

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Igor Prista de Queiroz**

**Efeito Giroscópio em Motocicletas  
(Modelagem, Simulação e Análise)**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de  
Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

## **Agradecimentos**

Agradeço ao Prof. Mauro Speranza Neto, pela sua orientação.

Agradeço aos meus pais, Nilo Cairo e Kátia, por sempre acreditarem em mim.

Agradeço, por fim, aos amigos e colegas, pelo incentivo e pelo apoio constantes.

## Resumo

Queiroz, Igor Prista de; Neto, Mauro Speranza (Orientador). **Efeito Giroscópio em Motocicletas (Modelagem, Simulação e Análise)**. Rio de Janeiro, 2018. 55p. Projeto de Graduação – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O desenvolvimento de estudos sobre o comportamento dinâmico de veículos instáveis, como é o exemplo de uma motocicleta, objetivam a melhoria de sua estabilidade que implica diretamente em um maior conforto e melhor manuseio. A vista disso, deseja-se com esse projeto modelar, simular e analisar o efeito giroscópio utilizando a técnica dos grafos de ligação, com objetivo de entender sua influência sobre a dinâmica de uma motocicleta. Serão desenvolvidos modelos de grau de complexidade crescente, de modo a compreender e dominar a interrelação entre os diversos movimentos do veículo associados ao fenômeno. Inicialmente será tratada apenas uma roda - dianteira - com esterçamento, rolagem e guinada, montada sobre uma estrutura de quadros articulados - gimbals - fixa no solo; em seguida um modelo com duas rodas, sendo uma - traseira - solidária ao chassis, também montadas sobre uma estrutura de quadros articulados fixa no solo; e finalmente o modelo completo de uma motocicleta. Os modelos não lineares resultantes serão resolvidos (simulados) em Simulink/MATLAB.

## Palavras-chave

Giroscópio; Gimbal; Grafo de ligação; Lagrangeano; Rolagem; Guinada; Esterçamento; Giro;



## Abstract

Queiroz, Igor Prista de; Neto, Mauro Speranza (Advisor). **Gyroscopic Effect in Motorcycles (Modelling, Simulation and Analysis)**. Rio de Janeiro, 2018. 55p. Projeto de Graduação – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The development of studies on the dynamic behavior of unstable vehicles, such as a motorcycle, aim at improving its stability, which directly implies greater comfort and better handling. In view of this, it is desired with this project to model, simulate and analyze the gyroscope effect using the bond-graph technique, in order to understand its influence on the dynamics of a motorcycle. Models of increasing complexity will be developed in order to understand and master the interrelationship between the various movements of the vehicle associated with the phenomenon. Initially, only the front wheel will be studied with pitching, rolling and yawing, held by a structure of articulated frames - gimbals - fixed to the ground; then a two-wheeled model, being a rear wheel - integrated with the chassis, also held by a frame structure fixed to the ground; and finally the complete model of a motorcycle. The resulting nonlinear models will be solved (simulated) in Simulink / MATLAB.

## Keywords

Gyroscope; Gimbal; Bond-graph; Lagrange; Roll; Yaw; Pitch; Spin;

## Sumário

1	Introdução	<b>10</b>
1.1	Objetivo	10
1.2	Motivação	10
1.3	Revisão Bibliográfica	11
2	Efeito Giroscópio e Grafos de Ligação	<b>12</b>
2.1	Giroscópio	12
2.2	Grafos de Ligação	13
3	Representação do grafos de ligação de um giroscópio bigimbal	<b>16</b>
3.1	Lagrangeano do sistema	16
3.2	Desenvolvimento do Grafo de Ligação	18
4	Simulação das Equações do Grafo do Giroscópio Bigimbal	<b>24</b>
5	Grafo de Ligação da Roda Dianteira de uma Motocicleta	<b>37</b>
5.1	O Modelo de Roda Dianteira e seu Grafo de Ligação	37
5.2	Simulação das Equações do Grafo para o Modelo de Roda Dianteira	38
6	Grafo de Ligação do Sistema Motocicleta Completo	<b>43</b>
6.1	O Modelo de Motocicleta Completo e seu Grafo de Ligação	43
7	Conclusão	<b>49</b>
A	Rotina em MATLAB e Simulink	<b>52</b>

## Lista de figuras

2.1	Ilustração de um giroscópio 'bigimbal'.	12
2.2	Ilustração dos elementos de ligação retirado do artigo [1].	14
2.3	Ilustração dos elementos de ligação retirado do artigo [1].	14
3.1	Esquemática do giroscópio 'bigimbal' com os ângulos de rotação modificado do artigo [10].	16
3.2	Esquemática da 1ª etapa da construção do grafo de ligação do giroscópio.	18
3.3	Esquemática da 2ª etapa da construção do grafo de ligação do giroscópio.	20
3.4	Estrutura básica do grafo de ligação.	20
3.5	Estrutura completa do grafo de ligação do giroscópio 'bigimbal'.	22
4.1	Simulação dos perfis de torque de 'Roll' ( $N_\theta$ ), 'Yaw' ( $N_\phi$ ) e 'Spin' ( $N_\psi$ ).	24
4.2	Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ).	25
4.3	Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ).	25
4.4	Simulação do resultado do ângulo de 'Spin' ( $\psi$ ).	26
4.5	Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ).	26
4.6	Simulação do resultado da velocidade de 'Yaw' ( $\dot{\phi}$ ).	27
4.7	Simulação do resultado da velocidade de 'Spin' ( $\dot{\psi}$ ).	27
4.8	Grafo de ligação de um giroscópio com amortecimento.	28
4.9	Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ) amortecido.	28
4.10	Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ) amortecido.	29
4.11	Simulação do resultado do ângulo de 'Pitch' ( $\psi$ ) amortecido.	29
4.12	Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ) amortecida.	30
4.13	Simulação do resultado da velocidade de 'Yaw' ( $\dot{\phi}$ ) amortecida.	30
4.14	Simulação do resultado da velocidade de 'Pitch' ( $\dot{\psi}$ ) amortecida.	31
4.15	Simulação dos perfis de torque de 'Roll' ( $N_\theta$ ), 'Yaw' ( $N_\phi$ ) e 'Spin' ( $N_\psi$ ) aplicados individualmente.	32
4.16	Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ).	32
4.17	Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ).	33
4.18	Simulação do resultado do ângulo de 'Spin' ( $\psi$ ).	34
4.19	Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ).	34
4.20	Simulação do resultado da velocidade de 'Yaw' ( $\dot{\phi}$ ).	35
4.21	Simulação do resultado da velocidade de 'Spin' ( $\dot{\psi}$ ).	36
5.1	Modelo visual da roda dianteira.	37
5.2	Grafo de ligação do modelo de roda dianteira	38
5.3	Simulação dos perfis de torque de 'Roll' ( $N_\theta$ ) e 'Yaw' ( $N_\phi$ ) aplicados individualmente.	39
5.4	Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ).	39
5.5	Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ).	40
5.6	Simulação do resultado do ângulo de 'Spin' ( $\psi$ ).	40
5.7	Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ).	41

5.8	Simulação do resultado da velocidade de 'Yaw' ( $\dot{\phi}$ ).	41
5.9	Simulação do resultado da velocidade de 'Spin' ( $\dot{\psi}$ ).	42
6.1	Modelo visual de sistema completo.	43
6.2	Esquematização da 1ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	44
6.3	Esquematização da 2ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	44
6.4	Esquematização da 3ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	45
6.5	Esquematização da 4ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	46
6.6	Esquematização da 5ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	47
6.7	Esquematização da 6ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	47
6.8	Esquematização da 7ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	48
6.9	Esquematização do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.	48
A.1	Simulink utilizado para as simulações do capítulo 3.	55

## Lista de tabelas

2.1	Tabela dos elementos de ligação.	15
-----	----------------------------------	----

# 1

## Introdução

Neste capítulo, serão expostos o objetivo, a motivação e a revisão bibliográfica do projeto com o intuito de contextualizar as informações que serão abordadas ao longo deste trabalho.

### 1.1

#### Objetivo

Este projeto tem como objetivo estudar a influência do efeito giroscópico sobre a dinâmica de uma motocicleta, analisando seu comportamento através da técnica de grafos de ligação, assim como modelos desenvolvidos em Simulink/MATLAB.

Para tanto, será desenvolvido um modelo de grafo de ligação que descreva a dinâmica de um giroscópio 'bigimbal', assim como sua simulação. Em seguida será desenvolvido o mesmo modelo para a roda dianteira de uma motocicleta e, por fim, o modelo da motocicleta completa.

### 1.2

#### Motivação

Estudos de estabilização de veículos naturalmente instáveis datam desde o início século XX. Em 1903, Louis Brennan, engenheiro mecânico e inventor irlandês/australiano, patenteou um sistema de monotrilha balanceado giroscopicamente que foi projetado para uso militar. O sistema era controlado por atuação passiva de vários mecanismos e sensores mecânicos projetados para responder à orientação da inclinação do monotrilha. Os testes foram executados com sucesso, transportando até cinquenta passageiros.

Desde então, o desenvolvimento de estudos sobre o comportamento dinâmico de veículos instáveis, como é o exemplo de uma motocicleta, objetivam a melhoria de sua estabilidade que implica diretamente em um maior conforto e melhor manuseio. No entanto, a maioria das pesquisas sobre auto estabilização realizadas utilizam técnicas de estabilização dinâmica onde mecanismos direcionam ativamente a motocicleta para induzir inclinações que se opõem à instabilidade do veículo. Este método, contudo, tem dificuldades com relação a estabilização de uma motocicleta estática, por exemplo, deixando esta tarefa para o piloto.

Portanto, mostra-se necessário o estudo do efeito giroscópio na estabilidade de uma motocicleta, levando em consideração que os possíveis resultados obtidos podem levar a veículos mais confortáveis e mais confiáveis.

### 1.3

#### Revisão Bibliográfica

A modelagem matemática do comportamento dinâmico de um sistema motocicleta pode ser melhor representado pelo sistema multicorpo, que é o estudo do comportamento dinâmico de corpos rígidos ou flexíveis interligados, cada um dos quais pode sofrer grandes deslocamentos translacionais e rotacionais. No caso estudado, uma motocicleta pode ser considerada como um conjunto de corpos – motor, chassi, suspensões, rodas, motorista – que possuem comportamentos dinâmicos individuais, mas que se inter-relacionam.

Esses modelos matemáticos podem ser encontrados em referências como "COS-SALTER, VITTORE. Motorcycle Dynamics. 2nd english edition edition, 2006"[8].

A modelagem para simulação deste comportamento dinâmico levando em consideração o efeito giroscópio pode ser melhor representado pela técnica dos grafos de ligação que será utilizado na representação dos sistemas físicos envolvidos.

A técnica de grafos de ligação pode ser encontrada em referências como "MCBRIDE, R. T. System analysis through bond graph modeling. Tese de doutorado, Department of Electrical and Computer Engineering in the University of Arizona, 2005."[9]. A utilização dessa técnica para análise de modelos de giroscópios 'bigimbals' pode ser encontrado em "MCBRIDE, R. T.; CELLIER, F. E. A bond-graph representation of a two-gimbal gyroscope. Artigo acadêmico, University of Arizona, 2004."[10].

## 2

### Efeito Giroscópico e Grafos de Ligação

#### 2.1

##### Giroscópio

O giroscópio é um dispositivo composto por um disco montado em dois ou três 'gimbals', que são apoios articulados que permitem a rotação da roda em torno de um único eixo. Num giroscópio, o eixo de rotação desse disco é livre para assumir qualquer orientação independente da orientação do suporte do giroscópio. Esse comportamento é obtido através de um conjunto de 'gimbals', um montado no outro com eixos de articulação ortogonais. No caso de um giroscópio 'bigimbal', ou seja, com dois 'gimbals', o 'gimbal' externo é montado de modo a girar em torno de um eixo em seu próprio plano determinado pelo suporte do giroscópio. O 'gimbal' interno é montado no 'gimbal' externo de modo a girar em torno de um eixo em seu próprio plano que é sempre perpendicular ao eixo de rotação do 'gimbal' externo. Uma ilustração da montagem descrita é mostrada na figura 2.1.

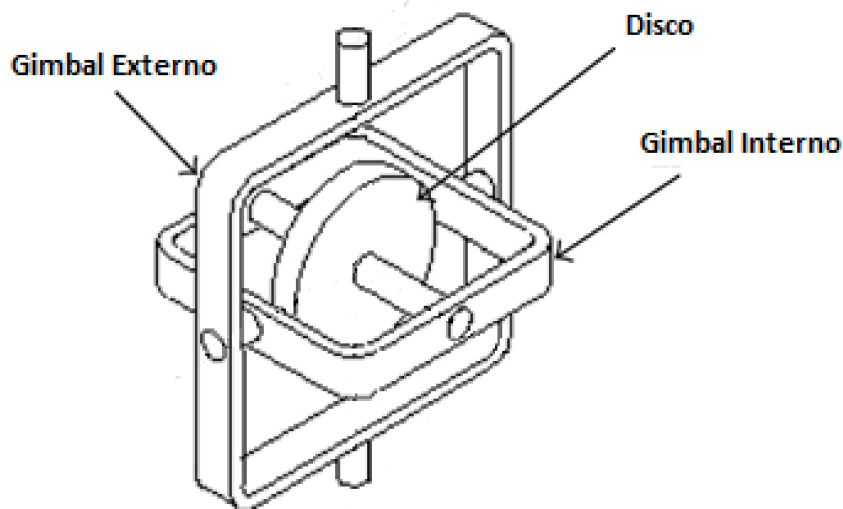


Figura 2.1: Ilustração de um giroscópio 'bigimbal'.

O efeito giroscópico consiste, portanto, da reação de uma roda livre para girar em qualquer direção que se opõe a qualquer tentativa de mudar sua direção original. O efeito giroscópico pode ser mais facilmente visto considerando a roda dianteira de uma bicicleta. Ao girar a roda de uma bicicleta no ar e tentar mudar a direção de seu eixo bruscamente, percebe-se uma reação sobre a roda.



## 2.2

### Grafos de Ligação

De acordo com a referência [1], a técnica dos Grafos de Ligação é baseada em alguns elementos básicos: as fontes de esforço ( $S_e$ ), as fontes de fluxo ( $S_f$ ), os resistores ( $R$ ), os capacitores ( $C$ ), as inércias ( $I$ ), os transformadores ( $TF$ ), os giradores ( $GY$ ), as junções "0" e as junções "1".

Esses elementos representam os geradores de potência, os dissipadores, os acumuladores de energia e os elementos de acoplamento. Quando combinados adequadamente, descrevem o modelo físico de um sistema através de uma representação gráfica, que além de permitir a visualização das conexões entre os componentes do sistema, traz implícito todo o equacionamento do modelo.

Um modelo descrito utilizando a técnica dos grafos de ligação é formado por componentes ou subsistemas conectados por ligações ('bonds') que representam o fluxo/transmissão de potência entre eles.

Neste trabalho serão utilizados duas variáveis generalizadas muito usadas na metodologia dos grafos de ligação: as variáveis de esforço ( $e$ ) e de fluxo ( $f$ ), que são chamadas de variáveis de potência porque o produto dessas duas variáveis, consideradas como funções do tempo, é igual a potência instantânea que flui entre dois componentes.

$$Pot(t) = e(t) \cdot f(t) \quad (2-1)$$

O elemento fundamental desta técnica é o de Ligação, representado por uma barra onde são indicadas as variáveis de energia ou de estado. Através de uma meia seta, a ligação permite indicar o sentido da potência que flui de um elemento para outro. Através de uma seta inteira a ligação permite indicar apenas o sentido do sinal, sem fluxo de potência.

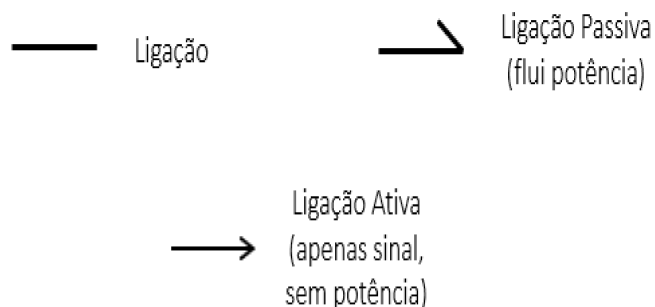


Figura 2.2: Ilustração dos elementos de ligação retirado do artigo [1].

Através de uma barra causal é mostrada a relação necessária entre a causa e efeito. Essa causalidade é indicada através de uma barra vertical inserida em uma das extremidades da ligação, de forma a indicar o sentido do esforço "e". Em sentido contrário fica subentendido o fluxo "f" como é mostrado na Figura 2.3.

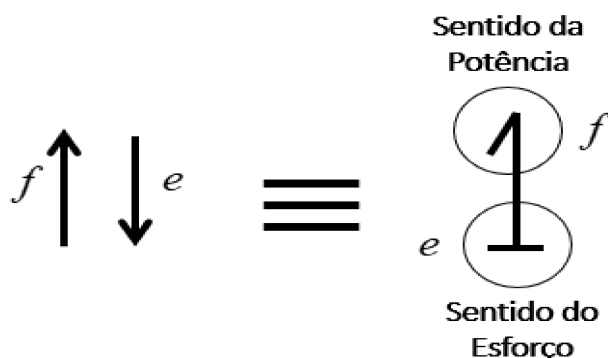


Figura 2.3: Ilustração dos elementos de ligação retirado do artigo [1].

A Tabela 2.1 abaixo mostra as variáveis de potência e os elementos básicos dos Grafos de Ligação. O modelo matemático é determinado a partir das equações constitutivas destes elementos.

Elementos		Relação Constitutiva	Simbologia
Variáveis de Potência	Esforço	$e$	$e$
	Fluxo	$f$	$f$
Variáveis Integrais	Momento	$Pp = \int e \cdot dt$	$Pp$
	Deslocamento	$q = \int f \cdot dt$	$q$
Inertância		$f(t) = \frac{1}{I} \int_0^i e(t) \cdot dt$	$\xrightarrow[f]{I}$
Capacitância		$e(t) = \frac{1}{C} \int_0^i f(t) \cdot dt$	$\xrightarrow[e]{C}$
Resistência		$e(t) = f(t) \cdot R$	$\xrightarrow[f]{R}$
Fonte de Esforço		$Se$	$\xrightarrow[Se]{E(t)}$
Fonte de Fluxo		$Sf$	$\xrightarrow[Sf]{F(t)}$
Transformador		$e_1 = m \cdot e_2$ $m \cdot f_1 = f_2$	$\xrightarrow[m]{TF} \xrightarrow{}$
Girador		$e_1 = \Omega \cdot f_2$ $\Omega \cdot f_1 = e_2$	$\xrightarrow[\Omega]{Gy} \xrightarrow{}$
Elementos de Junção	Junção "0"	$e_1 = e_2 = e_3$ $f_1 - f_2 - f_3 = 0$	$\xrightarrow[1]{0} \xrightarrow[2]{}$
	Junção "1"	$f_1 = f_2 = f_3$ $e_1 - e_2 - e_3 = 0$	$\xrightarrow[1]{1} \xrightarrow[2]{}$

Tabela 2.1: Tabela dos elementos de ligação.

A partir do modelo físico do sistema e uma vez identificados os seus elementos utilizando Tabela 2.1, obtém-se a representação do grafo. O modelo do grafo leva ao desenvolvimento do modelo matemático para o sistema dinâmico na forma de equações de estado. Uma vez conhecido o modelo matemático, podem ser empregadas ferramentas computacionais de análise e simulação como o MATLAB ou DYMOLA para avaliar o comportamento dinâmico do sistema.

### 3

## Representação do grafos de ligação de um giroscópio bigimbal

### 3.1

#### Lagrangeano do sistema

Inicialmente, será desenvolvido um modelo de representação gráfica, utilizando o exemplo de um giroscópio 'bigimbal', a partir do modelo lagrangeano demonstrado no artigo [10].

Muitas vezes, o lagrangeano de um sistema pode ser encontrado desenvolvido em textos ou em outras fontes, no entanto ainda há benefícios na visualização do sistema na representação do grafo de ligações. A visualização do fluxo de energia através do sistema, por exemplo, dá uma visão mais clara nas inter-relações das variáveis de estado.

O giroscópio 'bigimbal', mostrado na Figura 3.1, é um sistema descrito por três coordenadas  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$ , que resulta em um sistema variável de quatro estados. Os ângulos especificados na figura são especificados como rolagem ('roll' ou  $\theta$ ), guinada ('yaw' ou  $\phi$ ) e giro ('spin' ou  $\psi$ ).

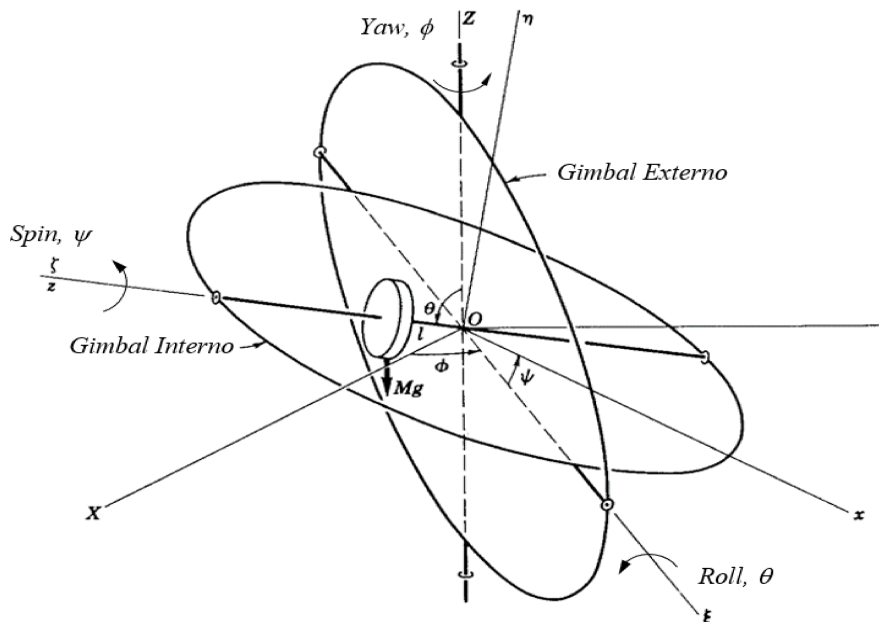


Figura 3.1: Esquemática do giroscópio 'bigimbal' com os ângulos de rotação modificado do artigo [10].

De acordo com o artigo [10], o lagrangeano do sistema pode ser simplificado tornando a distância 'l' mostrada na figura 3.1 igual a zero. Essa simplificação faz com que o termo da energia potencial no lagrangeano desapareça. O lagrangeano resultante é então igual a apenas o termo da energia cinética:

$$L = T = \frac{1}{2} \cdot [(A+A')\dot{\theta}^2 + (A+B')\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 + C'\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + C''\dot{\phi}^2] \quad (3-1)$$

Onde:

- C é o momento de inércia do rotor sobre o eixo  $\zeta$ ;
- A é o momento de inércia do rotor sobre qualquer eixo transversal ao ponto O;
- A', B' e C' são os momentos de inércia do gimbal interno sobre os eixos  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\varsigma$ , respectivamente;
- C'' é o momento de inércia do gimbal externo sobre o eixo inercial Z;

As equações lagrangeanas correspondentes são, então:

$$N_\phi = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = (A+B')\ddot{\phi} \sin^2\theta + 2(A+B')\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta + C(\ddot{\phi} \cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta + \ddot{\psi}) \cos\theta - C(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) \dot{\theta} \sin\theta + C'\ddot{\phi} \cos^2\theta - 2C'\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta + C''\ddot{\phi} \quad (3-2)$$

$$N_\psi = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = C(\ddot{\phi} \cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta} + \ddot{\psi}) \quad (3-3)$$

$$N_\theta = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = (A+A')\ddot{\theta} + C(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) \dot{\phi} \sin\theta - (A+B'-C')\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \quad (3-4)$$

Aonde  $N_\phi$ ,  $N_\psi$  e  $N_\theta$  são os torques generalizados do sistema correspondentes ao eixos das três coordenadas generalizadas  $\phi$ ,  $\psi$  e  $\theta$ , respectivamente. Portanto, as equações lagrangeanas são três equações diferenciais de segunda ordem, resultando num sistema de sexta ordem. As variáveis de estado do sistema são  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\psi$  e  $\dot{\psi}$ , no entanto as variáveis  $\phi$  e  $\psi$  não aparecem nas equações acima, o que significa que o sistema pode ser descrito por quatro equações de estado: (3-2), (3-3), (3-4) e (3-5) abaixo, resultando num sistema de quarta ordem.

$$\dot{\theta} = \frac{d}{dt} \theta \quad (3-5)$$

### 3.2 Desenvolvimento do Grafo de Ligação

Para desenvolver o grafo de ligação a partir do lagrangeano, deve-se primeiro observar os termos do fluxo de energia na equação 3-1. Como os únicos dispositivos de armazenamento de energia neste sistema são inércias, todos esses termos vem da energia cinética do lagrangeano e têm a forma de  $\frac{1}{2} \cdot I \cdot flow^2$ . Os fluxos do sistema são definidos por:

$$Flow_1 = F_1 = \dot{\theta} \tag{3-6}$$

$$Flow_2 = F_2 = \dot{\phi} \sin \theta \tag{3-7}$$

$$Flow_3 = F_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \tag{3-8}$$

$$Flow_4 = F_4 = \dot{\phi} \cos \theta \tag{3-9}$$

$$Flow_5 = F_5 = \dot{\phi} \tag{3-10}$$

No desenvolvimento do grafo de ligação serão, então, atribuídas uma junção do tipo 1 para cada um dos termos de fluxo e um elemento C/I apropriado onde necessário.

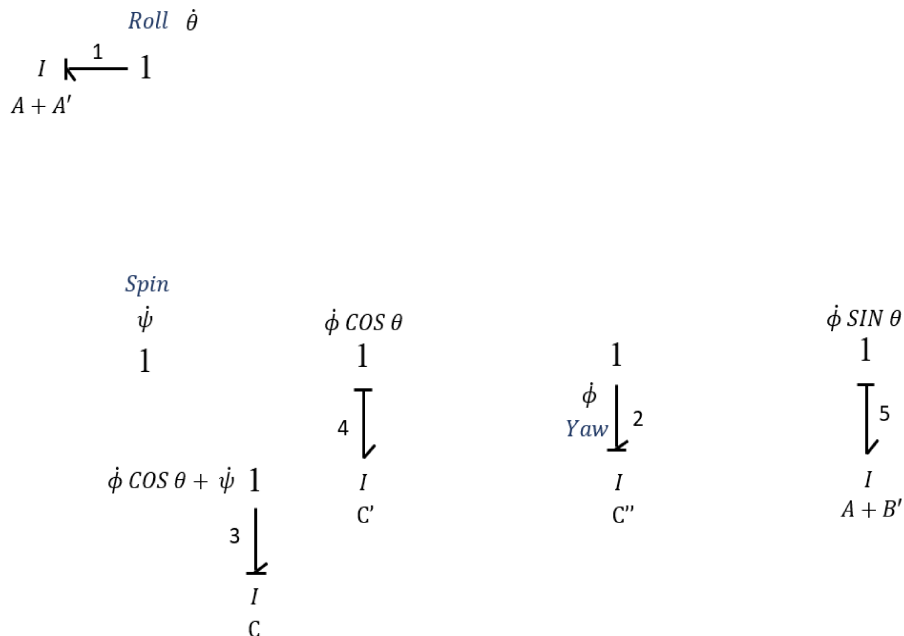


Figura 3.2: Esquematização da 1ª etapa da construção do grafo de ligação do giroscópio.

Observando a equação 3-8, percebe-se que será necessária a adição de uma junção do tipo 0 para somar os fluxos.

Derivando cada um dos termos de fluxo com respeito ao tempo, transforma-se os termos de energia em termos de força. Esses termos de força têm a forma: esforço · fluxo. Esses termos de força são definidos por:

$$Power_1 = P_1 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (A + A') \dot{\theta}^2 \right] = (A + A') \dot{\theta} \ddot{\theta} \quad (3-11)$$

$$Power_2 = P_2 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (A + B') \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] = (A + B') \dot{\phi} \ddot{\phi} \sin^2 \theta + (A + B') \dot{\phi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (3-12)$$

$$Power_3 = P_3 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} C (\phi \cos \theta + \psi)^2 \right] = C (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) (\ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi}) \quad (3-13)$$

$$Power_4 = P_4 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} C' (\dot{\phi} \cos^2 \theta) \right] = C' \dot{\phi} \ddot{\phi} \cos^2 \theta - C' \dot{\phi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (3-14)$$

$$Power_5 = P_5 = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} C'' \dot{\phi}^2 \right] = C'' \dot{\phi} \ddot{\phi} \quad (3-15)$$

Dividindo as equações 3-11 a 3-15 por seus correspondentes fluxos nas equações 3-6 a 3-10, respectivamente, produz os cinco esforços que correspondem aos elementos I de cada junção 1:

$$Effort_1 = E_1 = (A + A') \ddot{\theta} \quad (3-16)$$

$$Effort_2 = E_2 = C (\ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi}) \quad (3-17)$$

$$Effort_3 = E_3 = C' \ddot{\phi} \cos \theta - C' \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \quad (3-18)$$

$$Effort_4 = E_4 = (A + B') \ddot{\phi} \sin \theta + (A + B') \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \quad (3-19)$$

$$Effort_5 = E_5 = C'' \ddot{\phi} \quad (3-20)$$

As relações de esforço e fluxo são então adicionadas ao grafo, como mostrado na figura 3.3:

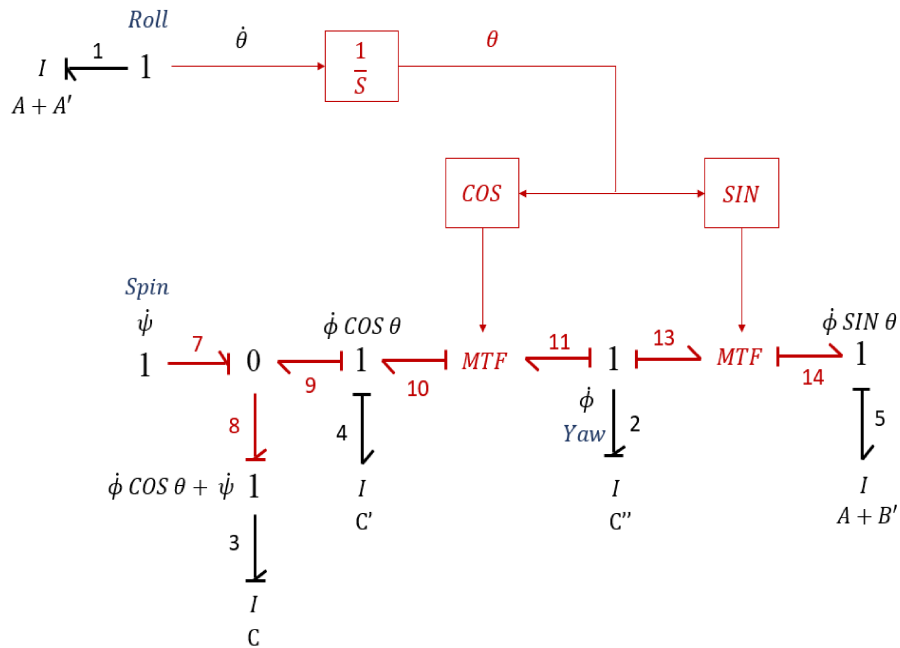


Figura 3.3: Esquematização da 2ª etapa da construção do grafo de ligação do giroscópio.

Adicionando os esforços  $SE(\theta)$ ,  $SE(\phi)$  e  $SE(\psi)$  ao sistema constrói-se a estrutura básica do grafo de ligação do sistema:

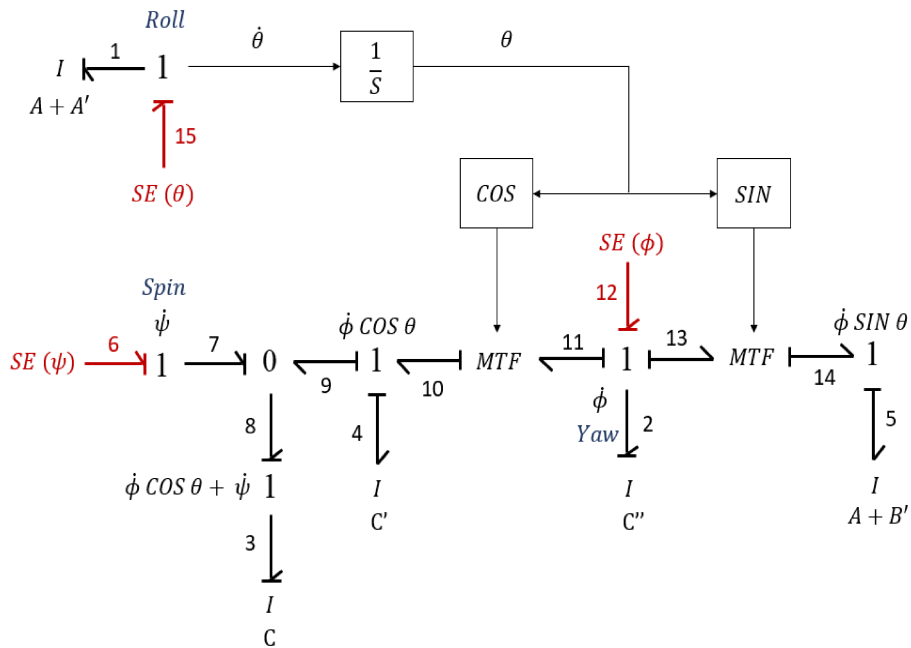


Figura 3.4: Estrutura básica do grafo de ligação.



Entretanto, o grafo de ligação da figura 3.4 ainda está incompleto. Para realizar as mudanças necessárias, deve-se analisar mais atentamente a equação 3-4. Reescrevendo a equação sem agrupar os termos  $(A + B' - C')$  obtém-se o seguinte:

$$N_\theta = (A + A')\ddot{\theta} + C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\dot{\phi}\sin\theta + C'\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - (A + B')\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \quad (3-21)$$

Nota-se que os termos:

$$C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\dot{\phi}\sin\theta \quad (3-22)$$

$$C'\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \quad (3-23)$$

$$(A + B')\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \quad (3-24)$$

Da equação 3-21 contém os momentos angulares das ligações 3,4 e 5, respectivamente, do grafo de ligação da figura 3.4. Essa análise pode ser melhor observada nas equações 3-25, 3-26 e 3-27 abaixo:

$$[C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})]\dot{\phi}\sin\theta \quad (3-25)$$

$$[C'\dot{\phi}\cos\theta]\dot{\phi}\sin\theta \quad (3-26)$$

$$[(A + B')\dot{\phi}\cos\theta]\dot{\phi}\sin\theta \quad (3-27)$$

Que tem a forma do momento angular vezes a velocidade angular, ou seja,  $P \cdot f$ . Essas equações podem ser escritas em notação de grafo de ligação através de giradores que completarão o grafo da figura 3.4. O grafo completo é mostrado na figura 3.5 abaixo:

Utilizando a terminologia dos grafos de ligação, pode-se escrever a equações do grafo de ligação da figura 3.5 da seguinte forma:

$$P_2 = SE_{12} - e_{11} - e_{13} \quad (3-28)$$

$$e_{11} = e_{10}\cos\theta \quad (3-29)$$

$$e_{10} = e_{21} + e_9 + e_4 \quad (3-30)$$

$$e_{21} = f_{20}P_5 = \frac{P_1P_5}{I_1} \quad (3-31)$$

$$P_5 = I_5f_5 = I_5f_{14} = I_5f_{13}\sin\theta = \frac{I_5P_2}{I_2}\sin\theta \quad (3-32)$$

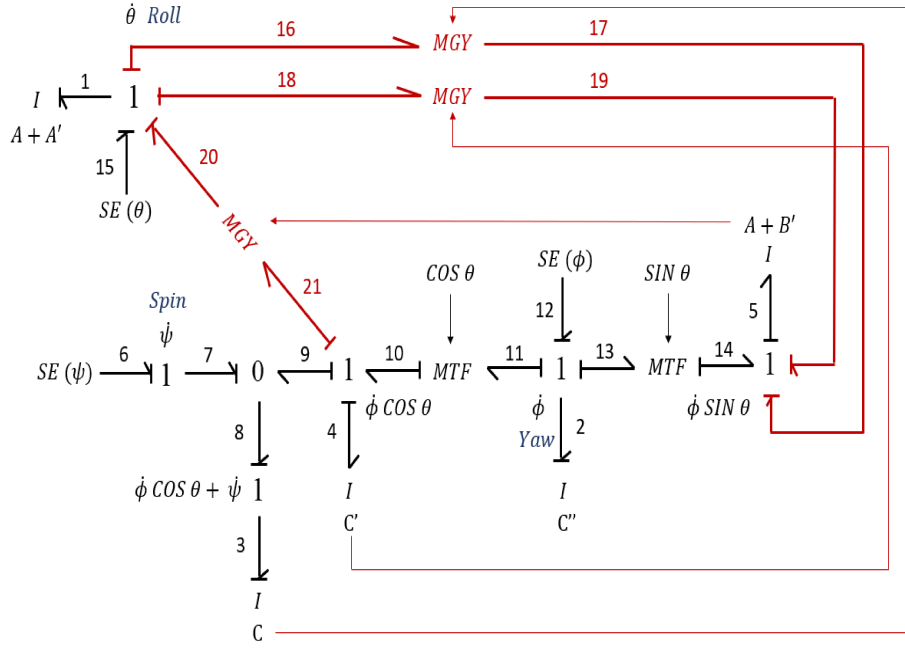


Figura 3.5: Estrutura completa do grafo de ligação do giroscópio 'bigimbal'.

Substituindo a equação 3-32 na equação 3-31:

$$e_{21} = \frac{P_1 P_2 I_5}{I_1 I_2} \sin \theta \quad (3-33)$$

$$e_9 = e_7 = e_6 = SE_6 \quad (3-34)$$

$$e_4 = I_4 \left[ \frac{\dot{P}_2}{I_2} \cos \theta - \frac{P_1 P_2}{I_1 I_2} \sin \theta \right] \quad (3-35)$$

$$e_{13} = e_{14} \sin \theta \quad (3-36)$$

$$e_{14} = e_5 - e_{17} - e_{19} \quad (3-37)$$

$$e_5 = I_5 \left[ \frac{\dot{P}_2}{I_2} \sin \theta + \frac{P_1 P_2}{I_1 I_2} \cos \theta \right] \quad (3-38)$$

$$e_{17} = f_{16} P_3 = \frac{P_1 P_3}{I_1} \quad (3-39)$$

$$e_{19} = f_{18} P_4 = \frac{P_1 P_4}{I_1} \quad (3-40)$$

$$P_4 = \frac{I_4 P_2}{I_2} \cos \theta \quad (3-41)$$

Substituindo a equação 3-41 na equação 3-40:

$$e_{19} = \frac{P_1 P_2 I_4}{I_1 I_2} \cos \theta \quad (3-42)$$

Substituindo os resultados das equações 3-29 até 3-42 na equação 3-28 e resolvendo para  $\dot{P}_2$  desenvolve:

$$\dot{P}_2 = \frac{I_2 I_1 (SE_{12} - SE_6 \cos\theta) + P_1 P_3 I_2 \sin\theta + 2P_1 P_2 \sin\theta \cos\theta (I_4 - I_5)}{I_1 [I_2 + I_4 \cos^2\theta + I_5 \sin^2\theta]} \quad (3-43)$$

A equação (3-43) acima é a primeira equação completa do grafo de ligação.

$$\dot{P}_3 = SE_6 \quad (3-44)$$

A equação (3-44) é a segunda equação completa do grafo.

$$\dot{P}_1 = SE_{15} + e_{20} - e_{18} - e_{16} \quad (3-45)$$

$$e_{20} = \left(\frac{P_2}{I_2}\right)^2 I_5 \sin\theta \cos\theta \quad (3-46)$$

$$e_{18} = \left(\frac{P_2}{I_2}\right)^2 I_4 \sin\theta \cos\theta \quad (3-47)$$

$$e_{16} = \frac{P_2 P_3}{I_2} \sin\theta \quad (3-48)$$

Substituindo as equações (3-46) a (3-48) na equação (3-45) fornece:

$$\dot{P}_1 = SE_{15} - \frac{P_2 P_3}{I_2} \sin\theta + \left(\frac{P_2}{I_2}\right)^2 \sin\theta \cos\theta (I_5 - I_4) \quad (3-49)$$

A equação (3-49) é a terceira equação completa do grafo de ligação.

Por fim, a equação trivial (3-5) é reescrita em notação de grafos de ligação:

$$\frac{P_1}{I_1} = \frac{d}{dt}\theta \quad (3-50)$$

Desta forma, as equações completas do grafo de ligação são formadas pelas equações: (3-43), (3-44), (3-49) e (3-50). A equação (3-43) corresponde a equação lagrangeana dada pela equação (3-2). A equação (3-44) corresponde a equação lagrangeana dada pela equação (3-3). A equação (3-49) corresponde a equação lagrangeana dada pela equação (3-4).

## 4

### Simulação das Equações do Grafo do Giroscópio Bigimbal

O MATLAB foi utilizado para simular as equações dos grafos de ligação, dadas pelas equações 3-43, 3-44, 3-49 e 3-50.

Os valores de inércia foram arbitrariamente escolhidas como  $A = 2$ ,  $A' = 1,4$ ,  $B' = 1,2$ ,  $C = 4$ ,  $C' = 2,6$  e  $C'' = 2,2$ , assim como feito no artigo [10]. Gráficos no tempo das quatro variáveis de estado  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\psi}$  são mostrados nas figuras 4.2, 4.5, 4.6 e 4.7. Além disso, foram plotados os ângulos  $\phi$  e  $\psi$  (figuras 4.3 e 4.4, respectivamente) com o intuito de estudá-los a seguir. Vale a pena lembrar que as variáveis de estado acima estão relacionadas as variáveis do grafo pelas seguintes equações (3-50), (4-54), (4-55) e (4-56):

$$\dot{\theta} = \frac{P_1}{I_1} = \frac{P_1}{A + A'} \quad (4-1)$$

$$\dot{\phi} = \frac{P_2}{I_2} = \frac{P_2}{C''} \quad (4-2)$$

$$\dot{\psi} = \frac{P_3}{I_3} - \frac{P_2}{I_2} \cdot \text{Cos } \theta = \frac{P_3}{C} - \frac{P_2}{C''} \cdot \text{Cos } \theta \quad (4-3)$$

Vale a pena lembrar que os valores obtidos não representam uma moto real. Os valores utilizados como parâmetros tem o intuito de apenas analisar o comportamento da dinâmica do sistema. As entradas do torque foram modeladas como mostrada na figura 4.1 abaixo.

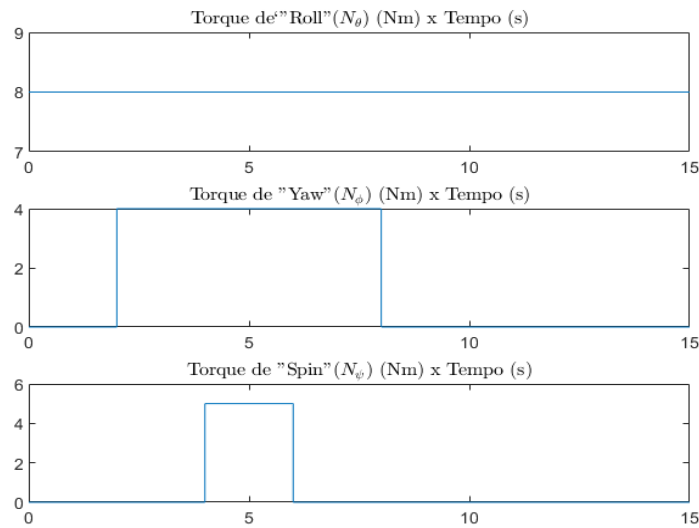
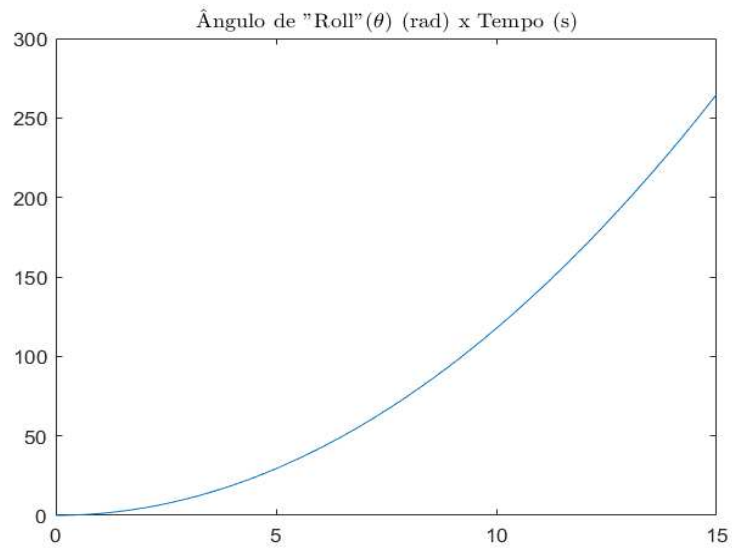
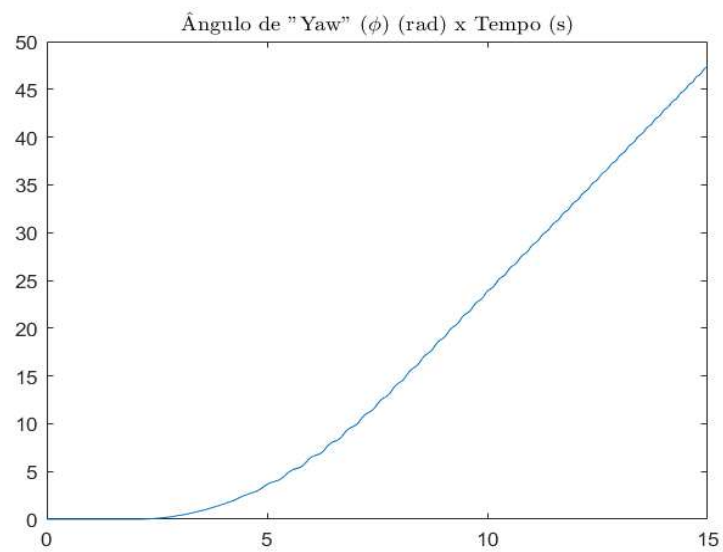


Figura 4.1: Simulação dos perfis de torque de 'Roll' ( $N_\theta$ ), 'Yaw' ( $N_\phi$ ) e 'Spin' ( $N_\psi$ ).

Figura 4.2: Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ).Figura 4.3: Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ).

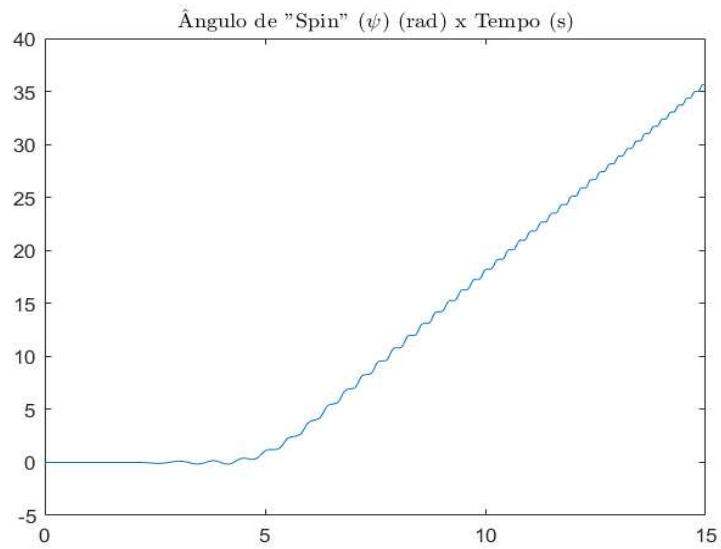


Figura 4.4: Simulação do resultado do ângulo de 'Spin' ( $\psi$ ).

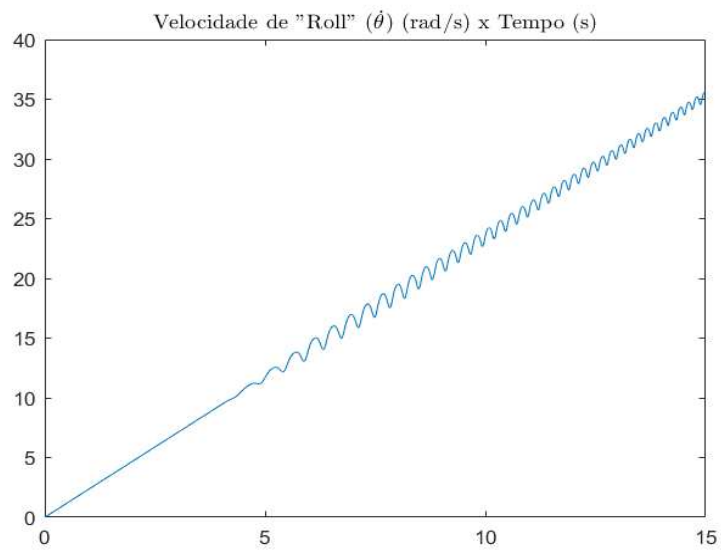
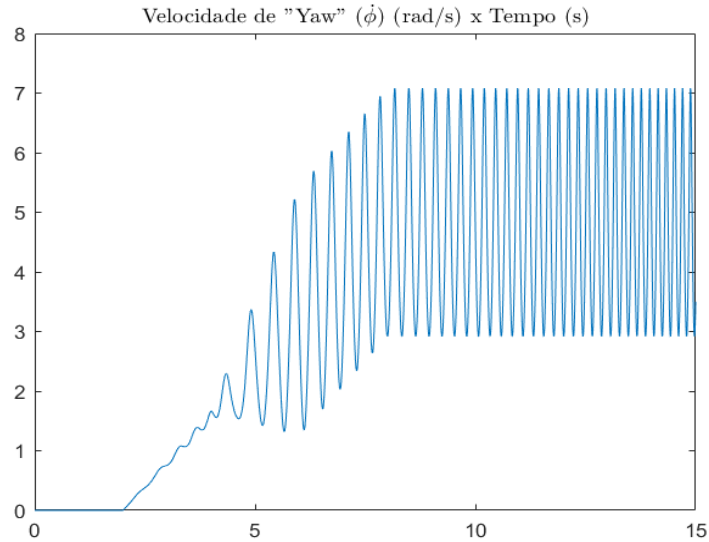
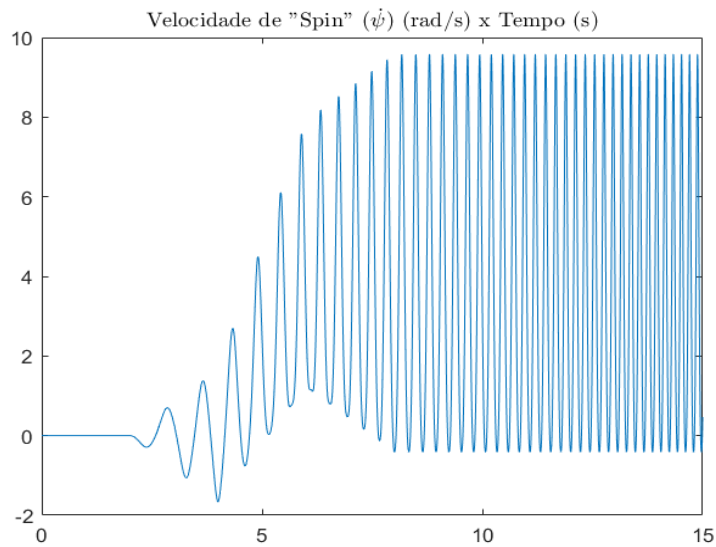


Figura 4.5: Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ).

Figura 4.6: Simulação do resultado da velocidade de 'Yaw' ( $\dot{\phi}$ ).Figura 4.7: Simulação do resultado da velocidade de 'Spin' ( $\dot{\psi}$ ).

Tanto as entradas de torque quanto os resultados obtidos nas figuras 4-1 a 4-7 tiveram o intuito de reproduzir as simulações do artigo [10] utilizando um modelo em MATLAB ao invés de um modelo no software DYMOILA. Os resultados obtidos no MATLAB reproduzem com fidelidade os resultados encontrados no artigo [10]. No entanto, as oscilações dos resultados não são interessantes para um modelo que deseja analisar a estabilidade produzida pelo efeito giroscópico em uma motocicleta. Tais oscilações são produzidas pela ausência de atrito entre os mancais do giroscópio,

o que não representa um modelo real no qual o atrito é presente. O acréscimo desse amortecimento se torna fácil utilizando a técnica dos grafos de ligação. Basta adicionar um elemento resistivo as junções dos movimentos de 'Roll', 'Yaw' e 'Spin', como mostrado na figura 4.8 abaixo:

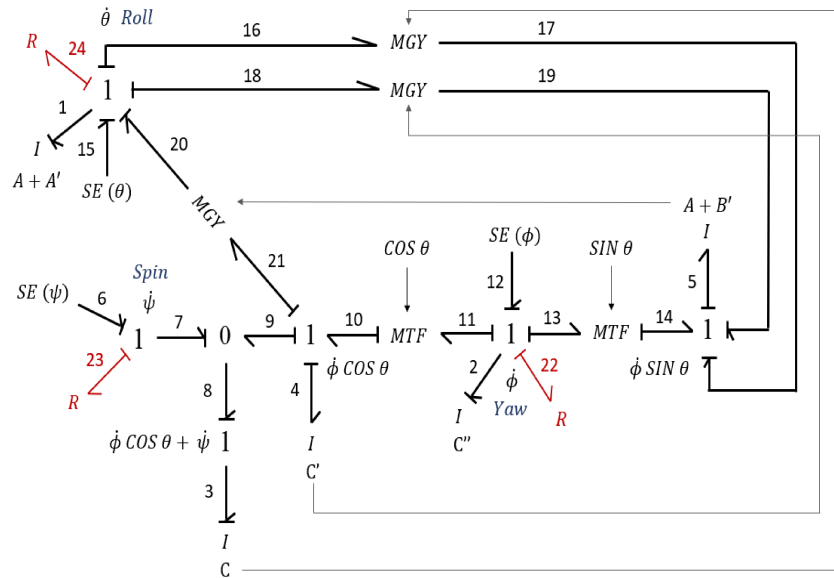


Figura 4.8: Grafo de ligação de um giroscópio com amortecimento.

Portanto, os resultados serão refeitos, mas agora considerando um amortecimento relativo ao atrito dos mancais. Os novos resultados se encontram nas figuras 4.9 a 4.14 abaixo:

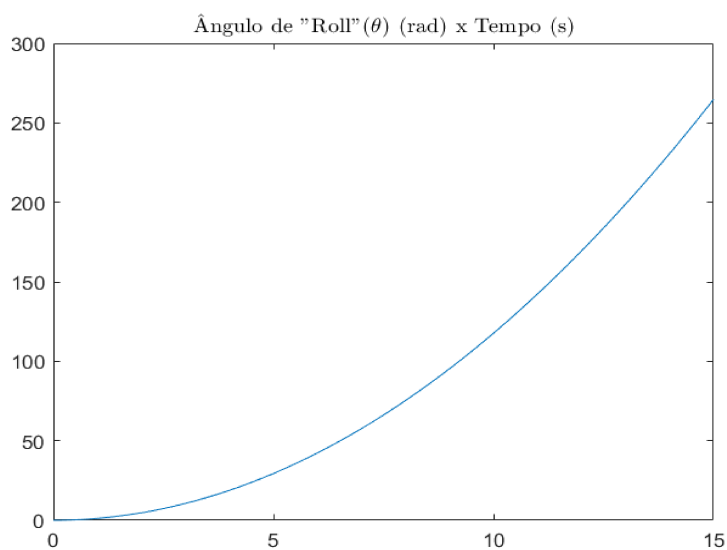


Figura 4.9: Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ) amortecido.



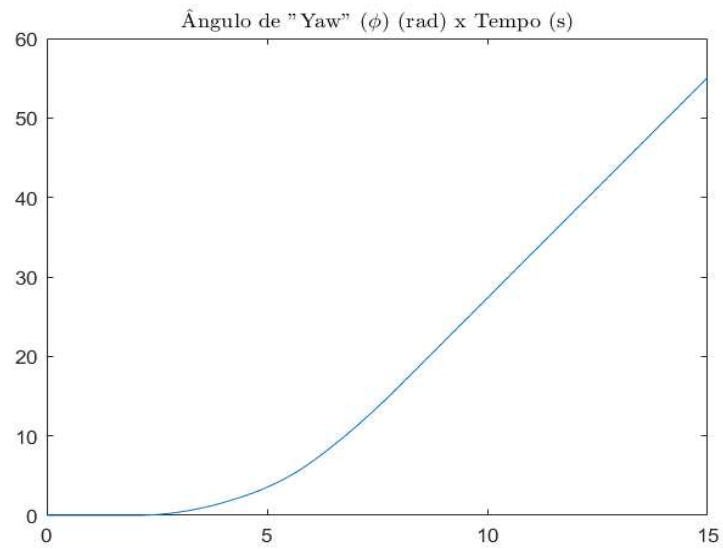


Figura 4.10: Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ) amortecido.

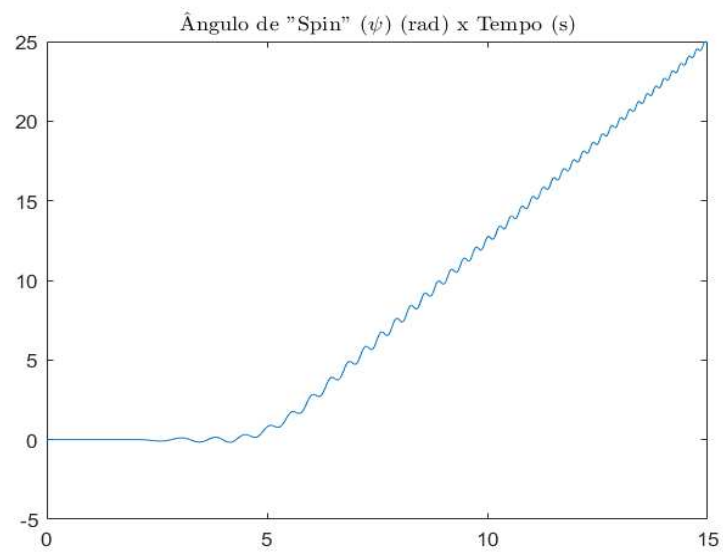


Figura 4.11: Simulação do resultado do ângulo de 'Pitch' ( $\psi$ ) amortecido.

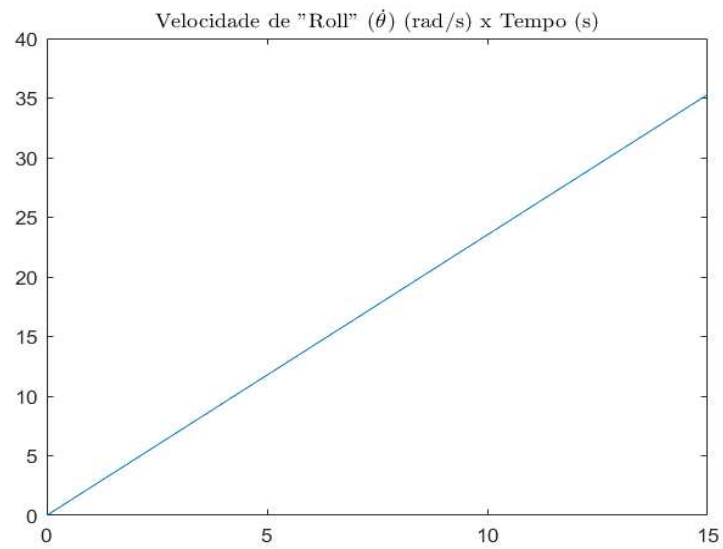


Figura 4.12: Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ) amortecida.

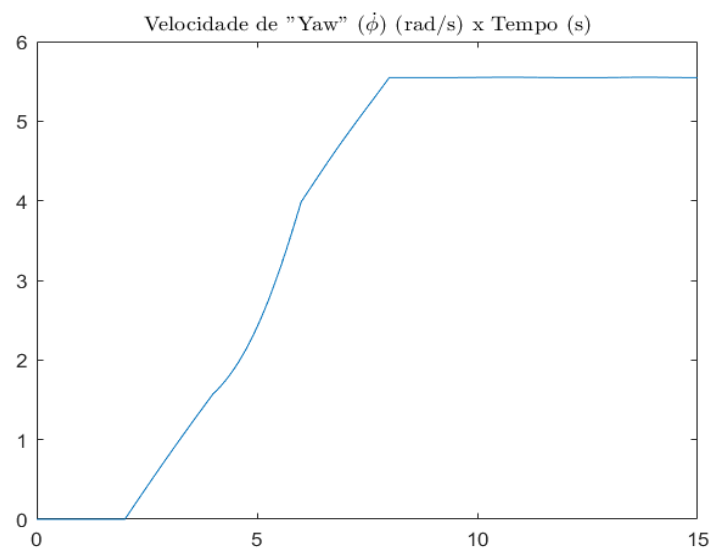


Figura 4.13: Simulação do resultado da velocidade de 'Yaw' ( $\dot{\phi}$ ) amortecida.

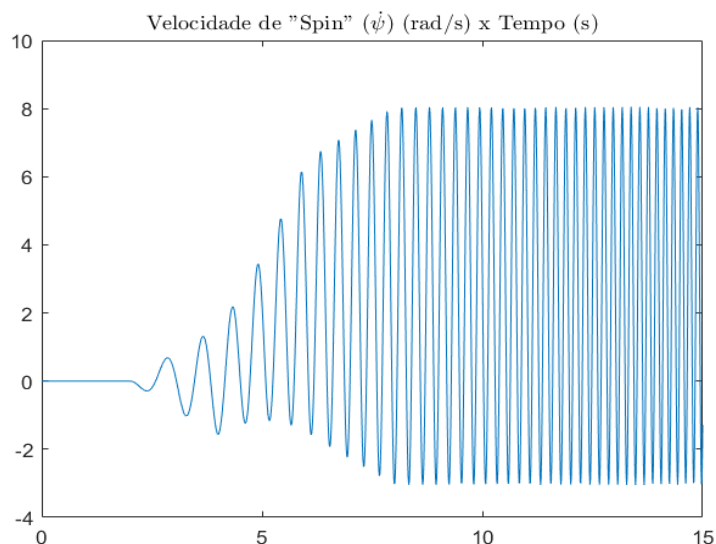


Figura 4.14: Simulação do resultado da velocidade de 'Pitch' ( $\dot{\psi}$ ) amortecida.

Como pode-se observar no resultados mostrados nas figuras 4-8 a 4-12, o amortecimento imposto proporcionou resultados mais satisfatórios ao estudo, com exceção dos parâmetros  $\psi$  e  $\dot{\psi}$ .

Finalmente, é de interesse desse projeto analisar a influência de cada torque aplicados individualmente sobre o sistema. Para tanto, foi realizada uma nova simulação na qual os torques  $N_{\Theta}$ ,  $N_{\Phi}$  e  $N_{\Psi}$  são aplicados em momentos diferentes no sistema. Os resultados obtidos se encontram nas figuras 4.15 a 4.21 a seguir:

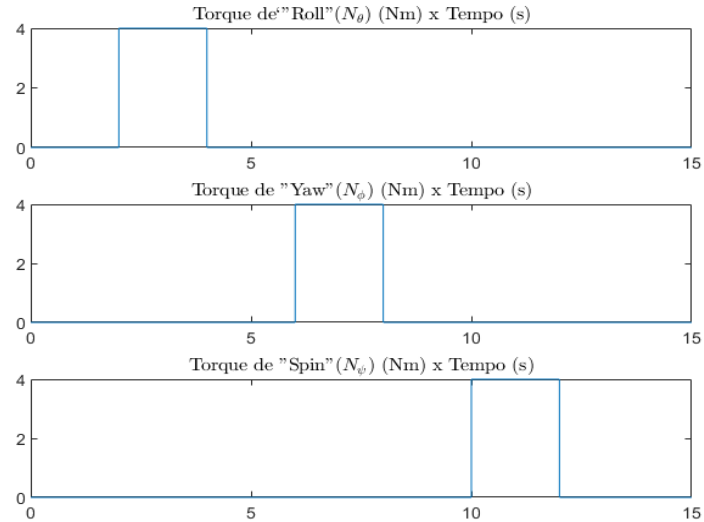


Figura 4.15: Simulação dos perfis de torque de 'Roll' ( $N_\theta$ ), 'Yaw' ( $N_\phi$ ) e 'Spin' ( $N_\psi$ ) aplicados individualmente.

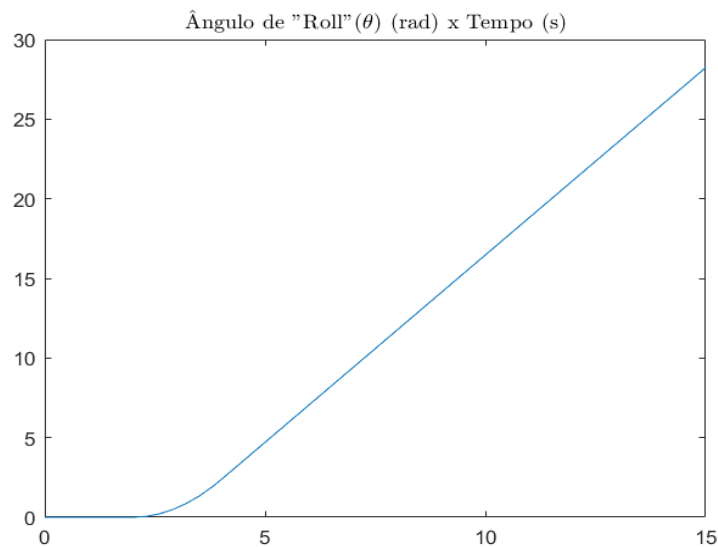


Figura 4.16: Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ).

O gráfico 4.16 mostra que o ângulo de 'roll' ( $\Theta$ ) varia somente com o torque de 'roll' ( $N_\Theta$ ). No instante  $t = 2$  segundos, quando o torque  $N_\Theta$  é aplicado, o ângulo de 'roll' cresce exponencialmente até o instante  $t = 4$  segundos no qual ocorre o cessamento do torque. A partir desse momento, o ângulo de 'roll' mantém um crescimento linear até o fim da simulação. Esse comportamento pode ser comparado ao tombamento da moto. Ao se aplicar um torque de 'roll' na moto, o sistema começa a inclinar

com certa aceleração devido à aplicação do torque. Após o término da ação do torque, o sistema mantém o movimento de tombamento, mas agora, com velocidade constante, representada pelo crescimento linear de  $\Theta$ . Este movimento se mantém até que eventualmente ocorre o tombamento da moto.

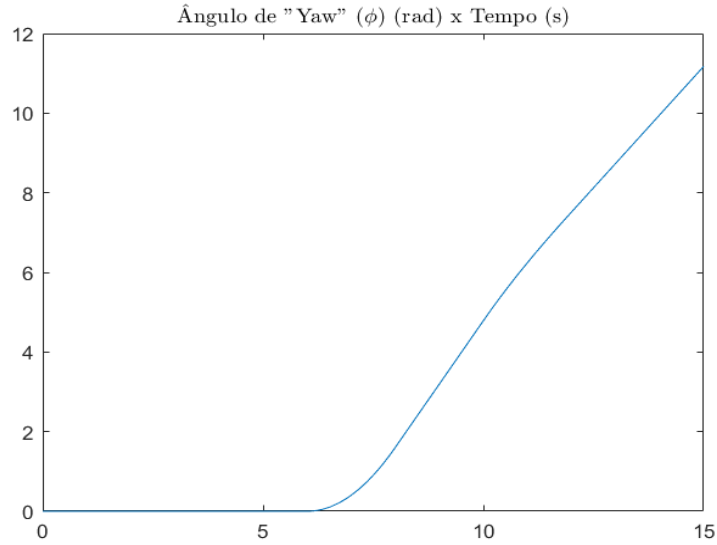


Figura 4.17: Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ).

O gráfico 4.17 mostra que o ângulo de 'yaw' ( $\Phi$ ) varia tanto com o torque de 'yaw' ( $N_{\Phi}$ ) quanto ao de 'spin' ( $N_{\Psi}$ ). No instante  $t = 6$  segundos, quando o torque de 'yaw' é aplicado, o ângulo de 'yaw' cresce com determinada inclinação. Quando o torque de 'spin' é aplicado o ângulo de 'yaw' mantém o seu crescimento, no entanto com uma taxa menor. Esse comportamento mostra como o torque de 'yaw' influencia no aumento da taxa com que o ângulo de 'yaw' cresce, ou seja, a velocidade de 'yaw', enquanto o torque de 'spin' influencia na diminuição da velocidade.

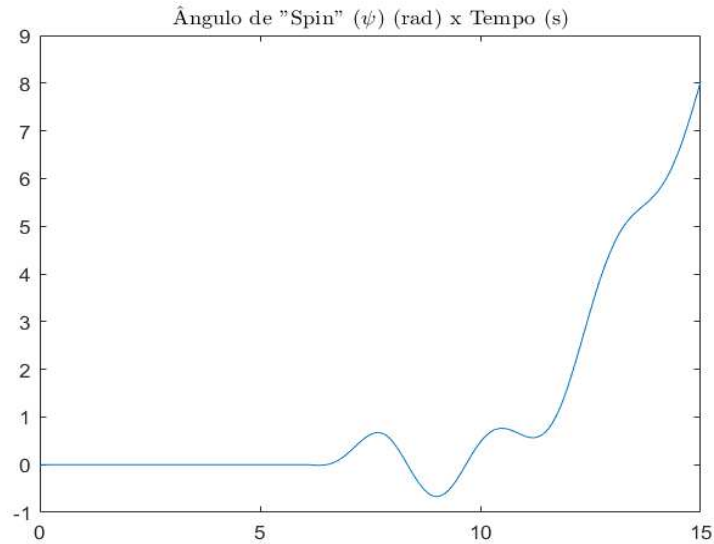


Figura 4.18: Simulação do resultado do ângulo de 'Spin' ( $\psi$ ).

O gráfico 4.18 mostra que o ângulo de 'spin' ( $\Psi$ ) varia tanto com o torque de 'yaw' ( $N_{\Phi}$ ) quanto ao de 'spin' ( $N_{\Psi}$ ). No instante  $t = 6$  segundos, quando o torque de 'yaw' é aplicado, o ângulo de 'spin' começa a oscilar sobre determinado padrão. No instante  $t = 10$  segundos, quando o torque de 'spin' é aplicado, a oscilação aumenta em módulo consideravelmente devido a introdução do novo torque. Este gráfico determina que o movimento de 'spin' sofre muito mais influência do torque de 'spin' quanto ao torque de 'yaw'.

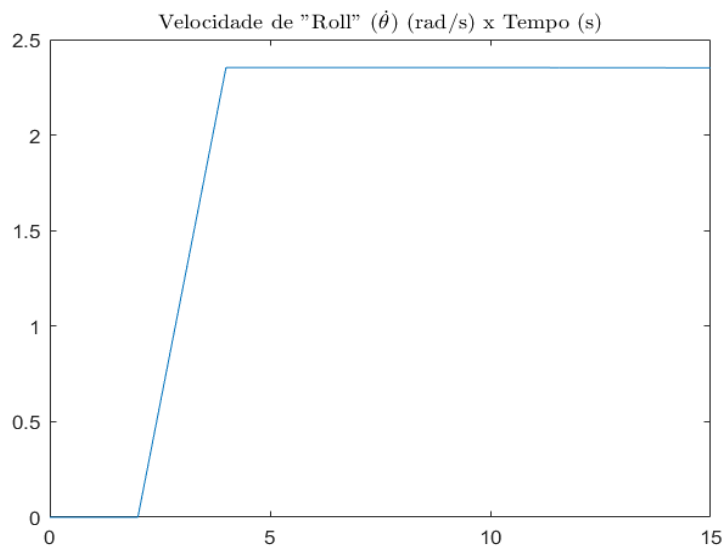


Figura 4.19: Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ).

O gráfico 4.19 mostra que a velocidade de ‘roll’ ( $\dot{\Theta}$ ) varia somente com o torque de ‘roll’ ( $N_{\Theta}$ ). No instante  $t = 2$  segundos, quando o torque  $N_{\Theta}$  é aplicado, a velocidade de ‘roll’ cresce linearmente até o instante  $t = 4$  segundos no qual ocorre o cessamento do torque. A partir desse momento, a velocidade se mantém constante até o final da simulação. Esse comportamento pode ser comparado, novamente ao tombamento da moto. Ao se aplicar um torque de ‘roll’ na moto, o sistema começa a inclinar com velocidade linearmente crescente. Após o término da ação do torque, o sistema mantém o movimento de tombamento, mas agora, com velocidade constante. Este movimento se mantém até que eventualmente ocorre o tombamento da moto.

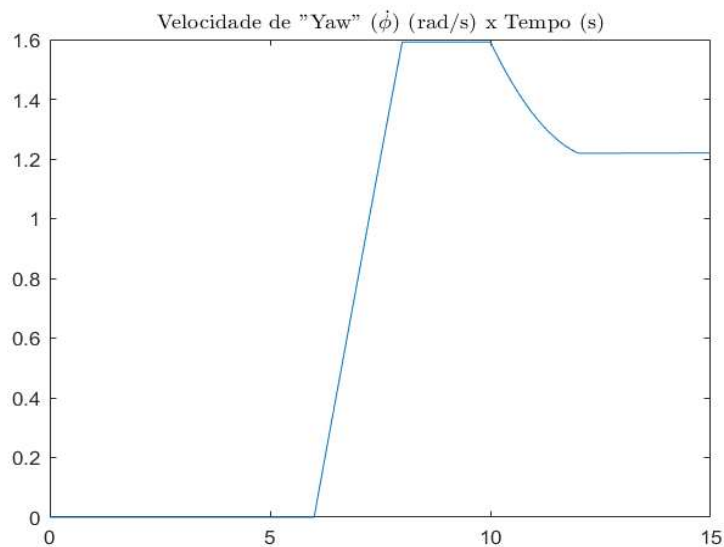


Figura 4.20: Simulação do resultado da velocidade de ‘Yaw’ ( $\dot{\phi}$ ).

O gráfico 4.20 mostra que a velocidade de ‘yaw’ ( $\dot{\Phi}$ ) varia tanto com o torque de ‘yaw’ ( $N_{\Phi}$ ) quanto ao de ‘spin’ ( $N_{\Psi}$ ). No instante  $t = 6$  segundos, quando o torque de ‘yaw’ é aplicado, a velocidade de ‘yaw’ cresce linearmente até o instante  $t = 8$  segundos no qual ocorre o cessamento do torque  $N_{\Phi}$ .  $\dot{\Phi}$  se mantém então constante até que, no instante  $t = 10$  segundos, o torque de ‘spin’ é aplicado. A partir desse instante, a velocidade de ‘yaw’ decresce exponencialmente até o instante  $t = 12$  segundos quando o torque  $N_{\Phi}$  é cessado. A partir desse instante, a velocidade de ‘yaw’ se mantém constante até o final da simulação. Esse comportamento mostra como o torque de ‘yaw’ influencia no aumento da velocidade de ‘yaw’ enquanto o torque de ‘spin’ influencia na diminuição da velocidade.

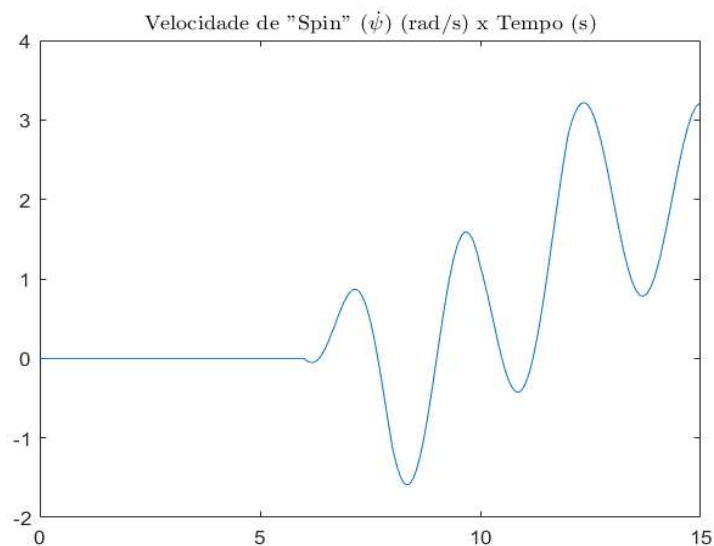


Figura 4.21: Simulação do resultado da velocidade de 'Spin' ( $\dot{\psi}$ ).

O gráfico 4.21 mostra que a velocidade de 'spin' ( $\dot{\Psi}$ ) varia tanto com o torque de 'yaw' ( $N_{\Phi}$ ) quanto ao de 'spin' ( $N_{\Psi}$ ). No instante  $t = 6$  segundos, quando o torque de 'yaw' é aplicado, a velocidade de 'spin' começa a oscilar sobre determinado padrão. No instante  $t = 10$  segundos, quando o torque de 'spin' é aplicado, a oscilação aumenta em módulo devido a introdução do novo torque.



## 5

### Grafo de Ligação da Roda Dianteira de uma Motocicleta

#### 5.1

##### O Modelo de Roda Dianteira e seu Grafo de Ligação

Nesta seção, deseja-se desenvolver um modelo que melhor represente a roda dianteira de uma motocicleta. Para tanto, será utilizado o modelo do giroscópio 'bigimbal' desenvolvido no capítulo 3 com as modificações necessárias para a reprodução do novo modelo. Em um modelo de motocicleta, ambas as rodas são limitadas pelo eixo que dá suporte as rodas. A roda dianteira está limitada pelo eixo de direção, enquanto a roda traseira está limitada pelo quadro da motocicleta, ou seja, o ângulo de 'pitch' do modelo do giroscópio é limitado para os dois casos. O modelo pode ser melhor visualizado na figura 5.1 abaixo:

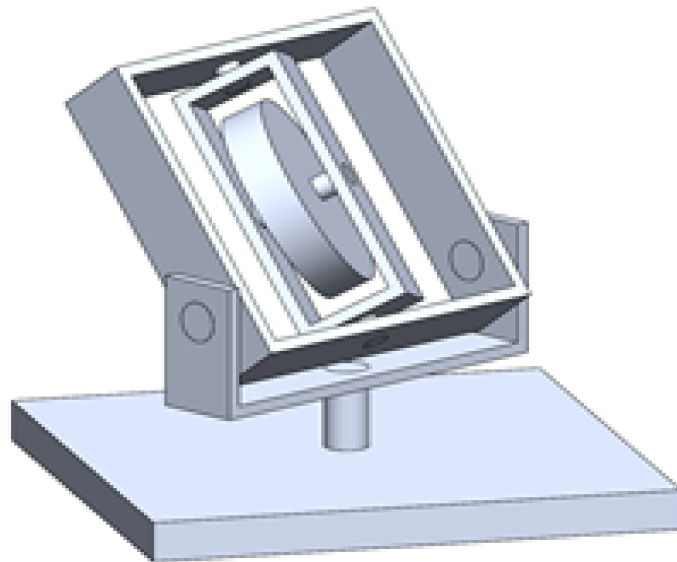


Figura 5.1: Modelo visual da roda dianteira.

No modelo desenvolvido no capítulo 3, o movimento de 'pitch' já foi limitado, portanto é possível utilizar o modelo como base para o desenvolvimento do grafo da roda dianteira. Para este caso, é necessário, no entanto, uma modificação com relação ao ângulo de 'roll'. Num giroscópio, o eixo de rotação de 'roll' passa pelo centro da roda, o que não ocorre num modelo de motocicleta real no qual o eixo de 'roll' passa pelo ponto de contato do pneu e o solo. Isso causa uma alteração do termo de inércia  $I_1$  que deve levar em consideração o deslocamento do eixo de rotação.

$$I_{roll} = I_1 + m \cdot r^2 = A + A' + m \cdot r^2 = A + A' + A'' \quad (5-1)$$

Finalmente, para o ângulo de 'yaw' não é necessária nenhuma modificação. No entanto, é importante considerar que em um modelo de roda dianteira há duas rotações de 'yaw' envolvidas: a rotação da roda, descrita no modelo acima, e rotação do eixo de direção. Neste capítulo será apenas considerado a rotação de 'yaw' da roda. O eixo de direção será introduzido juntamente com o quadro da motocicleta no capítulo 6.

Desta forma, o grafo de ligação para o modelo de roda dianteira se resume ao modelo mostrado na figura 5.2:

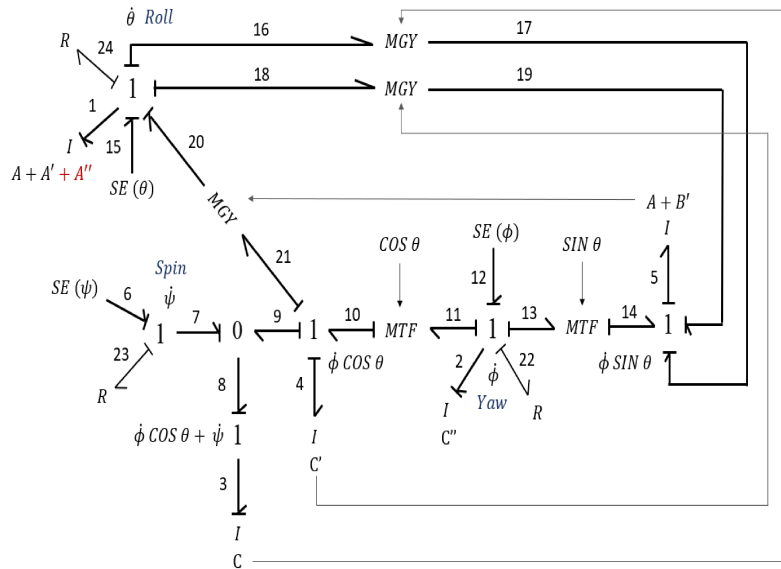


Figura 5.2: Grafo de ligação do modelo de roda dianteira

## 5.2 Simulação das Equações do Grafo para o Modelo de Roda Dianteira

Com o intuito de analisar a influência que a mudança do eixo de rotação de 'roll' produz, foram refeitas as simulações do capítulo 4 considerando o novo modelo. Os valores de inércia foram mantidos como  $A = 2$ ,  $A' = 1,4$ ,  $B' = 1,2$ ,  $C' = 2,6$  e  $C'' = 2,2$  e foi introduzido um valor arbitrário  $A'' = 2,8$  para a nova inércia. As entradas do torque foram modeladas como mostrada na figura 5.3 abaixo. Gráficos no tempo das quatro variáveis de estado  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\psi}$  são mostrados nas figuras 5.4, 5.7, 5.8 e 5.9. Além disso, foram plotados os ângulos  $\phi$  e  $\psi$  (figuras 5.5 e 5.6, respectivamente) com o intuito de estudá-los a seguir. Vale a pena lembrar que os valores obtidos não

representam uma moto real. O valores utilizados como parâmetros tem o intuito de apenas analisar o comportamento da dinâmica do sistema.

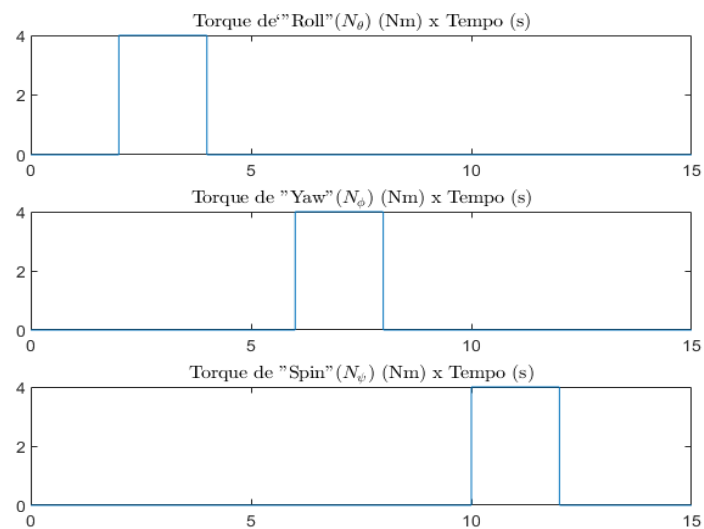


Figura 5.3: Simulação dos perfis de torque de 'Roll' ( $N_\theta$ ) e 'Yaw' ( $N_\phi$ ) aplicados individualmente.

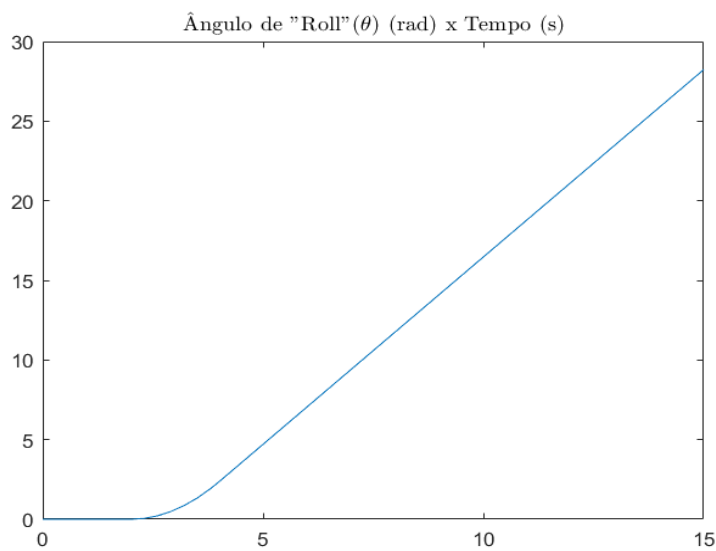


Figura 5.4: Simulação do resultado do ângulo de 'Roll' ( $\theta$ ).

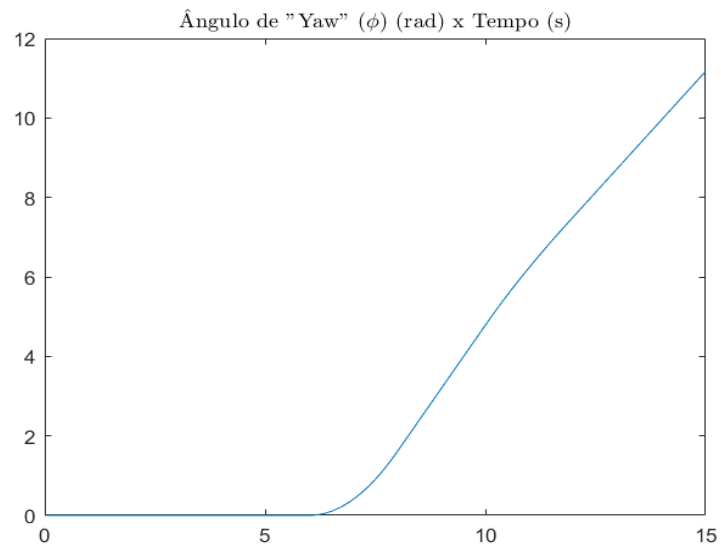


Figura 5.5: Simulação do resultado do ângulo de 'Yaw' ( $\phi$ ).

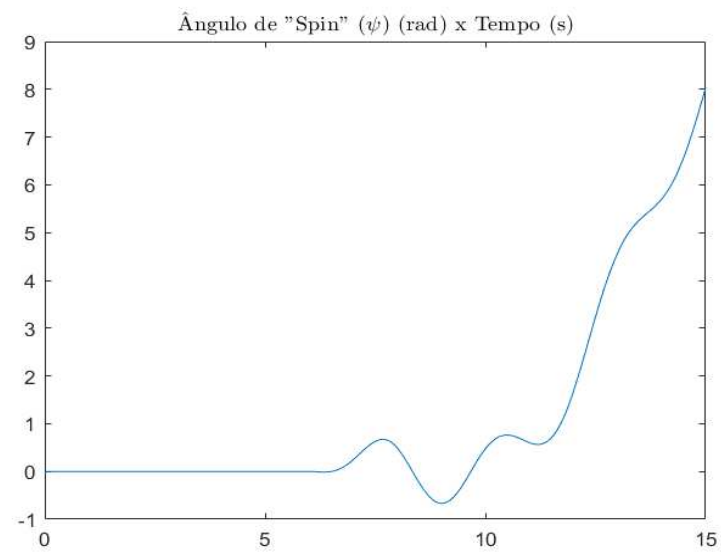


Figura 5.6: Simulação do resultado do ângulo de 'Spin' ( $\psi$ ).

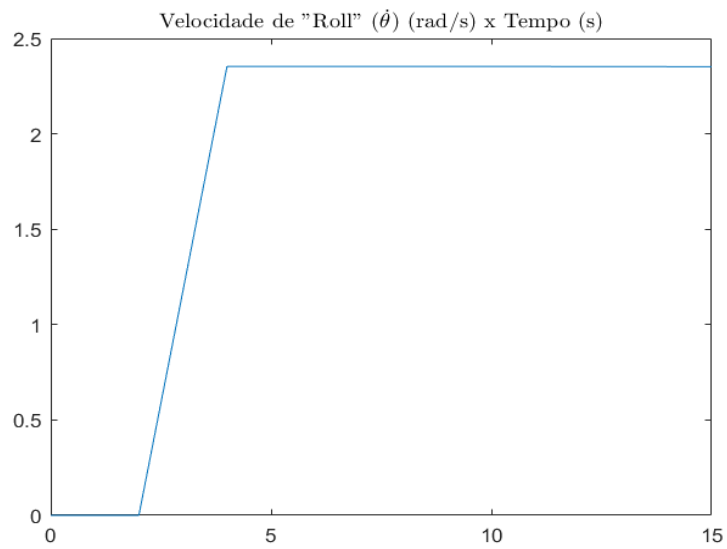


Figura 5.7: Simulação do resultado da velocidade de 'Roll' ( $\dot{\theta}$ ).

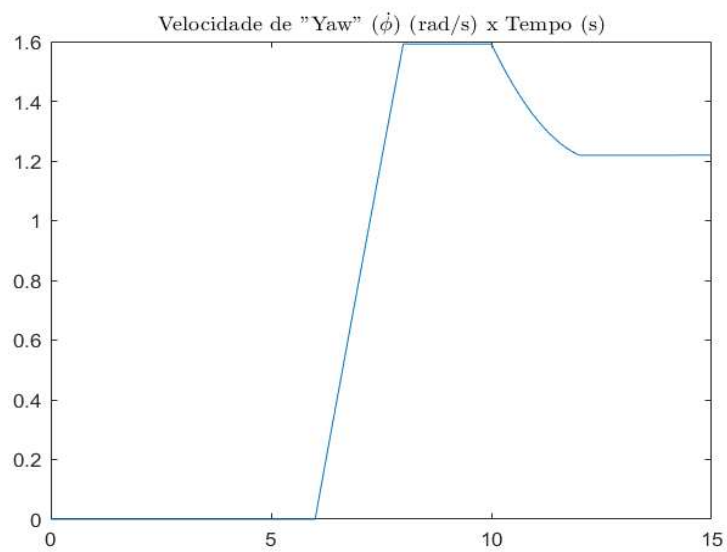


Figura 5.8: Simulação do resultado da velocidade de 'Yaw' ( $\dot{\phi}$ ).

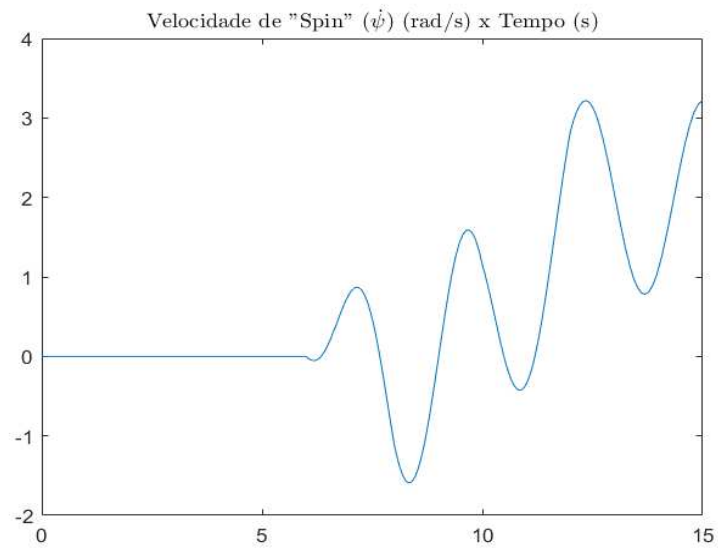


Figura 5.9: Simulação do resultado da velocidade de 'Spin' ( $\dot{\psi}$ ).

Analisando os gráficos 5.4 a 5.9, nota-se que a mudança da inércia de 'roll' não influencia consideravelmente nos resultados obtidos anteriormente.

## 6

### Grafo de Ligação do Sistema Motocicleta Completo

#### 6.1

#### O Modelo de Motocicleta Completo e seu Grafo de Ligação

Neste capítulo, será montado um sistema que simula a dinâmica de uma motocicleta como um sistema completo, ou seja, considerando sua roda dianteira, traseira, eixo de direção e quadro. Para tanto, será utilizado o modelo desenvolvido no capítulo 5 para a roda dianteira. Para a roda traseira, eixo de direção e quadro serão feitas as devidas modificações ao grafo ao longo do seu desenvolvimento. O modelo pode ser melhor visualizado na figura 6.1 abaixo:

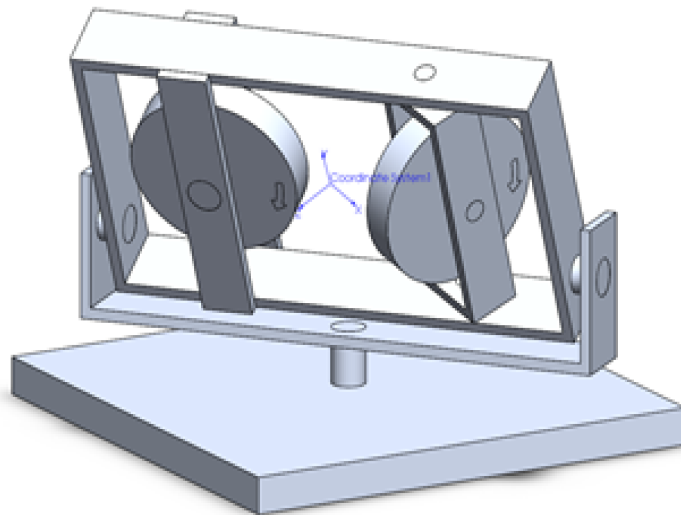


Figura 6.1: Modelo visual de sistema completo.

Utilizando a propriedade modular dos grafos de ligação, pode-se duplicar o modelo do capítulo 5 para representar tanto a roda dianteira quanto a roda traseira, como mostrado na figura 6.2:





Realiza-se, então, as ligações das junções 1 do chassi com as junções 1 das rodas, tanto para 'roll' quanto para 'yaw'. Também é importante considerar que os 'spins' das rodas também estão relacionados uma vez que o movimento da roda traseira produzido pelo motor gera o movimento da roda dianteira. Essa relação é mostrada no grafo através da ligação entre as junções 1 de 'spin' da roda traseira e dianteira. Essas ligações são mostradas na figura 6.4.

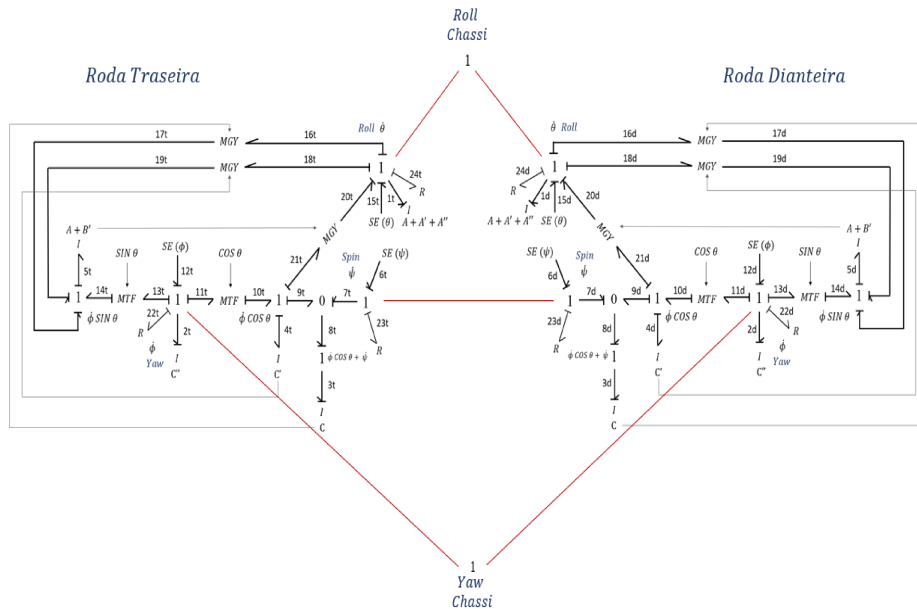


Figura 6.4: Esquemática da 3ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.

Em seguida, eliminam-se os termos que deixam de existir no modelo completo. O torque de 'yaw' ( $SE(\phi)$ ) da ligação 12t desaparece uma vez que o movimento de 'yaw' da roda traseira é o mesmo do chassi da moto. Portanto, é o torque de 'yaw' produzido sobre o chassi que afeta o movimento da roda traseira. No caso da roda dianteira, no entanto, além do torque de 'yaw' realizado sobre o chassi, o torque de 'Steer' no guidão também afeta o movimento de 'yaw' da roda dianteira. Portanto, podemos manter o torque  $SE(\phi)$  da ligação 12d que agora será o torque de 'Steer' no guidão.

Para o movimento de 'roll' são necessárias duas mudanças. A primeira ocorre nas duas rodas e é a eliminação dos torques de 'roll' aplicados diretamente sobre as rodas (ligações 15t e 15d). No modelo completo, o torque de 'roll' é aplicado sobre o chassi, que por sua vez influencia o movimento de 'roll' das rodas. A segunda mudança ocorre apenas na roda traseira e é a eliminação da inércia de 'roll' da roda traseira (ligação 1t). Na verdade, o que ocorre é que a inércia associada ao

movimento de 'roll' da roda traseira está associada à inércia do 'chassi' e não à roda diretamente.

Por fim, quanto ao movimento de 'spin' elimina-se apenas o torque sobre a roda dianteira (ligação 6d) uma vez que o torque de giro é feito pelo motor apenas na roda traseira. O torque  $SE(\psi)$  da ligação 6t se mantém, no entanto será chamado de torque do motor.

Todas essas eliminações ficam mais claras na figura 6.5 a seguir:

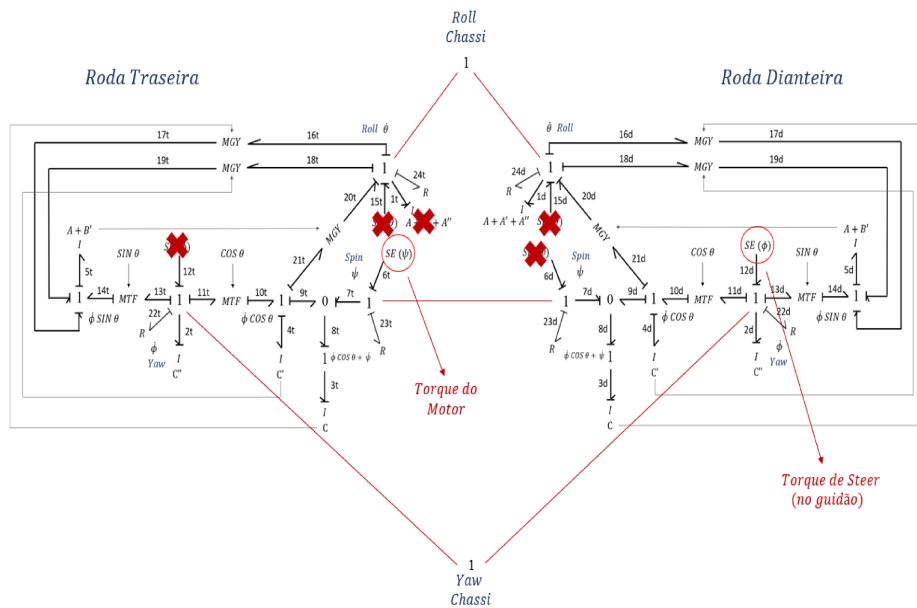


Figura 6.5: Esquematização da 4ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.

Ao mesmo tempo é possível adicionar os torques de 'roll' e 'yaw' no chassi assim como as inércias associadas. Note na figura 6.6, no entanto, que é necessária uma junção 0 para a aplicação do torque de 'yaw'.

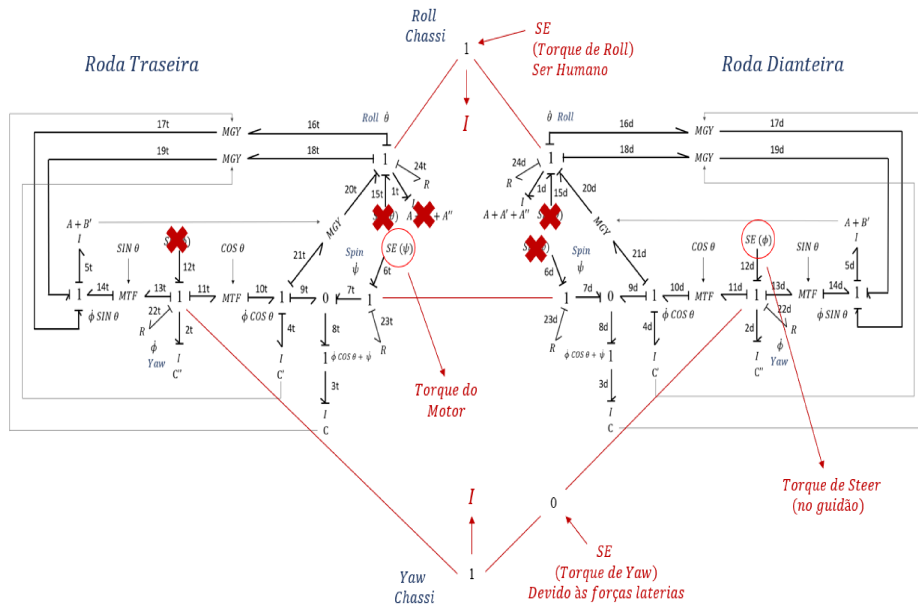


Figura 6.6: Esquematização da 5ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.

Realizando as alterações e organizando o grafo obtém-se o grafo da figura 6-7 faltando apenas as relações de fluxo de potência e esforço.

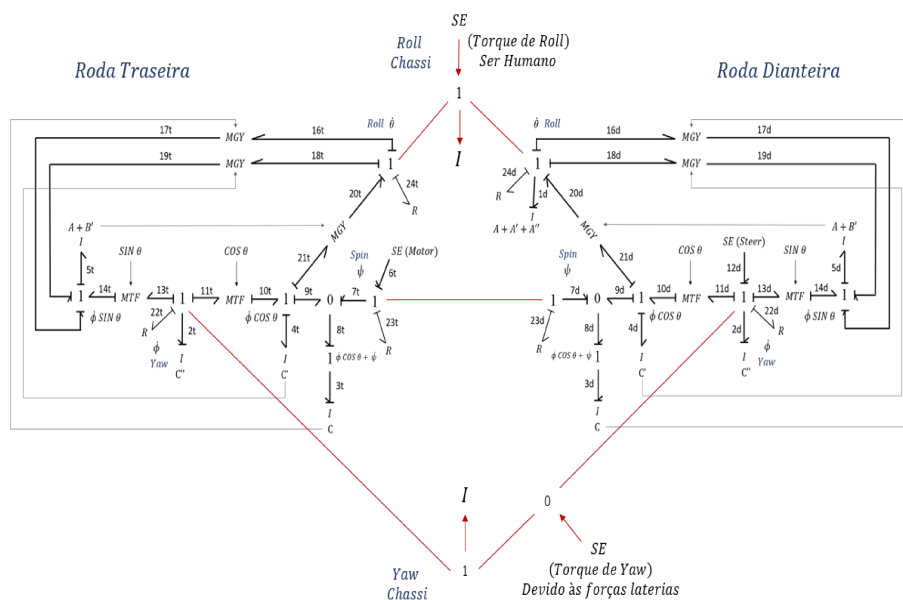


Figura 6.7: Esquematização da 6ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.

Incluindo as relações de fluxo de potência e esforço obtém-se o grafo do modelo completo mostrado na figura 6.8. Note que algumas causalidades se alteram após as mudanças realizadas.

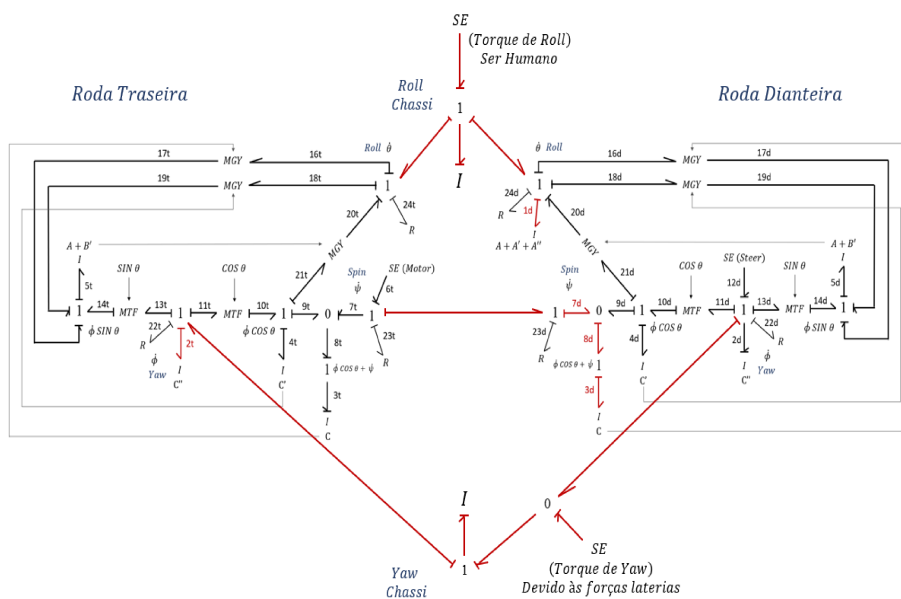


Figura 6.8: Esquemática da 7ª etapa da construção do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.

Por fim, inclui-se a numeração das ligações restante e obtém-se o modelo final do grafo de ligação

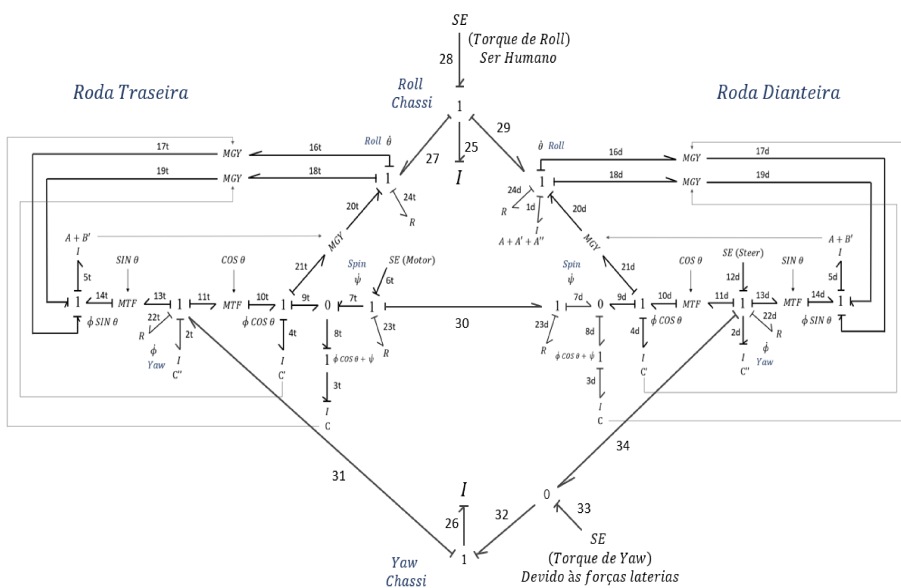


Figura 6.9: Esquemática do grafo de ligação do modelo de motocicleta completo.

## 7

### Conclusão

Este projeto tinham como objetivo estudar a influência do efeito giroscópio sobre a dinâmica de uma motocicleta, analisando seu comportamento através da técnica de grafos de ligação, assim como modelos desenvolvidos em Simulink/MATLAB. Para tanto, foram realizadas diversas etapas de forma a obter-se os resultados esperados.

Inicialmente, foi possível desenvolver um modelo de grafo de ligação que descreve a dinâmica de um giroscópio 'bigimbal', assim como o realizado no artigo [10]. Também foi realizada a simulação do modelo matemático gerado pelo gráfico utilizando os programas MATLAB e Simulink. Com estas simulações foi possível analisar as relações das variáveis que descrevem a dinâmica do sistema com relação aos torques de entrada de forma a compreender o comportamento dinâmico do mesmo.

Em seguida, obteve-se um modelo de grafo que descreve a dinâmica da roda dianteira de uma motocicleta baseado nos modelos desenvolvidos anteriormente. Para este modelo, foi desenvolvida a simulação da dinâmica através de rotinas em MATLAB e Simulink.

Por fim, desenvolveu-se o grafo de ligação do modelo completo de uma motocicleta considerando a roda dianteira, a roda traseira, o eixo de direção e o quadro da motocicleta. Foram realizadas diversas etapas nesse processo com o intuito de entender toda a dinâmica dos módulos do sistema.

Com o modelo desenvolvido neste projeto, será possível reproduzir o equacionamento da dinâmica do sistema completo, assim como realizar as simulações necessárias utilizando parâmetros relativos a modelos de motocicletas reais. Também será possível desenvolver inúmeros estudos como o efeito de momentos de inércia variáveis, a influência do efeito giroscópio em bicicletas, com velocidade e inércia menores do que as das motocicletas ou a criação de aparatos para experimentos. Além disso, será possível considerar forças laterais no pneu e até mesmo criar um modelo para o chassi e utilizar a modularização dos grafos de ligação para unir os grafos do chassi, roda traseira e roda dianteira. Desta forma, realizando as simulações do modelo de chassi seria possível validar os resultados do modelo completo.

## Referências Bibliográficas

- [1] SPERANZA NETO, M. Modelagem de sistemas dinâmicos. Notas de aula, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017.
- [2] SPERANZA NETO, M. Modelos de bicicletas e motocicletas para análise, síntese e simulação do controle direcional e de estabilidade. Notas de aula, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2015.
- [3] MARTINS, G. N. Concepção, modelagem e simulação de aparatos (objetos educionais) para compreensão e análise da dinâmica e controle de motocicletas/bicicletas. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2016.
- [4] ASSAD, M. M. Implementação e validação experimental de estratégias de controle para estabilização e acompanhamento de trajetórias de motocicletas autônomas. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2018.
- [5] CORDEIRO, B.A.F. Desenvolvimento de um aparato para simulação e estudo do efeito giroscópico em bicicletas/motocicletas. Trabalho de conclusão de curso de graduação, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017.
- [6] KARNOPP, D. C.; MARGOLIS, D. L.; ROSENBERG, R. C. *System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*. John Wiley & Sons, Inc, 4th edition edition, 2006.
- [7] BORUTZKY, W. *Bond Graph Methodology*. Springer-Verlag, 2010.
- [8] COSSALTER, VITTORE. *Motorcycle Dynamics*. 2nd english edition edition, 2006.
- [9] MCBRIDE, R. T. System analysis through bond graph modeling. Tese de doutorado, Department of Electrical and Computer Engineering in the University of Arizona, 2005.
- [10] MCBRIDE, R. T.; CELLIER, F. E. A bond-graph representation of a two-gimbal gyroscope. Artigo acadêmico, University of Arizona, 2004.
- [11] LIANCHAO, ZHANG; DAPENG, FAN; SHIXUN, FAN. Modeling and error analysis of dynamically tuned gyroscope based on bond graph. Artigo acadêmico, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan, China, 2010.

- [12] BOS, A. M. *A Bond Graph Approach to the Modelling of a Motorcycle*. Vol. 16 edition, 1987.
- [13] ÅSTRÖM, K. J.; KLEIN, R. E.; LENNARTSSON, A. Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research. *Control Systems, IEEE*, 25, n. 4:26–47, 2005.
- [14] BEZNOS, A. V. ET AL. Control of autonomous motion of two-wheel bicycle with gyroscopic stabilization. *IEEE International Conference on Robotics and Automation 1998 Proceedings*, pages 2670–2675, 1998.
- [15] J. FAJANS. Steering in bicycles and motorcycles. *American Journal of Physics*, 68, n. 7:654–659, 2000.
- [16] J.; PEREIRA M. HUYGE, K.; AMBRÓSIO. A control strategy for the dynamics of a motorcycle, including rider. *Proceedings of the ENOC-2005*, 2005.
- [17] KOOIJMAN, J. D. G. Bicycle rider control: Observations, modeling and experiments. Tese de doutorado, TU Delft, Delft University of Technology, 2012.
- [18] R. S. LIMEBEER, D. J. N.; SHARP. Bicycles, motorcycles, and models. *Control Systems Magazine, IEEE*, 26, n. 5:34–61, 2006.
- [19] J. P. et al. MEIJAARD. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463, n. 2084:1955–1982, 2007.
- [20] R. S. SHARP. The stability and control of motorcycles. *Journal of mechanical engineering science*, 13.5:316–329, 1971.
- [21] T. SCHMITT. Modeling of a motorcycle in dymola/modelica. Tese de doutorado, Vorarlberg University of Applied Sciences, Dornborn, 2009.
- [22] M.; WEAVER M. SURYANARAYANAN, S.; TOMIZUKA. System dynamics and control of bicycles at high speeds. *Proceedings of the 2002 American Control Conference, IEEE*, pages 845–850, 2002.

## A

### Rotina em MATLAB e Simulink

Neste capítulo se encontram os programas em MATLAB e Simulink utilizados para o desenvolvimento das simulações realizadas no capítulo 4. As simulações realizadas no capítulo 5 foram realizadas utilizando este mesmo programa como modelo mas com pequenas adaptações.

Rotina principal para análise de gráficos:

```
clc;
clear all;
set(0, 'defaulttextinterpreter', 'latex')

%% ===== Parametros do Sistema ===== %%

global A A_lin A_2lin B_lin C C_lin C_2lin I1 I1d I2 I3
      I4 I5

A      = 2;
A_lin  = 1.4;
A_2lin = 2.8;
B_lin  = 1.2;
C      = 4;
C_lin  = 2.6;
C_2lin = 2.2;

I1      = A + A_lin;
I1d     = A + A_lin + A_2lin;
I2      = C_2lin;
I3      = C;
I4      = C_lin;
I5      = A + B_lin;

%% ===== Simulacao de um Giroscopio Bigimbal ===== %%

sim('sim_ModeloEstado2_1')

%% ===== Graficos ===== %%
```



```

% ----- Entradas ----- %

figure()
subplot(3,1,1)
plot(N_Theta.time,N_Theta.data);
title('Torque de "Roll"($N_{\theta}$) (Nm) x Tempo (s)')

subplot(3,1,2)
plot(N_Phi.time,N_Phi.data);
title('Torque de "Yaw"($N_{\phi}$) (Nm) x Tempo (s)')

subplot(3,1,3)
plot(N_Psi.time,N_Psi.data);
title('Torque de "Spin"($N_{\psi}$) (Nm) x Tempo (s)')

% ----- Resultados Modelo 1 ----- %

figure()
plot(Theta.time,Theta.data);
title('\^{A}ngulo de "Roll"($\theta$) (rad) x Tempo (s)')

figure()
plot(Phi.time,Phi.data);
title('\^{A}ngulo de "Yaw" ($\phi$) (rad) x Tempo (s)')

figure()
plot(Psi.time,Psi.data);
title('\^{A}ngulo de "Spin" ($\psi$) (rad) x Tempo (s)')

figure()
plot(dotTheta.time,dotTheta.data);
title('Velocidade de "Roll" ($\dot{\theta}$) (rad/s) x
      Tempo (s)')

figure()
plot(dotPhi.time,dotPhi.data);
title('Velocidade de "Yaw" ($\dot{\phi}$) (rad/s) x Tempo
      (s)')

```

```
figure()
plot(dotPsi.time,dotPsi.data);
title('Velocidade de "Spin" ( $\dot{\psi}$ ) (rad/s) x
      Tempo (s)')
```

Rotina auxiliar que determina as funções do grafo de ligação:

```
function SAIDA = MODELOESTADO1 (ENTRADA)

global A A_lin B_lin C C_lin C_2lin I1 I2 I3 I4 I5

Theta = ENTRADA(1);
P1 = ENTRADA(2);
P2 = ENTRADA(3);
P3 = ENTRADA(4);
N_Theta = ENTRADA(5);
N_Phi = ENTRADA(6);
N_Psi = ENTRADA(7);

SE_6 = N_Psi;
SE_12 = N_Phi;
SE_15 = N_Theta;

dotP1 = SE_15 - (P2*P3/I2)*sin(Theta) + [(P2/I2)^2]*sin
      (Theta)*cos(Theta)*(I5 - I4);
dotP2 = (I2*I1*(SE_12 - SE_6*cos(Theta)) + P1*P3*I2*sin
      (Theta) + 2*P1*P2*sin(Theta)*cos(Theta)*(I4 - I5))/(I1
      *(I2 + I4*(cos(Theta)^2) + I5*(sin(Theta)^2)));
dotP3 = SE_6;

SAIDA = [dotP1;dotP2;dotP3];
```

Simulink utilizado para as simulações do capítulo 3:

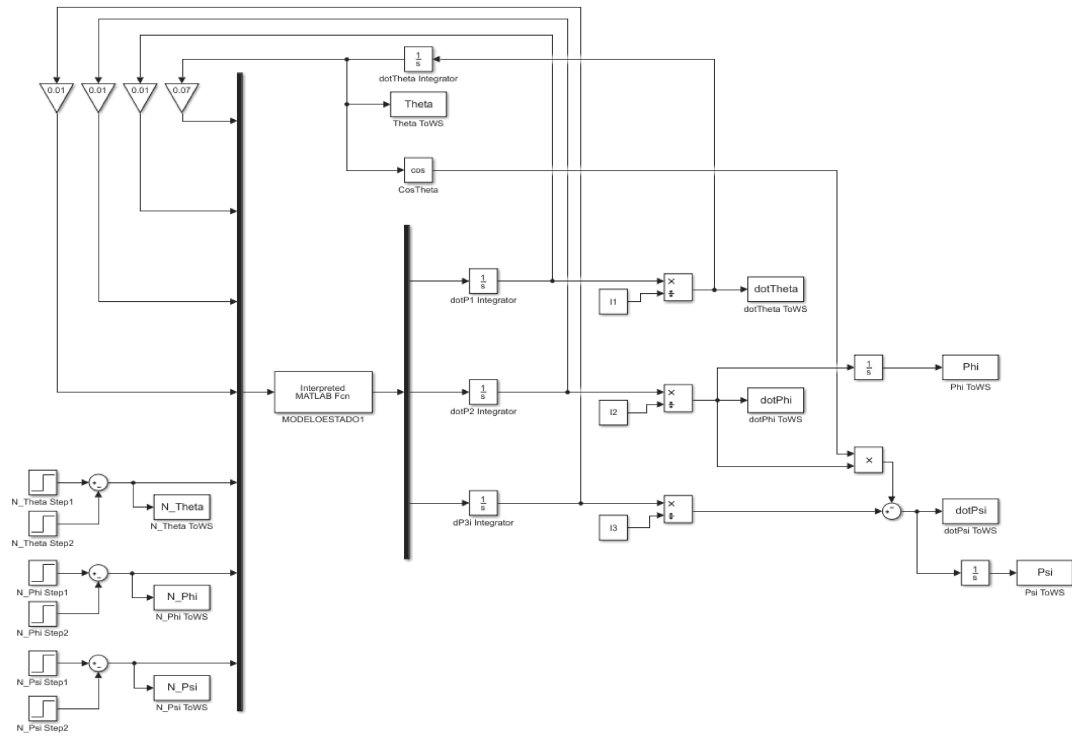


Figura A.1: Simulink utilizado para as simulações do capítulo 3.