

## 5

### **Análise de Estabilidade do Escoamento de Soluções Poliméricas.**

Processos de revestimento de todos os tipos podem ser considerados bem-sucedidos se apresentam duas características: operam em regime permanente e o escoamento é bidimensional, também conhecido como escoamento base, exceto perto das bordas. Por esta razão, modelos teóricos do processo são desenvolvidos com as hipóteses de escoamentos em regime permanente e bidimensionais.

Porém a operação estável sem defeitos é limitada por instabilidades no escoamento que pode tornar-se tridimensional ou transiente para determinados limites de operação ou propriedades do líquido de revestimento.

Por exemplo quando um substrato é revestido com uma camada fina de líquido pela ação de cilindros girantes, se a velocidade da superfície do cilindro for muito alta, ou a viscosidade do líquido for alta, a separação do menisco à jusante forma ondas na direção transversal ao escoamento e a camada de revestimento produzida desta maneira apresentará listras na direção do movimento do substrato, como é mostrado na figura 1.3.

É conhecido por quase um século que algumas previsões de escoamentos em regime permanente não podem ser observados experimentalmente porque eles são instáveis com respeito a pequenas perturbações. O estudo de quais previsões podem ser esperadas ocorrerem na natureza, é chamado de análise de estabilidade hidrodinâmica.

A análise de estabilidade hidrodinâmica linear provê um meio de determinar se um escoamento permanente bidimensional, permanece estável depois de ser perturbado infinitesimalmente.

O conjunto de equações que descreve a história temporal de uma perturbação desde o regime permanente dá origem a um problema de autovalor generalizado. As autofunções são um conjunto de perturbações independentes, cada uma das quais cresce ou decai com o tempo de acordo com o seu respectivo autovalor. O sinal da parte real do autovalor controla a perturbação, se for positivo, a perturbação correspondente cresce com o tempo, ao menos inicialmente, e o escoamento é dito instável.

A análise de estabilidade linear para líquidos Newtonianos foi iniciada no começo do século XX com a derivação das equações de Orr-Sommerfeld (Orr (1907) [1] para determinar a estabilidade de um escoamento, laminar retilíneo e permanente com respeito a pequenas perturbações.

Yih (1955) [2] fez a primeira análise de estabilidade de um escoamento com superfície livre. Outros pesquisadores continuaram com este tipo de análise aplicado a escoamentos estratificados em canais ou em placas inclinadas (Yih, 1955 [2], Brooke, 1957 [3], Yih, 1963 [6], Kao, 1965 [7], Yih, 1967 [9]).

Nesse estágio, a análise de estabilidade foi limitada a escoamentos base unidimensionais considerando que a velocidade perturbada varia em duas dimensões. Somente no início de 1980 e com o advento dos computadores foi possível a análise de escoamentos base bidimensionais.

Bixler (1982) [15] e Ruschak (1983) [19] simultaneamente desenvolveram análise de escoamentos base bidimensionais sujeitos a perturbações tridimensionais. As formulações diferem entre si, devido ao fato de Ruschak considerar somente estabilidade marginal.

Todas as formulações da análise de estabilidade após Ruschak e Bixler só incluíram algumas pequenas modificações à forma original proposta por eles.

Coyle (1986) [23] aplicou a formulação de Bixler para o escoamento de revestimento por cilindros. Christodoulou (1990) [30] corrigiu um erro no mapeamento isoparamétrico na proposta feita pelo Coyle (1990) [29] que levou a superestimar em 20% o número de capilaridade crítico.

Carvalho (1997) [44] aplicou a análise de estabilidade no processo de revestimento com cilindros deformáveis, onde a deformação do cilindro altera a geometria do escoamento. Eles usaram a teoria de lubrificação ou a equação de Navier-Stokes para descrever o movimento do líquido e modelos uni-dimensionais ou bidimensionais elásticos para descrever a deformação do cilindro. Os resultados descrevem como a espessura da camada líquida depositada varia com as variáveis de operação, tipo de borracha utilizada (dureza), e espessura da camada resiliente.

A formulação proposta não inclui a perturbação das equações de geração de malha, que reduz o tamanho da matriz a ser resolvida. A perturbação na superfície livre foi parametrizada em termos de um deslocamento na direção do vetor normal à superfície livre do escoamento base.

Musson (2001) [53] implementou o mapeamento das equações do domínio perturbado para o domínio do escoamento base via a transformação de Piola.

## 5.1

### Análise da Estabilidade Linear: Perturbações tridimensionais de Fluidos Viscoelásticos.

Apesar de existirem muitas publicações na literatura sobre análise de estabilidade no caso de fluidos Newtonianos, a maioria dos líquidos utilizados em processos industriais de revestimento são não Newtonianos.

As características viscoelásticas desses líquidos podem alterar o balanço de força na interface e conseqüentemente mudar os limites de operação do processo, como foi discutido no capítulo anterior. Os resultados disponíveis na literatura para fluidos Newtonianos não podem ser utilizados nestes casos. É necessário determinar os valores críticos onde ocorre perda de estabilidade em função das propriedades reológicas do líquido utilizado no processo de revestimento.

As não-linearidades causadas tanto pelo comportamento reológico dos líquidos quanto pela presença da interface tornam a formulação e solução das equações perturbadas bem mais complexas do que no caso de escoamentos com geometria fixa ou de fluidos Newtonianos.

A idéia por traz da análise de estabilidade linear é perturbar um escoamento base permanente bidimensional com perturbações infinitesimais, inserir todas elas num sistema de equações que modele a situação dependente com o tempo e resolvê-las para a amplitude da perturbação e sua taxa de crescimento o que pode ser expressado da seguinte forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \Re \left[ \mathbf{v}'(\mathbf{x}) e^{\beta t} \right] \quad (5-1)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \Re \left[ p'(\mathbf{x}) e^{\beta t} \right] \quad (5-2)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \Re \left[ \mathbf{L}'(\mathbf{x}) e^{\beta t} \right] \quad (5-3)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \Re \left[ \mathbf{M}'(\mathbf{x}) e^{\beta t} \right] \quad (5-4)$$

onde  $\Re$  representa a parte real, e  $\varepsilon$  é um número infinitesimal que é o valor em torno do qual os campos são perturbados. Se o domínio do escoamento tem fronteiras livres, as posições daquelas fronteiras são perturbadas também, isto é,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \Re \left[ \mathbf{x}'(\mathbf{x}) e^{\beta t} \right] \quad (5-5)$$

$\mathbf{v}_0$ ,  $p_0$  e  $\mathbf{x}_0$  representam a solução bidimensional em regime permanente. Esta é chamada de escoamento base. Os campos de velocidade  $\mathbf{v}$ , pressão  $p$ , gradiente de velocidade interpolado  $\mathbf{L}$  e tensor conformação  $\mathbf{M}$  do escoamento perturbado devem satisfazer as equações de Navier-Stokes tridimensionais em regime tran-

siente, que são apresentadas a seguir:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5-6)$$

$$0 = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} \quad (5-7)$$

$$0 = \mathbf{L} - \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\text{tr} \mathbf{I}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \quad (5-8)$$

$$0 = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{M} - 2\xi \frac{\mathbf{D} : \mathbf{M}}{\mathbf{I} : \mathbf{M}} \mathbf{M} - \zeta (\mathbf{M} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} - 2 \frac{\mathbf{D} : \mathbf{M}}{\mathbf{I} : \mathbf{M}} \mathbf{M}) - \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{\lambda} (g_0 \mathbf{I} + g_1 \mathbf{M} + g_2 \mathbf{M}^2) \quad (5-9)$$

onde a expressão para o tensor das tensões  $\mathbf{T}$  é dada por:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\sigma} \quad (5-10)$$

a componente viscosa do tensor das tensões é:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} \quad (5-11)$$

e a parte elástica tem a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho(\xi - \zeta) \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I} : \mathbf{M}} \mathbf{M} : \frac{\partial a}{\partial \mathbf{M}} + 2\rho \zeta \mathbf{M} \cdot \frac{\partial a}{\partial \mathbf{M}} \quad (5-12)$$

junto com as condições de contorno. A condição de contorno cinemática na superfície livre para um escoamento transiente é dada por:

$$0 = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (5-13)$$

e a condição de contorno para o tensor conformação fica:

$$0 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - 2\xi \frac{\mathbf{D} : \mathbf{M}}{\mathbf{I} : \mathbf{M}} \mathbf{M} - \zeta (\mathbf{M} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} - 2 \frac{\mathbf{D} : \mathbf{M}}{\mathbf{I} : \mathbf{M}} \mathbf{M}) - \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{\lambda} (g_0 \mathbf{I} + g_1 \mathbf{M} + g_2 \mathbf{M}^2) \quad (5-14)$$

Para avaliar os campos perturbados  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $p'$ ,  $\mathbf{L}'$ ,  $\mathbf{M}'$  e sua taxa de crescimento  $\beta$ , o método de resíduos ponderados é aplicado às equações 5-1-5-9.

Todas as possíveis perturbações podem ser representadas como uma combinação linear de um conjunto de modos normais linearmente independentes. O mais conveniente no presente caso é um conjunto de modos de Fourier na direção  $z$ , os quais dão informação independente do que acontece nessa direção.

As variações das perturbações na direção transversal são representadas pelos modos de Fourier, isto é, senos e cosenos, dos quais o número de onda é  $N$ .

Em concordância com isto, cada variável independente é aproximada como uma combinação linear de novas funções base  $\phi$ , que nada mais são do que o produto das funções base usadas para resolver o mesmo escoamento bidimensional  $\phi$  em regime permanente vezes os modos de Fourier, da seguinte forma:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'^\beta \Phi_{\mathbf{v}}^\beta \quad \text{onde} \quad \Phi_{\mathbf{v}}^\beta = \Phi_{\mathbf{v}}^\beta \begin{bmatrix} \cos(Nz) \\ \cos(Nz) \\ \sin(Nz) \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

$$p' = p'^\beta \phi_p^\beta \quad \text{onde} \quad \phi_p^\beta = \phi_p^\beta \cos(Nz) \quad (5-16)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^\beta \Phi_{\mathbf{x}}^\beta \quad \text{onde} \quad \Phi_{\mathbf{x}}^\beta = \Phi_{\mathbf{x}}^\beta \begin{bmatrix} \cos(Nz) \\ \cos(Nz) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L}'^\beta \Phi_{\mathbf{L}}^\beta \quad \text{onde} \quad \Phi_{\mathbf{L}}^\beta = \Phi_{\mathbf{L}}^\beta \begin{bmatrix} \cos(Nz) & \cos(Nz) & \sin(Nz) \\ \cos(Nz) & \cos(Nz) & \sin(Nz) \\ \sin(Nz) & \sin(Nz) & \cos(Nz) \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'^\beta \Phi_{\mathbf{M}}^\beta \quad \text{onde} \quad \Phi_{\mathbf{M}}^\beta = \Phi_{\mathbf{M}}^\beta \begin{bmatrix} \cos(Nz) & \cos(Nz) & \sin(Nz) \\ \cos(Nz) & \cos(Nz) & \sin(Nz) \\ \sin(Nz) & \sin(Nz) & \cos(Nz) \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

$N$  é o número de onda da perturbação,  $N = 2\pi/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da perturbação e  $\beta$  é o fator de crescimento.

Seguindo a aproximação de Bixler (1982) [15], o domínio de integração  $V^*$  é o volume obtido estendendo o domínio do escoamento bidimensional perturbado  $\Omega^*$  sobre um comprimento de onda na direção transversal como é indicado na Fig. 5.1.

As funções base que foram usadas para a perturbação das variáveis são as funções peso que são usadas quando aplicamos o método de Galerkin / Elementos Finitos.

As equações resultantes dos resíduos ponderados para as equações de quantidade de movimento linear, continuidade, equação do gradiente interpolado da velocidade, equação de transporte do tensor conformação são:

$$r^{c,\alpha} = \int_{V^*} \phi_c^\alpha \nabla \cdot \mathbf{v} dV^* \quad (5-20)$$

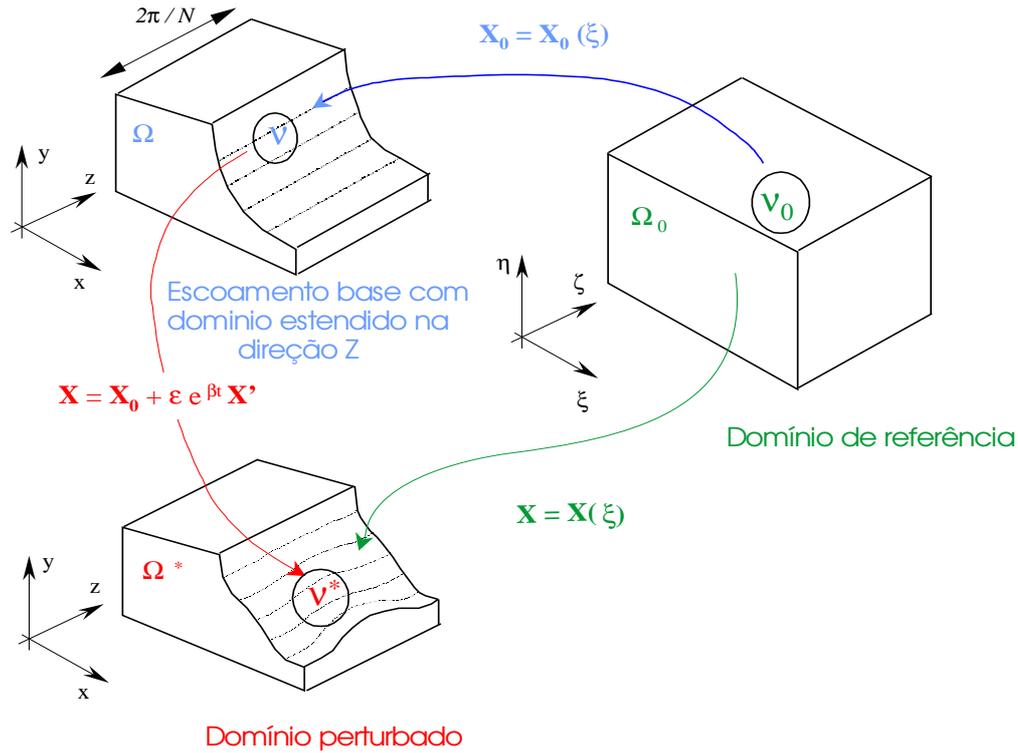


Figura 5.1: Desenho do domínio perturbado tridimensional.

$$\mathbf{r}^{\mathbf{m},\alpha} = \int_{V^*} \phi_{\mathbf{m}}^{\alpha} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} \right) dV^* \quad (5-21)$$

$$\mathbf{R}^{\mathbf{L},\alpha} = \int_{V^*} \phi_{\mathbf{L}}^{\alpha} \left( \mathbf{L} - \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\text{tr} \mathbf{I}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right) dV^* \quad (5-22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\mathbf{M},\alpha} = \int_{V^*} \phi_{\mathbf{M}}^{\alpha} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{M} - 2\xi \frac{\mathbf{D} : \mathbf{M}}{\mathbf{I} : \mathbf{M}} \mathbf{M} - \zeta (\mathbf{M} \cdot \mathbf{D} \right. \\ \left. + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} - 2 \frac{\mathbf{D} : \mathbf{M}}{\mathbf{I} : \mathbf{M}} \mathbf{M}) - \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{M} \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda} (g_0 \mathbf{I} + g_1 \mathbf{M} + g_2 \mathbf{M}^2) \right) dV^* \quad (5-23) \end{aligned}$$

A integral sobre o domínio perturbado  $V^*$  pode ser dividida em várias partes (ver figura 5.1), onde a contribuição das áreas laterais (planos x-y) se cancelam pois o domínio foi fixado para um comprimento de onda  $2\pi/N$  (condição de contorno periódica na direção z).

Ao longo das superfícies sólidas a equação residual é substituída por uma condição de contorno essencial. Os únicos termos que sobram são as integrais nos planos de entrada, saída e superfície livre perturbada (se presente no problema).

O domínio físico perturbado  $V^*$  (agora um domínio físico tridimensional) é mapeado para um domínio de referência conhecido  $V_0$ , como é mostrado na

Fig. 5.1.

O mapeamento  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$  pode se escrito como uma perturbação do mapeamento  $\mathbf{x}_o = \mathbf{x}_o(\xi)$  entre o domínio bidimensional do escoamento base  $\Omega$  e o domínio de referência  $\Omega_o$ , que faz parte da solução do escoamento base e é conhecido.

O gradiente da função de mapeamento perturbada é dada por (Carvalho, 1997 [45]):

$$\mathbf{F}' \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \equiv \mathbf{x}^\beta \langle \Phi_{\mathbf{x}}^\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} . \quad (5-24)$$

O Jacobiano da transformação é dado por:

$$f' = \det \mathbf{F}' = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = f^0 \left[ 1 + \epsilon e^{\beta, t} \cos(Nz) \nabla \cdot \mathbf{x}' \right] \quad (5-25)$$

onde  $f^0$  é o Jacobiano da transformação do escoamento base. As equações 5-20–5-23 tem a seguinte forma geral:

$$\int_{V^*} P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{M}) dV^* \quad (5-26)$$

Partindo da derivação do Jacobiano da função de mapeamento perturbada é fácil chegar a um expressão para o volume perturbado (Carvalho (1997) [45]):

$$dV^* = dV \left[ 1 + \epsilon e^{\beta, t} \cos(Nz) \nabla \cdot \mathbf{x}' \right] \quad (5-27)$$

Por essa razão as integrais que aparecem nas equações 5-20–5-23 podem ser reescritas na forma geral:

$$\begin{aligned} \int_{V^*} P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{M}) dV^* &= \int_V P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{M}) dV \\ &+ \epsilon e^{\beta, t} \int_V P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{M}) \cos(Nz) \nabla_{\mathbf{x}_o} \cdot \mathbf{x}' dV \end{aligned} \quad (5-28)$$

As integrais sobre o domínio perturbado  $V^*$  são reduzidas a integrais sobre o domínio base conhecido  $V$ . A integral de volume pode ser separada em uma integral sobre o domínio bidimensional não perturbado  $\Omega$  e uma integral de linha ao longo da direção  $z$ :

$$\int \int \int_{V^*} P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{M}) dV^* = \int_0^{2\pi/N} \int \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{M}) d\Omega dz + \epsilon e^{\beta t} \int_0^{2\pi/N} \int \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{M}) \cos(Nz) \nabla_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{x}' d\Omega dz \quad (5-29)$$

Como foi proposto por Carvalho (1997) [45], a idéia desta formulação é restringir as perturbações dos pontos nodais  $\mathbf{x}'$  a onde elas são fisicamente relevante, isto é, superfícies livres ou paredes deformáveis. A perturbação ao longo das fronteiras móveis pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}' = H^0(\mathbf{x}_0) h' \mathbf{n} \quad (5-30)$$

onde  $h'$  é uma função escalar que representa a amplitude da perturbação,  $\mathbf{n}$  é um vetor normal ao domínio não perturbado e  $H^0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} H^\delta$  onde  $H^\delta$  é uma função suave que toma um valor igual a 1 nos contornos e 0 no resto do domínio, sendo este decaimento suave.

A amplitude do deslocamento do contorno  $h'$  é somente diferente de zero nas posições onde o domínio perturbado é relevante e é escrito como uma combinação linear das funções base  $\phi$  como apresentado a seguir:

$$h' = H'^{\alpha} \phi_{h'}^{\alpha} \quad (5-31)$$

Com o uso desta aproximação, o número de graus de liberdade correspondentes ao domínio perturbado é reduzido a uma variável por cada ponto nodal localizado na superfície livre (ou parede deformável).

A definição da superfície livre perturbada apresentada na equação 5-30 conduz à duas importantes simplificações nas equações dos resíduos, as quais provém das propriedades da função  $H^0$ :

$$\int \int_{\Omega} P(\mathbf{x}_0) \left( \frac{\partial H^0}{\partial x_0} + \frac{\partial H^0}{\partial y_0} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} P(\mathbf{x}_0) d\Gamma \int \int_{\Omega} P(\mathbf{x}_0) H^0 d\Omega = 0 \quad (5-32)$$

Os termos das equações residuais que tem derivadas das posições podem ser simplificados para integrais de linha. Esses termos são representados em geral da forma:

$$\int \int_{\Omega} P(\mathbf{x}_0) \nabla_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{x}' d\Omega = \int_{\Gamma} P(\mathbf{x}_0) h' d\Gamma$$

$$\int \int_{\Omega} P(\mathbf{x}_0) \frac{\partial(*)}{\partial x'} \frac{f'}{f^0} d\Omega = \int_{\Gamma} h' P(\mathbf{x}_0) \left[ \frac{\partial(*)}{\partial \Gamma} + \frac{\partial x^0}{\partial \Gamma} \right] d\Gamma$$

$$\int \int_{\Omega} P(\mathbf{x}_0) \frac{\partial(*)}{\partial y'} \frac{f'}{f^0} d\Omega = \int_{\Gamma} h' P(\mathbf{x}_0) \left[ \frac{\partial(*)}{\partial \Gamma} + \frac{\partial y^0}{\partial \Gamma} \right] d\Gamma \quad (5-33)$$

Os campos perturbados são incluídos nas equações dos resíduos ponderados 5-20–5-23 e os termos de ordem  $O(\varepsilon^2)$  ou maiores são desprezados, pois esta análise é linear e as perturbações são de ordem infinitesimal.

O resultando da simplificação é um conjunto de equações algébricas para os coeficientes das expansões dos campos perturbados:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}') \quad (5-34)$$

onde  $\mathbf{R}$  é o vetor que contem as equações dos resíduos ponderados, e  $\mathbf{u}'$  é o vetor que contem os coeficientes das funções base dos campos perturbados tais como velocidade, pressão, gradiente de velocidade interpolado, tensor das tensões e superfície livre.

O conjunto de equações é expandido por meio de séries de Taylor e os termos de ordem  $O(\mathbf{u}')$  são desprezados, devido ao fato das perturbações serem infinitesimais. O conjunto de equações resultante é:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}'} \mathbf{u}' = 0 \quad (5-35)$$

onde  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}'}$  é a matriz de sensibilidade das equações dos resíduos ponderados em relação as variáveis perturbadas. Esta matriz pode ser separada em duas matrizes da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}'} = -\beta \hat{\mathbf{M}} + \mathbf{J} \quad (5-36)$$

onde  $\hat{\mathbf{M}}$  é chamada de matriz massa e  $\mathbf{J}$  matriz Jaconiana;  $\beta$  é o fator de crescimento exponencial dos modos da perturbação.

O conjunto de equações linearizadas resultante é um problema de autovalor generalizado da seguinte forma:

$$\mathbf{J}\mathbf{u}' = \beta \hat{\mathbf{M}}\mathbf{u}' \quad (5-37)$$

### 5.1.1

#### Método de Solução do Problema Generalizado.

A estabilidade de um escoamento é definida pelos autovalores com a maior parte real, que são chamados de autovalores dominantes. Por essa razão não há necessidade de calcular todos os autovalores do problema definido na Eq. 5-37, mas somente os autovalores que possam se tornar dominantes.

A matriz massa  $\hat{\mathbf{M}}$  é singular e a matriz Jacobiano não é singular, nesta classe de problemas, os autovalores que não são associados com as equações que são dependentes com o tempo (equação de continuidade e condições de contorno essenciais) são infinitos.

De acordo a Christodoulou (1990) [30], ele são relacionados a ondas de som que viajam a velocidade infinita em materiais incompressíveis. Antes que o problema de autovalor seja resolvido, esses autovalores infinitos devem ser removidos do sistema de equações, pois de outro modo eles seriam os de maior parte real.

Uma forma de fazer isto é usando a transformação "shift-and-invert". O problema de autovalores é reescrito como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J} - \beta\hat{\mathbf{M}}] \mathbf{u}' = 0 &\Rightarrow [\mathbf{J} - \sigma\hat{\mathbf{M}} - \beta\hat{\mathbf{M}} + \sigma\hat{\mathbf{M}}] \mathbf{u}' = 0 \Rightarrow \\ [(\mathbf{J} - \sigma\hat{\mathbf{M}}) - (\beta - \sigma)\hat{\mathbf{M}}] \mathbf{u}' = 0 &\Rightarrow [(\mathbf{I} - (\beta - \sigma)(\mathbf{J} - \sigma\hat{\mathbf{M}})^{-1}\hat{\mathbf{M}})] \mathbf{u}' = 0 \\ \Rightarrow [(\mathbf{J} - \sigma\hat{\mathbf{M}})^{-1}\hat{\mathbf{M}}] \mathbf{u}' = \left(\frac{1}{\beta - \sigma}\right) \mathbf{u}' & \end{aligned} \quad (5-38)$$

Essa transformação conduz a um problema de autovalor simples:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}' = \mu\mathbf{u}' ; \mathbf{A} = (\mathbf{J} - \sigma\hat{\mathbf{M}})^{-1}\hat{\mathbf{M}} \text{ e } \mu = \frac{1}{\beta - \sigma} \quad (5-39)$$

Neste trabalho o "shift"  $\sigma$  é real. Os autovalores com maior parte real da equação 5-39 são aqueles autovalores do problema original que estão mais próximos do valor do "shift"  $\sigma$ .

Os autovalores infinitos do problema generalizado são mapeados para autovalores iguais a zero no problema de autovalor simples. O cálculo de  $(\mathbf{J} - \sigma\hat{\mathbf{M}})^{-1}$  foi feito com o método frontal (deAlmeida, 1990 [37]).

No presente trabalho o problema de autovalor simples foi resolvido com o pacote ARPACK, que foi desenvolvido pelo Prof. Dany Sorensen na RICE UNIVERSITY, e é de acesso público via internet.

O ARPACK é uma coleção de subrotinas programadas em FORTRAN77 desenvolvidas para resolver problemas de autovalor de grande escala.

O nome ARPACK indica que este pacote usa o método de Arnoldi para resolver o problema de autovalores (ARnoldi PACKAge). Este software é capaz de resolver problemas de autovalor de matrizes hermitianas, não hermitianas e problemas de autovalor generalizado.

O ARPACK calcula apenas alguns autovalores especificados pelo usuário, como por exemplo os autovalores com maior parte real, maior módulo, menor

módulo etc. O processo de Arnoldi é a técnica para aproximar alguns autovalores e seus correspondentes autovetores de uma matriz geral  $n \times n$ .

Este pacote é baseado numa variante do Método de Arnoldi que é o Método de Arnoldi com reinicialização implícita proposta por Sorensen (2002) [56] que por sua vez é uma variante da proposta por Saad (1988) [33], e tem a vantagem de ser uma forma mais eficiente e numericamente estável de implementar o processo de reinicialização.

Uma breve descrição do método de Arnoldi é feita a seguir. O método de Arnoldi pertence a uma classe de métodos conhecidos como métodos de Projeção. Esse método procura uma aproximação  $(\tilde{\mu}, \tilde{\mathbf{v}}')$  do autopar  $(\mu, \mathbf{v}')$ , tal que  $\mathbf{v}'$  pertença ao espaço  $K_m$  de dimensão  $m$  e o residual da aproximação é ortogonal a  $K_m$ , o que é análogo ao método de Galerkin, isto é:

$$\text{Achar } \mathbf{u}' \in K_m \text{ talque } (\mathbf{A}\mathbf{u}' - \mu\mathbf{u}', \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K_m \quad (5-40)$$

A dimensão  $m$  de  $K_m$  é geralmente muito menor que o dimensão original do problema. O tamanho do subespaço  $K_m$  é escolhido de modo que garanta que o autovalor dominante seja não seja influenciado por esta escolha.

Se  $V^m = [v_1, \dots, v_m]$  é uma matriz  $N \times m$  cujas colunas são  $m$  vetores ortogonais  $v_j$  que formam a base do subespaço  $K_m$ , o método de projeção pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}V_m\mathbf{y} - \tilde{\mu}V_m\mathbf{y}, v_j) &= 0 \quad j = 1 \dots m \Rightarrow (V_m^H \mathbf{A}V_m)\mathbf{y} = \tilde{\mu}\mathbf{y} \Rightarrow \\ \mathbf{B}\mathbf{y} &= \tilde{\mu}\mathbf{y} \quad \mathbf{B} = V_m^H \mathbf{A}V_m \end{aligned} \quad (5-41)$$

O autovetor aproximado  $\mathbf{v}'$  é avaliado a partir do autovetor do problema reduzido:

$$\mathbf{u}' = V_m\mathbf{y} \quad (5-42)$$

No método de Arnoldi,  $K_m$  é o subespaço de Krylov, isto é um subespaço gerado pelos vetores de Krylov  $\{v_1, \mathbf{A}v_1, \dots, \mathbf{A}^{m-1}v_1\}$ . A projeção da matriz  $\mathbf{A}$  no subespaço  $K_m$ , isto é,  $V_m^H \mathbf{A}V_m$  é uma matriz Hessenberg denotada por  $\mathbf{H}_m$ .

Os elementos da matriz Hessenberg são os coeficientes  $h_{i,j}$  obtidos no processo de ortogonalização. O problema de autovalor reduzido é representado da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}_m\mathbf{y} = \tilde{\mu}\mathbf{y} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{u}}' = V_m\mathbf{y} \quad (5-43)$$

O par  $(\tilde{\mu}, \tilde{\mathbf{u}}')$  é uma boa aproximação do autopar  $(\mu, \mathbf{u}')$  somente para a

parte o espectro mais externa, isto é, para os autovalores mais distantes do origem do plano complexo.

Outra vantagem de usar o método de Arnoldi é que o cálculo da norma dos resíduos do autopar aproximado  $(\tilde{\mu}, \tilde{\mathbf{u}}')$  é muito fácil e quase sem custo computacional adicional. É igual à última componente do autovetor  $y_i^{(m)}$  multiplicado por  $|h_{m+1,m}|$  (Saad, 1988 [33]):

$$\mathbf{R}_i \equiv \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}}'_i - \tilde{\mu}\tilde{\mathbf{u}}'_i\| = h_{m+1,m}|\mathbf{e}_m^T \mathbf{y}_i| \quad (5-44)$$

onde  $\mathbf{e}_m^T = (0, 0, \dots, 1)$  Neste trabalho o autovalor é considerado convergido se o correspondente residual for menor que a tolerância  $10^{-9}$ .

Esta é a idéia geral do método de Arnoldi, mas a implementação numérica no ARPACK foi feita usando o método de Iteração de Arnoldi com Reinicialização Implícita (IRAM), que torna a técnica mais estável numericamente. A inclusão do processos de deflação faz possível o cálculo de autovalores múltiplos ou autovalores muito juntos (agrupados).

As características mais importantes do ARPACK são:

- Interface de comunicação reversa, esta é uma característica que proporciona grande facilidade para o usuário, pois o programa não especifica uma subrotina para realizar a operação matriz-vetor, isto é a matriz pode ser armazenada na estrutura que seja mais conveniente para o usuário (no nosso caso as matrizes são armazenadas no formato esparso).
- Capacidade de retornar um número  $k$  de autovalores que satisfaçam o critério especificado pelo usuário tal como maior parte real, maior módulo, menor módulo etc. Para muitos problemas de autovalor simples a única operação necessária é  $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{v}$ .
- Inclui subrotinas prontas que devem ser usadas como modelo para implementar várias transformações espectrais para melhorar a convergência.
- Autovetores e vetores de Schur podem ser computados se requerido, uma base de Schur com  $k$  vetores sempre é calculada. Uma base de Schur é formada por um conjunto de vetores que são numericamente ortogonais para garantir um cálculo exato.
- A exatidão numérica dos autopares, isto é, a tolerância dos resíduos devem ser especificadas pelo usuário.

## 5.2

### Validação do Código computacional para a Análise de Estabilidade Linear de líquido viscoelásticos.

A primeira parte de nossa validação será feita para fluidos Newtonianos. O primeiro caso teste foi a análise de estabilidade linear do escoamento numa cavidade quadrada, caso para o qual existe abundante referência bibliográfica.

O segundo caso teste foi a análise de estabilidade para uma camada de líquido estagnado numa piscina; este caso também é muito usado como validação para problemas com superfície livre.

#### 5.2.1

##### Cavidade quadrada.

O problema da cavidade quadrada tem sido um *benchmark* pois a geometria e as condições de contorno são simples. A análise do escoamento base que é originado pelo movimento da tampa móvel já foi bem estudado na literatura (Ghia, 1982 [16]) e alguns resultados para a análise de estabilidade linear foram incluídos para serem comparados com os resultados obtidos no presente trabalho (Ding et al., 1998 [47], Musson, 2001 [53]).

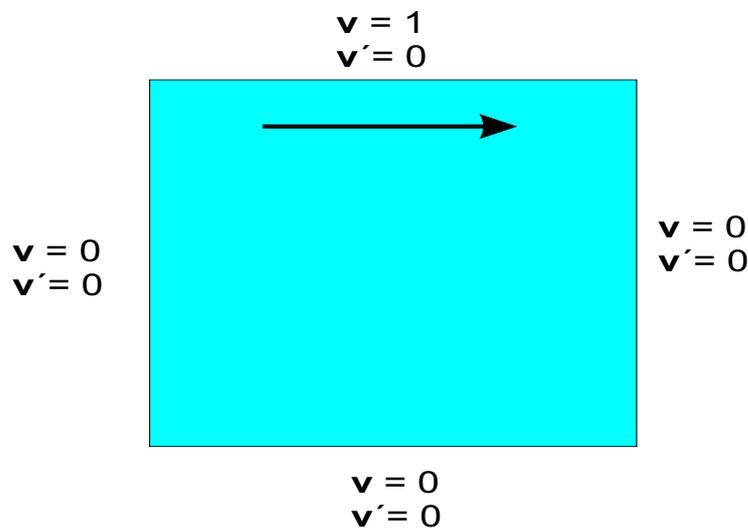


Figura 5.2: Condições de contorno para o caso base e para o escoamento perturbado na cavidade quadrada.

As condições de contorno para o escoamento base e para a análise de estabilidade são mostradas na figura 5.2. As condições de contorno aplicadas a cada parede são as de não deslizamento e não penetração;  $\mathbf{v} = 0$  nas paredes dos lados e do fundo e  $\mathbf{v} = V_{lid}\mathbf{i}$  na tampa.

Como o líquido está aderido à parede, então não existem perturbações do campo de velocidade neste caso, assim a condição de contorno para análise de estabilidade é  $\mathbf{v}' = 0$  em todas as paredes.

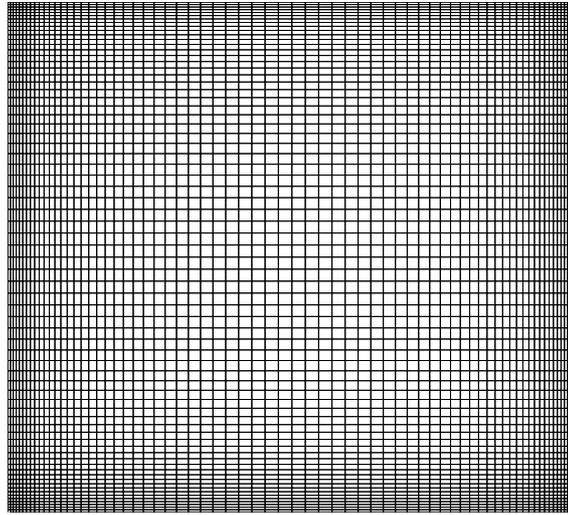


Figura 5.3: Malha não uniformemente distribuída para a cavidade quadrada.

Este problema é governado pela razão de aspecto da cavidade é o número de Reynolds  $Re = \rho V_{lid} L / \mu$ . A razão foi fixada em 1, logo o único parâmetro relevante neste problema é o número de Reynolds  $Re = \rho V_{lid} L / \mu$ , que representa a competição entre as forças de inércia e as forças viscosas.

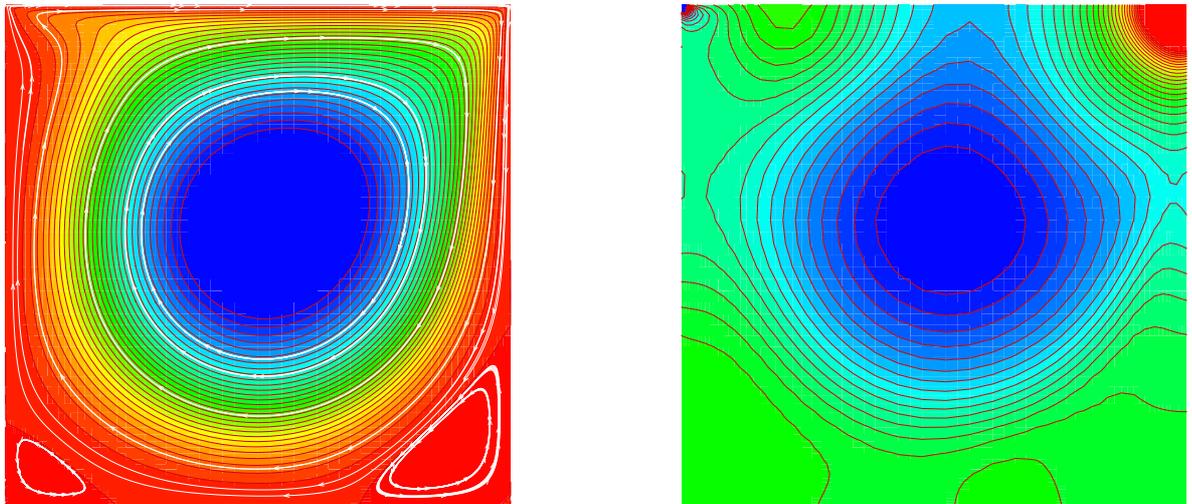
A malha usada para resolver tanto o escoamento base quanto o escoamento perturbado tem 35 elementos por lado distribuídos não uniformemente, concentrados nas paredes como é mostrado na Fig. 5.3, num total de 1225 elementos. Essa escolha foi motivada porque a comparação dos resultados obtidos no presente trabalho foi feita com o trabalho de Musson (2001) [53] e utilizou-se a mesma malha.

O número de incógnitas (graus de liberdade) no caso do escoamento base foram 13757 e para o cálculo de estabilidade tridimensional, 18798.

Ding et al. (1998) [47] mostram que o número de Reynolds crítico no caso da cavidade quadrada com razão de aspecto  $L = 1$  é 930, por isso no presente trabalho restringimos nossa análise a este valor.

As Figs. 5.4 mostram as linhas de corrente e o campo de pressão para o escoamento base, respectivamente.

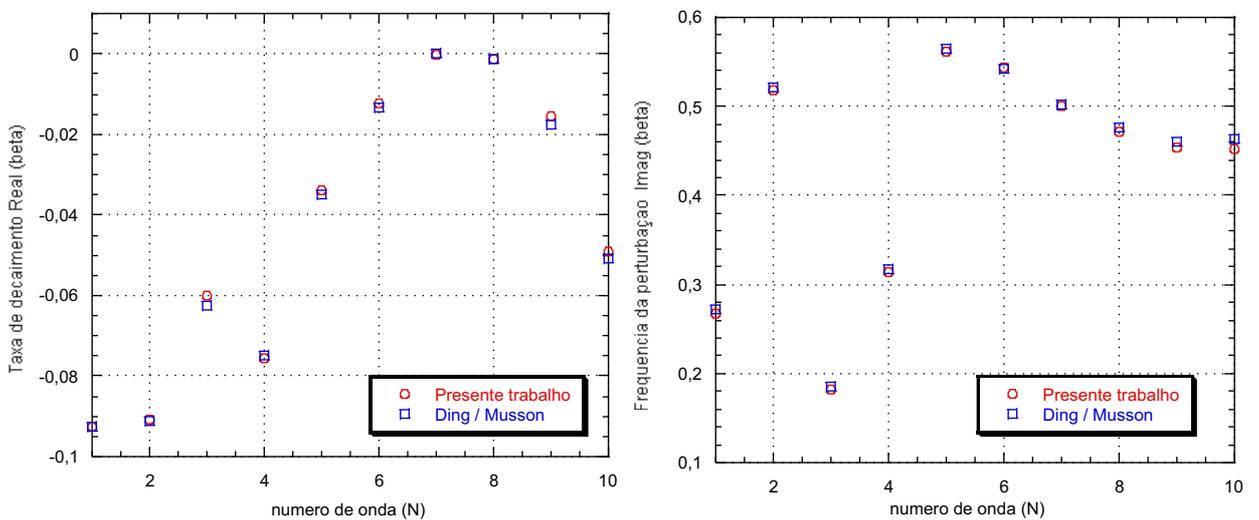
Usando a análise de estabilidade linear para o escoamento na cavidade quadrada de fluidos Newtonianos com  $Re = 930$ , os resultados obtidos neste trabalho têm uma boa concordância com os resultados apresentados por Musson (2001)[53] e Ding et al. (1998) [47], como mostrado na Fig. 5.5.



(1) Linhas de corrente do escoamento base (2) Campo de pressão do escoamento base

Figura 5.4: Escoamento base numa cavidade quadrada  $Re = 930$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 9916672/CA



(1) Taxa de decaimento vs N (2) Frequencia vs N

Figura 5.5: Autovalores condutores como função do número de onda para a análise de estabilidade de um escoamento numa cavidade quadrada,  $Re = 930$  comparação dos resultados no presente trabalho com os resultados de Musson (2001) [53].

A Fig. 5.6 mostra os campos de velocidade perturbada  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  e as linhas de corrente da perturbação do primeiro modo para um número de onda igual a 1. Para este comprimento de onda da perturbação transversal o autovalor dominante é negativo e real, isto é o escoamento é estável e o decaimento da perturbação é exponencial.

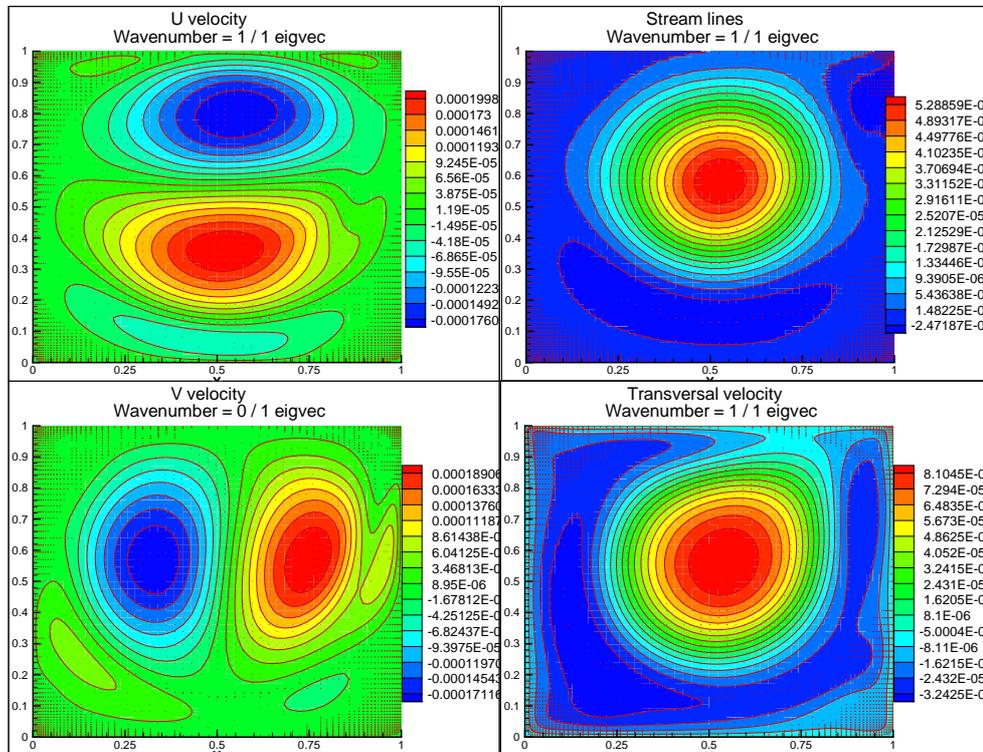


Figura 5.6: Campos de velocidade do primeiro modo do escoamento de líquido Newtoniano numa cavidade quadrada para  $Re = 930$ .

O quinto modo dominante para o mesmo comprimento de onda é apresentado na Fig. 5.7. Neste caso, o autovalor é imaginário e o decaimento da perturbação é oscilatório.

## 5.2.2

### Piscina retangular.

O caso escolhido como teste de um problema de estabilidade com superfície livre foi a análise de uma camada de líquido estática numa piscina. É um caso simples e tem vários resultados disponíveis na literatura para comparação.

Este é um caso simples, pois o escoamento base tem velocidade zero, a distribuição de pressão é hidrostática e a superfície livre é horizontal.

As condições de contorno usadas neste problema são apresentadas na Fig. 5.8. Os parâmetros geométricos da piscina são largura  $L$  e uma espessura  $D$  de líquido.

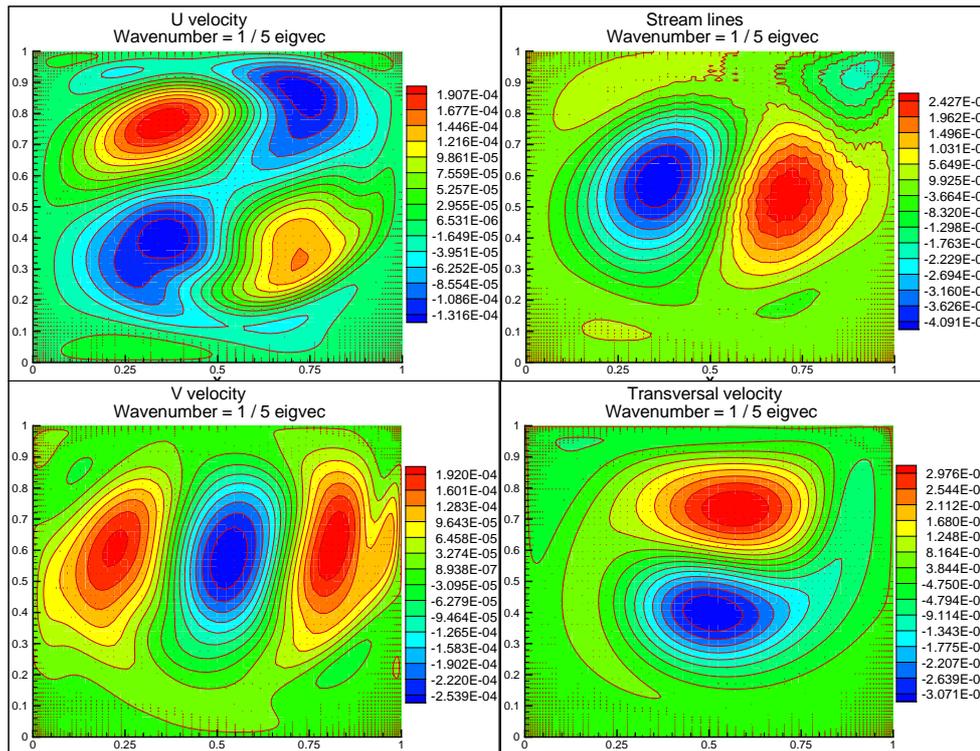


Figura 5.7: Campos de velocidade do quinto modo do escoamento de líquido Newtoniano numa cavidade quadrada para  $Re = 930$ .

Utilizou-se uma razão de aspecto  $L/D = 5$ . As linhas de contato do líquido com a piscina são fixas. A malha usada para representar este domínio teve 50 elementos, sendo 5 na direção vertical e 10 na horizontal uniformemente distribuídos. O número de incógnitas (graus de liberdade) neste problema foi 864.

Os resultados do presente trabalho foram comparados com os de Carvalho (1995) [40] para um número de Bond,  $Bo \equiv \rho g D^2 / \sigma$  igual a 1. Como esperado todos os autovalores são negativos, isto quer dizer que o escoamento base é estável. Nossos resultados apresentam uma boa concordância com os resultados de Carvalho (1995) [40], numa faixa de número de onda de 0,1 a 1.

### 5.2.3

#### Escoamento plano tipo Couette.

O escoamento plano tipo Couette por ser um caso usado como *benchmark* na literatura foi escolhido para validar nosso programa de estabilidade de fluidos viscoelásticos.

Renardy (1992) [34] fez uma demonstração rigorosa que o escoamento plano de Couette de um escoamento UCM (Upper Convected Maxwell) para um número de Reynolds igual a zero é linearmente estável. Chama atenção também

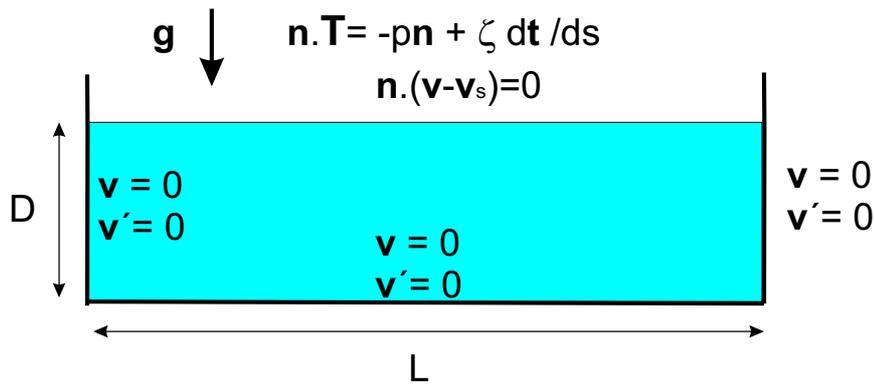


Figura 5.8: Condições de contorno para o escoamento perturbado de camada de líquido estagnado numa piscina retangular.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 9916672/CA

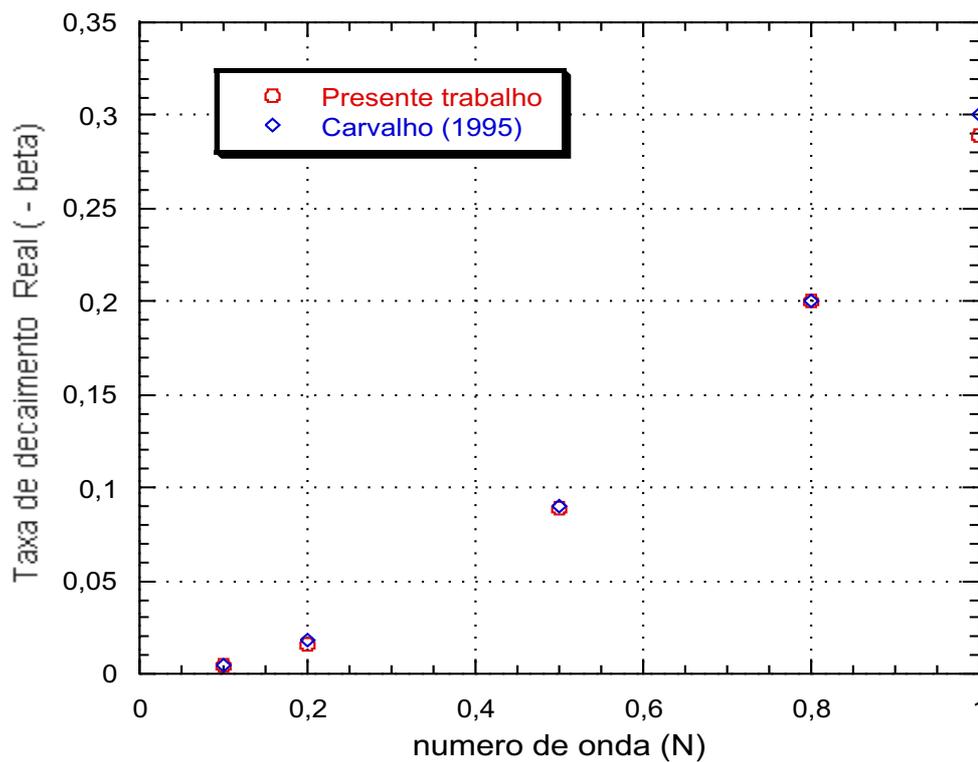


Figura 5.9: Autovalores condutores como função do número de onda para a análise de estabilidade da camada estática de líquido numa piscina para um número de Bond igual a 1; comparação dos resultados no presente trabalho com os resultados de Carvalho (1995) [40].

do fato que a estabilidade para  $Re = 0$  não implica estabilidade a baixos números de Reynolds para escoamentos viscoelásticos.

O problema espectral associado foi resolvido por Gorodtsov (1967) [10] e todos os autovalores calculados foram negativos. Foi demonstrado que para qualquer número de onda na direção do escoamento existem dois autovalores discretos e um espectro contínuo.

Wilson (1999) [51] apresentam uma análise matemática do espectro de um problema de estabilidade linear do escoamento num canal com os modelos UCM e Oldroyd-B, para um número de Reynolds igual a zero. Eles investigam como o padrão de comportamento muda quando o escoamento é Poiseuille. A perturbação que eles usaram é unidimensional na direção do escoamento.

Eles mostram que para o caso do escoamento Couette, a parte real do espectro contínuo para o modelos de Maxwell convectado está em  $\sigma_r = -1/We$  e a parte imaginária  $-\alpha U_{parede} \leq \sigma_i \leq 0$ .

Além da parte contínua existem dois modos discretos.  $\alpha$  é a taxa de crescimento da perturbação na direção do escoamento e  $\sigma$  é a taxa de crescimento da perturbação no tempo.

Para o caso do modelo Oldroyd-B eles verificaram a existência de um segundo espectro contínuo em  $\sigma_r = -1/\beta We$ , onde  $\beta = \eta_s/(\eta_s + \eta_p)$  é a relação entre a viscosidade do solvente e a viscosidade total.

A nossa análise de estabilidade linear considera perturbações nas três direções mas para resolver a estabilidade primeiro precisamos resolver o escoamento base.

O escoamento de Couette é caracterizado por duas placas planas paralelas uma em movimento e a outra parada. No caso analisado as placas estão separadas por uma distância  $h = 1$  e o comprimento delas foi  $L = 10$ . A velocidade horizontal da placa superior foi  $V = 1$ .

O número de Weissenberg é definido como  $We = \lambda V/h$ , onde  $\lambda$  é tempo de relaxação do fluido viscoelástico. As condições de contorno foram perfil de velocidade linear na entrada e saída.

Para a solução do problema de autovalor, o espaço de Krylov usado para todos os cálculos foi igual a 200, e calculou-se os primeiros 20 autovalores com o pacote ARPACK.

Para discretizar o domínio de interesse usamos 3 malhas diferentes, com elementos não uniformemente distribuídos concentrados nas paredes.

A primeira malha tinha 30 elementos na direção vertical por 20 na horizontal, fazendo um total de 600 elementos com 9.303 variáveis para o caso Newtoniano e 19,068 variáveis ou graus de liberdade para o caso viscoelástico. A segunda malha teve 30 elementos na vertical e 30 na horizontal, correspondendo

a 28.278 variáveis para o caso viscoelástico. A terceira malha possuía 100 elementos na vertical e 30 na horizontal com 92.748 graus de liberdade para o caso viscoelástico.

A Fig. 5.10 mostra esta última malha, que é a mais fina das três testadas.

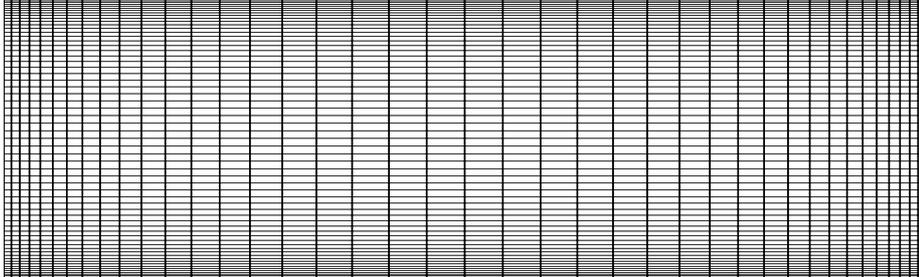


Figura 5.10: Malha não uniformemente distribuída para o escoamento entre placas paralelas tipo Couette.

O número de Reynolds neste caso é  $Re = \rho Vh/\eta$  onde  $\rho = 0,01$  e  $\eta = 1$  a viscosidade total. Na Fig. 5.11 apresenta-se os campos de velocidade transversal  $W$  do primeiro autovalor, que é real, para dois comprimentos de onda  $N = 0$  e 1.

A Fig. 5.12 apresenta os campos de velocidades na direção do escoamento  $U$  e na direção transversal  $W$  correspondente ao décimo quinto autovalor, que é complexo conjugado, na primeira coluna mostramos a parte real dos campos e na segunda a imaginária do mesmo caso Newtoniano que foi apresentado anteriormente.

O espectro para o caso viscoelástico usando o modelo Oldroyd-B; com  $\beta = 0,59$ ,  $\lambda = 0,1$  e  $We = 0,1$  a densidade  $\rho = 0,01$  e  $Re = 0,059$ , está todo ao lado esquerdo do eixo real indicando que o escoamento é estável o que seria razoável dado o número de Reynolds tão pequeno como é apresentado na Fig. 5.13.

É importante indicar que apesar de algumas características comuns, o espectro obtido é diferente de todos os casos apresentados na literatura, mas também é importante ressaltar que o problema analisado neste trabalho, apesar de similar, não é o mesmo apresentado na literatura.

As análises de estabilidade linear do escoamento viscoelástico entre placas paralelas disponíveis na literatura não consideram uma variação na direção transversal ao escoamento e assumem que a perturbação varia somente na direção  $y$  e é periódica na direção do escoamento.

Na análise desenvolvida neste trabalho, considera-se a variação periódica na direção transversal e o autovetor que representa os campos perturbados variam com as coordenadas  $x$  e  $y$ .

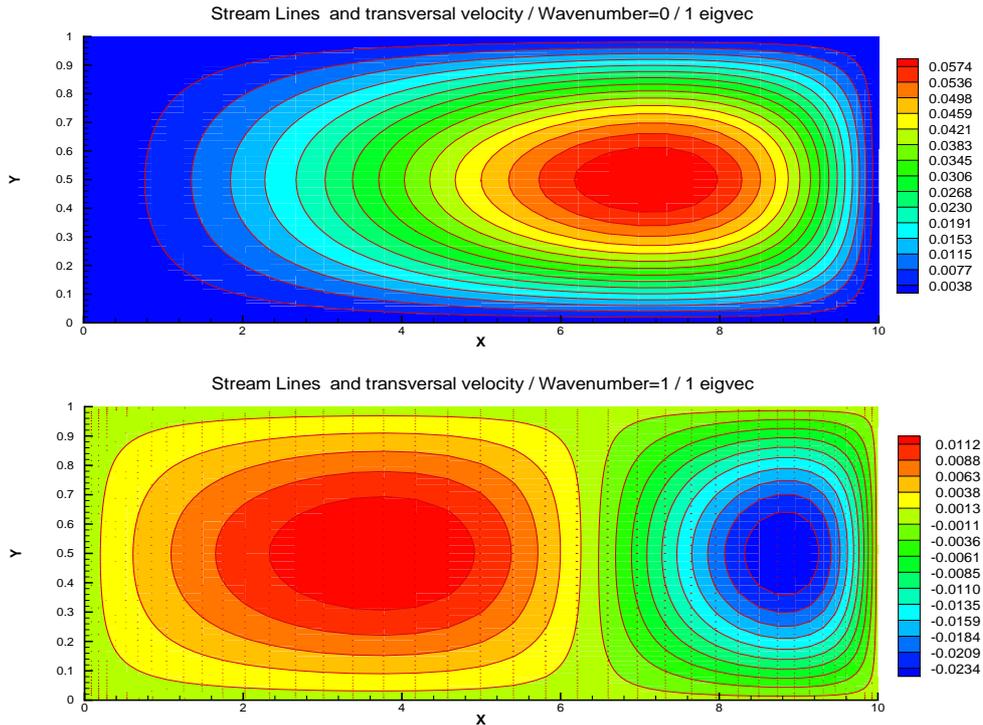


Figura 5.11: Campos de velocidade na direção transversal  $W$  para dois números de onda  $N = 0$  e  $1$  do primeiro autovetor correspondente a o primeiro autovalor(real) de um escoamento tipo Couette com fluido Newtoniano  $Re = 0,01$ .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 9916672/CA

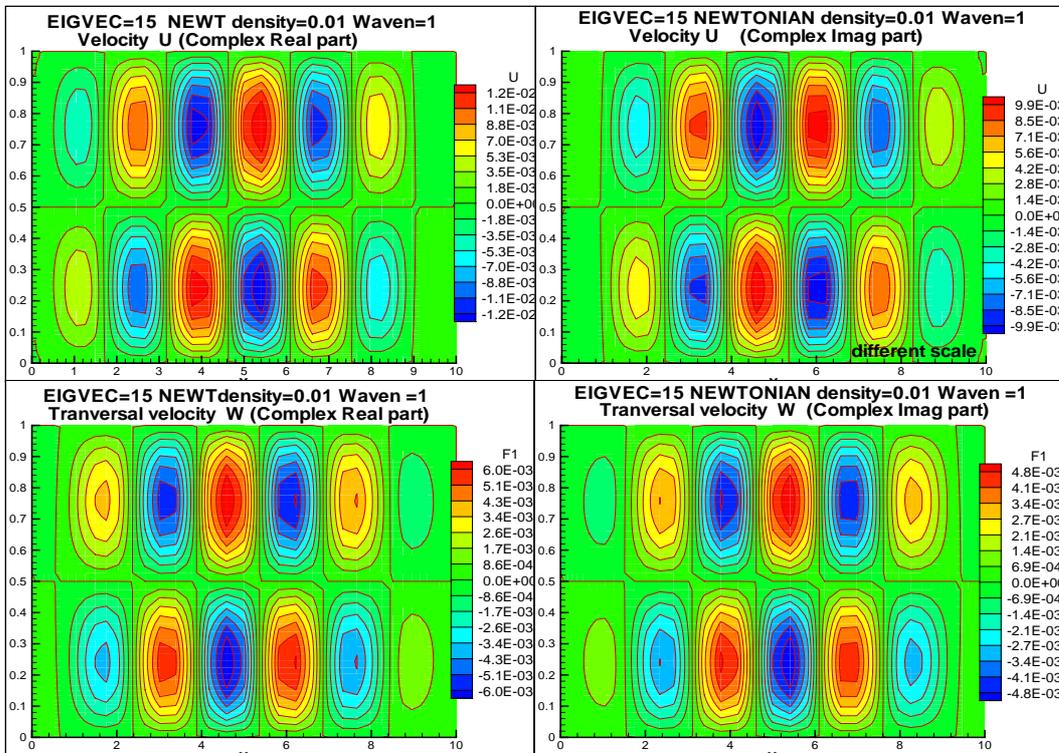


Figura 5.12: Campos de velocidades na direção do escoamento  $U$  e na direção transversal  $W$ , correspondentes ao décimo quinto autovalor (complexo conjugado) de um escoamento tipo Couette com fluido Newtoniano  $Re = 0,01$ .

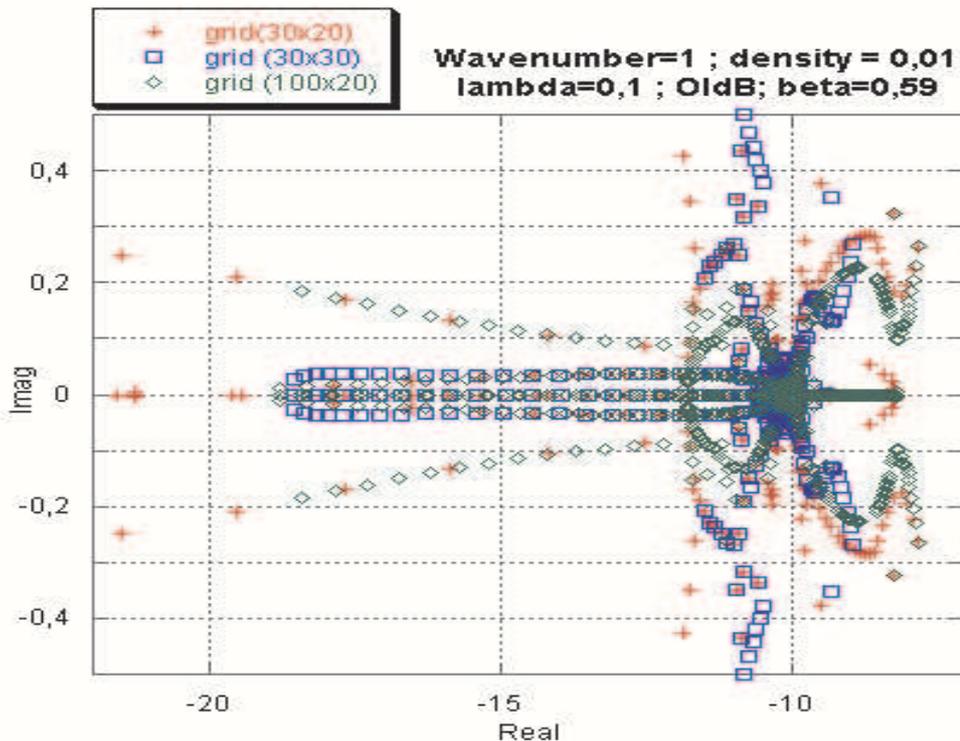


Figura 5.13: Espectro total dos autovalores para um escoamento tipo Couette de um fluido Oldroyd-B para um número de Weissenberg igual a 0,1 com três malhas diferentes.

As diferentes malhas foram escolhidas para mostrar a influência da discretização em cada direção do escoamento. As duas primeiras malhas são comparadas nas Figs. 5.14 a 5.18. Elas tem o mesmo número de elementos na direção vertical e quantidade diferentes na horizontal, todas estas figuras mostram em detalhe uma faixa específica do espectro obtido.

A Fig. 5.14 mostra como no eixo real na posição  $-1/We$  tem-se o que parece ser um único ponto, mas na verdade é um conjunto de autovalores todos muito perto um dos outros com parte imaginária muito pequena. Isto pode ser explicado pois o "shift" usado na transformação aplicada para resolver o problema de autovalor, foi real; então privilegiou os valores mais próximos do eixo real.

Este resultado está em concordância com o observado por Wilson (1999) [51]. Nesta mesma figura pode-se observar como o espectro parece estar como comprimido na direção horizontal quando a discretização nesta direção é maior.

Um comportamento similar ao anterior é mostrado pelos espectros calculados com as malhas 100x20 e 30x20. Em ambas tem-se o mesmo número de elementos na direção horizontal.

Uma análise detalhada da relação do espectro obtido neste trabalho com os disponíveis na literatura para um problema similar (mas com a importante

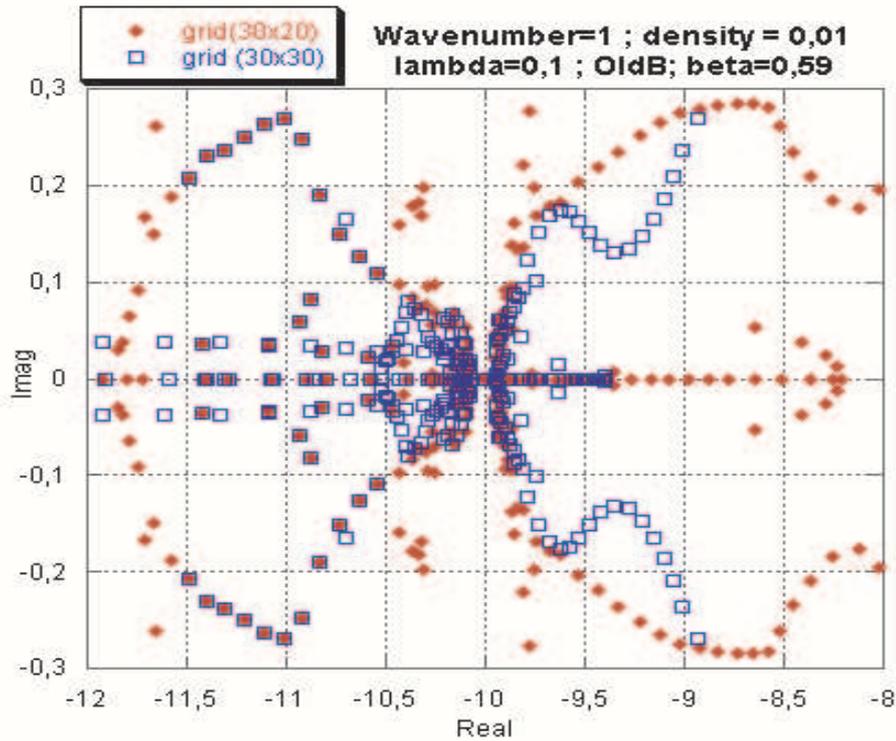


Figura 5.14: Vista em detalhe de uma parte do espectro de um escoamento Couette de um fluido Oldroyd-B para um  $We = 0,1$  com duas malhas com diferente número de elementos na direção horizontal.

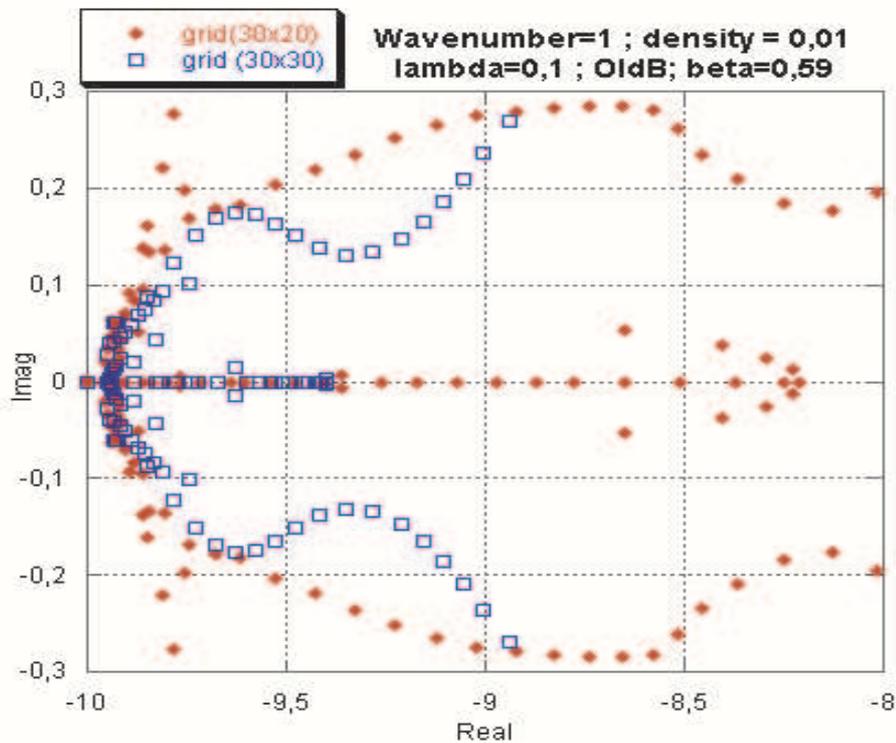


Figura 5.15: Vista em detalhe de uma parte do espectro, considerando os "shifts" =  $-11, -10,5, -10,25, -10, -9, -8$  de um escoamento tipo Couette de um fluido Oldroyd-B.

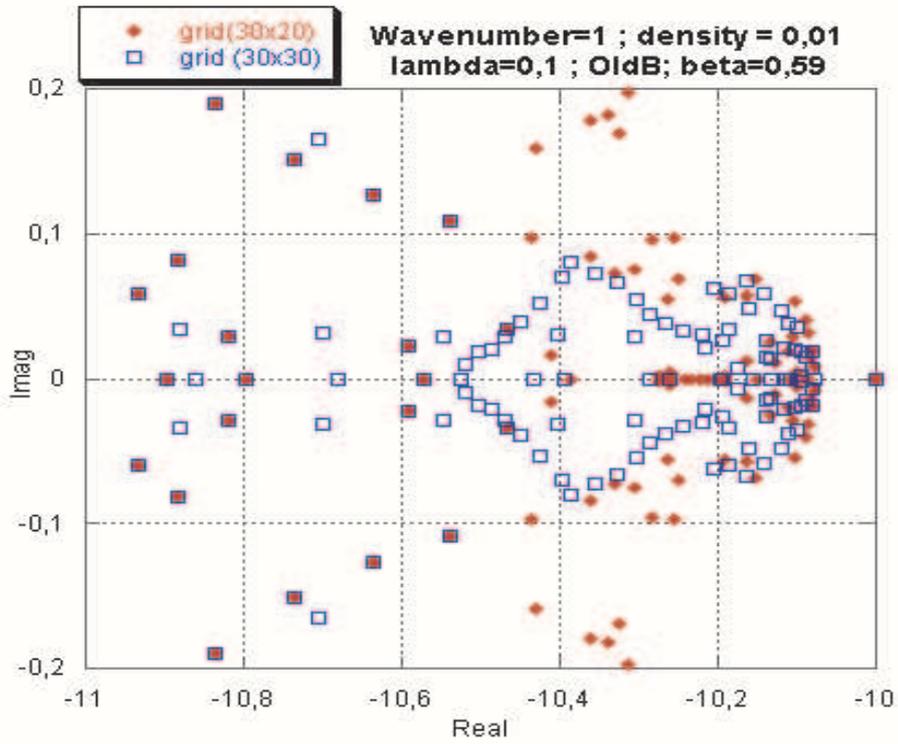


Figura 5.16: Vista em detalhe de uma parte do espectro de um escoamento tipo Couette de um fluido Oldroyd-B.

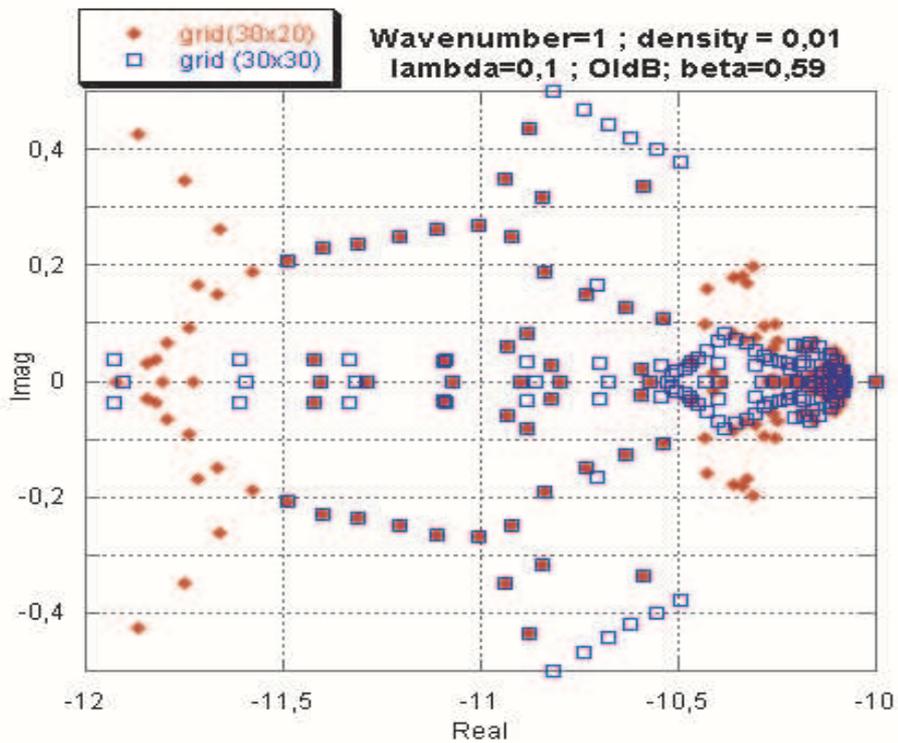


Figura 5.17: Vista em detalhe de uma parte do espectro, considerando os "shifts" =  $-10,25$ ,  $-10,5$ ,  $-11$ ,  $-11,5$  e  $-11,75$  de um escoamento tipo Couette de um fluido Oldroyd-B.

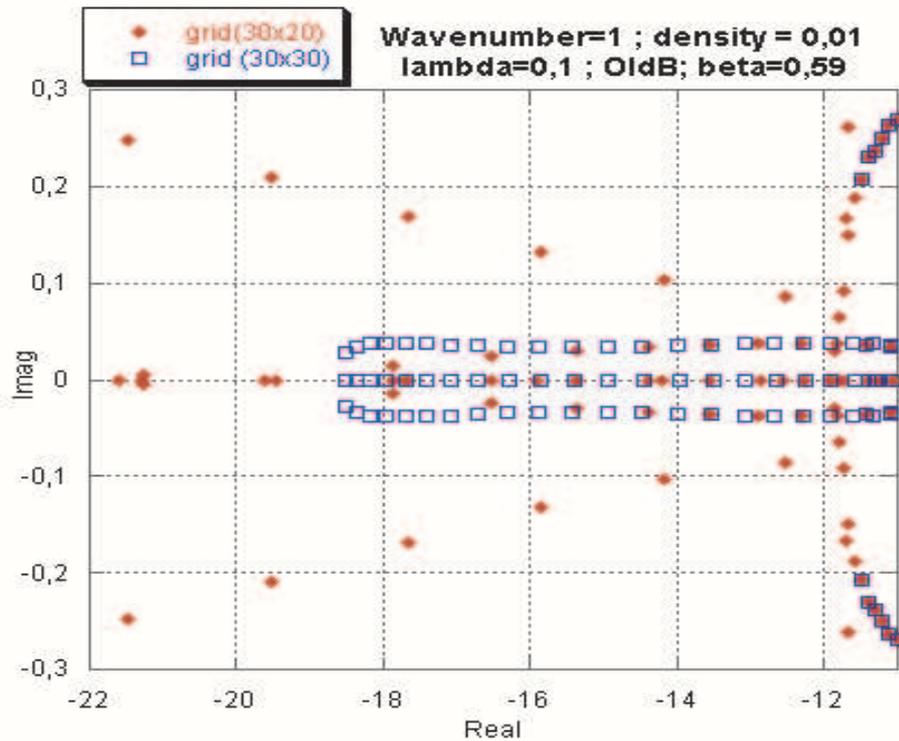


Figura 5.18: Vista em detalhe de uma parte do espectro, considerando os "shifts" =  $-50$ ,  $-15$ ,  $-12$  e  $-11$  de um escoamento tipo Couette de um fluido Oldroyd-B.

diferença de não considerar perturbações tridimensionais) fica como sugestão para um trabalho futuro.

Contudo o fato do método apresentado ter sido capaz de captar o espectro contínuo, localizado em  $\sigma_r = -1/We$  é uma indicação que a formulação e sua implementação estão corretas

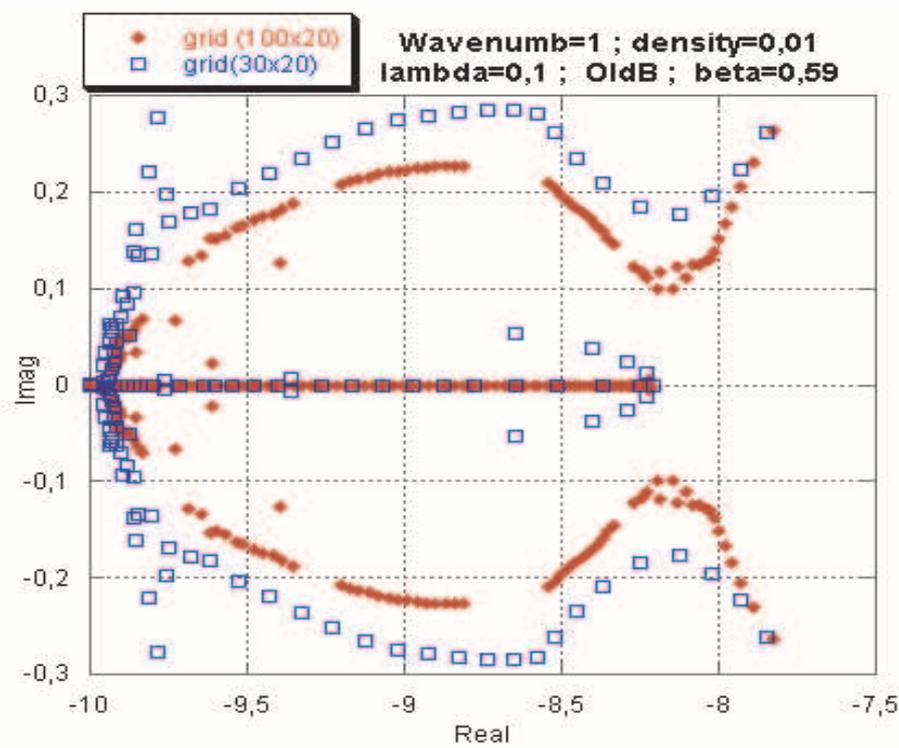


Figura 5.19: Vista em detalhe de uma parte do espectro de um escoamento Couette de um fluido Oldroyd-B, considerando os "shifts" = 0, -8,25, -9, -9,5 e -10 para um número de Weissenberg  $We = 0,1$  para duas malhas com diferente número de elementos na direção vertical.

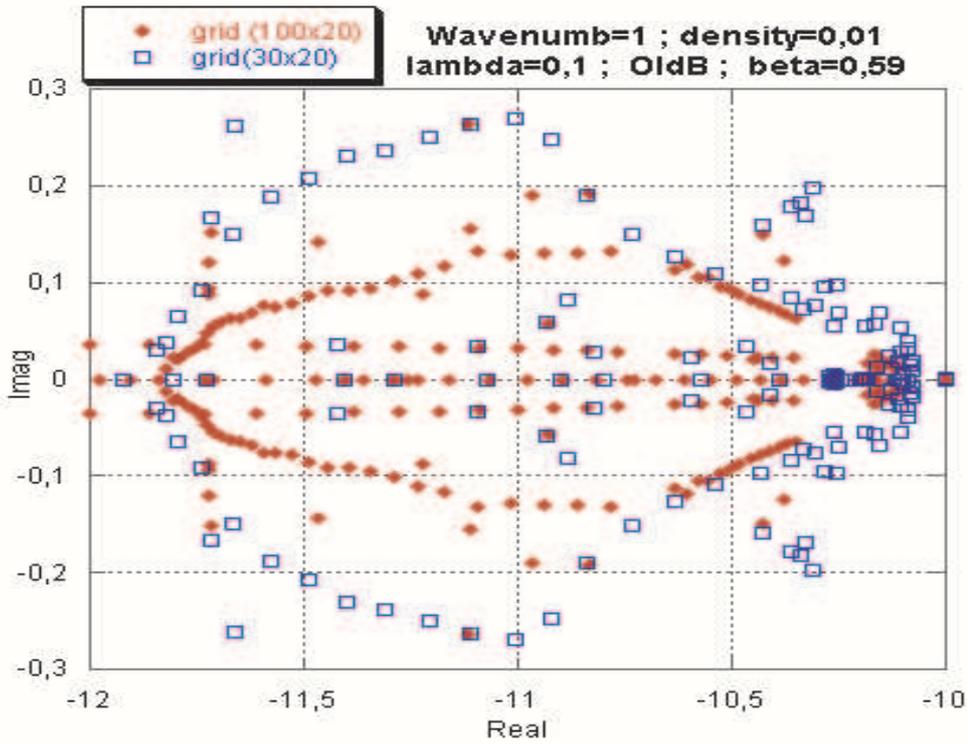


Figura 5.20: Vista em detalhe de uma parte do espectro de um escoamento tipo Couette de um fluido Oldroyd-B, considerando os "shifts" =  $-10,25$ ,  $-11$  e  $-11,75$ .

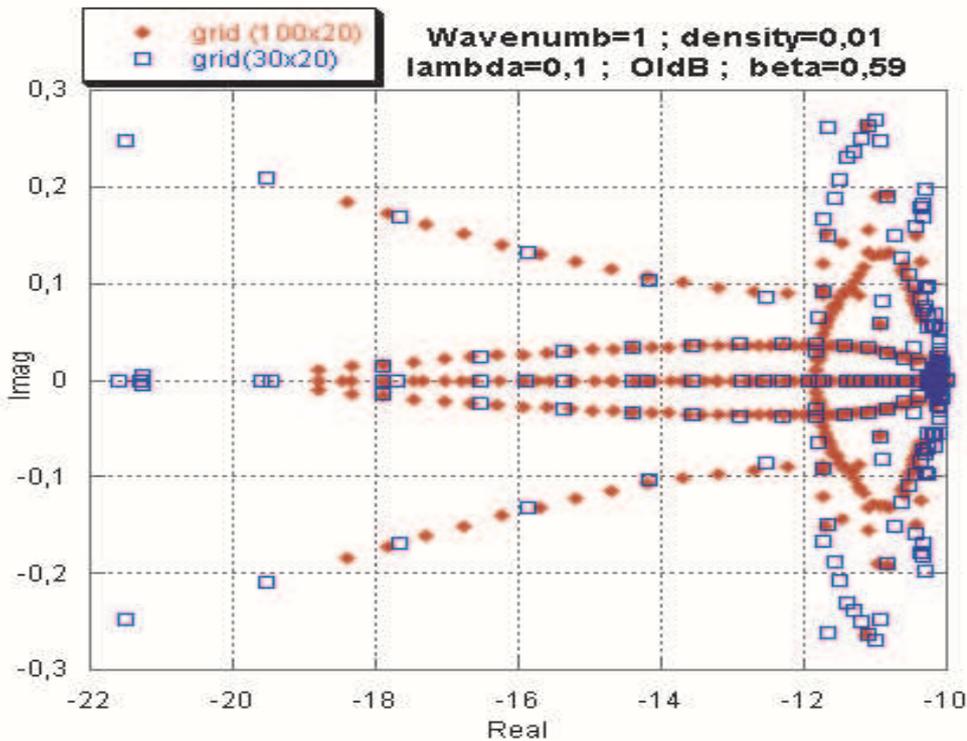


Figura 5.21: Vista em detalhe de uma parte do espectro considerando os "shifts" =  $-50$ ,  $-15$ ,  $-12$ ,  $-11,75$  e  $-10$  de um escoamento Couette de um fluido Oldroyd-B mantendo o número de Weissenberg  $We = 0,1$ .