçado feito pelo piloto e um erro sistemático de aproximadamente 5 metros na sobreposição das passagens com a imagem do circuito.

O GPS indicou também, que as distâncias percorridas volta a volta não são perfeitamente constantes, reflexo das variações do traçado feito pelo piloto. A Tabela 3-9 apresenta alguns dados de distância percorrida em uma volta e o tempo utilizado para percorrê-la.



**Figura 3-16: Circuito do kartódromo de Volta Redonda com a indicação das voltas feitas pelo kart medido pelo GPS**

**Tabela 3-9: Distância percorrida *versus* tempo de volta**

Volta	Distância percorrida em metros	Tempo em segundos
1	941,29	57,270
2	940,17	56,930
3	939,09	56,410
4	934,26	55,830
5	940,91	55,340

Percebe-se que, nas quatro primeiras voltas, a distância percorrida vai diminuindo volta a volta e o tempo despendido também diminui. Não obstante, a quinta volta é a mais rápida, mas a distância percorrida na volta mais rápida não é a menor entre elas.

O tempo de uma volta em um circuito depende de variáveis que vão da habilidade do piloto às condições do veículo, da pista e do clima. Uma dessas variáveis é o traçado feito pelo piloto, cuja otimização também depende das características do veículo, da pista e do clima. Em um dia de chuva, por exemplo, o traçado feito pelos pilotos costuma mudar por conta das características da pista. Supondo um veículo com velocidade constante e lento o suficiente para não derrapar em nenhuma curva, o traçado ótimo será o mais curto. Contudo, se o veículo aumentar sua velocidade e passar a derrapar nas curvas, aí o traçado ótimo pode não ser o mais curto.

As observações acima sobre otimização de desempenho adiantam o conteúdo dos trabalhos futuros indicados no capítulo 6.

### 3.6

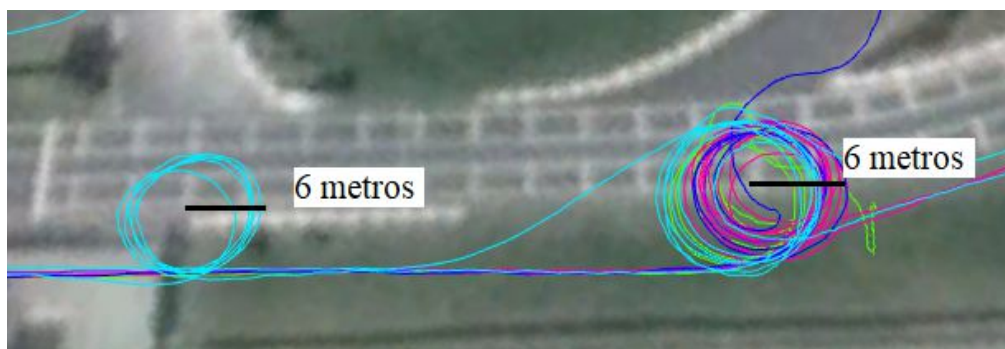
#### Teste skidpad

Realizou-se em pista um teste conhecido por *skidpad*, para a obtenção de algumas das características da dinâmica lateral do kart.

O veículo é conduzido em curva de raio conhecido, inicialmente em velocidade constante, e então gradativamente acelerado, até que suas rodas comecem a escorregar.

Foi colocado um cone no centro da pista do kartódromo e demarcado posições de referência com demais cones para a passagem do kart, estabelecendo-se um raio de curvatura de 6 metros. Com o instrumento Alfano® mediu-se a posição do veículo, o ângulo de ataque das rodas e a velocidade tangencial.

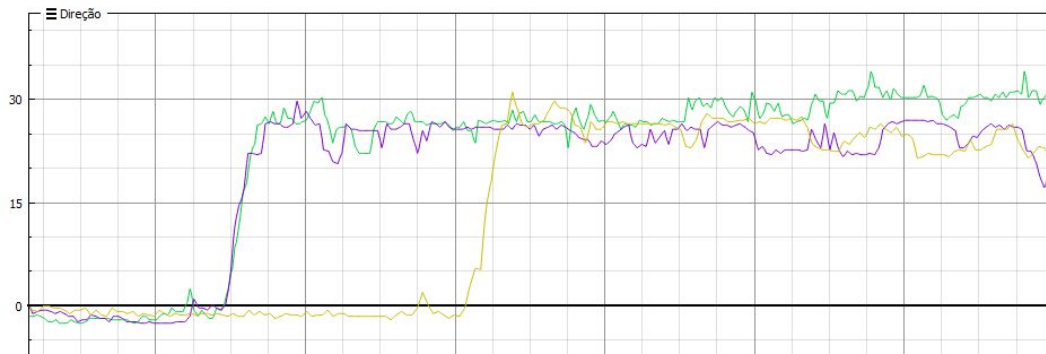
A Figura 3-17 apresenta uma visão superior da reta oposta do Kartódromo Internacional de Volta Redonda, com a indicação GPS de posição do kart, durante as cinco sessões do teste.



**Figura 3-17: As cinco sessões *skidpad* indicadas pelo GPS**

A Figura 3-18 apresenta a posição do volante durante a execução dos testes. O Alfano® indicou oscilações nas medições de posição do volante atribuídas a vibração do mecanismo de direção ocorrido durante os testes. Considerou-se um esterçamento para a esquerda de aproximadamente 30% o que representa um ângulo de  $28^\circ$  no volante. Aplicando a equação (5) do item 2.1.4, tem-se que o esterçamento equivalente na roda externa à curva é de  $10^\circ$ .

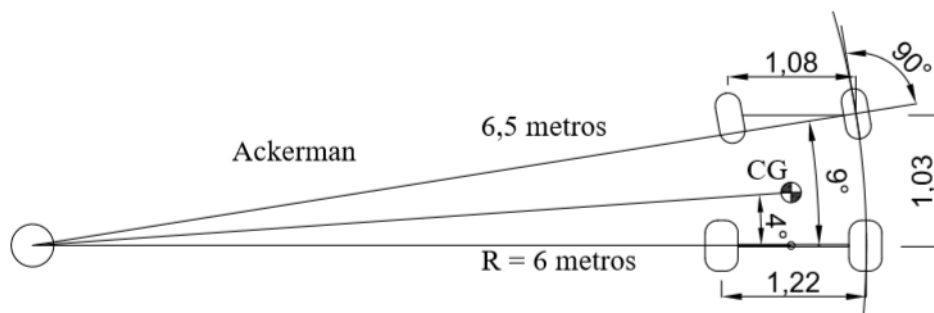




**Figura 3-18: Indicação de posição do volante durante o skidpad.**

Portanto, com um ângulo de ataque ( $\delta_{ad}$ ) aproximado de  $10^\circ$  o kart percorreu uma curva com raio (R) de aproximadamente 6 metros, de forma quase constante.

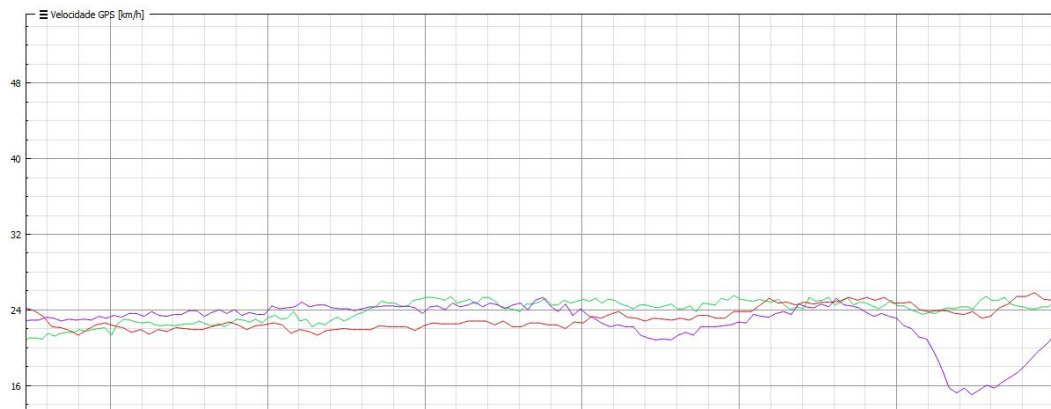
A geometria da Ackerman [30] prevê um ângulo de esterçamento de  $9^\circ$ , conforme apresenta a Figura 3-19. A pequena diferença entre o esterçamento efetuado e o esterçamento da geometria de Ackerman é esperada, pois no teste experimental ocorre a deformação nos pneus dianteiros, também conhecida por *slip angle* ou ângulo de deriva.



**Figura 3-19: Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita, geometria de Ackerman**

A Figura 3-20 apresenta as indicações de velocidade tangencial durante os testes. A velocidade indicada pelo GPS oscilou cerca de 10% durante as sessões. Considerou-se uma velocidade média de 6 m/s ou 21,6 km/h para efeitos dos resultados obtidos.

De acordo com a correção da indicação do GPS prevista no item 3.3 a velocidade média do ensaio é de 28,7 km/h.



**Figura 3-20: Indicação GPS de velocidade durante o *skidpad*.**

Assim, obteve-se do teste *skidpad* os resultados necessários para fins de comparação com simulação computadorizada. A Tabela 3-10 consolida informações do teste.

**Tabela 3-10: Consolidação de informações do teste *skidpad***

Características do Kart Mini M2	Tipo de Pneus	MG Vermelho
	Pressão dos pneus	14 psi
	Pneus dianteiros (diâmetro x largura)	254 x 117 mm
	Pneus traseiros (diâmetro x largura)	280 x 180 mm
	Bitola dianteira ( $B_d$ )	1,08 m
	Bitola traseira ( $B_t$ )	1,22 m
	Distância entre eixos	1,03 m
Resultados do teste	Raio de curvatura exercido	6 m
	Indicação de esterçamento do volante (Alfano <sup>®</sup> )	30%
	Ângulo de esterçamento do volante	28°
	Ângulo de esterçamento da roda ( $R_{dd}$ )	10°
	Ângulo de esterçamento teórico (Ackerman)	9°
	Estimativa do ângulo de deriva ( <i>slipangle</i> )	$\approx 1^\circ$
	Velocidade tangencial média do veículo em teste (ajustada)	28,7 km/h
	Velocidade angular ( $\omega_z$ )	1 rad/s

## 4

## Modelo dinâmico do veículo

Neste Capítulo, as características do kart medidas nos Capítulos 2 e 3 são utilizadas para a construção de um modelo matemático computacional, utilizando-se para tal a plataforma Matlab/Simulink®. O modelo completo é constituído de duas partes fundamentais: modelo de dinâmica longitudinal e modelo de dinâmica lateral. Os resultados das simulações originadas por estes modelos parciais foram comparados com os dados correspondentes obtidos experimentalmente com o Alfano®, para fins de validação.

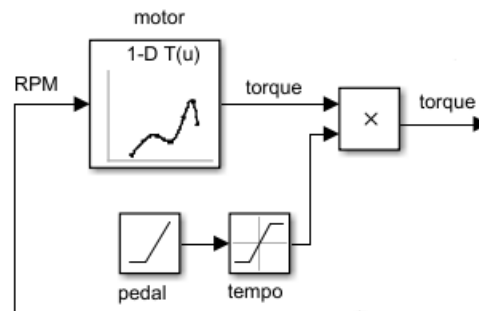
O desenvolvimento de um modelo computacional de dinâmica veicular, validado com dados experimentais, é o objetivo geral desta dissertação, conforme descrito no Capítulo 1.

### 4.1

### Dinâmica longitudinal

O primeiro passo para o modelo de dinâmica longitudinal é a elaboração de um modelo do motor. Para tal, fez-se a discretização dos valores da curva ‘rpm x torque’ característica do motor (Figura 2-3). Estes valores associados entre si são introduzidos no Matlab/Simulink® em uma Tabela de valores interpolados. Na Figura 4-1 observa-se a representação do motor. Para cada valor de velocidade de rotação na entrada no “motor” tem-se um valor de torque de saída correspondente.

Ao valor do torque fornecido pela saída do “motor”, associou-se a posição percentual do pedal do acelerador, para que o torque seja entregue para a transmissão de acordo com o movimento do pedal realizado pelo piloto. A Figura 4-1 mostra a representação simulink® do motor e do pedal com seu respectivo atraso (ou *delay*), representando o tempo decorrido em segundos entre a posição 0% e a posição 100% do pedal.



**Figura 4-1: Bloco do Simulink® que calcula o torque a partir da velocidade de rotação e da posição percentual do pedal.**

O torque resultante é entregue à transmissão sendo, portanto, multiplicado pela relação fixa da mesma  $N_c$  ( $13:45 = 3,462$ ). Multiplicado pela relação de transmissão, o torque é entregue às rodas traseiras, de raio efetivo conhecido ( $r = 0,137$  m) que, por sua vez exercem uma força ( $F$ ) contra o chão empurrando o kart no sentido longitudinal, ou seja,

$$F = T \cdot N_t \cdot \frac{1}{r} \quad (29)$$

A Figura 4-2 mostra a representação no simulink® da equação (29), com o torque passando pela transmissão e pelas rodas traseiras, convertendo-se assim na força longitudinal ( $F$ ) que empurra o kart para frente.



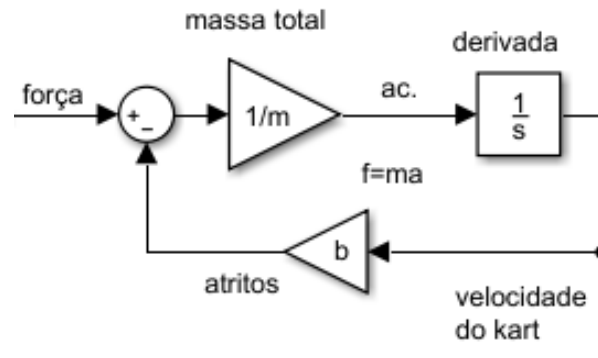
**Figura 4-2: Bloco do Simulink® que calcula a força longitudinal exercida sobre o kart a partir do torque do motor**

Utilizando-se da segunda lei de Newton ( $F = m \cdot a$ ), o modelo converte a força longitudinal exercida pelas rodas em aceleração longitudinal conforme a equação (30). A massa equivalente ( $m$ ) do veículo é soma da massa do kart ( $m_v$ ) com as inércias das rodas e da transmissão, conforme a equação (31). As forças de atrito ( $b$ ) atuam proporcionalmente à velocidade conforme a equação (32) [30]. A Figura 4-3 apresenta o modelo Simulink® das equações 30 a 32.

$$\dot{v} = \frac{1}{m} (F - bv) \quad (30)$$

$$m = m_v + \frac{(J_r + J_t)}{r^2} \quad (31)$$

$$b = \frac{(b_r + b_t)}{r^2} \quad (32)$$



**Figura 4-3: Bloco Simulink® que calcula a velocidade do kart a partir da força longitudinal exercida**

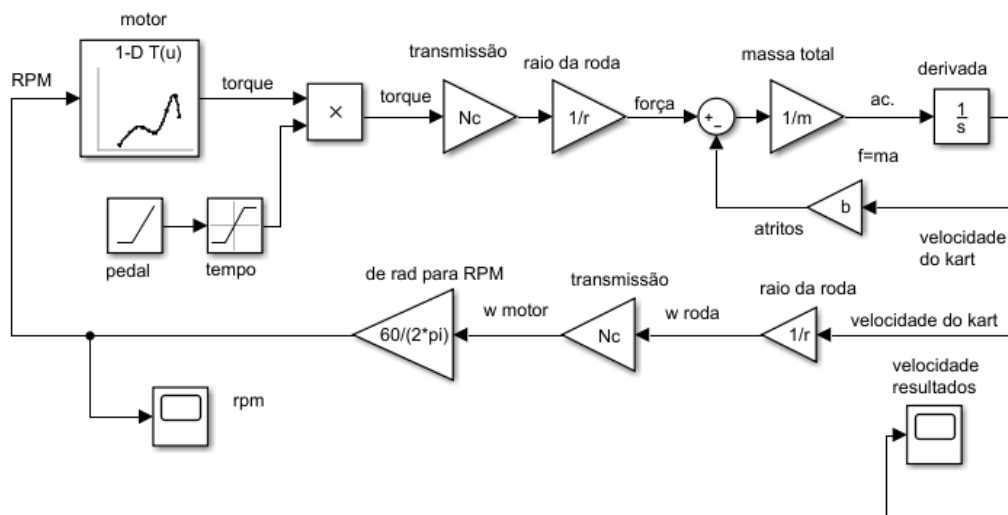
Com a velocidade longitudinal do kart e a transmissão de relação fixa, pode-se obter a velocidade de rotação do motor, em rpm. Para isso é preciso converter a velocidade linear do kart em velocidade de rotação das rodas, multiplicar esta velocidade de rotação pelo fator  $N_t$  da transmissão e transformar a velocidade de rotação de radianos por segundo para rotações por minuto (rpm). A equação (33) apresenta o modelo matemático da transformação da velocidade do kart para velocidade de rotação do motor e a Figura 4-4 apresenta a representação Simulink® da equação (33).

$$rpm = \frac{V}{r} \cdot N_t \cdot \frac{60}{2\pi} \quad (33)$$



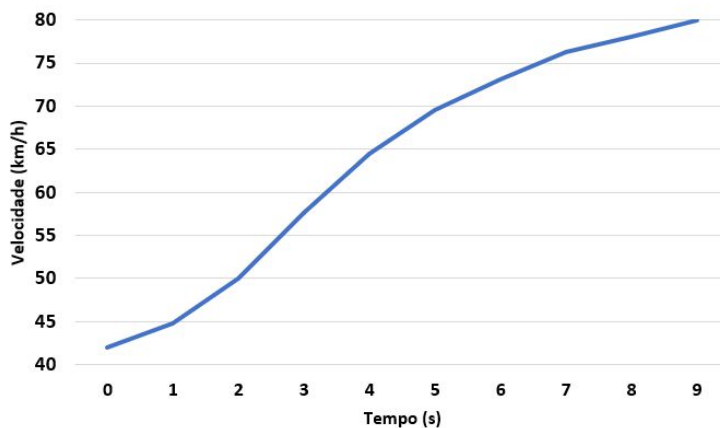
**Figura 4-4: Bloco Simulink® que transforma os valores de velocidade do kart para velocidade angular (rpm) do motor**

Tem-se, portanto, a velocidade de rotação de referência para a entrada do motor, fechando o circuito matemático necessário para estabelecer o modelo da dinâmica longitudinal. A Figura 4-5 mostra o modelo completo.



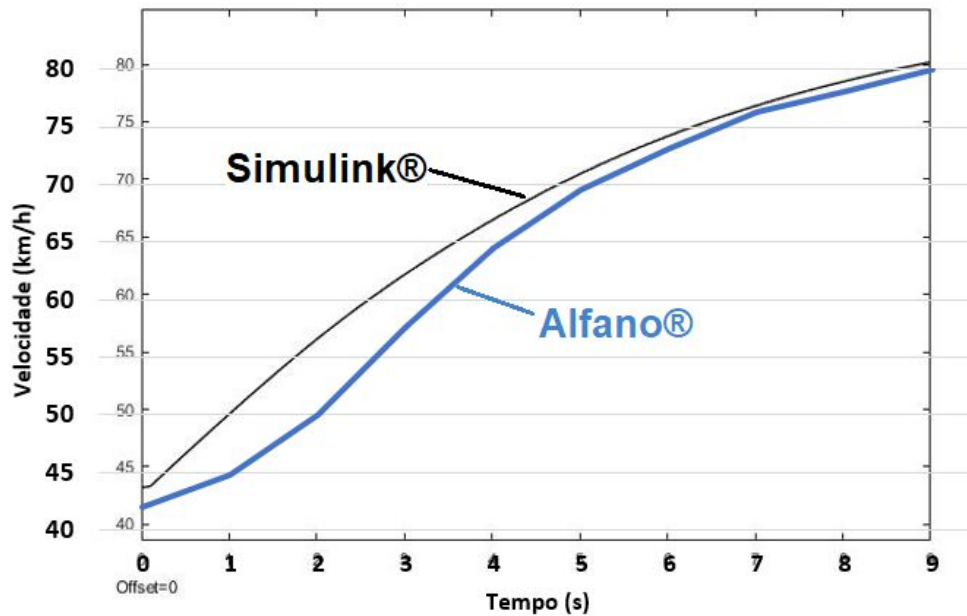
**Figura 4-5: Simulink®, modelo de dinâmica longitudinal**

Para validar o modelo de dinâmica longitudinal do kart, compararam-se os resultados das simulações com os dados obtidos experimentalmente em pista com o kart provido do instrumento Alfano® Pro III Evo. A Figura 4-6 apresenta os resultados da medição de velocidade do kart em uma volta rápida no circuito do kartódromo de Volta Redonda. Observa-se na Figura 4-6 uma faixa de medição de 9 segundos relativa à passagem do kart pela reta do circuito, com velocidade inicial igual a 43 km/h e final igual a 80 km/h.



**Figura 4 6: Alfano®, aceleração do kart na reta do kartódromo**

Inserindo-se o parâmetro da velocidade inicial ( $V_0 = 12$  m/s) no modelo computacional de dinâmica longitudinal, obteve-se um resultado semelhante ao obtido experimentalmente. A Figura 4-7 apresenta o resultado da simulação Simulink® sobreposto ao resultado experimental obtido pelo Alfano®.



**Figura 4-7: Imagens sobrepostas; Simulação Simulink® e indicação Alfano® de aceleração do kart na reta do kartódromo**

Tem-se, portanto, uma simulação computacional de dinâmica longitudinal que acompanha satisfatoriamente os resultados obtidos experimentalmente na pista do kartódromo. A Tabela 4-1 apresenta os parâmetros utilizados na simulação.

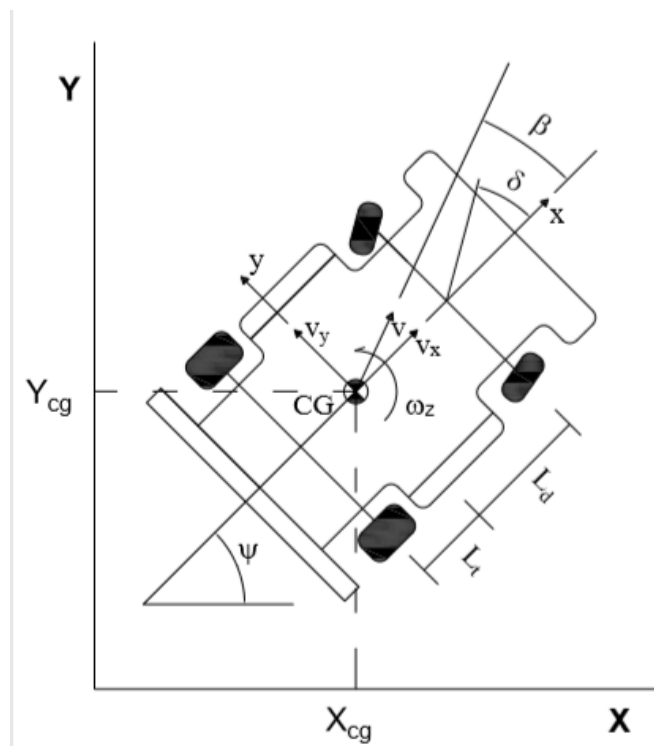
**Tabela 4-1: Parâmetros do teste experimental e da simulação de dinâmica longitudinal**

Massa do kart (com piloto)	$m$	207 kg
Relação da transmissão	$N_t$	3,46 (45/13)
Momento de inércia das rodas dianteiras	$J_r$	0,033 kg.m <sup>2</sup>
Momento de inércia da transmissão (inclui rodas traseiras)	$J_t$	0,046 kg.m <sup>2</sup>
Raio efetivo da roda traseira	$r_{ef}$	0,137 m
Coefficiente de atrito	$b$	0,54 kg.m <sup>2</sup>
Aceleração da gravidade	$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>

## 4.2 Dinâmica lateral

Apresentam-se a seguir modelos para a dinâmica e cinemática lateral de um veículo terrestre, desenvolvidos a partir da descrição das relações matemáticas entre suas principais variáveis, mostradas na Figura 4-8, a saber:

- $(X, Y)$  é o referencial global, em relação ao qual se descreve a trajetória, o deslocamento do centro de massa CM  $(X_{CM}, Y_{CM})$  e a atitude  $(\psi)$  do veículo;
- $(x, y)$  é o referencial local do veículo, não-inercial com origem no CM, em relação ao qual são escritas as equações de movimento do veículo;
- $v$  (m/s) é a velocidade absoluta do veículo;
- $v_x$  (m/s) é a velocidade longitudinal do veículo;
- $v_y$  (m/s) é a velocidade lateral do veículo (*side slip*);
- $\omega_z$  (rad/s) é a velocidade angular de guinada (*yaw rate*);
- $\psi$  (rad) é o ângulo de atitude em guinada (*yaw*);
- $\beta$  (rad) é o ângulo de ataque; e
- $\delta$  (rad) é o ângulo de esterçamento médio das rodas dianteiras.



**Figura 4-8: Referenciais global e local, variáveis e parâmetros da dinâmica lateral.**



Na Figura 4-8 encontram-se também representadas as distâncias do eixo dianteiro ( $l_d$ ) e do eixo traseiro ( $l_t$ ) ao centro de gravidade (CG), já quantificadas no Capítulo 2 (Figura 2-21). No desenvolvimento a seguir, o raio de giração  $\kappa$  é empregado para determinação do momento de inércia de guinada  $J_z = m \kappa^2$ , na qual  $m$  é a massa total, incluindo a das rodas e pneus.  $J_z$  foi obtido experimentalmente e apresentado no Capítulo 2.

#### a) Modelo linear da dinâmica lateral

Supondo, inicialmente, as seguintes hipóteses, aplicáveis a um veículo em determinadas condições de movimento:

- velocidade longitudinal constante ( $\dot{v}_x = 0$  e  $v_x \cong v = cte$ );
- modelo linear de deslizamento lateral dos pneus dianteiros e traseiros, ou seja, força lateral linear com o ângulo de deriva;
- pequenos ângulos de ataque  $\beta = \tan^{-1}(v_y/v_x) \leq 10^\circ$  (ou  $v_y \ll v_x$ );
- pequenos ângulos de guinada  $\psi \leq 10^\circ$ , ou seja, modelo válido para manobras tipo troca de pista simples (mudança de pista de rolamento) ou troca de pista dupla (ultrapassagens) ou chicanes, ou *slalon* de pequena amplitude;

Tem-se, a partir do modelo apresentado em [15], adaptado para um kart com 4 rodas de bitolas desprezíveis no qual o contato com o solo ocorre apenas nas rodas externas na curva, as equações diferenciais que regem o seu comportamento lateral em função da variável independente (entrada). Considerando o ângulo de esterçamento das rodas dianteiras e o ângulo médio de esterçamento das rodas dianteiras, de acordo com a geometria de Ackerman, então o modelo linear para a dinâmica lateral pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_d + C_t}{mv} & \frac{-(l_d C_d - l_t C_t) - mv^2}{mv} \\ -\frac{(l_d C_d - l_t C_t)}{J_z v} & -\frac{(l_d^2 C_d + l_t^2 C_t)}{J_z v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_d}{m} \\ \frac{l_d C_d}{J_z} \end{bmatrix} \delta \quad (34)$$

nas quais  $C_d$  e  $C_t$  são os coeficientes de deformação lateral, dos pneus dianteiros e traseiros, respectivamente, associados ao modelo linear da força lateral em função dos ângulos de deriva.

Os parâmetros podem ser determinados a partir de testes com o veículo em trajetórias curvilíneas predefinidas (por exemplo, círculos de raio constante ou *skidpad*), em velocidade constante, a partir das medidas de aceleração lateral e velocidade angular de guinada, para um dado ângulo de esterçamento. Observa-se que, se alguns dos parâmetros forem conhecidos, tipicamente os relacionados à geometria (distâncias  $l_d$  e  $l_t$ ) ou mesmo a massa e o momento de inércia (ou raio de giração), podem-se determinar os coeficientes de rigidez lateral dos pneus ( $C_d$  e  $C_t$ ), de fundamental importância para a compreensão da dinâmica lateral de um veículo.

Sabendo que a trajetória do veículo no plano é definida por

$$\begin{cases} \dot{X} = (\cos \psi) v_x - (\sin \psi) v_y \\ \dot{Y} = (\sin \psi) v_x + (\cos \psi) v_y \end{cases} \quad (35)$$

e considerando as hipóteses de pequenos ângulos de guinada  $\psi \rightarrow 0 \therefore \cos \psi \cong 1$  e  $\sin \psi \cong \psi$ , válida para as manobras citadas anteriormente, e de ataque  $\beta \rightarrow 0 \therefore v_y \ll v_x$ , válida para velocidades laterais de pequena amplitude, tem-se

$$\begin{cases} \dot{X} \cong v_x \\ \dot{Y} \cong \psi v_x + v_y \cong \psi v + v_y \end{cases} \quad (36)$$

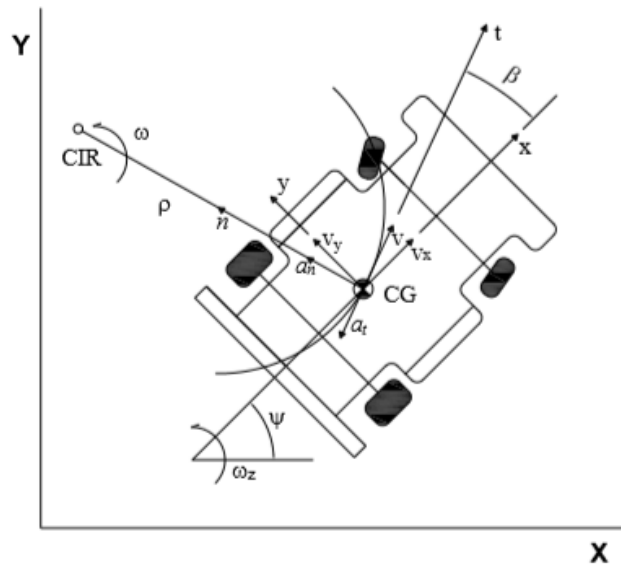
e o **modelo de estado aumentado**, que inclui o ângulo de guinada e os deslocamentos nos eixos do sistema de referência global X e Y, é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\psi} \\ \dot{Y} \\ \dot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_d + C_t}{mv} & -\frac{(l_d C_d - l_t C_t) - mv^2}{mv} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(l_d C_d - l_t C_t)}{J_z v} & -\frac{(l_d^2 C_d + l_t^2 C_t)}{J_z v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \omega_z \\ \psi \\ Y \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_d}{m} & 0 \\ \frac{l_d C_d}{J_z} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ v_x \end{bmatrix} \quad (37)$$

que possibilita a análise simultânea das dinâmicas de atitude e trajetória de um veículo em curva em manobras que satisfaçam as hipóteses adotadas. Deve-se notar que  $v_x$  deve necessariamente ser constante e é tanto “entrada” (em degrau) como parâmetro ( $v$ ) do modelo.

De modo a analisar o desempenho do veículo a partir do modelo da dinâmica lateral é conveniente compará-lo com o comportamento descrito pelo modelo da cinemática lateral, que caracteriza seu desempenho ideal em curvas, com velocidade constante, e está baseado diretamente na geometria de Ackerman. A solução deste modelo estabelece a trajetória neutra (sem tendências subesterçantes ou sobreesterçantes, tratadas adiante), na qual os pontos de contato dos quatro pneus com o solo e o centro de massa percorrem círculos concêntricos (instantâneos ou durante um determinado intervalo de tempo), cujos raios estão relacionados, como mostrado na Figura 4-9. Observa-se que o comportamento previsto pela cinemática lateral só é válido, de fato, para baixas velocidades e raios de curvatura elevados (ou pequenos ângulos de esterçamento), quando não há deslizamento (deriva) dos pneus. A Figura 4-10 apresenta as variáveis e parâmetros associados a este modelo instantâneo (ideal).

**Figura 4-9: Velocidades dos eixos dianteiro e traseiro do veículo em curva.**



**Figura 4-10: Variáveis e parâmetros associados à cinemática lateral.**

O ângulo de esterçamento médio das rodas dianteiras é  $\delta$  (Figura 4-9), tal que

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{l_d + l_t}{R} = \frac{l}{R} \quad (38)$$

expressão na qual a meia bitola dianteira ( $b_d/2$ ) foi cancelada. Empregando o ângulo de esterçamento percentual  $\delta_s$ , conforme definido anteriormente, tem-se o raio de curvatura instantâneo do eixo traseiro  $R$  ( $\delta_s > 0$  e  $R > 0$  curvas para a esquerda,  $\delta_s < 0$  e  $R < 0$  curvas para a direita), dado por

$$R = \frac{l}{\operatorname{tg}(|\delta_M \cdot \delta_s|)} \quad (39)$$

Logo, o raio de curvatura instantâneo do CG, em relação ao CIR – Centro Instantâneo de Rotação do veículo – será

$$\rho = \pm \sqrt{R^2 + l_t^2} \quad (40)$$

com, por convenção,  $\rho > 0$  para curvas para a esquerda e  $\rho < 0$  para curvas para a direita, e a velocidade angular com que o CG percorre o círculo no instante (ou intervalo) de tempo considerado é

$$\omega = \frac{v}{\rho} \quad (41)$$

As demais variáveis da cinemática lateral são dadas por

$$\beta = tg^{-1} \frac{v_y}{v_x} = tg^{-1} \frac{l_t}{R}, \quad (42)$$

$$\begin{cases} v_x = v \cos \beta \\ v_y = v \sen \beta \end{cases}^e \quad (43)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho. \quad (44)$$

Pode-se afirmar que, nas condições cinemáticas estabelecidas para este modelo, a velocidade lateral instantânea do eixo traseiro é nula, ou seja,  $v_{yt} = 0$  (Figura 4-10). Escrevendo as expressões para as velocidades instantâneas de translação lateral dos eixos dianteiro  $v_{yd}$  e traseiro  $v_{yt}$  em função das velocidades lateral do centro de gravidade  $v_y$  e angular do corpo do veículo  $\omega_z$ , e impondo a condição cinemática mencionada, tem-se

$$\begin{cases} \begin{matrix} \text{Condições} \\ \text{Cinemáticas} \end{matrix} \\ v_{yt} = v_y - l_t \omega_z \cong 0 \Rightarrow v_y = l_t \omega_z \\ \begin{matrix} \text{Condições} \\ \text{Cinemáticas} \end{matrix} \\ v_{yd} = v_y + l_d \omega_z \cong l_t \omega_z + l_d \omega_z = (l_t + l_d) \omega_z = l \omega_z \end{cases} \quad (45)$$

e assim é estabelecida a **relação fundamental da cinemática lateral, para o veículo neutro ou ideal**, que garante a igualdade das velocidades angulares do centro de gravidade ( $\omega$ ) e do corpo do veículo ( $\omega_z$ ), a partir de

$$v_y = v \sen \beta \Rightarrow \rho \omega \sen \beta = l_t \omega_z \Rightarrow \omega \rho \sen \beta = l_t \omega_z \xRightarrow{\rho \sen \beta = l_t} \omega = \omega_z \quad (46)$$

### c) Ângulos de deriva

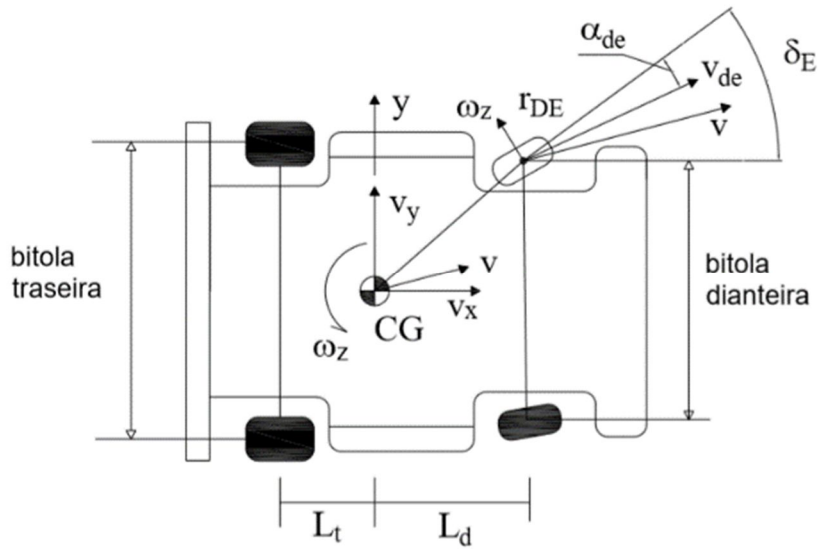
O ângulo de deriva de um pneu estabelece a direção de seu deslocamento, em relação à direção em que está orientado, e caracteriza o deslizamento (ou deformação) lateral do pneu, variável associada à geração de força de aderência [15] responsável pela sua capacidade de aceleração lateral. A Figura 4-11 ilustra o ângulo de deriva do pneu dianteiro esquerdo, dependente das velocidades de translação longitudinal e lateral, e angular de guinada, e das distâncias do ponto de contato com o pneu ao Centro de Massa do veículo. Assim, os ângulos de deriva (ou deslizamento lateral) dos 4 pneus são dados por

$$\alpha_{DD} = \delta_D - tg^{-1} \left( \frac{v_y + l_d \omega_z}{v_x + \frac{b_d}{2} \omega_z} \right), \quad (47)$$

$$\alpha_{DE} = \delta_E - tg^{-1} \left( \frac{v_y + l_d \omega_z}{v_x - \frac{b_d}{2} \omega_z} \right), \quad (48)$$

$$\alpha_{TD} = tg^{-1} \left( \frac{-v_y + l_t \omega_z}{v_x + \frac{b_t}{2} \omega_z} \right) e \quad (49)$$

$$\alpha_{TE} = tg^{-1} \left( \frac{-v_y + l_t \omega_z}{v_x - \frac{b_t}{2} \omega_z} \right). \quad (50)$$



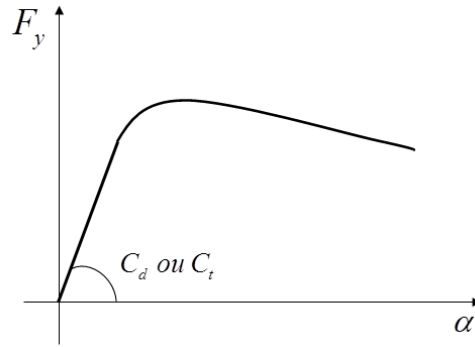
**Figura 4-11: Ângulo de deriva do pneu dianteiro esquerdo.**

Como comentado acima, quando da descrição do modelo de dinâmica lateral linear, o ângulo de deriva está diretamente associado à força lateral gerada em um pneu, cujo comportamento típico é apresentado na Figura 4-12. No modelo adotado, supõem-se pequenos ângulos de deriva, e portanto trabalha-se na faixa linear da

função  $F_y \times \alpha$ , considerando-se o ângulo de esterçamento médio das rodas dianteiras e as bitolas desprezíveis ( $b_d = 0$  e  $b_t = 0$ ). Sendo  $\alpha_d$  a direção de movimento do pneu dianteiro ( $v_D$ ) em relação à direção ( $\delta$ ) em que esse encontra-se orientado, tem-se os deslizamentos laterais (ou ângulos de deriva) dos pneus dianteiros ( $\alpha_d$ ) e dos pneus traseiros ( $\alpha_t$ ), incluindo ainda a hipótese de pequenos ângulos, como mostrado na Figura 4-13, dados, respectivamente, por

$$\alpha_d \cong \delta - \left( \frac{v_y + l_d \omega_z}{v_x} \right) \quad e \quad \alpha_t \cong \left( \frac{-v_y + l_t \omega_z}{v_x} \right), \quad (51)$$

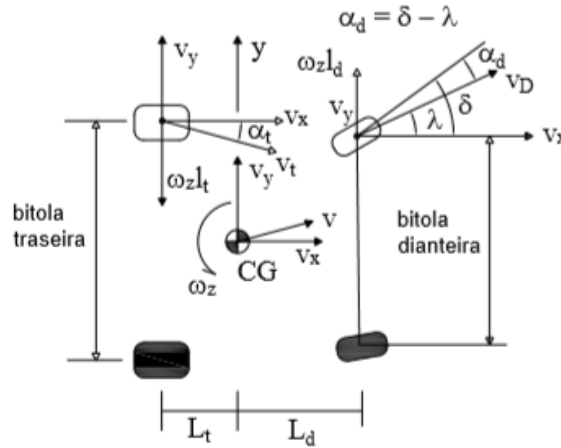
expressões que podem ser utilizadas para verificação da validade ou não do modelo linear com o qual se está analisando o comportamento lateral do veículo.



**Figura 4-12: Força lateral como função do ângulo de deriva.**

$$\lambda \approx \text{tg}^{-1}((v_y + \omega_z l_d)/v_x) \approx (v_y + \omega_z l_d)/v_x$$

$$\alpha_t \approx \text{tg}^{-1}((-v_y + \omega_z l_t)/v_x) \approx (-v_y + \omega_z l_t)/v_x$$



**Figura 4-13: Ângulos de deriva dianteiro e traseiro aproximados.**

**d) Dinâmica plana não linear de um veículo terrestre com 3 graus de liberdade**

Da dinâmica plana de corpos rígidos no referencial local (móvel, não inercial) do corpo, tem-se as equações de Newton-Euler [15] simplificadas, que caracterizam os respectivos acoplamentos entre as acelerações de translação e as velocidades de translação e rotação,

$$\begin{cases} \dot{v}_x = a_x + v_y \omega_z \\ \dot{v}_y = a_y - v_x \omega_z \\ \dot{\omega}_z = \alpha_z \end{cases} \quad (52)$$

Então, dados  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$  e  $\alpha_z(t)$ , tem-se

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0) + \int a_x(t) + v_y(t) \omega_z(t) dt \\ v_y(t) &= v_y(0) + \int a_y(t) - v_x(t) \omega_z(t) dt \\ \omega_z(t) &= \omega_z(0) + \int \alpha_z(t) dt \end{aligned} \quad (53)$$

e incluindo o ângulo de guinada e as transformações de coordenadas do referencial local para o inercial, tem-se

$$\psi = \int \omega_z dt + \psi(0), \quad (54)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = v_X = (\cos \psi) v_x - (\sin \psi) v_y \\ \dot{Y} = v_Y = (\sin \psi) v_x + (\cos \psi) v_y \end{cases} \quad \text{e} \quad (55)$$

$$\begin{cases} X = \int v_X dt + X(0) \\ Y = \int v_Y dt + Y(0) \end{cases}, \quad (56)$$

que determinam a atitude e trajetória do corpo no plano, ou seja um modelo de 3 graus de liberdade: as velocidades longitudinal ( $v_x$ ), lateral ( $v_y$ ) e angular de guinada ( $\omega_z$ ) no referencial local; e 6 variáveis de estado: as três velocidades ( $v_x$ ,  $v_y$  e  $\omega_z$ ), os



deslocamentos no referencial global (X, Y) e a atitude em guinada ( $\psi$  - o ângulo do eixo x local com o eixo X global ).

Para que este modelo possa ser empregado de modo a representar um veículo devem ser determinadas as acelerações longitudinal, lateral e angular que dependem dos seus sistemas e componentes constituintes, de acordo com o tratado nos itens anteriores. Assim, empregando os modelos independentes para as dinâmicas longitudinal e lateral apresentados, considerando os devidos acoplamentos característicos da dinâmica de corpo rígido, e principalmente a variação de velocidade, inexistente na dinâmica lateral linear, pode-se estabelecer o modelo para as **dinâmicas longitudinal e lateral acopladas**, a partir da “união” dos modelos desenvolvidos neste capítulo.

Considerando a variação de velocidade no modelo para a dinâmica lateral, mas mantendo a hipótese de pequenos ângulos de deriva (modelo linear para geração de força lateral nos pneus), tem-se um modelo não linear no qual as acelerações lateral e de guinada dependem do inverso da velocidade longitudinal instantânea.

Relaxando as hipóteses de pequenos ângulos de ataque e de guinada, a trajetória do veículo no plano é definida por

$$\begin{cases} \dot{X} = (\cos \psi) v_x - (\sin \psi) v_y \\ \dot{Y} = (\sin \psi) v_x + (\cos \psi) v_y \end{cases} \quad (57)$$

Assim, o **modelo de estado não linear acoplado para a dinâmica plana com 3 graus de liberdade**: velocidade longitudinal, velocidade lateral e velocidade de guinada, e 6 variáveis de estado (as 3 velocidades e os 2 deslocamentos no referencial global e a atitude em guinada), nas quais os parâmetros podem ser obtidos a partir de testes específicos com o veículo, possibilitando, aplicado um procedimento de identificação paramétrica, a completa calibragem do modelo aqui apresentado e a caracterização completa das dinâmicas longitudinal e lateral de um veículo terrestre, adotando uma representação físico-matemática simplificada, mas suficiente para o tratamento do problema de controle de trajetória, incluindo os seus principais elementos de forma objetiva e direta.

Nota-se que no modelo acoplado deve ser considerada a interação existente entre as dinâmicas longitudinal e lateral associada às características de geração de

força nos pneus, que possuem capacidade limitada pelos seus “círculos de aderência” [31]. Até aqui foi suposto comportamento independente dos pneus com relação às solicitações de força de tração/frenagem e de força lateral. As condições de uso dos pneus podem ser determinadas pelo modelo apresentado e sua pertinência verificada, de acordo com os limites ditados por suas capacidades de aderência.

Dadas as não linearidades associadas ao modelo com as dinâmicas acopladas, a análise empregando procedimentos analíticos se torna complexa ou mesmo inexistente. A abordagem viável neste caso é a simulação computacional (solução numérica das equações e interpretação dos seus resultados). Os desempenhos encontrados a partir dos modelos simplificados lineares e desacoplados devem ser empregados para verificação da validade desses modelos e validação do modelo completo não linear nas mesmas condições de operação, assim como base para interpretação do comportamento dinâmico do veículo representado pela **dinâmica plana acoplada**. Tais análises, assim como a calibragem do modelo apresentado, não serão aqui tratadas.

#### 4.2.1

##### Modelo Matlab/Simulink® e simulações

Devido à extensão do modelo de dinâmica lateral e à elevada quantidade de imagens que o compõem, os detalhes do modelo Simulink® da dinâmica lateral encontram-se no Apêndice 3. A Figura 4-14 apresenta os blocos principais que compõem o modelo Simulink® da dinâmica lateral.

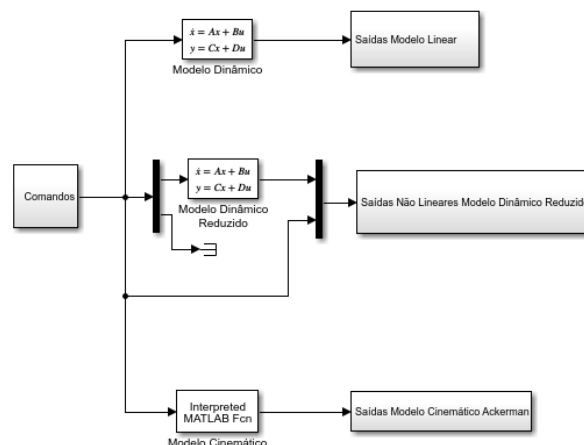
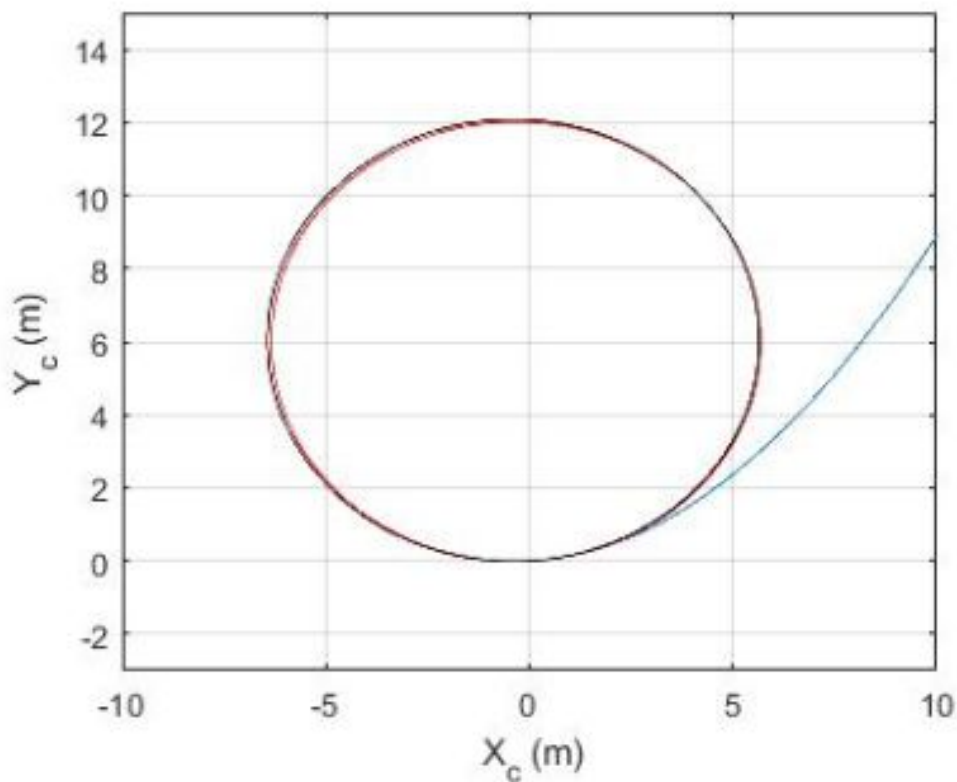


Figura 4-14: Modelo simulink®, blocos da dinâmica lateral

A Tabela 4-2 contém os parâmetros utilizados na simulação do teste *skidpad* para efeitos de comparação com o teste *skidpad* realizado em pista. A Figura 4-15 apresenta o resultado da simulação.

**Tabela 4-2: Parâmetros da simulação da dinâmica lateral (*skidpad*)**

Massa do kart (com piloto)	$m$	207 kg
Velocidade	$V_x$	6 m/s
Percentual do ângulo de esterçamento máximo	$dS$	1/3
Ângulo de esterçamento máximo	$dm$	30 graus
Distância do eixo dianteiro ao centro de gravidade	$l_d$	0,654 m
Distância do eixo traseiro ao centro de massa	$l_t$	0,396
Raio de giração em guinada	$k$	0,466
Coefficiente de rigidez lateral pneu dianteiro	$C_d$	103 185 N/rad
Coefficiente de rigidez lateral pneu traseiro	$C_t$	158 732 N/rad

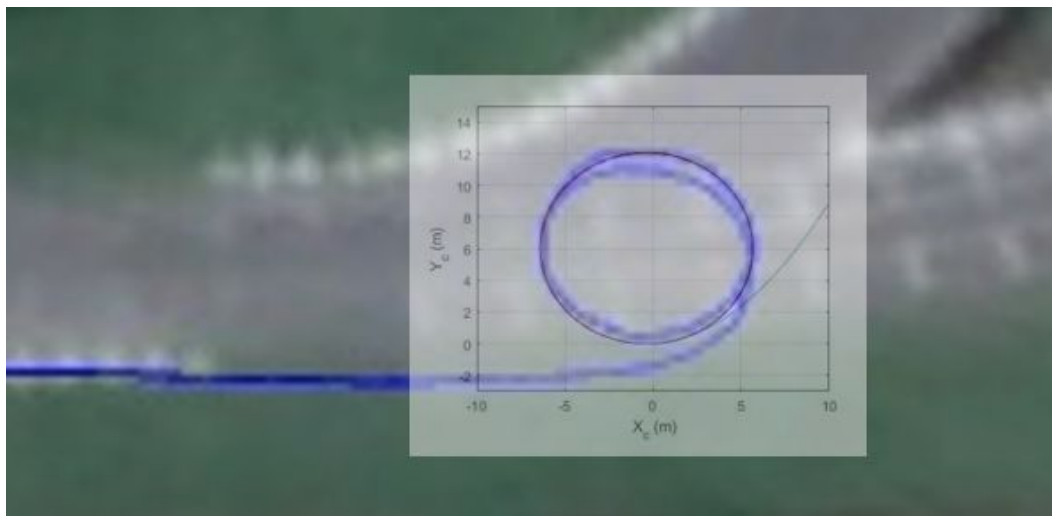


**Figura 4-15: Simulação do teste *skidpad***

A linha azul representa o resultado da simulação do modelo linear expandido considerando as equações (37) (matriz 5x5), válido somente para pequenos ângulos. A linha preta representa o resultado da simulação do modelo

cinemático considerando o momento a partir da geometria de Ackerman, sendo válido para qualquer velocidade ou trajetória não linear cuja trajetória seja comparável com a do modelo dinâmico não linear para pequenas velocidades. A linha vermelha representa o modelo de dinâmica linear e trajetória não linear considerando as equações (34) (matriz 2x2) com a variável adicional  $\psi$  obtida pela integração da velocidade angular de guinada.

A Figura 4-16 apresenta uma sobreposição em mesma escala de imagens, entre os resultados do teste *skidpad* simulado e o teste *skidpad* realizado em pista.



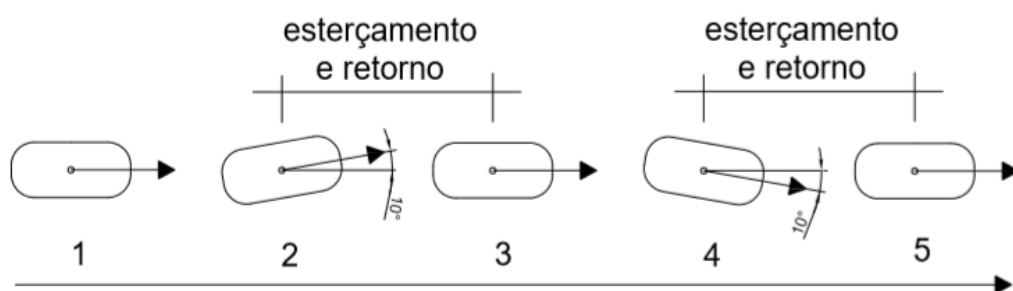
**Figura 4-16: Imagens sobrepostas do teste *skidpad* experimental e simulado**

Tem-se, portanto, uma simulação computacional de dinâmica lateral que acompanha satisfatoriamente os resultados obtidos experimentalmente na pista do kartódromo, através do teste *skidpad*.

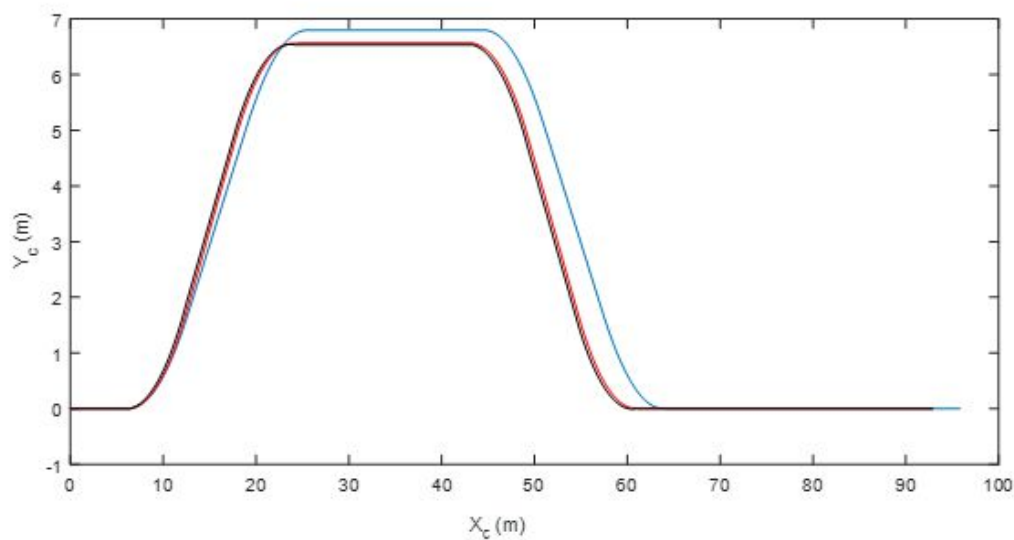
Realizou-se também uma simulação do movimento típico de ultrapassagem entre veículos. O piloto inicialmente com o volante na posição normal, esterça-o para um lado de sua escolha com intensidade e período determinado e então retorna-o à posição normal. Decorrido tempo de ultrapassagem de um determinado obstáculo, esterça o volante novamente para o lado oposto ao inicial, com mesma intensidade e período, a fim de retornar à pista na qual se encontrava originalmente. Este é um movimento muito comum tanto para karts como para automóveis de passeio.

A Figura 4-17 apresenta a sequência de posicionamento das rodas para o movimento de ultrapassagem e a Figura 4-18 apresenta o resultado da simulação do movimento de ultrapassagem em acordo com os parâmetros estabelecidos na

Tabela 4-3. Os parâmetros característicos do kart são os mesmos apresentados na Tabela 4-2.



**Figura 4-17: Sequência dos esterçamentos das rodas para o movimento de ultrapassagem**



**Figura 4-188: Simulação de movimento de ultrapassagem**

**Tabela 4-3: Parâmetros da simulação do movimento de ultrapassagem**

Percentual do ângulo de esterçamento máximo	$dS$	1/3
Ângulo de esterçamento máximo	$dm$	30 graus
Período de esterçamento e retorno	$dt$	1 s
Período de simulação	$Tf$	60 s

## 5

### Simulações com motorização elétrica

Com o modelo da dinâmica longitudinal validado experimentalmente, fez-se a substituição do modelo do motor a combustão por um modelo de motor elétrico, a fim de simular e analisar resultados. Conforme visto no capítulo 1, as características das baterias são uma questão relevante, pois há limites para a introdução de massa e volume de baterias em um veículo. O intuito da modelagem com o motor elétrico é, portanto, o de otimizar a relação entre a massa total do kart e a potência do motor, mantendo a autonomia do kart condizente com a prática do kartismo recreativo.

A Tabela 5-1 apresenta massas totais de karts providos de motores a combustão, para fins de comparação com massas de karts providos de motores elétricos apresentadas na Tabela 5-2.

**Tabela 5-1: Massas de karts com motores a gasolina**

Motor a gasolina	Potência (hp)	Massa do kit motor a gasolina (kg)	Massa tanque cheio (kg)	Soma das massas motor + tanque (kg)	Massa total kart com piloto (kg)
Honda 4T GX160	7	15	3	18	182
Honda 4T GX390	13	35	8	43	207
Honda 4T GX390 preparado 18 hp	18	35	8	43	207
Honda 4T GX390 preparado 21 hp	21	35	8	43	207
KTT 2T 125 cc c/ radiador	30	15	8	23	187
Parila 2T 125 cc c/ radiador	33	16	8	24	188

**Tabela 5-2: Massas de karts com motores elétricos**

Motor elétrico	Potência (hp)	Massa do kit motor elétrico (kg)	Massa de baterias íons de lítio para autonomia 0,5 h (kg)	Soma das massas motor + baterias (kg)	Massa total kart com piloto (kg)
ME0709 48 V - CW	8	13	24	37	201
-	13	17	39	56	220
-	21	17	63	80	244
-	33	17	98	115	279
Memória de cálculo das unidades necessárias de baterias íons de lítio 18650					
Potência (hp)	Potência (W)	Autonomia (h)	Wh	Para 90% de eficiência (Wh)	Unidades de baterias tipo 18650 (6 Wh/unidade)
8	5 966	0,5	2 983	3 314	552
13	9 694	0,5	4 847	5 386	898
21	15 660	0,5	7 830	8 700	1 450
33	24 608	0,5	12 304	13 671	2 279

Observa-se pelas Tabelas 5-1 e 5-2 a maior massa nos karts providos de propulsão elétrica, se comparados aos karts com motorização a combustão de potência similar. Observa-se também que, quanto maior for a potência do motor, maior é a diferença entre as massas totais do veículo. Para os karts de alta potência motorizados com cerca de 30 hp, o aumento de massa para uma versão elétrica pode chegar a 85 kg, um valor bastante significativo. Por outro lado, o desempenho de um motor elétrico tem características diferentes das de um motor a combustão: motores elétricos têm alto torque de partida, característica vantajosa para karts recreativos.

Assim, torna-se bom auxiliar ao projeto de um kart elétrico, o desenvolvimento do modelo computacional do comportamento dinâmico de um kart com base em medições experimentais, tornando-se possível a configuração otimizada sem a necessidade de construção de um protótipo.

## 5.1

### Modelo do motor elétrico

Segundo [26], em um motor elétrico, o torque gerado na ponta do eixo é função da tensão aplicada ( $V$ ) no motor, e da velocidade angular do motor ( $\omega_m$ ), conforme apresenta a equação (58).

$$T_m = k_v V - k_\omega \omega_m \quad (58)$$

Onde:

$T_m$  = torque no eixo do motor

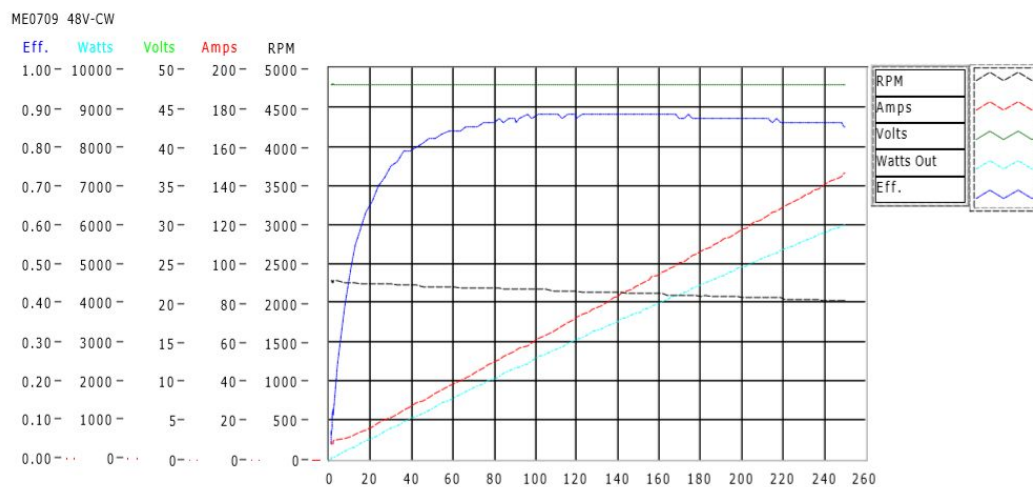
$V$  = tensão elétrica em volts aplicada no motor

$\omega_m$  = velocidade angular do eixo do motor

$k_v$  = parâmetro característico do motor (Nm/V), ganho em tensão do motor.

$k_\omega$  = parâmetro característico do motor ( $\frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}}$ ), perda em velocidade angular.

Para a construção do modelo dinâmico será considerado um motor elétrico existente no mercado. A Figura 5-1 apresenta as curvas características fornecidas pelo fabricante do motor ME0709 Electricmotorsport.



**Figura 5-1: Curvas de desempenho do motor ME0709**

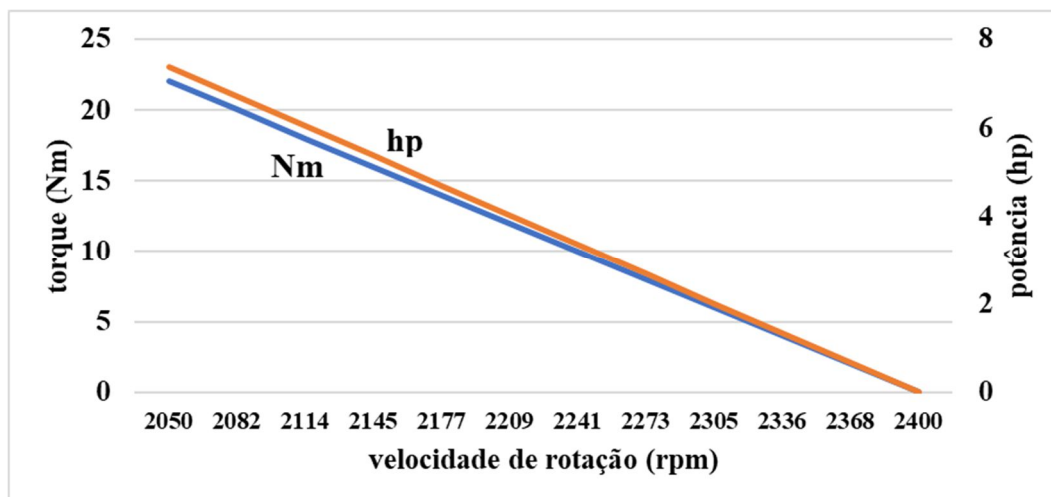
Fonte: [www.electricmotorsport.com](http://www.electricmotorsport.com)

A fim de observar as curvas características de rpm x torque e potência do motor elétrico ME709 necessárias ao modelo computacional, realizou-se a discretização de pontos das curvas da Figura 5-1, apresentado na Tabela 5-3, e construíram-se as curvas de desempenho desejadas, apresentadas na Figura 5-2.



**Tabela 5-3: pontos discretizados da Figura 5-1**

Motor elétrico ME0709							
Ponto	rpm	Nm	rad/s	$W_{\text{eff}}$	$E_{\text{ff}}$	$W_{\text{total}}$	hp
1	2 050	22	215	4723	0,8587	5 500	7,38
2	2 082	20	218	4360	0,8720	5 000	6,71
3	2 114	18	221	3984	0,8854	4 500	6,03
4	2 145	16	225	3595	0,8987	4 000	5,36
5	2 177	14	228	3192	0,9120	3 500	4,69
6	2 209	12	231	2776	0,9253	3 000	4,02
7	2 241	10	235	2347	0,9387	2 500	3,35
8	2 273	8	238	1904	0,9520	2 000	2,68
9	2 305	6	241	1448	0,9653	1 500	2,01
10	2 336	4	245	870	0,8700	1 000	1,34
11	2 368	2	248	375	0,7500	500	0,67
12	2 400	0	251	3	0,2500	10	0,01

**Figura 5-2: Curvas características do motor ME0709**

A partir de dois pontos escolhidos aleatoriamente de velocidade angular e torque relacionados na Tabela 5-3, foi possível determinar os parâmetros característicos do motor  $k_v$  e  $k_\omega$  fazendo-se uso da equação (58). Obtiveram-se os valores  $k_v = 2,4 \text{ Nm/V}$  e  $k_\omega = 4,3 \text{ Nm/rad/s}$ .

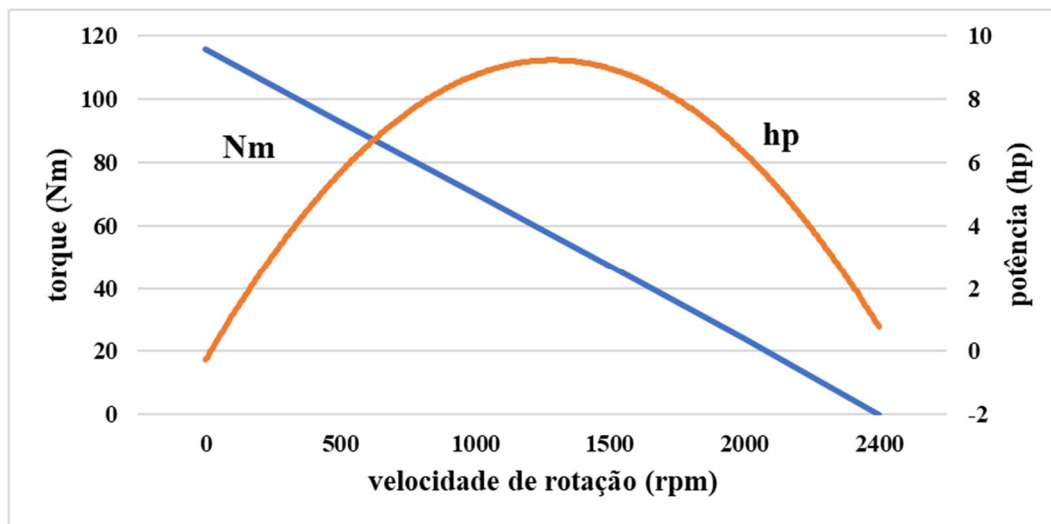
Considerando-se a relação linear da equação (59) pode-se extrapolar o valor do torque máximo para velocidade angular nula e, considerando-se também a relação

$$P_m = T_m \cdot \omega_m \quad (59)$$

onde  $P_m$  é a potência do motor, pode-se extrapolar os valores de potência. A Tabela 5-4 apresenta os pontos da extrapolação e a Figura 5-3 as curvas características geradas.

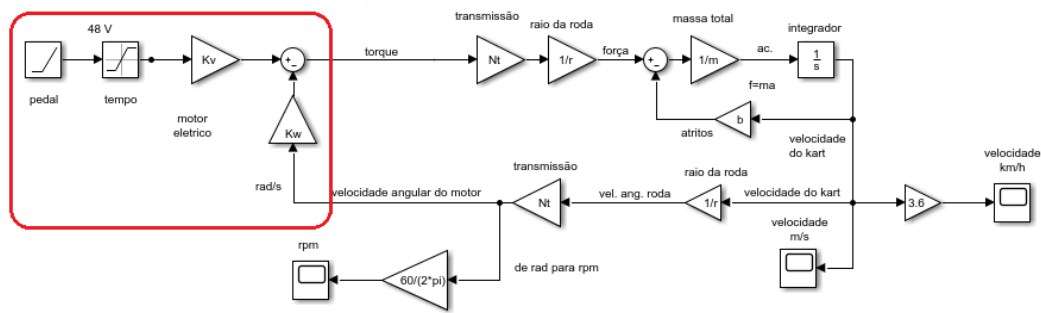
**Tabela 5-4: Extrapolação de pontos coletados da Figura 5-2**

ME0709 Extrapolação							
Pontos	rpm	Nm	rad/s	$W_{\text{eff}}$	$E_{\text{ff}}$	$W_{\text{total}}$	hp
1	0	116	0	0	0	0	0,0
2	500	93	52	4 869	0,85	4 139	5,6
3	1 000	70	105	7 330	0,85	6 231	8,4
4	1 500	47	157	7 383	0,85	6 275	8,4
5	2 000	24	209	5 027	0,85	5 900	7,9
6	2 400	0	251	3	0,25	10	0,0



**Figura 5-3: Curvas características do motor ME0709 extrapoladas**

Conhecidos os fatores  $k_v$  e  $k_\omega$  do motor ME0709, construiu-se um modelo Simulink® do motor conforme a equação (58), e substituiu-se o modelo de motor a combustão pelo modelo de motor elétrico junto ao modelo de dinâmica longitudinal. A Figura 5-4 apresenta o modelo Simulink® da dinâmica longitudinal com o modelo do motor elétrico em substituição ao modelo do motor a combustão.



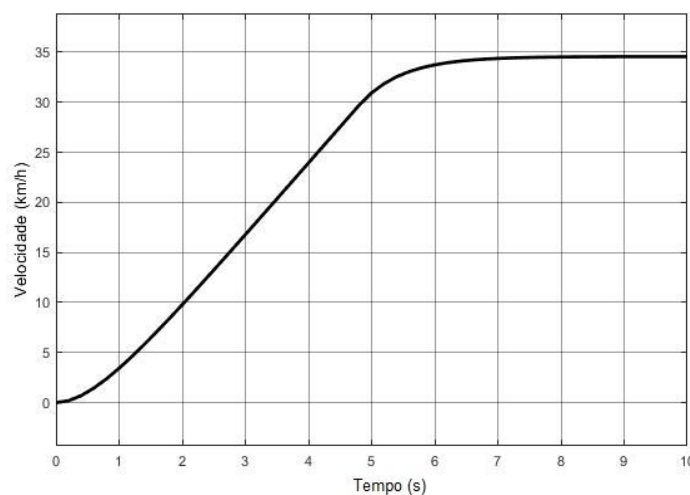
**Figura 5-4: Modelo simulink® da dinâmica longitudinal com motor elétrico**

## 5.2

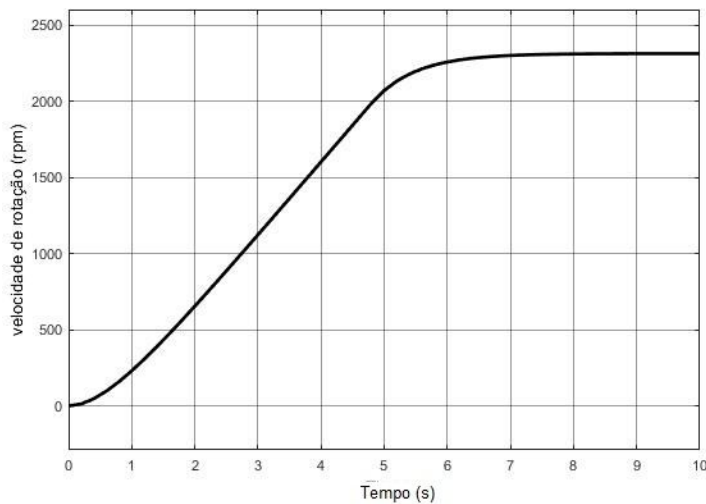
### Simulação da dinâmica longitudinal com motor elétrico ME0709

Introduzidas as características do motor ME0709 no modelo computacional apresentado na Figura 5-4, obtiveram-se as velocidades atingidas pelo kart e as respectivas velocidades de rotação do motor ao longo do tempo. A massa do conjunto considerada para esta simulação foi de 201 kg, de acordo com o previsto na Tabela 5-2.

A Figura 5-5 apresenta o resultado da simulação de desempenho de aceleração do kart e a Figura 5-6 apresenta a simulação do desempenho da velocidade de rotação do motor.



**Figura 5-5: Simulação da aceleração do kart**



**Figura 5-6: Simulação da rotação do motor**

A velocidade máxima de 35 km/h atingida em 7 s é coerente com o esperado de um kart elétrico recreativo equipado com um motor de 8 hp. Não há dados experimentais disponíveis para uma comparação direta.

### 5.3

#### Potência elétrica

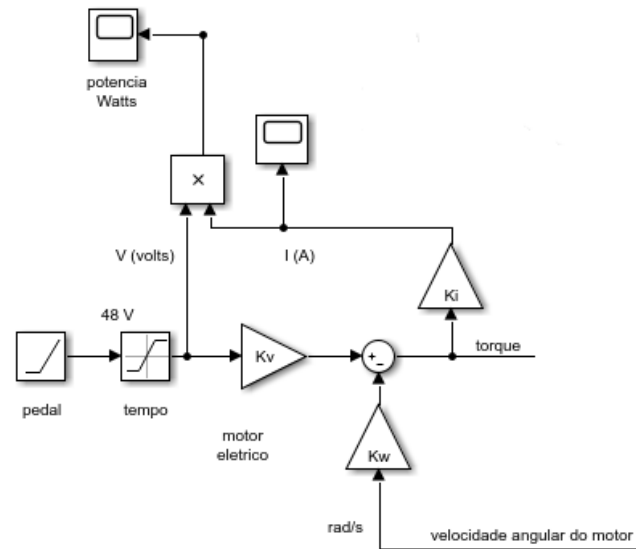
A curva característica do motor elétrico ME0709 apresentada na Figura 5-1 mostra uma relação linear entre a corrente elétrica ( $I$ ) e o torque ( $T$ ). Esta relação se dá conforme a equação (60), onde  $K_I$  é uma constante de valor  $K_I = 6 \text{ A/Nm}$  para o motor ME0709.

$$I = T \times K_I \quad (60)$$

A potência elétrica (W) é dada pelo produto entre corrente ( $I$ ) e tensão elétrica ( $V$ ). Assim,

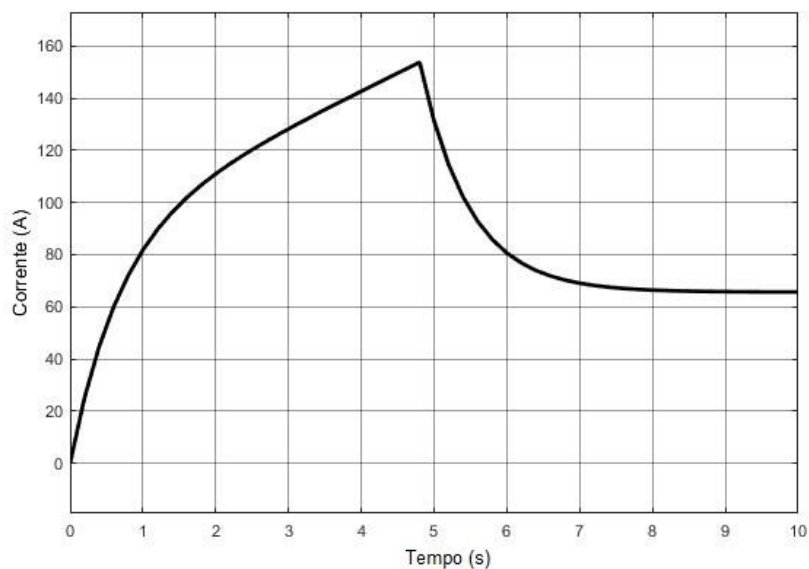
$$P = (T \times K_I) \times V \quad (61)$$

A Figura 5-7 apresenta o modelo Simulink® da equação (x) utilizando-se dos valores de torque e tensão elétrica gerados pelo modelo do motor elétrico (Figura 5-4)

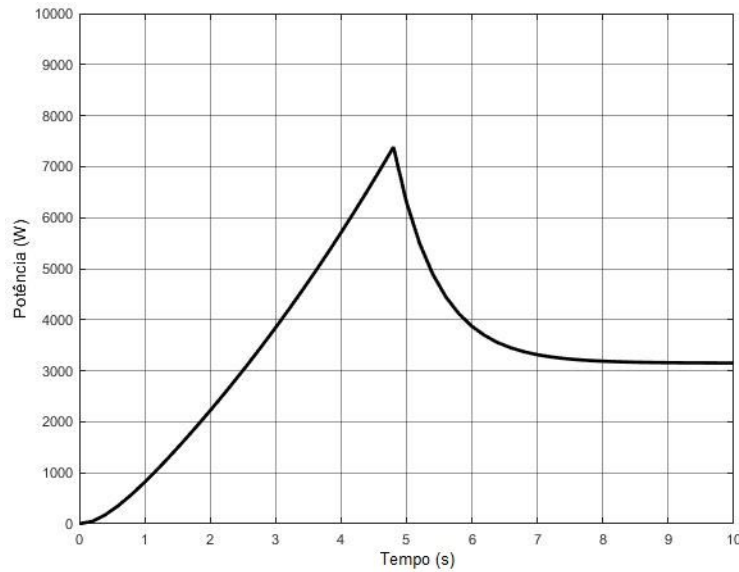


**Figura 5-7: Modelo Simulink® para obtenção da potência elétrica consumida pelo motor elétrico.**

A Figura 5-8 mostra o resultado da simulação de corrente elétrica instantânea do modelo Simulink® apresentado na Figura 5-7 e a Figura 5-9 mostra o resultado da simulação de potência elétrica instantânea do modelo Simulink® apresentado na Figura 5-7.



**Figura 5-8: Simulação de corrente elétrica instantânea.**



**Figura 5-9: Simulação de potência elétrica instantânea.**

Durante a partida o motor demandou uma corrente de cerca de 150 A e potência de cerca 7 500 W e, após 7 segundos, momento em que o veículo se estabiliza em sua velocidade máxima, a corrente e a potência entram em regime estacionário de aproximadamente 65 A e 3 000 W respectivamente.

#### 5.4

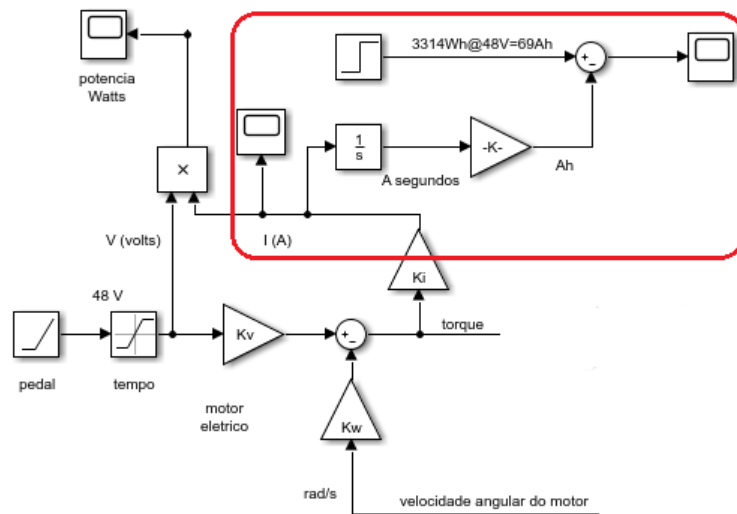
##### Consumo da bateria

A integração (ou integral) da corrente elétrica ( $I$ ) no tempo (s) resulta na carga  $Q$  consumida em As (amperes x segundo) que se converte para Ah (amperes x hora) dividindo-se por 3 600. Ou seja,

$$Q(t) = \int_0^t \frac{I(\tau) d\tau}{3600} \quad (62)$$

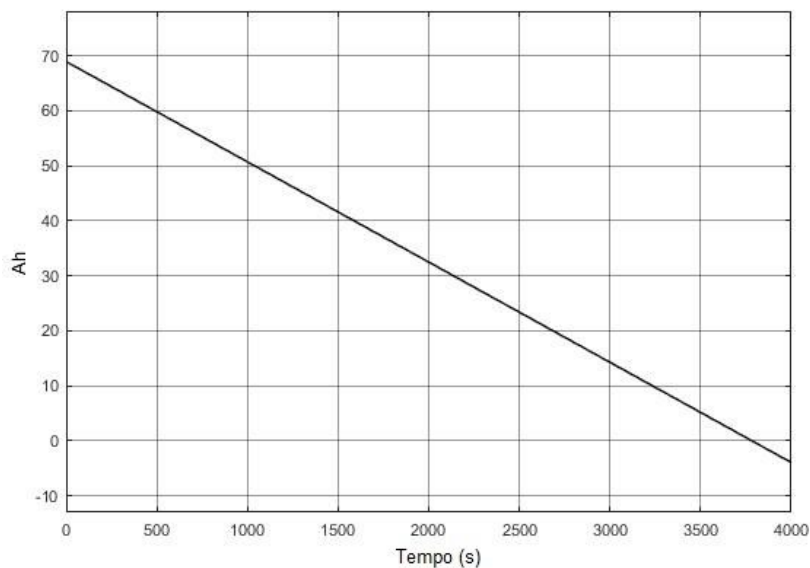
Conhecendo-se o valor da corrente ( $I$ ) no motor ao longo do tempo (s), e consequentemente o consumo de carga ( $Q$ ) ao longo do tempo ( $t$ ), pode-se prever a duração da bateria, a partir da carga inicial conhecida  $Q_0$ .

A Figura 5-10 apresenta o modelo simulink<sup>®</sup> para obtenção das características do consumo de baterias.



**Figura 5-10: Modelo simulink® para característica do consumo de bateria.**

A Figura 5-11 apresenta o resultado da simulação de carga da bateria com o tempo prolongado para 4 000 segundos. A carga da bateria começa com um total de 69 Ah e chega a zero em aproximadamente 3 600 segundos ou 1 hora.



**Figura 5-11: Simulação de consumo da bateria**

Observou-se diferença significativa entre a previsão de autonomia prevista na memória de cálculo da Tabela 5-2, de meia hora, e a autonomia prevista na simulação, que alcançou uma hora.

Esta diferença é coerente e esperada, pois a simulação considera a potência instantânea do motor mediante as características do kart, enquanto as previsões de

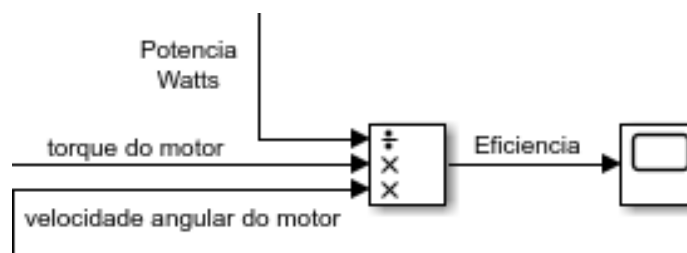
autonomia apresentadas na Tabela 5-2 foram calculadas de forma aproximada, considerando uma potência média estimada como se a potência nominal do motor estivesse sendo utilizada constantemente ao longo do tempo.

## 5.5 Eficiência do motor elétrico

Com os dados da dinâmica mecânica do motor elétrico, torque ( $\tau$ ) e velocidade angular ( $\omega$ ) e também com os dados da dinâmica elétrica do motor, tensão ( $V$ ) e corrente ( $I$ ), obteve-se a curva característica de eficiência do motor.

A expressão (63) apresenta a forma matemática para a obtenção da curva de eficiência do motor elétrico e a Figura 5-12 apresenta o modelo simulink® para a expressão.

$$Eff. = \frac{T_m \times \omega_m}{P} \quad (63)$$



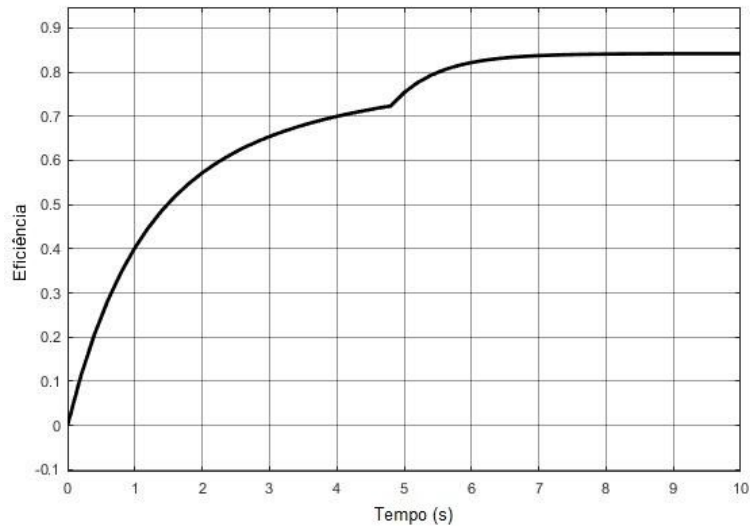
**Figura 5-12: Modelo simulink® da expressão de eficiência do motor elétrico**

Introduziu-se o modelo da Figura 5-12 no modelo de dinâmica longitudinal do kart. A Figura 5-13 apresenta o resultado da simulação.

A curva de eficiência gerada pela simulação do motor elétrico ME0709 (Figura 5-13) apresenta similaridade com a curva de eficiência fornecida pelo fabricante (Figura 5-1) do motor em questão.

O valor da eficiência em regime permanente obtido pela simulação é de aproximadamente 85%, e coincide com o observado na curva de eficiência fornecida pelo fabricante (Figura 5-1).

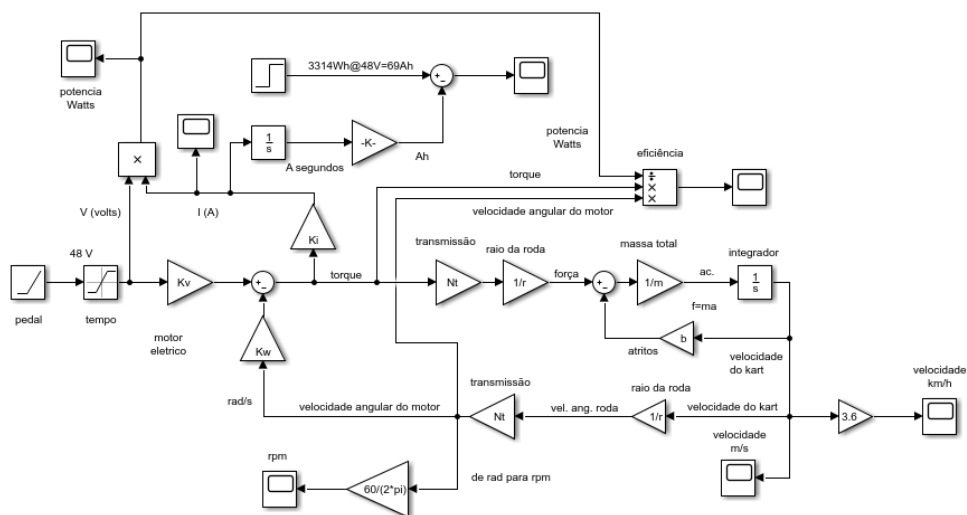




**Figura 5-13: Simulação de eficiência do motor elétrico**

## 5.6 Modelo completo

A Figura 5-14 apresenta uma visão completa do modelo Simulink® de dinâmica longitudinal de um kart com propulsão elétrica.



**Figura 5-14: Modelo de dinâmica longitudinal de um kart elétrico**

Para simulação do kart Mini M2 equipado com um motor elétrico ME0709 da Electricmotorsport utilizaram-se os valores da Tabela 5-5 para os parâmetros da simulação:

**Tabela 5-5: Parâmetros da simulação; kart Mini M2 com motor ME0709**

Massa total do veículo	$m$	201 kg
Relação fixa da transmissão	$N_t$	3,46
Momento de inércia das rodas dianteiras	$J_r$	0,033 kg/m <sup>2</sup>
Momento de inércia da transmissão (inclui rodas traseiras)	$J_t$	0,046 kg.m <sup>2</sup>
Raio efetivo das rodas traseiras	$r_{eff}$	0,137 m
Coeficiente de atrito	$b$	0,54 kg.m <sup>2</sup>
Aceleração da gravidade	$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>
Carga máxima da bateria	$Q_{batt}$	69 Ah
Diferença de potencial da bateria	$V$	48 V
Parâmetro característico do motor ME0709.	$K_v$	2,4 Nm/V
Parâmetro característico do motor ME0709.	$K_w$	0,43 Nm/rad/s
Parâmetro característico do motor ME0709.	$K_t$	6 A/Nm

## 6

## Conclusões, discussão e trabalhos futuros

### 6.1

### Conclusões

As medições realizadas em bancada para obtenção das características dinâmicas do kart Mini M2, apresentadas no Capítulo 2 e pertinentes ao desenvolvimento do modelo computacional proposto, indicaram valores perfeitamente coerentes e esperados.

O equipamento Alfano<sup>®</sup> Pro III Evo fornece boas indicações para uma análise superficial do desempenho de um kart em pista mas, para efeitos de utilização dos dados indicados para a validação de modelos matemáticos computacionais, fez-se mister os ajustes apontados no Capítulo 3.

Os modelos computacionais de simulação do comportamento dinâmico longitudinal e lateral do kart com motor a combustão apresentaram resultados satisfatórios e obtiveram validação experimental, conforme apresentado no Capítulo 4.

A substituição do modelo do motor a combustão por um modelo de motor elétrico, apresentado no Capítulo 5, caracterizou o início da obtenção de resultados confiáveis e úteis sem a necessidade de comprovação experimental, atingindo-se assim o objetivo primordial da modelagem computacional desenvolvida nesta dissertação.

Conclui-se, portanto, que este trabalho apresentou o desenvolvimento, com base em dados experimentais, de um modelo computacional capaz de simular as características dinâmicas de um kart recreativo convencional.

## 6.2 Discussão

A construção de um kart elétrico é viável tecnicamente, mas sua viabilidade econômica e seu apelo de mercado são assuntos para questionamentos e discussões.

O modelo computacional desenvolvido neste trabalho pode ser utilizado para a escolha de motores de karts dentro das diversas propostas recreativas do veículo em questão, desde os modelos “*indoor*” providos de motores de baixa potência, até os de competição, providos de motores de alta potência. O modelo pode ser útil também na percepção de barreiras tecnológicas ao desenvolvimento de um kart de competição movido a eletricidade, se considerado como premissa obter desempenhos similares aos do mercado de karts movidos a combustão. Não obstante, esta questão é muito subjetiva, pois há uma série de variáveis envolvidas: desempenho longitudinal, desempenho em curvas, autonomia desejada e até mesmo a estética do veículo. Em outras palavras, um kart elétrico de alto desempenho pode não ser competitivo, não pelo desempenho do motor, mas pelo excesso de peso em baterias, considerando-se a realidade tecnológica das baterias recarregáveis disponíveis no mercado consumidor comum.

Observa-se, portanto, a importância dos modelos computacionais, tais como o apresentado neste trabalho, para a construção de novos veículos a serem introduzidos no mercado.

## 6.3 Trabalhos futuros

Como primeiro passo para a aprimoração do modelo computacional desenvolvido, sugere-se medir experimentalmente os ângulos de deriva (*slip angle*) dos pneus dianteiros e traseiros de um kart. A medição desta característica não é simples, sendo sugestão de tema para uma dissertação específica.

Um segundo passo para a aprimoração do modelo computacional apresentado é o acoplamento entre os modelos de dinâmica longitudinal e lateral, promovendo um modelo único capaz de simular ambas as dinâmicas simultaneamente.

Com o modelo computacional capaz de simular a dinâmica de um kart, propõem-se projetos para avanços tecnológicos significativos ao kartismo que

seriam muito dispendiosos se desenvolvidos apenas com a construção de protótipos. Entre eles destacam-se:

- sistema de frenagem sem bloqueio e com recuperação de energia;
- diferencial eletrônico; e
- sistema de estabilidade eletrônica.

#### a) Sistema de frenagem sem bloqueio e com recuperação de energia

Nos automóveis à combustão o ABS existe desde os anos 70, mas um automóvel elétrico provido de motores independentes em cada roda (*in-wheel-system*) traz ao conceito do ABS uma nova possibilidade: a inversão controlada do torque do motor para a realização da frenagem. Esta inversão controlada pode não somente evitar o bloqueio indesejado das rodas em uma frenagem, como pode também transformar a energia cinética consumida na frenagem em energia elétrica, caracterizando assim um sistema KERS (*kinectic energy recovery system*).

Os conceitos do ABS e do KERS também podem ser aplicados em um kart elétrico, mesmo em um modelo monomotor acoplado a um eixo rígido traseiro, tal como é o kart tradicional. Para a aplicação destes dois conceitos em um kart não é necessário o desenvolvimento de um sistema de transmissão tão sofisticado quando a da tração *in-wheel-system*. A Figura 6-1 apresenta uma forma esquemática de um kart elétrico onde os conceitos do ABS e do KERS podem ser desenvolvidos.

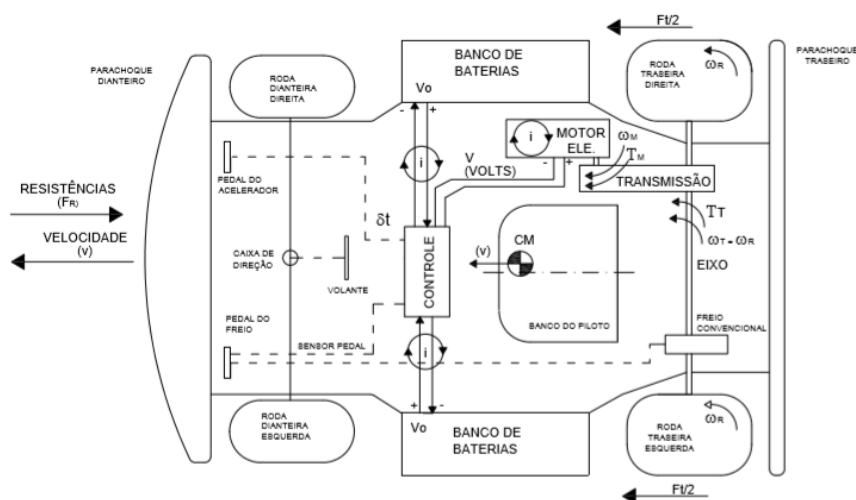
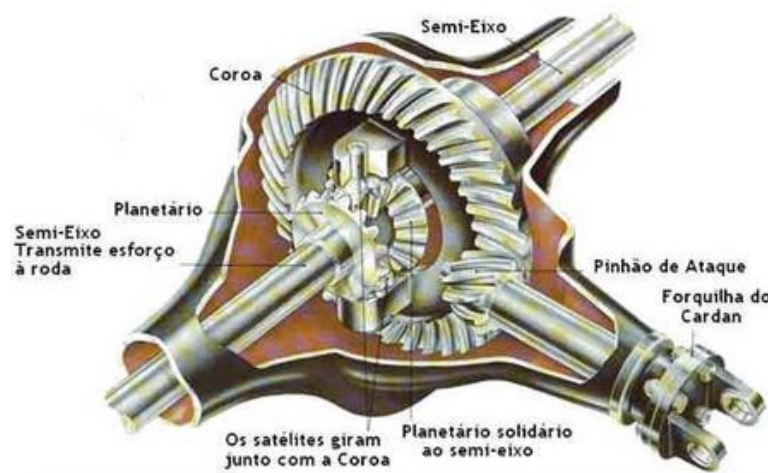


Figura 6-1: Esquema de um kart elétrico monomotor

## b) Diferencial eletrônico

Quando um automóvel comum de quatro rodas está fazendo uma curva, não somente a angulação das rodas dianteiras são diferentes entre si, como também as velocidades das quatro rodas são diferentes entre si. Os automóveis de tração traseira normalmente têm rodas dianteiras livres e independentes, portanto as velocidades das rodas dianteiras resultam das forças de atrito com o solo. Já as rodas traseiras têm suas velocidades definidas pelo resultante das forças de atrito com o solo e do torque proveniente da transmissão. Para permitir velocidades distintas nas rodas traseiras, o torque é transmitido através de um dispositivo mecânico chamado diferencial. A Figura 6-2 apresenta um diferencial típico de automóveis com tração traseira.



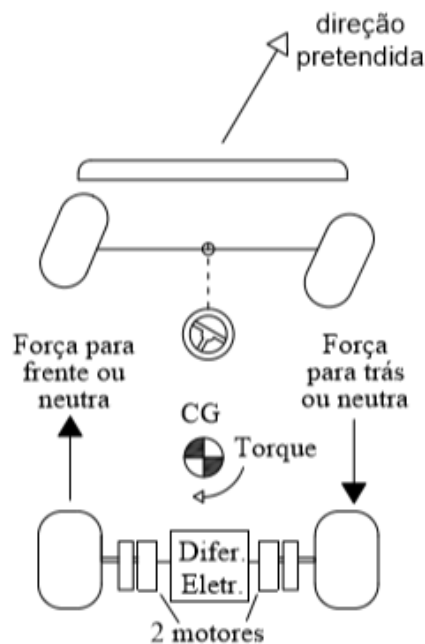
**Figura 6-2: Mecanismo diferencial comum**

Fonte: <https://namecanica.wordpress.com/2012/09/24/diferencial-automotivo/>

O diferencial permite ao automóvel comum percorrer curvas sem arraste nas rodas de tração, algo que, como visto no capítulo 2º, também ocorre no kart, mas de maneira diferente da dos automóveis comuns e sem um mecanismo diferencial.

A proposta de um sistema de diferencial eletrônico para um kart elétrico é também uma proposta de mudança de concepção da transmissão mecânica. Não se trata de um mecanismo diferencial propriamente dito, mas da inserção de dois motores elétricos, um acoplado a cada uma das rodas traseiras do kart, em substituição ao eixo rígido existente. Isto, se provado eficiente, causaria uma mudança de paradigma para o kartismo.

A inserção de dois motores independentes possibilita a variação das velocidades das rodas traseiras do veículo em curva, tal como ocorreria com o diferencial mecânico, mas neste caso o torque da transmissão tem um papel mais determinante. A Figura 6-3 apresenta um kart de dois motores em curva à direita com um diferencial eletrônico hipotético, controlando o torque das rodas traseiras de forma a auxiliar o torque de giração do veículo.



**Figura 6-3: Kart hipotético com dois motores**

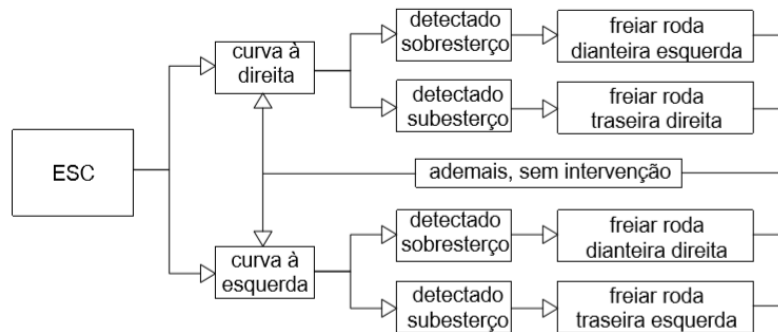
Portanto, sugere-se o desenvolvimento de um modelo matemático computacional capaz de simular um kart de dois motores com diferencial eletrônico para observação e análise de seu comportamento dinâmico.

### c) Sistema de estabilidade eletrônica.

Nos automóveis atuais a presença de um sistema de estabilidade eletrônica ESC (*electronic stability control*) é comum. O sistema funciona por via do ABS, atuando nos freios do automóvel de acordo com as demandas de um computador, que compila informações de sensores de aceleração e de posição do volante, sendo assim capaz de determinar se o veículo está derrapando por sobresterçamento ou substerçamento. Na linguagem coloquial, derrapagem por sobresterçamento ocorre quando as rodas traseiras derrapam fazendo um “cavalo de pau”, e a

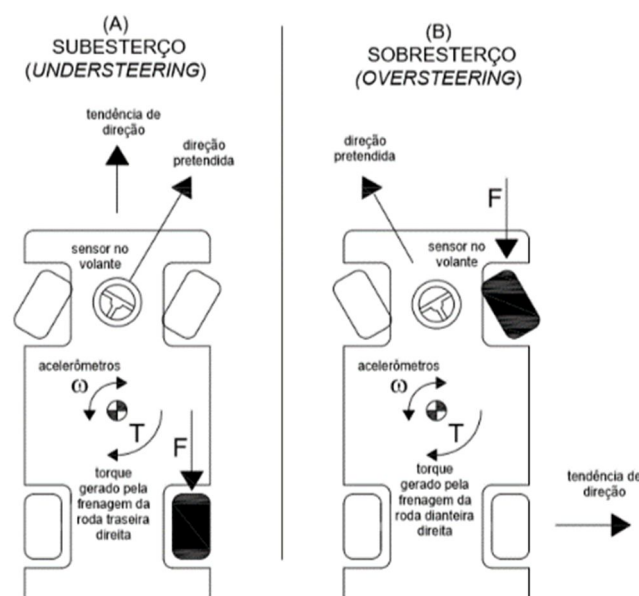
derrapagem por subesterçamento ocorre quando as rodas dianteiras derrapam e o veículo “sai de frente”.

A Figura 6-4 apresenta um fluxograma da lógica de funcionamento do ESC.



**Figura 6-4: Fluxograma da lógica de funcionamento de um sistema ESC.**

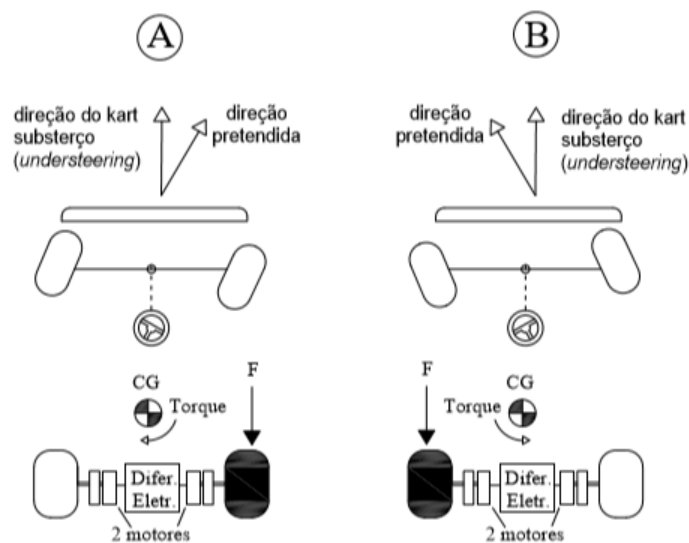
A Figura 6-5 apresenta um exemplo do funcionamento de um ESC. Em (A) o computador identifica que o veículo está derrapando de frente (*understeering*) e demanda o acionamento do freio da roda traseira interna à curva de direção pretendida, causando torque no centro de gravidade do veículo a fim de corrigir sua trajetória. Em (B) o computador identifica que o veículo está derrapando de traseira (*oversteering*) e demanda o acionamento do freio da roda dianteira externa à curva, causando torque no centro de gravidade do veículo a fim de corrigir sua trajetória.



**Figura 6-5: Exemplificação do sistema ESC**



Não é possível a aplicação de um sistema equivalente ao ESC na mesma forma como se apresenta nos automóveis, em um kart elétrico, pois o kart comum não tem tração ou freios ABS nas rodas dianteiras. Contudo, pode-se desenvolver um sistema de estabilidade eletrônica considerando-se a proposta dos dois motores mecanicamente independentes nas rodas traseiras, tal como exemplificado na sugestão do diferencial eletrônico. A lógica de funcionamento seria semelhante à do ESC dos automóveis, contudo a atuação só seria efetiva para o caso do subesterçamento (*understeering*). A Figura 6-6 apresenta a exemplificação de um sistema de estabilidade eletrônica para um kart elétrico com dois motores. Em (A) o piloto vira o volante para a direita e ocorre a subesterçamento, levando o sistema a frear a roda traseira direita. Em (B) o piloto vira o volante para a esquerda e ocorre a subesterçamento, levando o sistema a frear a roda traseira esquerda. Caracteriza-se assim um sistema de controle de estabilidade para um kart.



**Figura 6-6: Sistema ESC para um kart**

## Referências bibliográficas

- [1] LARMINIE, J.; LOWRY, J. **Electric vehicle technology explained**. Oxford: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [2] SPALDING, L. A. T. **Go kart racing the thrill of racing**. London: Britannica Digital Learning, 2013.
- [3] ROBERT BOSCH GMBH. **Bosch electronic automotive handbook**. Gerlingen: Robert Bosch GmbH, 2002.
- [4] KIENCKE, U.; NIELSEN, L. **Automotive control systems for engine, driveline, and vehicle**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [5] FREITAS, D. Z. **Projeto e análise de eficiência de um sistema integrado roda-motor elétrico com controle de frenagem ABS**, Rio de Janeiro, 2105, 131p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Mecânica. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [6] CARNEY, D. **Toyota unveils more new gasoline ICEs with 40% thermal efficiency**. 2018. Disponível em: <<https://www.sae.org/news/2018/04/toyota-unveils-more-new-gasoline-ices-with-40-thermal-efficiency>>. Acesso em 08 abr. 2019.
- [7] GAINES, L. **The future of automotive lithium-ion battery recycling: charting a sustainable course**. Lemont: Argonne National Laboratory, 2014.
- [8] TAKEI, K.; KUMAI, K.; KOBAYASHI, Y.; MIYASHIRO, H.; TERADA, N.; IWAHORI, T.; TANAKA, T. Cycle lifetime estimation of lithium secondary battery by extrapolation method and accelerated aging test. **Journal of Power Sources**, v.97, p.697-701, 2001.
- [9] JABBEN, J.; VERHEIJEN, E. **Effect of electric cars on traffic noise and safety**. Letter report 680300009. Bilthoven: National Institute for Public Health and the Environment.
- [10] LAURENTINO, L.S.; MARQUES, M.R.C. Impacto ambiental de kartódromos situados na cidade do Rio de Janeiro: monitoramento de BTEX no ar e do nível de ruído. **Química Nova**, v.35, n.9, p.1865-1869, 2012
- [11] DUNN, J.B.; GAINES, L.; BARNES, M.; WANG, M.; SULLIVAN, J. **Material and energy flows int the materials production, assembly, and end-of-life stages of the automotive lithium-ion battery life cycle**. ANL/ESD/12-3. Lemont: Argonne National Laboratory, 2012.

- [12] BATTERY UNIVERSITY. **BU-705: How to recycle batteries**. 2018. Disponível em: <[https://batteryuniversity.com/index.php/learn/article/recycling\\_batteries](https://batteryuniversity.com/index.php/learn/article/recycling_batteries)>. Acesso em: 08 abr. 2019.
- [13] MARKETSANDMARKETS. **Electric vehicle range extender market by type (ice range extender, fuel cell range extender, and others), component (battery pack, generator, power converter, and electric motor), vehicle (pc and cv), and region - global forecast to 2025**. 2018. Disponível em: <<https://www.marketsandmarkets.com/Market-Reports/electric-vehicle-market>>. Acesso em: 08 abr. 2019.
- [14] KARTMINI. **Site institucional**. 2019. Disponível em: <<https://kartmini.com.br>>. Acesso em: 08 abr. 2019.
- [15] JAZAR, R. **Vehicle dynamics theory and application**. 2<sup>nd</sup> ed. New York Heidelberg Dordrecht London: Springer-Verlag, 2014.
- [16] FIA. Comissão Internationale de Karting. **Homologation Form**. N: 24/P/19.
- [17] RAJAMANI, R. **Vehicle dynamics and control**. 2<sup>nd</sup> ed. Mechanical Engineering Series. New York Dordrecht Heidelberg London: Springer-Verlag, 2012.
- [18] HALLIDAY, D; RESNIK, R. **Fundamentos da física**. Volume 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltd., 1983.
- [19] IPQ. INMETRO. **Vocabulário Internacional de Metrologia – Conceitos fundamentais e gerais e termos associados (VIM 2012)**. 1<sup>a</sup>ed. luso-brasileira. Caparica: IPQ, 2012.
- [20] INMETRO. **Sistema Internacional de Unidades (SI)**. 1<sup>a</sup> ed. brasileira da 8<sup>a</sup> ed. do BIPM 2012. Rio de Janeiro: INMETRO, 2012.
- [21] PARDUEMET. **Measuring mass moment of inertia of a wheel – brain waves**. 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=MnrCfa4DOvc>>. Acesso em: 08 abr. 2019.
- [22] ORLANDO, A. F. **Fundamentos da medição**. Mimeo. Rio de Janeiro: Programa Pós MQI – PUC-Rio, 2017.
- [23] DU BOIS, J.; LIEVEN, N.; ADHIKARI, S. Error analysis in trifilar inertia measurements. **Experimental Mechanics**, v. 49, p.533–540, 2009.
- [24] GENTA, G.; DELPRETE, C. Some considerations on the experimental determination of moments of inertia. **Meccanica**, v. 29, n.2, p. 125-141, 1994.

- [25] ALFANO. **Site institucional**. 2019. Disponível em:  
<<http://www.alfano.com>>. Acesso em: 08 abr. 2019.
- [26] HONEYWELL. **Micro switch sensing and control. Hall effect sensing and application**. S.d. Disponível em:  
<<https://sensing.honeywell.com/honeywell-sensing-sensors-magnetoresistive-hall-effect-applications-005715-2-en2.pdf>> Acesso em: 08 abr. 2019.
- [27] ALFANO. **Alfano Chronometric System. Installation of the position sensors**. 2015. Disponível em:  
<[http://www.alfano.com/wp-content/uploads/2013/12/inst\\_sensor\\_positions\\_en.pdf](http://www.alfano.com/wp-content/uploads/2013/12/inst_sensor_positions_en.pdf)>. Acesso em: 08 abr. 2019.
- [28] ABNT. INMETRO. **Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM)**. 3ª ed. brasileira em língua portuguesa. Rio de Janeiro: ABNT, INMETRO, 2003.
- [29] ALFANO. **Alfano Chronometric System. Pro III Evo. Complete Manual**. 2015. Disponível em:  
<[https://www.alfano.co.uk/downloads/Manuals/PRO3\\_EVOv4.2.5\\_EN1.pdf](https://www.alfano.co.uk/downloads/Manuals/PRO3_EVOv4.2.5_EN1.pdf)>. Acesso em: 08 abr. 2019
- [30] SPERANZA, M. **A Engenharia das Corridas de Carro**. Mimeo. Rio de Janeiro: Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) – PUC-Rio, 2013.
- [31] GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. 6. ed. Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.

## Apêndice 1

# Standard 18650 type ion lithium batteries efficiency test to determine energy efficiency and functionality indexes in a recreational 6.5 hp electric go kart

C Sandroni<sup>1</sup>, RF Calili<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro - PUC-Rio,  
Postgraduate Program in Metrology, Rua Marquês de São Vicente,  
225 - 22451-900, Rio de Janeiro - RJ, Brazil

E-mail: [calili@puc-rio.br](mailto:calili@puc-rio.br)

**Abstract.** This article aims to make a comparative qualitative analysis of homogeneity (quality) of three different lots of standard 18650 ion-lithium battery models and evaluate their applicability to a recreational electric go kart with 6.5 hp engine. Each lot had 10 batteries (total 30 units), all tested one by one with the same equipment and under the same temperature conditions. Charging and discharging curves were generated and evaluated to their average storage capacity and their respective calculated volumetric and gravimetric ratios indicating the possible application in an electric go kart.

## 1. Introduction

The pioneering battery "ion lithium" dates back to the year 1912 with the work of the scientist G.N. Lewis [1], but it was only in the 1970s that this type of technology for secondary batteries<sup>1</sup> started to be used in a commercial way serving wireless telephone sets, mobile phones, and other electronic devices. By the end of the 1990s the batteries with this type of technology did not stand out from other technologies, such as the Ni-Cd batteries (nickel-cadmium), the most popular among the family of secondary batteries. Much has changed in the following decade.

One hundred years after G.N. Lewis, in the late 2000s, the South African businessman naturalized American, Elon Musk, proved to the world the technological and economic viability of electricity stored in batteries as a primary source for motor vehicles to replace liquid fuels through TESLA, his designer and builder company of electric cars and batteries. The main secret of the company's success are the ion lithium batteries, developed and built by TESLA itself in partnership with the Japanese SANYO PANASONIC.

The objective of this study is to evaluate some of these batteries for use in an electric go kart, particularly those that are easy to find in Brazil, either as a matter of market supply, either by the attractiveness of its prices.

---

<sup>1</sup> Rechargeable batteries are classified as secondary batteries. Non-rechargeable batteries are classified as primary batteries.

## 2. The tested batteries

Three brands were tested, all existing in the Brazilian market.

- YBF - Referenced in this article as blue.
- HBH - Referenced in this article as yellow.
- SANYO PANASONIC - Referenced in this article as red.

The battery board specifications are shown in Table 1.

With the aid of a Mitutoyo metallic Vernier caliper and a precision scale, average measurements gave the following quantities: height, diameter, volume, and mass. It is noted from Table 2, the values of height, diameter and volume are similar among all batteries, however, the average mass of the red battery is significantly greater than the others.

**Table 1.** Board specifications

Blue	Yellow	Red
3.7 V	4.2 V	3.7 V
8800 mAh	8800 mAh	1800 mAh
China	China	Japan

**Table 2.** Dimensional Data

Parameters	Blue	Yellow	Red
Height (mm)	66.29	65.34	64.90
Diameter (mm)	18.12	18.17	18.00
Volume (mm <sup>3</sup> )	17097	16945	16506
Mass (g)	24.7	24.8	43.1

Clearly noted by figures 1a; 1.b; 1.c there are constructive differences between the batteries, showing differences in mass. The blue battery has only half of its interior volume filled with the functional elements of the battery and the same note on the yellow battery, whilst the red battery is completely filled with functional elements.



**Figure 1.a** Inside view of the blue battery



**Figure 1.b** Inside view of the yellow battery



**Figure 1.c.** Inside view of the red battery

### 3. Methodology and conditions of the test bench

According to [2], it is evident that testing batteries is a complex science whose parameters for results depend on the applications suggested for the battery itself. Therefore, procedures and bench conditions were created to obtain relevant results to the objectives of these tests.

**Equipment used:** Li-Pro Balance Charger - IMAX B6. This type of equipment is commonly used by model car racers for charging and testing the batteries of their vehicles and can be easily found on the national market.

**Initial discharge:** Each battery was subjected initially to a fast-full discharge of 2 A to eliminate residual charge. The data relating to the initial discharge were not collected because they are not relevant to this study. Out of curiosity it can be reported that the batteries do not come with a full charge.

**Parameters for charging:** Immediately after removal of residual charge the battery under test was subjected to the charging procedure, the equipment being set to slow charge of 1 A. The charging data were manually taken from 10 to 10 minutes.

**Parameters for discharging:** Immediately after the machine indicates the completion of charging, the battery was subjected to the full discharge test, being adjusted to slow discharge of 1 A. The discharging data were also taken manually from 10 to 10 minutes.




### 4. Comparative Analysis

One of the most important points of this paper are the results shown in **Table 3**. The calculation of the ratio between the charging capacity of each battery, and its respective volume and also the ratio of each battery charge capacity with its respective mass are indicators of the energy efficiency of the batteries. Red batteries have approximately four (4) times more concentrated energy per liter to about two (2) times more concentrated energy per kg than the blue and yellow batteries.

Another key point is the statistical analysis values, standard deviation and coefficient of variation found in the lots. It identifies that the batch of red batteries is much more homogeneous than the blue and yellow lots.

**Table 3.** Comparisons of stand data

Parameter	Blue Battery	Yellow Battery	Red Battery
Announced capacity	8800	8800	1800
Minimum capacity (mAh)	357	404	1698
Average capacity (mAh)	453	419	1724
Capacity (mAh)	523	444	1757
Standard deviation (mAh)	60	12	17
Variation coefficient (VC)	0.12	0.04	0.02

<b>Homogeneity of lots of batteries, each batch with 10 units each.</b>	 Large random differences	 Small random differences	 Small systematic differences
<b>Nominal voltage (plate)</b>	3.7	4.2	3.7
<b>Average observed voltage</b>	3.2	3.3	3.5
<b>Wh (actual average)</b>	1.46	1.39	6.0
<b>Price R\$/unit</b>	4.03	4.89	15.66
<b>Volume (liter)</b>	0.017	0.017	0.017
<b>Mass (kg)</b>	0.0247	0.0248	0.04314
<b>volumetric density (Wh / liter)</b>	86	82	355
<b>gravimetric density (Wh / kg)</b>	59	56	140
<b>Support 1 A with constant voltage.</b>	up to 10 minutes with 1A and 3,23V	up to 15 minutes with 1A and 3,33V	up to 80 minutes with 3,4V 1A and
<b>Energy efficiency</b>	Low	Low	High

### 5. Applicability to a recreational electric go kart

A recreational go kart has a standard engine of about 6.5 hp or 4,850 watts and the time in a recreational go kart track does not usually exceed 30 minutes. Whereas, crudely, a constant demand of 4,850 watts go kart and 30 minutes of use of the same, there is a need to discharge 2,425 Wh.

The blue battery offers 1.46 Wh which would lead to the need for 1,661 batteries, something impractical to install in a go kart. The yellow battery with its load of 1.39 Wh would require installing 1,745 batteries, something equally impractical. The red battery, with its 6.0 Wh would lead to the need to adapt the kart to receive about 400 batteries, something feasible.

The mass of 400 red batteries gives us a total 17 kg, considerably higher, but comparable in the same order of magnitude to the fuel tank of a go kart powered by gasoline or oil, which are about 8 to 10 liters and weigh filled between 6 and 8 kg.

The theoretical volume occupied by 400 red batteries is 6.8 liters, but this value cannot be taking into consideration for a battery database project, since the charging factor (or coefficient of utilization) of cylindrical batteries aligned next to each other is not of 100%. This factor is critical and depends on the geometric characteristics of the battery bank of the project, but assuming that the project has an occupancy rate of 75%, the 400 batteries occupy a total volume of 8.5 liters which is perfectly compatible with the volume of a fuel tank of 8 or 10 liters of a go kart powered by gasoline.

### 6. Conclusions

We can rule out blue and yellow batteries for use in a recreational electric go kart project with 6.5 hp engine as the volume occupied by the batteries becomes inadequate for the project's purpose.

Considering then the disqualification of the blue and yellow batteries for use in a recreational electric go kart project, and the qualification of the red, we should



move forward with the red batteries in a second session-specific testing to the needs of the project in question involving:

- Battery life cycle test. [3]
- Nonlinear unloading test.

Obtaining an adequate result in the mentioned tests for red batteries, we can safely build a battery bank for a recreational 6.5 hp go kart.

For future works, it one should test other brands of batteries existing in the market, to be used in an electric go kart. In addition, battery-set-up tests should be performed to prove the feasibility of using in this type of vehicle.

## 7. References

- [1] - Joel Hildebrand M, *Gilbert N. Lewis*, 1875-1946, 1947. Published February 1 DOI: 10.1098 / rsbm.1947.0014
- [2] - Buchmann I, *Understanding Your portable batteries in the world*. ISSN: 1089-8182  
DOI: 10.1109 / BCAA.1999.796021 Publisher: IEEE
- [3] - Takey K et al, *Life Cycle lithium secondary battery of estimation by extrapolation method and accelerated aging test*, Journal of Power Sources 97-98 (2001) 697 -701 Received 21 June 2000.
- [4] - I Buchmann, *Will Lithium-Ion batteries power the new millennium?* April 2001 Cadex Electronics Inc. <http://www.buchmann.ca>

## Apêndice 2

### Incertezas de medição dos momentos de inércia de guinada

No item 2.3.2 desta dissertação, apresentaram-se os resultados das estimativas do momento de inércia de guinada do kart, e suas incertezas de medição, utilizando-se os métodos trifilar e quadrifilar com o kart livre e com o kart carregado com uma massa adicional de 60 kg.

Apresenta-se, neste apêndice, a memória de cálculo das incertezas de medição dos momentos de inércia de guinada.

#### a) Metodologia

Segundo o Guia para Expressão da Incerteza de Medição (GUM) a incerteza-padrão combinada  $u_c(y)$  é a raiz quadrada positiva da variância combinada  $u_c^2(y)$ , que é dada por

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i). \quad (1)$$

Consideraram-se as equações de obtenção do momento de inércia dos métodos trifilar e quadrifilar como a função  $f$  para fins de obtenção das respectivas variâncias combinadas.

Para os valores referentes às grandezas de comprimento foi utilizada uma trena comum de resolução milimétrica, cuja leitura foi arredondada para o centímetro mais próximo. Assim sendo, considerou-se uma resolução de 0,01 m e, consequentemente, de acordo com o GUM, tem-se  $u(r) = \frac{0,01}{\sqrt{12}}$ .

A grandeza massa foi obtida com o auxílio de uma balança Toledo digital com resolução de 10 gramas. Contudo, durante a medição o valor anotado em campo foi arredondado para valores unitários em kilogramas devido a oscilações dos valores no display da balança, e portanto a resolução considerada foi de 1,00 kg. Assim sendo, tem-se que, para a massa,  $u(m_i) = \frac{1}{\sqrt{12}}$ .

Para a grandeza tempo realizaram-se  $N = 50$  medições sucessivas com um relógio digital comum, portanto para  $u(\tau)$  considerou-se a incerteza padrão Tipo A.

Não foram consideradas incertezas tipo B para o relógio digital.

Ou seja, consideraram-se incertezas tipo B para as grandezas comprimento e massa e incerteza tipo A para a grandeza tempo.

Segundo o Guia para Expressão da Incerteza de Medição (GUM), para uma grandeza única estimada pela média aritmética de  $n$  observações independentes, o número de graus de liberdade  $\nu$  é igual a  $n-1$  e, para uma grandeza obtida a partir de  $N$  outras grandezas a partir da incerteza combinada de medição, o número efetivo de graus de liberdade é dado pela fórmula de Welch-Satterhwaite:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad (2)$$

Uma vez calculadas as incertezas-padrão combinadas e os números efetivos de graus de liberdade, considerou-se um nível da confiança de 95,45 %, definindo os fatores de abrangência que são então multiplicados pelas incertezas-padrão combinadas para calcular as incertezas expandidas em cada caso estudado.

#### b) Incertezas do método trifilar

Para o método trifilar considerou-se a equação

$$J_z = f = \frac{r^2 m g \tau^2}{4\pi^2 L} \quad (3)$$

A Tabela A1 apresenta as medições realizadas em campo e a Tabela A2 apresenta a memória de cálculo para a obtenção das incertezas das medições do método trifilar com o kart livre.

**Tabela A1: Método trifilar – Medições com o kart livre**

$J_z$ (kg.m <sup>2</sup> )	$r$ (m)	$m$ (kg)	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$\tau$ (s)	$L$ (m)
44,00	0,85	107,00	9,81	2,63	3,02

**Tabela A2: Método trifilar - Memória de cálculo da incerteza de medição do momento de inércia de guinada (yaw) com o kart livre (sem massa adicional)**

$x_i$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$C(x_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$	$C(x_i)^2$	Resolução	$u(x_i)$	$u^2(x_i)$	$c(x_i)^2 \cdot u^2(x_i)$	Tipo da Incerteza	Graus de Liberdade
(r)	$\frac{rmg\tau^2}{2\pi^2 L}$	103,52	10 717,39	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$8,93 \times 10^{-2}$	B	$\infty$
(m)	$\frac{r^2 g \tau^2}{4\pi^2 L}$	0,41	0,17	1,00	$2,88 \times 10^{-1}$	$8,33 \times 10^{-2}$	$1,40 \times 10^{-2}$	B	$\infty$
(L)	$-\frac{r^2 mg \tau^2}{4\pi^2 L^2}$	-14,57	212,25	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$1,76 \times 10^{-3}$	B	$\infty$
( $\tau$ )	$\frac{r^2 mg \tau}{2\pi^2 L}$	33,46	1 119,48	-	0,05	$2,50 \times 10^{-3}$	2,79	A	49
$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$			$u_c$	$u_c/J_z$	$2 \cdot u_c$	$2 \cdot u_c/J_z$		Graus de Liberdade Efetivos	
2,90			1,70	3,9%	<b>3,41</b>	7,7%	-	53	

Portanto, para o método trifilar com o **kart livre** obteve-se como resultado

$$\mathbf{J_z = 44 (\pm 3) \text{ kg.m}^2}$$

A Tabela A3 apresenta as medições realizadas em campo e a Tabela A4 apresenta a memória de cálculo para obtenção das incertezas das medições do método trifilar com o kart carregado com uma massa adicional de 60 kg.

**Tabela A3: Método trifilar - Medições com o kart com massa adicional de 60 kg**

$J_z$ (kg.m <sup>2</sup> )	$r$ (m)	$m$ (kg)	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$\tau$ (s)	$L$ (m)
45	0,85	167,00	9,81	2,14	3,02

**Tabela A4: Método trifilar - Memória de cálculo da incerteza de medição do momento de inércia de guinada com o kart com massa adicional de 60 kg**

$x_i$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$C(x_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$	$C(x_i)^2$	Resolução	$u(x_i)$	$u^2(x_i)$	$c(x_i)^2 \cdot u^2(x_i)$	Tipo da Incerteza	Graus de Liberdade
(r)	$\frac{rmg\tau^2}{2\pi^2 L}$	106,98	11 444,23	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$9,53 \times 10^{-2}$	B	$\infty$
(m)	$\frac{r^2 g \tau^2}{4\pi^2 L}$	0,27	0,07	1,00	$2,88 \times 10^{-1}$	$8,33 \times 10^{-2}$	$6,17 \times 10^{-3}$	B	$\infty$
(L)	$-\frac{r^2 mg \tau^2}{4\pi^2 L^2}$	-15,05	226,65	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$1,88 \times 10^{-3}$	B	$\infty$
( $\tau$ )	$\frac{r^2 mg \tau}{2\pi^2 L}$	42,49	1 805,50	-	0,07	$4,90 \times 10^{-3}$	8,85	A	49
$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$			$u_c$	$u_c/J_z$	$2 \cdot u_c$	$2 \cdot u_c/J_z$	-	Graus de Liberdade Efetivos	
8,95			2,99	6,6%	<b>5,98</b>	13,2%	-	50	

Portanto, para método trifilar para o **kart com massa adicional de 60 kg** obteve-se como resultado

$$J_z = 45 (\pm 6) \text{ kg.m}^2$$

### c) Incertezas do método quadrifilar

Para o método quadrifilar considerou-se a equação

$$J_z = f = \frac{mgD^2T^2}{16\pi^2L} \quad (4)$$

A Tabela A5 apresenta as medições realizadas em campo e a Tabela A6 apresenta a memória de cálculo para a obtenção das incertezas das medições do método quadrifilar com o kart livre.

**Tabela A5: Método quadrifilar - Medições com o kart livre**

$J_z$ (kg.m <sup>2</sup> )	$m$ (kg)	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$T$ (s)	$L$ (m)
42,00	107,00	9,81	1,32	3,30	3,02

**Tabela A6: Método quadrifilar - Memória de cálculo da incerteza de medição do momento de inércia de guinada (yaw) com o kart livre**

$x_i$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$C(x_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$	$C(x_i)^2$	Resolução	$u(x_i)$	$u^2(x_i)$	$c(x_i)^2 \cdot u^2(x_i)$	Tipo da Incerteza	Graus de Liberdade
(D)	$\frac{mgDT^2}{8\pi^2L}$	63.278	4 004,163	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$3,33 \times 10^{-2}$	B	$\infty$
(m)	$\frac{gD^2T^2}{16\pi^2L}$	0.390	0,152	1,00	$2,88 \times 10^{-1}$	$8,33 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$	B	$\infty$
(L)	$-\frac{mgD^2T^2}{16\pi^2L^2}$	-13.829	191,243	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$1,594 \times 10^{-3}$	B	$\infty$
(T)	$\frac{mgD^2T}{8\pi^2L}$	25.311	640,666	-	0,12	$1,44 \times 10^{-2}$	9,22	A	49
$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$			B	$\infty$	<b>2. <math>u_c</math></b>	$2 \cdot u_c / J_z$	-	Graus de Liberdade Efetivos	
9,273			1,70	7,3%	<b>6,09</b>	14,5%	-	50	

Portanto, para o método quadrifilar com o **kart livre** obteve-se como resultado

$$J_z = 42 (\pm 6) \text{ kg.m}^2$$

A Tabela A7 apresenta as medições realizadas em campo e a Tabela A8 apresenta a memória de cálculo para obtenção das incertezas das medições do método quadrifilar com o kart carregado com uma massa adicional de 60 kg.

**Tabela A7: Método quadrifilar - Medições com o kart com massa adicional de 60 kg**

$J_z$ (kg.m <sup>2</sup> )	$m$ (kg)	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$T$ (s)	$L$ (m)
43,00	167,00	9,81	1,32	2,67	3,02

**Tabela A8: Método quadrifilar - Memória de cálculo da incerteza de medição do momento de inércia de guinada (yaw) com o kart com massa adicional de 60 kg**

$x_i$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$C(x_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$	$C(x_i)^2$	Resolução	$u(x_i)$	$u^2(x_i)$	$c(x_i)^2 \cdot u^2(x_i)$	Tipo da Incerteza	Graus de Liberdade
(D)	$\frac{mgDT^2}{8\pi^2L}$	64,652	4 179,905	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$3,48 \times 10^{-2}$	B	$\infty$
(m)	$\frac{gD^2T^2}{16\pi^2L}$	0,256	0,065	1,00	$2,88 \times 10^{-1}$	$8,33 \times 10^{-2}$	$5,44 \times 10^{-3}$	B	$\infty$
(L)	$-\frac{mgD^2T^2}{16\pi^2L^2}$	-14,129	199,637	0,01	$2,88 \times 10^{-3}$	$8,33 \times 10^{-6}$	$1,664 \times 10^{-3}$	B	$\infty$
(T)	$\frac{mgD^2T}{8\pi^2L}$	31,963	1 021,626	-	0,07	$4,90 \times 10^{-3}$	5,00	A	49
$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$			A	49	<b>2. <math>u_c</math></b>	$2 \cdot u_c / J_z$	-	Graus de Liberdade Efetivos	
5,05			2,25	5,2%	<b>4,49</b>	10,5%	-	50	

Portanto, para o método quadrifilar com o **kart com massa adicional de 60 kg** obteve-se como resultado

$$\mathbf{J_z = 43 (\pm 4) \text{ kg.m}^2}$$

## Apêndice 3

Encontra-se em [www.dropbox.com](http://www.dropbox.com) os arquivos digitais com os programas Matlab® e Simulink® referenciados neste trabalho.

Link público (aberto):

<https://www.dropbox.com/sh/xaeqareyrj07tfw/AAD4eIPC UdLOcdKvOAdgcICJa?dl=0>