



**Ramon Felipe Brandão do Nascimento**

**Modelagem, Análise, Simulação e Controle da Dinâmica de  
Motocicletas**

**Modelling, Analysis, Simulation and Control of Motorcycle  
Dynamics**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica  
da PUC-Rio

Orientador: Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro  
18 de dezembro de 2018

## **AGRADECIMENTOS**

Não posso deixar de agradecer em primeiro lugar a meus pais, Carlos Alberto do Nascimento e Maria José de Jesus Brandão Nascimento, que durante toda a minha vida sempre me incentivaram a dar o meu melhor e a aproveitar todas as oportunidades que surgirem. Sem dúvidas, se não fosse pelo apoio e dedicação deles este trabalho não teria sido realizado e minha formatura seria intangível.

Não menos importante para minha trajetória é minha namorada Yashmin Borges, que mesmo em finais de semana em que eu tinha que estudar e me dedicar à universidade não deixou de me apoiar, dando todo o carinho possível.

Já na universidade, toda gratidão ao professor Mauro Speranza Neto. Desde o meu primeiro dia na PUC me lançou os mais diversos desafios que me incentivavam a aprender ainda mais. Além disso me despertou um gosto pela engenharia automotiva que eu mesmo não sabia que existia.

Gostaria de agradecer à instituição PUC-Rio, que me deu a oportunidade de aprender com diversos mestres, nas mais diversas áreas e me proporcionou diversas vivências, dentre elas um intercâmbio na Alemanha, que certamente foi um grande marco em minha vida.

Ademais, agradeço também a todos os colegas e amigos que fiz ao longo desses anos. Em especial aos que estiveram sempre comigo, nas mais diversas situações. Certamente os dias foram muitas vezes mais amenos pela companhia, apoio e ajuda de todos.

## **RESUMO**

### **Modelagem, análise, simulação e controle da dinâmica de motocicletas**

O trabalho aqui apresentado consiste na modelagem, análise, simulação e implementação de técnicas de controle de um veículo de duas rodas para diferentes velocidades, considerando os principais efeitos e parâmetros associados à 5 graus de liberdade (posição/ velocidade longitudinal e lateral, ângulo de guinada, rolagem e de esterçamento do guidão), como por exemplo: massa, momentos de inércia, inclinação do guidão e características do pneu.

Será realizada a análise de sensibilidade da dinâmica do modelo linearizado aos parâmetros significativos e a investigação dos modos típicos de uma motocicleta: capsizes, weaves e wobbles. Além disso serão tratadas diferentes estratégias de controle para os problemas de estabilidade e acompanhamento de trajetórias: realimentação de estado e acompanhamento de trajetória prevista, tendo os modelos lineares simulados em Simulink/Matlab.

Palavras chaves: Modelagem de Motocicletas, Simulação, Simulink/Matlab, Técnicas de controle

# **ABSTRACT**

## **Modelling, analysis, simulation and control of motorcycle dynamics**

The present work consists of modelling, analysis, simulation and the implementation of control techniques in a two-wheeled vehicle model for different velocities, considering the main effects and parameters associated using a 5 DOF model (lateral and longitudinal position/ velocity, yaw, roll and steer angles), such as mass, moments of inertia, caster angle and tires characteristics.

A sensibility analysis of the linearized dynamical model considering its main parameters and the investigation of the motorcycle typical vibration modes (capsize, weave and wobble) is considered. Also, different control strategies for the stability and trajectory tracking problems such as feedback state and forecasted trajectory tracking are used in a linear numerical model with Simulink/ Matlab simulator.

Key-words: Motorcycle Modelling, Simulation, Simulink/ Matlab, Control Techniques

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estabilidade de motocicletas . . . . .	1
<b>2 Modelagem</b>	<b>3</b>
2.1 Considerações Iniciais . . . . .	3
2.2 Lagrangeano . . . . .	4
2.3 Equações do Movimento . . . . .	10
2.3.1 Equação de movimento para X e Y . . . . .	10
2.3.2 Equação de movimento para o ângulo de guinada . . . . .	11
2.3.3 Equação de movimento para o ângulo de rolagem . . . . .	11
2.3.4 Equação de movimento para o ângulo do guidão . . . . .	12
2.3.5 Equações do movimento linearizadas . . . . .	12
2.3.6 Forças Generalizadas . . . . .	13
2.4 Expressão final para o modelo linear da dinâmica lateral . . . . .	18
<b>3 Análise</b>	<b>19</b>
3.1 Espaço de Estado . . . . .	20
3.2 Parâmetros do Modelo . . . . .	21
3.3 Modos de Vibração de uma Motocicleta . . . . .	22
3.4 Estabilidade . . . . .	23
3.5 Análise Modal . . . . .	26
3.6 Controlabilidade . . . . .	31

<b>4</b>	<b>Controle</b>	<b>32</b>
4.1	Determinação das matrizes $K_d$ e $K$ . . . . .	32
4.2	Robustez do controle . . . . .	34
4.3	Montagem da Malha de Simulação . . . . .	36
4.4	Simulação Desvio . . . . .	38
4.5	Simulação Slalom . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>52</b>
A.1	Análise da estabilidade em função da velocidade . . . . .	52
A.2	Controlabilidade do sistema em função da velocidade . . . . .	54
A.3	Robustez do controle . . . . .	57
A.4	Função de definição da guinada para desvio . . . . .	59
A.5	Função de definição da guinada para Slalom . . . . .	60
A.6	Código de Simulação do Diagrama de Blocos e Resposta em Frequência . . . . .	60
A.7	Análise de autovalores e autovetores . . . . .	62
	<b>Referências</b>	<b>63</b>

## Lista de Figuras

1	Trail . . . . .	2
2	Modelo do veículo . . . . .	3
3	Definições dos ângulos da motocicleta [6] . . . . .	4
4	Ângulo de Deslizamento [11] . . . . .	15
5	Exemplo de curva dada pela fórmula mágica de Pacejka [13] . . . . .	16
6	Espaço de Estado [12] . . . . .	20
7	Movimento de Weave de uma motocicleta [14] . . . . .	23
8	Respostas para um degrau unitário para um sistema de segunda ordem [12] . . . . .	24
9	Influência da velocidade na estabilidade do sistema . . . . .	25
10	Lugar geométrico das raízes em função da velocidade . . . . .	25
11	Robustez do controle . . . . .	34
12	Robustez do controle para uma dinâmica de controle mais rápida . . . . .	35
13	Malha de Simulação . . . . .	37
14	Trajatória pretendida para o desvio . . . . .	38
15	Torques no eixo e guidão . . . . .	39
16	Trajatória pretendida para o desvio para um controle mais rápido . . . . .	40
17	Torques no eixo e guidão . . . . .	40
18	Y local x tempo . . . . .	41
19	$\psi$ x tempo . . . . .	41
20	$\phi$ x tempo . . . . .	42
21	$\delta$ x tempo . . . . .	42
22	Velocidade lateral x tempo . . . . .	43
23	$\dot{\phi}$ x tempo . . . . .	43
24	$\dot{\psi}$ x tempo . . . . .	44
25	$\dot{\delta}$ x tempo . . . . .	44

26	Disposição dos cones em pista para o teste de Slalom [3]	45
27	Y local x tempo	46
28	$\psi$ x tempo	46
29	$\phi$ x tempo	47
30	$\delta$ x tempo	47
31	Velocidade lateral x tempo	48
32	$\dot{\phi}$ x tempo	48
33	$\dot{\psi}$ x tempo	49
34	$\dot{\delta}$ x tempo	49
35	Torques no eixo e guidão	50
36	Trajectoria	50
37	Diagrama de Bode	51

## Lista de Tabelas

1	Parâmetros . . . . .	21
---	----------------------	----

# 1 Introdução

O estudo da dinâmica de veículos de duas rodas é tão antigo quanto a própria bicicleta. A bicicleta surgiu em torno de 1817 pelo alemão Karl von Drais, sendo apelidada na época de velocípede. Pouco tempo depois, em 1869, é relatado por Rankine que o controle da bicicleta é feito a partir do esterçamento do guidão na direção para onde o veículo está inclinando. No mesmo relato Rankine já comentava também quanto ao comportamento de contraesterço presente em veículos de duas rodas.

Na segunda metade do século XIX, paralelamente a primeira revolução industrial, começaram a aparecer os primeiros modelos de motocicletas herdeiras do design apelidado de "Bicicleta Segura", muito similar ao modelo de bicicleta atual.

Porém seu desenvolvimento e comércio decolou somente após a primeira revolução industrial, aumentando ainda mais após a segunda guerra mundial com a entrada do Japão como potência na fabricação desse tipo de veículo.

Devido ao grande número de habitantes nas grandes cidades, o aumento do preço de combustível em diversos países, dentre outros fatores, as motocicletas são preferências em muitos países, principalmente naqueles em desenvolvimento. Para 2018 há uma projeção de vendas de 132,4 milhões de motocicletas, enquanto para automóveis esse número é de 81 milhões (BMI Research).

Vê-se, portanto, uma preferência para esse tipo de veículo, aumentando com isso a necessidade da compreensão dos aspectos que regem sua dinâmica, sendo assim possível fabricar motocicletas cada vez mais seguras e confiáveis. Indo além, torna-se viável acompanhar o desenvolvimento de automóveis autônomos, sendo possível a inserção de motocicletas em um novo mercado que vem se configurando.

Neste cenário, este trabalho tem o objetivo de descrever a modelagem de uma motocicleta, indicando os parâmetros que influenciam sua dinâmica por meio da análise dos modos de vibração do sistema e de simulações por meio de Simulink/ Matlab. Além disso, serão propostos métodos de controle do sistema desenvolvido quanto sua dinâmica lateral.

## 1.1 Estabilidade de motocicletas

Antes de iniciar o desenvolvimento da modelagem da motocicleta estudada neste trabalho, há a necessidade de se discutir brevemente sobre os aspectos que regem a estabilidade de um veículo de duas rodas. Embora analisado há mais de cem anos, ainda há divergências quanto a quais fenômenos físicos mais se destacam para explicar a estabilidade destes veículos.

Dentre todos os parâmetros, os que mais se destacam são o efeito giroscópio, *trail* e distribuição de massa. Muito se fala sobre o efeito giroscópio, indicando-o como sendo o principal responsável pela estabilidade de motocicletas. Será visto, entretanto, que ele não contribui de forma expressiva para a estabilidade. Para compreendê-lo é necessária uma análise tridimensional do veículo. Todo corpo em movimento de rotação apresenta momento angular. Ao se aplicar torque sobre um corpo em rotação, é tendência natural do movimento que o momento

angular seja conservado. Para que isso ocorra, o vetor momento angular irá mudar sua direção, rotacionando no sentido do torque aplicado. Assim, quando se quer fazer uma curva em uma moto, o piloto inclina seu corpo para fora do eixo, provocando um torque no mesmo sentido do movimento do veículo. Esse torque irá provocar um movimento de rotação no eixo de direção, uma vez que o movimento de rotação da roda dianteira, por conservação de momento angular, irá girá-lo para o sentido da curva.

De forma similar ocorre o momento conhecido como contraesterço. Ao se aplicar um momento no eixo de direção da motocicleta, por conservação de momento angular aparecerá um momento no sentido do movimento do veículo, porém com direção contrária da direção da curva.

Assim como o efeito giroscópico, muitos indicam o *trail* de uma motocicleta como o principal efeito para sua estabilidade. O *trail* é definido como a distância entre o ponto de contato pneu-solo com a interseção do prolongamento do eixo de direção com o solo, como indicado na figura 1. Sendo seu valor positivo, ou seja, o ponto de contato pneu-solo ser antes da interseção, o eixo funciona como em um carrinho de supermercado, no qual a roda segue a direção imposta pelo eixo.

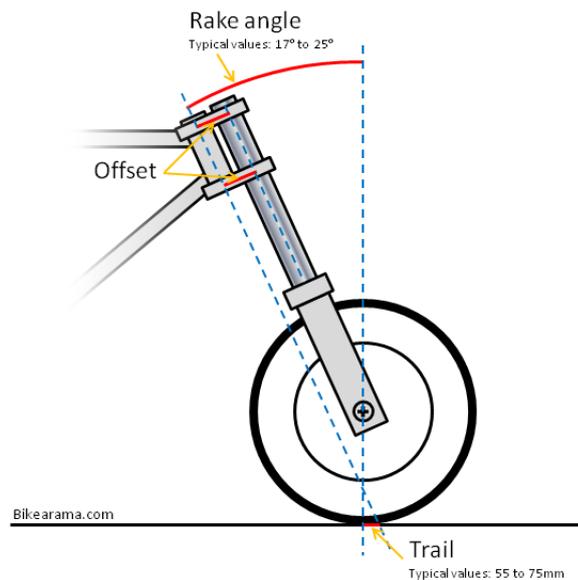


Figura 1: Trail

Embora ambos os efeitos sejam importantes para a estabilidade, eles não precisam necessariamente ocorrer para que um veículo de duas rodas seja estável, como indica o estudo publicado na revista *Science* em 2011 [8]. Nesse estudo foram executadas experiências em uma bicicleta construída de forma que seu *trail* fosse negativo e o efeito giroscópico fosse cancelado por meio de uma segunda roda de mesma dimensão rodando em sentido contrário que aquela em contato com o solo. Como a bicicleta ainda possuía comportamento estável para uma gama de velocidades, sua estabilidade não poderia estar diretamente atribuída ao *trail* e ao efeito giroscópico.

Os pesquisadores chegaram à conclusão, portanto, que o principal fator para garantir a estabilidade de um veículo de duas rodas é sua distribuição de massas. Para que a bicicleta do estudo em questão fosse estável, foi necessário que o centro de massa da parte traseira da bici-

cleta (esquadro, selim, roda traseira) fosse superior ao da parte frontal (roda dianteira, guidão e garfo da direção), estando o centro de massa da parte frontal à frente do eixo de direção.

Portanto, a estabilidade de um veículo de duas rodas não pode ser explicada simplesmente por um único fator, tendo na complexidade do seu sistema a influência de um conjunto de fatores que levam a sua estabilidade. Este trabalho tem como um de seus objetivos analisar dentro da modelagem da dinâmica de uma motocicleta a influência desses parâmetros em seu comportamento.

## 2 Modelagem

O modelo desenvolvido neste trabalho tem como referência o modelo apresentado no apêndice B da referência [6]. Durante o desenvolvimento do modelo serão explicadas todas as aproximações empregadas para se linearizar o modelo encontrado. Vale ressaltar que algumas alterações foram feitas em relação ao modelo da referência, uma vez que foram encontrados alguns erros na modelagem do sistema.

### 2.1 Considerações Iniciais

A motocicleta considerada para o desenvolvimento do modelo é retratada na figura 2.

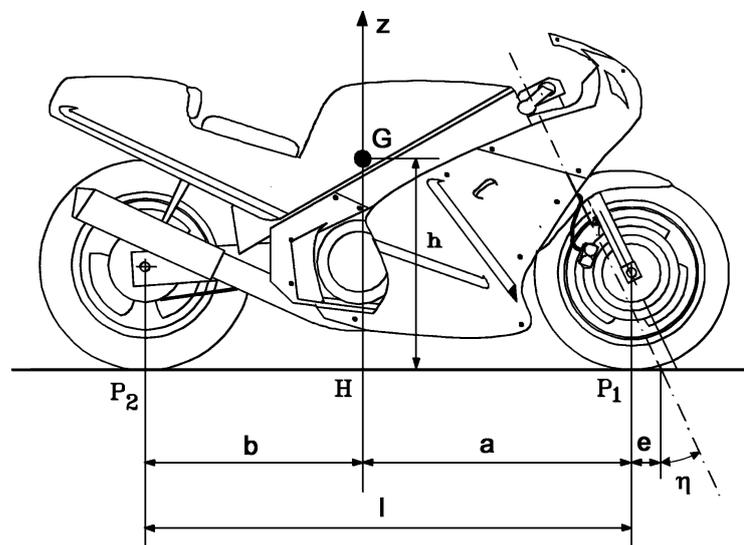


Figura 2: Modelo do veículo

Como pode ser observado em motos reais, o ângulo de cáster ( $\eta$  na figura 2) pode assumir valores grandes, o que implica um *trail* não desprezível ( $e$  na figura 2). Pelo fato deste ser um fator importante para a estabilidade da motocicleta, ele será considerado na modelagem.

A motocicleta será considerada como um corpo rígido, sendo o motorista portanto parte de sua estrutura. Assim, não será considerada a alteração de sua geometria e momentos de inércia

por influência da suspensão. Serão considerados 5 graus de liberdade na motocicleta, sendo eles:

- Deslocamento Longitudinal (X)
- Deslocamento Transversal (Y)
- Ângulo de rolagem ( $\phi$ )
- Ângulo de guinada ( $\psi$ )
- Ângulo do guidão ( $\delta$ ).

Além disso, para se considerar o efeito giroscópio no modelo, será levado em conta o movimento de rotação dos conjuntos pneu-roda dianteiro e traseiro.

Para descrever o movimento da motocicleta são necessários eixos de referência. Para o veículo em questão, o eixo fixo no corpo rígido tem origem no ponto H, como indicado na figura 2, tendo suas direções definidas pelos ângulos  $\phi$  e  $\psi$ , indicados na figura 3. Quanto ao referencial inercial do sistema, sua origem e direções coincidem com as do eixo fixo no corpo rígido antes do início de movimento da motocicleta.

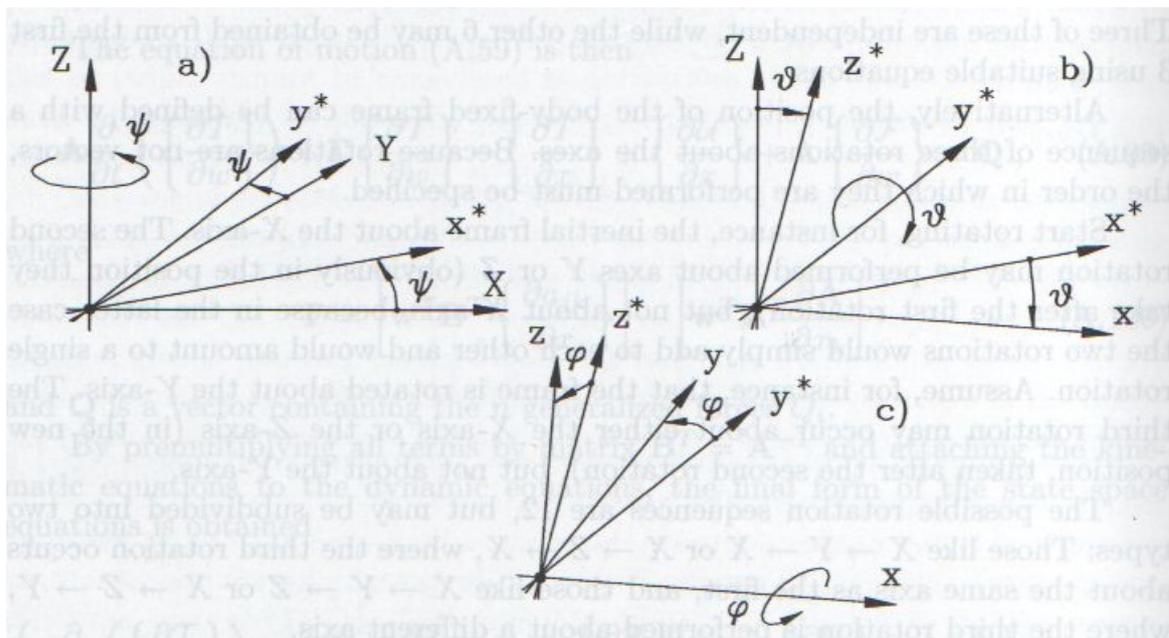


Figura 3: Definições dos ângulos da motocicleta [6]

## 2.2 Lagrangeano

As equações de movimento da motocicleta para cinco graus de liberdade serão obtidas considerando-se as equações de Lagrange.

Assim, começa-se definindo a relação entre as velocidades no eixo de referência global e local, indicado pela equação 1, utilizando-se a matriz inversa de rotação de guinada  $R_{\psi}^{-1}$ .

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\psi^{-1} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

O vetor velocidade angular em torno do eixo fixo no corpo rígido pode ser descrito pela relação 2

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\phi^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo  $\mathbf{R}_\phi$  definida como a matriz de rotação de rolagem

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Sendo o ângulo do guidão um dos parâmetros de controle do sistema, as velocidade em relação a seu eixo ( $\Omega_1$ ) deve ser definida. Os eixos do guidão são definidos de forma que seu eixo z esteja na direção do guidão, com sentido positivo para cima; o eixo x esteja inclinado em relação ao solo do ângulo de cáster ( $\eta$ ), tendo seu eixo sempre no plano de simetria axial da roda dianteira e o eixo y é simultaneamente perpendicular a ambos.

Assim, o vetor velocidade angular do eixo de direção pode ser descrito pela equação 3.

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\delta^{-1} \mathbf{R}_\eta^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\delta^{-1} \mathbf{R}_\eta^{-1} \mathbf{R}_\phi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

sendo as matrizes de rotação  $R_\delta$  e  $R_\eta$  definidas como

$$\mathbf{R}_\delta = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_\eta = \begin{bmatrix} \cos(\eta) & 0 & -\sin(\eta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\eta) & 0 & \cos(\eta) \end{bmatrix}$$

De posse das expressões para  $\boldsymbol{\Omega}$  e  $\boldsymbol{\Omega}_1$  pode-se determinar a relação entre as duas velocidades, dada pela equação 4

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\delta^{-1} \mathbf{R}_\eta^{-1} \boldsymbol{\Omega} \quad (4)$$

Para se considerar o efeito giroscópio no modelo, que possui origem no movimento de rotação das rodas dianteira e traseira, suas velocidades angulares ( $\boldsymbol{\Omega}_{wi}$ ) devem ser determinadas.

Nomeando a velocidade angular de rotação da roda  $\chi_i$ , a velocidade angular da roda traseira será indicada pela equação 5

$$\boldsymbol{\Omega}_{w2} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\chi}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\phi^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\chi}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A equação para a roda dianteira é diferente da traseira, uma vez que ela também rotaciona com o eixo de direção, sendo expressa pela equação 6.

$$\boldsymbol{\Omega}_{w1} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\chi}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Definidas as velocidades angulares, calcula-se a velocidade do centro de massa da motocicleta. Defini-se, portanto, sua posição em relação ao eixo inercial XYZ, dado pela equação 7.

$$(\overline{G-O}) = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\phi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ao derivar a equação 7 pode-se determinar a velocidade do centro de massa da motocicleta em relação ao referencial inercial. Para isso, deve-se aplicar a regra do produto duas vezes na parcela da direita, uma vez no produto matricial e outra em relação ao produto deste e o vetor altura do centro de massa. Entretanto, como foi assumido um corpo rígido, a altura do centro de massa não é alterada, sendo sua velocidade definida pela equação 8.

$$V_G = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} + (\dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\phi + \mathbf{R}_\psi \dot{\mathbf{R}}_\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (8)$$

Para se calcular o Lagrangeano ainda é necessário se conhecer os tensores de inércia dos componentes da moto, sendo então possível determinar as energias cinéticas de rotação por componente.

Para a motocicleta completa como corpo rígido, o tensor de inércia é dado por

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

onde  $J_x$  e  $J_y$  são os momentos de inércia da motocicleta em relação a seu centro de massa. Pela geometria simétrica do plano que possui o eixo Y como seu vetor diretor, pode-se afirmar que os produtos de inércia relacionados a este componente serão nulos [7].

Da mesma forma, é possível determinar o tensor de inércia do sistema de direção, sendo este relacionado aos eixos deste sistema, como já definidos anteriormente. O tensor de inércia dos sistemas roda-pneu dianteiro e traseiro são mais facilmente encontrados devido a sua geometria simétrica, definido por

$$J_{wi} = \begin{pmatrix} J_{ti} & 0 & 0 \\ 0 & J_{pi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{ti} \end{pmatrix}$$

De posse dos tensores de inércia, velocidades angulares e do centro de massa, geometria da motocicleta e massa é possível calcular o Lagrangeano. Sua definição é dada pela equação

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}_t + \mathcal{T}_r - \mathcal{U}$$

onde  $\mathcal{T}_t$  é a energia cinética de translação,  $\mathcal{T}_r$  é a energia cinética de rotação e  $\mathcal{U}$  é a energia potencial do sistema.

A seguir será calculada cada uma destas parcelas para as diferentes partes do veículo:

- Energia Cinética de Translação ( $\mathcal{T}_t$ )

A equação 9 define a energia cinética de translação do sistema.

$$\mathcal{T}_t = \frac{1}{2}mV_G^2 \quad (9)$$

- Energia Potencial ( $\mathcal{U}$ )

A energia potencial do sistema é dada pela energia potencial gravitacional do centro de massa, dada pela equação 10.

$$\mathcal{U} = mgh\cos(\phi) \quad (10)$$

- Energia Cinética de Rotação ( $\mathcal{T}_r$ )

Para seu cálculo será necessário somar a energia de rotação provenientes das diferentes partes rotacionais da motocicleta, sendo necessário excluir alguns termos que já foram considerados no cálculo de outras partes do veículo, como será visto. Primeiramente será calculada a energia de rotação do corpo rígido como um todo em relação ao eixo fixo ao corpo, dado pela equação 12.

$$\mathcal{T}_r = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T J \boldsymbol{\Omega}, \quad (11)$$

$$\mathcal{T}_r = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 J_x + \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 [J_z \cos^2(\phi) + J_y \sin^2(\phi)] + \dot{\psi} \dot{\phi} J_{xz} \cos(\phi) \quad (12)$$

A energia de rotação do sistema de direção pode ser definido pela equação 14. Para se chegar ao resultado apresentado na equação, foi necessário assumir pequenos ângulos, sendo essa uma condição comum para as maiorias das manobras realizadas com a motocicleta. Desta forma foi possível linearizar a equação, desprezando-se os termos quadráticos de  $\sin(\delta)$ , considerando-se  $\sin(\delta)$  como  $\delta$  e  $\cos(\delta)$  com 1.

$$\mathcal{T}_{r1} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_1^T J_1 \boldsymbol{\Omega}_1, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{r1} = \mathcal{T}_{r0} + \frac{1}{2} J_{z1} \delta^2 + \delta \dot{\psi} [J_{z1} \cos(\eta) + J_{xz1} \sin(\eta) \cos(\phi)] \\ + \delta \dot{\phi} [-J_{z1} \sin(\eta) + J_{xz1} \cos(\eta)] + A_1 \delta \dot{\psi}^2 + A_2 \delta \dot{\phi}^2 + A_3 \delta \dot{\psi} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $\mathcal{T}_{r0}$  são os termos da equação que não dependem de  $\delta$ , já sendo portanto considerados na equação 12. Os termos  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  serão descritos a seguir:

$$A_1 = (J_{x1} - J_{y1}) \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\eta) + J_{xz1} [\sin(\phi) \cos(\phi) \cos(\eta)]$$

,

$$A_2 = J_{xz1} \sin(\phi)$$

,

$$A_3 = (J_{x1} - J_{y1}) \cos(\eta) \sin(\phi) - J_{xz1} \sin^2(\eta)$$

Por último, também é necessário se considerar a dinâmica de rotação do conjunto pneu-roda dianteiro e traseiro. Assim será possível considerar os efeitos giroscópios no sistema. Para isso deve-se encontrar a energia cinética de rotação deste sistema, dada pela equação 15

$$\mathcal{T}_{ri} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{wi}^T J_{wi} \boldsymbol{\Omega}_{wi} \quad (15)$$

Pelo fato da roda dianteira possuir as componentes da velocidade angular diferentes do pneu traseiro, uma vez que ele pode rotacionar pelo eixo de direção, suas energias cinéticas de

rotação serão distintas. A energia cinética de rotação do conjunto pneu-roda traseiro é dado pela equação 16.

$$\mathcal{T}_{r2} = \mathcal{T}_{r0} + \frac{1}{2}V^2 \frac{J_{p2}^2}{R_{e2}^2} + V\dot{\psi} \sin(\phi) \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \quad (16)$$

Da mesma forma que para a equação 14, o termo  $\mathcal{T}_{r0}$  representa os termos que não possuem a velocidade de rotação do conjunto pneu-roda ( $\dot{\chi}$ ), sendo portanto já considerados na equação 12. Para se chegar a equação indicada foi feita uma aproximação para o valor de  $\dot{\chi}$ , não havendo a consideração que a velocidade da motocicleta é ligeiramente diferente de  $\dot{\chi}R_{e2}$  pelo deslizamento dos pneus. Portanto, para este caso,

$$\dot{\chi} = \frac{V}{R_{e2}}$$

onde  $R_{e2}$  é o raio dinâmico do conjunto roda-pneu traseiro.

Para o pneu dianteiro, considerando o movimento rotacional do eixo de direção para pequenos valores de  $\delta$ , a energia cinética de rotação será indicada pela equação 17.

$$\mathcal{T}_{r1} = \mathcal{T}_{r0} + \frac{1}{2}V^2 \frac{J_{p1}^2}{R_{e1}^2} + V\dot{\psi} \sin(\phi) \frac{J_{p1}}{R_{e1}} - V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \delta [\dot{\psi} \cos(\phi) \sin(\eta) + \dot{\phi} \cos(\eta)] \quad (17)$$

De posse das equações referentes às energias cinéticas de rotação e translação e da energia potencial, é possível escrever o Lagrangeano do sistema, indicado pela equação 18

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 J_x^* + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 [J_z \cos^2(\phi) + J_y^* \sin^2(\phi)] + \dot{\psi} \dot{\phi} J_{xz} \cos(\phi) \\ & + mh[\dot{X} \dot{\psi} \sin(\phi) - \dot{Y} \dot{\phi} \cos(\phi)] \cos(\psi) + mh[\dot{X} \dot{\phi} \cos(\phi) + \dot{Y} \dot{\psi} \sin(\phi)] \sin(\psi) \\ & + \frac{1}{2}V^2 \left( \frac{J_{p1}^2}{R_{e1}^2} + \frac{J_{p2}^2}{R_{e2}^2} \right) + V\dot{\psi} \sin(\phi) \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \right) + \frac{1}{2}J_{z1} \dot{\delta}^2 \\ & + \dot{\delta} \dot{\psi} [J_{z1} \cos(\eta) + J_{xz1} \sin(\eta) \cos(\phi)] + \dot{\delta} \dot{\phi} [-J_{z1} \sin(\eta) + J_{xz1} \cos(\eta)] + A_1 \delta \dot{\psi}^2 \\ & + A_2 \delta \dot{\phi}^2 + A_3 \delta \dot{\psi} \dot{\phi} - V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \delta [\dot{\psi} \cos(\phi) \sin(\eta) + \dot{\phi} \cos(\eta)] - mgh \cos(\phi) \end{aligned} \quad (18)$$

É interessante notar que dois novos termos aparecem do cálculo do lagrangeano:  $J_x^*$  e  $J_y^*$ . Esses são, respectivamente, segundo o teorema de Steiner, os valores dos momentos de inércia da motocicleta dos planos YZ e XZ em relação a origem do sistema de eixos coordenados fixo ao corpo, que é o ponto H da figura 2. Suas equações são dadas por

$$J_x^* = J_x + mh^2$$

$$J_y^* = J_y + mh^2$$

## 2.3 Equações do Movimento

A equação de Lagrange é definida como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \quad (19)$$

onde  $q_j$  e  $\dot{q}_j$  são as coordenadas generalizadas do sistema. A partir delas é possível descrever toda a dinâmica do sistema, uma vez que elas são independentes entre si e dependentes do tempo. Para o problema em questão, as coordenadas generalizadas são os cinco graus de liberdade da motocicleta e suas respectivas derivadas temporais ( $X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, \psi, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi}, \delta, \dot{\delta}$ ).

$Q_j$  são as forças generalizadas, definidas como as forças não conservativas do sistema, sendo no caso da motocicleta as forças/ momentos de interação pneu-solo, forças/momentos aerodinâmicos e outras forças e momentos externos. Para um sistema holonômico ela pode ser definida como

$$Q_j = \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (20)$$

onde  $\delta \mathcal{W}$  é o trabalho virtual executado pelas forças externas.

Nesta seção serão encontradas as equações do movimento a partir da equação 19, totalizando cinco equações respectivas a cada um dos graus de liberdade do sistema.

### 2.3.1 Equação de movimento para X e Y

Substituindo a equação 18 em 19 e efetuando os cálculos para as coordenadas generalizadas X e Y são obtidas as equações dispostas em 21.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} &= m[\dot{X} + h\dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\psi) + h\dot{\phi} \cos(\phi) \sin(\psi)] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} &= m[\dot{Y} + h\dot{\psi} \sin(\phi) \sin(\psi) - h\dot{\phi} \cos(\phi) \cos(\psi)] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Retomando à equação 1, os valores de  $\dot{X}$  e  $\dot{Y}$  do sistema 18 podem ser substituídos. Fazendo as substituições e as derivadas temporais encontra-se a equação 22.

$$m \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u - \dot{\psi}v + h\ddot{\psi} \sin(\phi) + 2h\dot{\psi}\dot{\phi} \cos(\phi) \\ \dot{v} + u\dot{\psi} - h\ddot{\phi} \cos(\phi) + h\dot{\phi}^2 \sin(\phi) + h\dot{\phi}^2 \sin(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \end{bmatrix} \quad (22)$$

Pode-se perceber que o termo à esquerda do produto vetorial é a matriz de rotação de guiada  $\mathbf{R}_\psi$ . Ao se multiplicar ambos os lados da equação 23 por  $\mathbf{R}_\psi^{-1}$  é encontrada a equação da

dinâmica longitudinal e lateral da motocicleta no referencial local fixo na motocicleta dado pelo sistema 23

$$\begin{cases} m[u - \dot{\psi}v + h\ddot{\psi}\sin(\phi) + 2h\dot{\psi}\dot{\phi}\cos(\phi)] = Q_x \\ \dot{v} + u\dot{\psi} - h\ddot{\phi}\cos(\phi) + h\dot{\phi}^2\sin(\phi) + h\dot{\phi}^2\sin(\phi) = Q_y \end{cases} \quad (23)$$

### 2.3.2 Equação de movimento para o ângulo de guinada

Da mesma forma, a equação de movimento para  $\psi$  pode ser determinada. Linearizando as equações para valores pequenos de ângulo de rolagem, os termos  $A_i$  referentes a barra de direção desaparecem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= \dot{\psi}[J_z \cos^2(\phi) + J_y^* \sin^2(\phi)] + \dot{\phi} J_{xz} \cos(\phi) + mh \sin(\phi) [\dot{X} \cos(\psi) + \dot{Y} \sin(\psi)] \\ &\quad + V \sin(\phi) \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \right) + \delta [J_{z1} \cos(\eta) + J_{xz1} \sin(\eta)] - V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \delta \sin(\eta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = mh [\dot{X} \dot{\psi} \sin(\phi) - \dot{Y} \dot{\phi} \cos(\phi)] \sin(\psi) + mh [\dot{X} \dot{\phi} \cos(\phi) - \dot{Y} \dot{\psi} \cos(\phi)] \cos(\psi) \quad (24)$$

Realizando a derivada temporal, substituindo em 19, utilizando a relação  $\ddot{X} \cos(\psi) + \ddot{Y} \sin(\psi) = \dot{u} - v\dot{\psi}$  proveniente de 1 e linearizando as equações encontra-se a equação da dinâmica para o movimento de guinada 25.

$$\begin{aligned} J_z \ddot{\psi} + J_{xz} \ddot{\phi} + \delta [J_{z1} \cos(\eta) + J_{xz1} \sin(\eta)] + m\phi \dot{V} + V \dot{\phi} \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \right) \\ - V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \dot{\delta} \sin(\eta) + \dot{V} \phi \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \right) - \dot{V} \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \delta \sin(\eta) = Q_\psi \end{aligned} \quad (25)$$

### 2.3.3 Equação de movimento para o ângulo de rolagem

As derivadas do lagrangiano em relação a  $\phi$  e  $\dot{\phi}$  são descritas em 26. Os termos  $A_i$  foram desconsiderados, uma vez que ao linearizar as equações eles desaparecem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= J_x^* \dot{\phi} + \dot{\psi} J_{xz} \cos(\phi) + mh \cos(\phi) [-\dot{Y} \cos(\psi) + \dot{X} \sin(\psi)] \\ &\quad + \delta [-J_{z1} \sin(\eta) + J_{xz1} \cos(\eta)] - V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \delta \cos(\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = & [J_y^* - J_z] \dot{\psi}^2 \cos(\phi) \sin(\phi) - \dot{\psi} \dot{\phi} J_{xz} \sin(\phi) + mh[\dot{X} \dot{\psi} \cos(\phi) + \dot{Y} \dot{\phi} \sin(\phi)] \cos(\psi) \quad (26) \\ & + mgh \sin(\phi) + mh[-\dot{X} \dot{\phi} \sin(\phi) + \dot{Y} \dot{\psi} \cos(\phi)] \sin(\psi) + V \dot{\psi} \cos(\phi) \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \right) \end{aligned}$$

Realizando a derivada temporal, substituindo em 19, utilizando a relação  $\ddot{X} \sin(\psi) + \ddot{Y} \cos(\psi) = \dot{v} - u\dot{\psi}$  proveniente de 1 e linearizando as equações encontra-se a equação da dinâmica para o movimento de guinada 27.

$$\begin{aligned} J_x^* \ddot{\phi} + J_{xz} \ddot{\psi} + \ddot{\delta} [-J_{z1} \sin(\eta) + J_{xz1} \cos(\eta)] - mh\dot{v} - mhV\dot{\psi} \quad (27) \\ - \dot{V} \dot{\psi} \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \right) - \dot{V} \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \delta \cos(\eta) - V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \dot{\delta} \cos(\eta) - mgh\phi = Q_\phi \end{aligned}$$

### 2.3.4 Equação de movimento para o ângulo do guidão

As derivadas do lagrangiano em relação a  $\delta$  e  $\dot{\delta}$  são descritas em 28. Os termos  $A_i$  foram desconsiderados, uma vez que ao linearizar as equações eles desaparecem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\delta}} = J_{z1} \dot{\delta} + \dot{\psi} [J_{z1} \cos(\eta) + J_{xz1} \sin(\eta)] + \dot{\phi} [-J_{z1} \sin(\eta) + J_{xz1} \cos(\eta)] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = -V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} [\dot{\psi} \sin(\eta) + \dot{\psi} \cos(\eta)] \quad (28) \end{aligned}$$

Realizando a derivada temporal, substituindo em 19 e linearizando as equações encontra-se a equação da dinâmica para o movimento do guidão 29.

$$\begin{aligned} J_{z1} \ddot{\delta} + \ddot{\psi} [J_{z1} \cos(\eta) + J_{xz1} \sin(\eta)] + \ddot{\phi} [-J_{z1} \sin(\eta) + J_{xz1} \cos(\eta)] \quad (29) \\ + V \frac{J_{p1}}{R_{e1}} [\dot{\psi} \sin(\eta) + \dot{\psi} \cos(\eta)] - Q_\delta = Q_\delta \end{aligned}$$

O termo  $Q_\delta$  foi alocado do lado esquerdo da equação 29, uma vez que ele é um momento interno intrínseca ao sistema, representando o momento viscoso exercido pelo mancal da barra de direção.

### 2.3.5 Equações do movimento linearizadas

Assumindo que o ângulo do guidão e o ângulo de rolagem são pequenos é possível linearizar as equações do movimento da motocicleta. Além disso, pelo fato da velocidade lateral da

motocicleta ( $v$ ) ser muito menor que sua velocidade longitudinal ( $u$ ), a velocidade longitudinal do veículo será considerada como o módulo da velocidade do veículo ( $V$ ). O resultado da linearização pode ser encontrada no sistema 30. Além disso, percebe-se que a dinâmica lateral é desacoplada da dinâmica longitudinal para o sistema linear com velocidade constante. Por esse fato, para se estudar a dinâmica lateral não será levada em conta a dinâmica longitudinal no modelo linear.

(30)

$$\begin{aligned}
m\dot{V} &= Q_x \\
m\dot{v} + mV\dot{\psi} - mh\ddot{\phi} &= Q_y \\
J_z\ddot{\psi} + J_{xz}\ddot{\phi} + \ddot{\delta}[J_{z1}\cos(\eta) + J_{xz1}\sin(\eta)] + m\phi h\dot{V} + V\dot{\phi}\left(\frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}}\right) \\
- V\frac{J_{p1}}{R_{e1}}\dot{\delta}\sin(\eta) + \dot{V}\phi\left(\frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}}\right) - \dot{V}\frac{J_{p1}}{R_{e1}}\delta\sin(\eta) &= Q_\psi \\
J_x^*\ddot{\phi} + J_{xz}\ddot{\psi} + \ddot{\delta}[-J_{z1}\sin(\eta) + J_{xz1}\cos(\eta)] - mh\dot{v} - mhV\dot{\psi} \\
- V\dot{\psi}\left(\frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}}\right) - \dot{V}\frac{J_{p1}}{R_{e1}}\delta\cos(\eta) - V\frac{J_{p1}}{R_{e1}}\dot{\delta}\cos(\eta) - mgh\phi &= Q_\phi \\
J_{z1}\ddot{\delta} + \ddot{\psi}[J_{z1}\cos(\eta) + J_{xz1}\sin(\eta)] + \ddot{\phi}[-J_{z1}\sin(\eta) + J_{xz1}\cos(\eta)] \\
+ V\frac{J_{p1}}{R_{e1}}[\dot{\psi}\sin(\eta) + \dot{\phi}\cos(\eta)] &= Q_\delta
\end{aligned}$$

### 2.3.6 Forças Generalizadas

Para descrever a dinâmica da motocicleta ainda é necessário representar as forças generalizadas a partir dos parâmetros do veículo. Essas forças são devido ao contato pneu-solo, efeitos de arrasto aerodinâmico e forças e momentos externos.

Para defini-las, é necessário descrever o trabalho virtual executado em seus pontos de atuação. Para isso deve-se descrever os deslocamentos virtuais para cada um destes pontos, descritos a seguir. No caso dos efeitos aerodinâmicos, considera-se que o centro aerodinâmico é também o centro de gravidade (CG), de forma que esses esforços atuem no CG.

- O deslocamento virtual para o ponto de contato pneu-solo do eixo dianteiro é dado pelo vetor

$$\delta u_1 = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y + \delta\psi a - e\cos(\eta)\delta\delta \end{bmatrix}$$

- O deslocamento virtual para o ponto de contato pneu-solo do eixo traseiro é dado pelo vetor

$$\delta u_2 = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y - \delta\psi b \end{bmatrix}$$

- O deslocamento virtual para o CG da motocicleta é dado pelo vetor

$$\delta u_G = \begin{bmatrix} \delta x + h\delta\psi\sin(\phi) \\ \delta y - h\delta\phi\cos(\phi) \\ -h\delta\phi\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

cuja origem do eixo está no ponto H da figura 2, sendo estes paralelos aos eixos do referencial inercial.

O trabalho virtual é, portanto, representado pela equação 31.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} = & (F_{x1} + F_{x2})\delta x + F_{xa}(\delta x + h\delta\psi\cos(\phi)) + (F_{y1} + F_{y2})\delta y - F_{y2}\delta\psi b \\ & + F_{y1}(\delta\psi a - e\cos(\eta)\delta\delta) + F_{ya}(\delta y - h\delta\phi\cos(\phi)) + F_{za}(-h\delta\phi\sin(\phi)) \\ & + (M_{za} + M_{z1} + M_{z2})\delta\psi + M_{z1}\delta\delta\cos(\eta) + (M_{xa} + M_{xe})\delta\phi + M_g\delta\delta - c_\delta\dot{\delta}\delta \end{aligned} \quad (31)$$

onde  $-c_\delta\dot{\delta}\delta$  é a energia infinitesimal dissipada pelas forças viscosas do mancal da barra de direção.

Aplicando 31 na equação 20 é possível obter o sistema de forças generalizadas indicada pelo sistema 32.

$$\begin{cases} Q_x = F_{x1} + F_{x2} + F_{xa} \\ Q_y = F_{y1} + F_{y2} + F_{ya} \\ Q_\psi = F_{y1}a - F_{y2}b + M_{z1} + M_{z2} + F_{xa}h\sin(\phi) + M_{za} \\ Q_\phi = -F_{ya}h\cos(\phi) - F_{za}h\sin(\phi) + M_{xa} + M_{xe} \\ Q_\delta = -F_{y1}e\cos(\eta) + M_{z1}\cos(\eta) + M_g \\ Q_{\dot{\delta}} = -c_\delta\dot{\delta} \end{cases} \quad (32)$$

O último passo antes de se obter a equação geral é definir as forças e momentos provocados pelo contato pneu-solo e pelo arrasto aerodinâmico.

Para isso é necessário definir o conceito de ângulo de deslizamento, em inglês *slipe angle*. Ele é definido pelas equações 33, indicando o desvio do deslocamento do ponto de contato pneu-solo em relação a direção que o pneu está direcionado. Este comportamento pode ser melhor visualizado na figura 4, representados por  $\alpha_r$  e  $\alpha_f$ .

O termo  $-e\cos(\eta)\dot{\delta}$  da equação 33 para  $\alpha_1$  é devido ao trail, representando um deslocamento contrário ao sentido de  $\alpha$  do ponto de contato pneu-solo.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arctan\left(\frac{v + \dot{\psi}a - e\cos(\eta)\dot{\delta}}{u}\right) - \delta\cos(\eta) \\ \alpha_2 &= \arctan\left(\frac{v - \dot{\psi}b}{u}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

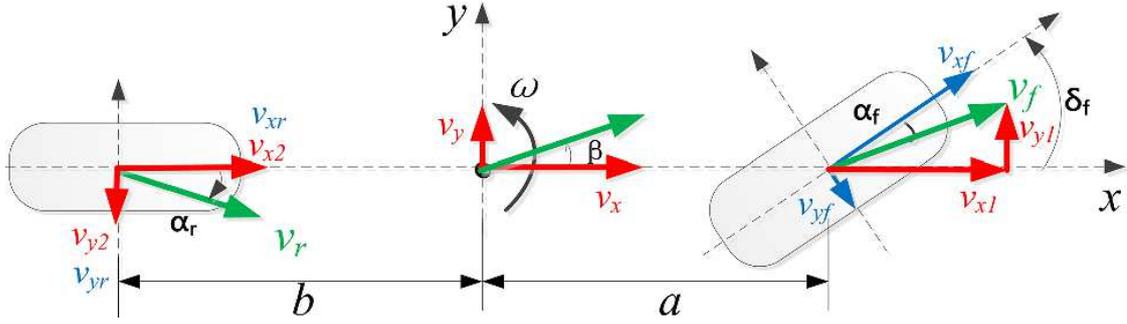


Figura 4: Ângulo de Deslizamento [11]

Da mesma forma, define-se o ângulo de deslizamento ( $\beta$ ) para o centro de massa pela equação 34, representado também na figura 4.

$$\beta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \quad (34)$$

Assumindo pequenos ângulos de deslizamento ( $\beta$  e  $\alpha$ ) é possível linearizar as equações 33 e 34. Como já assumido anteriormente, como a velocidade longitudinal ( $u$ ) é consideravelmente maior que a velocidade lateral ( $v$ ), substitui-se o valor de  $u$  pelo módulo da velocidade do veículo dada por  $V$ .

Após a linearização e as devidas substituições os ângulos de deslizamento são definidos pelas equações 35.

$$(35) \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{v}{V} \\ \alpha_1 &= \beta + \frac{a}{V}\dot{\psi} - \frac{e}{V}\cos(\eta)\dot{\delta} - \delta\cos(\eta) \\ \alpha_2 &= \beta - \frac{b}{V}\dot{\psi} \end{aligned}$$

A partir dos ângulos de deslizamentos  $\alpha_i$  e  $\beta$  é possível determinar as forças e momentos devido ao contato pneu-solo. Modelos semi-empíricos como a fórmula mágica apresentada em [13] por Pacejka descrevem o comportamento desses esforços em função de  $\alpha$ , como apresentado na figura 5. Assumindo pequenos ângulos de deslizamento é possível linearizar o modelo a partir do gradiente da curva em  $\alpha = 0$ . Dessa forma, define-se a força lateral pela equação 36, onde  $C$  é chamado de rigidez lateral do pneu.

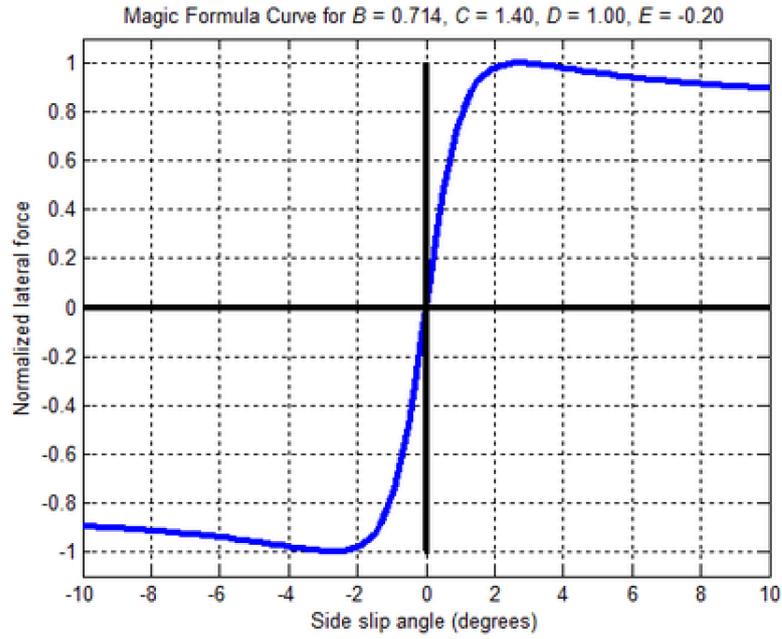


Figura 5: Exemplo de curva dada pela fórmula mágica de Pacejka [13]

$$F_y = C_\alpha \alpha = \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)_\alpha = -C \alpha \quad (36)$$

Assim como o ângulo de deslizamento, o ângulo de rolagem também influencia na força lateral de contato pneu-solo. Linearizando a expressão que o define, pode-se determinar a rigidez à cambagem do pneu ( $F_{y_\gamma}$ ), sendo este também negativo, já que um ângulo de rolagem positivo provoca uma força no sentido negativo do eixo Y. A equação para a força lateral total do pneu é então definida por 37.

$$F_y = -C \alpha + F_{y_\gamma} \phi \quad (37)$$

Devido ao fato da força lateral não se concentrar exatamente no centro da área de contato pneu-solo, ela provoca um momento auto-alinhante, que também depende do ângulo de deslizamento e rolagem. Para pequenos ângulos de  $\alpha$  e  $\phi$  sua expressão é descrita por 38, desprezando-se a dependência por  $\phi$  por ser muito pequena [5].

$$M_z = (M_z)_\alpha \alpha \quad (38)$$

De maneira geral, as forças e momentos aerodinâmicos podem ser definidas pelas equações 39.

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{1}{2} \rho V_r^2 S C_f \\ M_a &= \frac{1}{2} \rho V_r^2 S l C_m \end{aligned} \quad (39)$$

De forma a facilitar a modelagem dessas forças e momentos para pequenos valores de  $\beta$ , os coeficientes de arrasto podem ser descritos como uma função linear dependente de  $\beta$ . Para o cálculo de  $M_{za}$  é utilizado o coeficiente  $C_{(Mz)\beta}$ , para  $M_{xa}$  utiliza-se  $C_{(Ma)\beta}$ , para  $F_{ya}$  utiliza-se  $C_{y\beta}$  e para  $F_{xa}$  e  $F_{za}$  considera-se seus coeficientes como constantes [6].

A partir das definições de forças e momentos descritas neste capítulo e de sua linearização para pequenos ângulos  $\phi$  e  $\delta$ , pode-se escrever as forças generalizadas como funções lineares das coordenadas generalizadas do sistema, descrito pelo sistema 40. Pelo fato das forças generalizadas serem funções das coordenadas generalizadas, percebe-se que para o sistema linearizado, as equações de Q descrevem uma expansão por séries de Taylor truncada no termo linear da expressão não linear de Q, indicando que os termos  $Y_i$ ,  $N_i$ ,  $L_i$  e  $M_i$  são as respectivas derivadas de  $Q_i$  pela coordenada generalizada  $i$  [6].

$$\begin{cases} Q_y = Y_v v + Y_r \dot{\psi} + Y_{\delta} \dot{\delta} + Y_{\phi} \phi + Y_{\delta} \delta \\ Q_{\psi} = N_v v + N_r \dot{\psi} + N_{\delta} \dot{\delta} + N_{\phi} \phi + N_{\delta} \delta \\ Q_{\phi} = L_v v + L_{\phi} \phi + M_{x_e} \\ Q_{\delta} = M_v v + M_r \dot{\psi} + M_{\delta} \dot{\delta} + M_{\phi} \phi + M_{\delta} \delta + M_g \end{cases} \quad (40)$$

- Termos de  $Q_y$

$$\begin{cases} Y_v = -\frac{C_1}{V} - \frac{C_2}{V} + \frac{1}{2} \rho V_r S C_{y\beta} \\ Y_r = -C_1 \frac{a}{V} + C_2 \frac{b}{V} \\ Y_{\phi} = F_{y1\gamma} + F_{y2\gamma} \\ Y_{\delta} = C_1 \cos(\eta) \\ Y_{\dot{\delta}} = C_1 \frac{e}{V} \cos(\eta) \end{cases}$$

- Termos de  $Q_{\psi}$

$$\begin{cases} N_v = -\frac{C_1 a}{V} + \frac{C_2 b}{V} + \frac{M_{z1\alpha}}{V} + \frac{M_{z2\alpha}}{V} + \frac{1}{2} \rho V_r l S C_{Mz\beta} \\ N_r = -C_1 \frac{a^2}{V} - C_2 \frac{b^2}{V} - \frac{M_{z2\alpha} b}{V} + \frac{M_{z1\alpha} a}{V} \\ N_{\phi} = F_{y1\gamma} a - F_{y2\gamma} b + \frac{1}{2} \rho V_r^2 S h C_{xa} \\ N_{\delta} = C_1 a \cos(\eta) - M_{z1\alpha} \cos(\eta) \\ N_{\dot{\delta}} = C_1 a \frac{e}{V} \cos(\eta) - M_{z1\alpha} \frac{e}{V} \cos(\eta) \end{cases}$$

- Termos de  $Q_{\phi}$

$$\begin{cases} L_v = -\frac{1}{2} \rho V_r S h C_{y\beta} + \frac{1}{2} \rho V_r S l C_{Mx\beta} \\ L_{\phi} = -\frac{1}{2} \rho V_r^2 S C_z \end{cases}$$

- Termos de  $Q_\delta$

$$\begin{cases} M_v = \frac{1}{V} \cos(\eta) [C_1 e + M_{z1\alpha}] \\ M_r = \frac{1}{V} \cos(\eta) [C_1 e + M_{z1\alpha}] \\ M_\phi = -e F_{y1\gamma} \cos(\eta) \\ M_\delta = -[C_1 e + M_{z1\alpha} \cos(\eta)] \cos^2(\eta) \\ M_{\dot{\delta}} = -\frac{e}{V} \cos(\eta) [C_1 e + M_{z1\alpha}] \end{cases}$$

## 2.4 Expressão final para o modelo linear da dinâmica lateral

Transformando os sistemas 30 e 40 na sua forma matricial, encontra-se a equação 41.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 & -mh & 0 \\ J_z & J_{xz} & J_{z1} \cos(\eta) + J_{xz1} \sin(\eta) \\ & J_x^* & -J_{z1} \sin(\eta) + J_{xz1} \cos(\eta) \\ sim & & J_{z1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -Y_v & mV - Y_r & 0 & -Y_\delta \\ -N_v & -N_r & N_g & -N_\delta - VS^* \\ -L_v & -mhV - N_g & 0 & -VC^* \\ -M_v & M_r + VS^* & VC^* & -M_\delta + c_\delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Y_\phi & -Y_\delta \\ 0 & 0 & mh\dot{V} + \dot{V} \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \right) - N_\phi & -N_\delta - \dot{V}S^* \\ 0 & 0 & -mgh - L_\phi & -\dot{V}C^* \\ 0 & 0 & -M_\phi & -M_\delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \psi \\ \phi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{xe} \\ M_g \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

onde

$$\begin{aligned} N_g &= V \left( \frac{J_{p1}}{R_{e1}} + \frac{J_{p2}}{R_{e2}} \right) \\ S^* &= \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \sin(\eta) \\ C^* &= \frac{J_{p1}}{R_{e1}} \cos(\eta) \end{aligned}$$

As matrizes que multiplicam os vetores de coordenadas generalizadas recebem nomes especiais, sendo a que multiplica dos termos  $\ddot{q}$  chamada de matriz de inércia  $\mathbf{M}$ , a que multiplica os termos  $\dot{q}$  chamada de matriz de amortecimento  $\mathbf{B}$  e que multiplica os termos  $q$  chamada de matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Essas matrizes configuram a dinâmica lateral do sistema linear de uma motocicleta, sendo importantes para a análise na forma de espaço de estado que será feita no próximo capítulo.

O modelo aqui desenvolvido difere-se do modelo apresentado por [6] em alguns aspectos. Acredita-se que possa ter ocorrido algum problema na edição do livro, de tal forma que a velocidade ( $V$ ), no livro, estava multiplicando  $N_g$  na matriz  $\mathbf{B}$  na posição  $3 \times 2$  no lugar de  $S^*$  na posição  $2 \times 4$ .

Outra inconsistência encontrada na derivação das equações do livro se reflete na não consideração do termo  $\cos(\eta)$  no cálculo de  $\delta u_1$  e  $\alpha_1$ , uma vez que ele considera o mesmo termo para a correção do ângulo do guidão em  $\alpha_1$ . Neste trabalho este termo foi considerado. Em relação ao torque provocado pelas forças viscosas no eixo de direção, este não foi considerado no desenvolvimento do modelo, sendo somente apresentado dentro da matriz de amortecimento  $\mathbf{B}$ , enquanto neste trabalho sua influência foi derivada das equações de trabalho infinitesimal.

Quanto às forças externas consideradas, no livro é excluído o momento externo ao longo do eixo local  $X$ , representado neste modelo por  $M_{xe}$ . Este momento ocorre quando o piloto desloca seu centro de gravidade para a lateral da motocicleta, auxiliando assim no controle da estabilidade da mesma. Há também uma repetição dos termos  $Y_\delta \delta$  e  $N_\delta \delta$  já considerados na matriz  $\mathbf{K}$ . Acredita-se que tenha ocorrido um erro de edição.

Por outro lado, o livro considera forças externas na direção  $Y$  e momentos externos em  $\psi$ . Houve discussões entre o autor deste texto e seu orientador a fim de se determinar quais seriam esses esforços, mas chegou-se a conclusão que eles não existem. No modelo já foram consideradas as forças e momentos de arrasto aerodinâmico, além das forças e momentos de contato pneu-solo e viscosidade da barra de direção, sendo estes os únicos esforços que influenciam na dinâmica do sistema, salvo os momentos do guidão e de deslocamento do centro de gravidade do piloto, que são os parâmetros de controle deste modelo.

### 3 Análise

Para se analisar o modelo quanto a sua estabilidade, controlabilidade, influências de parâmetros e outras propriedades que serão aqui descritas é interessante transformar o modelo em sua configuração de espaço de estado.

Essa configuração facilita a análise de sistemas mais complexos [12], como o caso aqui estudado, onde se encontram múltiplas entradas e múltiplas saídas, além de ser variante no tempo, uma vez que a velocidade é um parâmetro do modelo e ela pode variar ao longo do tempo.

Uma vez que o modelo da motocicleta desenvolvido é de segunda ordem, serão necessárias 8 variáveis de estado para configurar o modelo, sendo essas as mesmas que as coordenadas generalizadas definidas anteriormente, excluindo  $X$  e  $\dot{X}$ , já que o modelo aqui analisado é linear e possui as dinâmicas longitudinal e lateral desacopladas, interligando-se somente pela velocidade longitudinal da motocicleta.

### 3.1 Espaço de Estado

A configuração de espaço de estado é dada segundo o sistema 42, podendo também ser representada segundo o diagrama de blocos da figura 6.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (42)$$

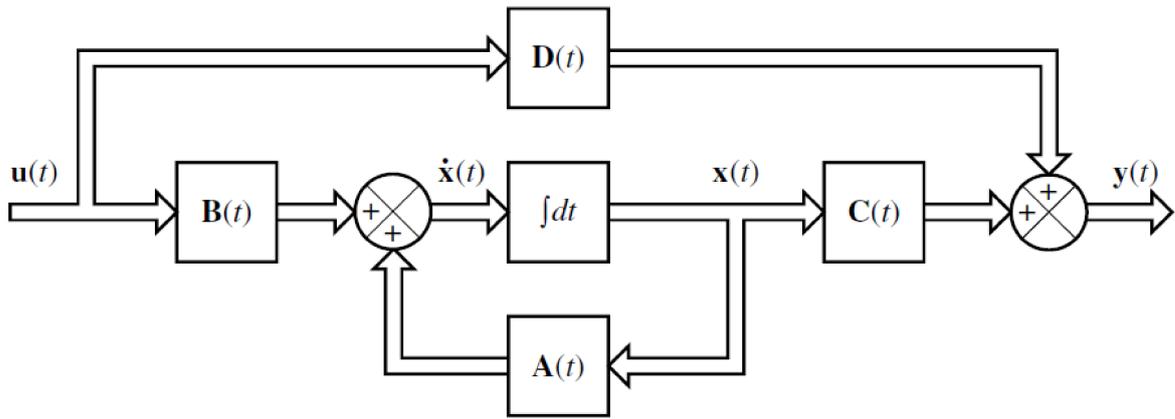


Figura 6: Espaço de Estado [12]

Para transformar o modelo aqui analisado em espaço de estado são necessárias algumas operações matriciais. Para tanto, inicia-se por isolar termo de maior ordem do lado esquerdo da igualdade da equação 41. Multiplica-se ambos os lados da equação por  $\mathbf{M}^{-1}$ , deixando assim somente os parâmetros de segunda ordem do lado esquerdo. Como a configuração de espaço de estado é de primeira ordem, deve-se acrescentar mais termos a expressão de forma a transformar a equação em uma equação diferencial de primeira ordem. Efetuando as devidas alterações, as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , vetor de entradas  $\mathbf{u}$  e das variáveis de estado  $\mathbf{x}$  do espaço de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_{8 \times 8}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}_{8 \times 8}$$

$$\mathbf{x} = [Y \ \psi \ \phi \ \delta \ v \ \dot{\psi} \ \dot{\phi} \ \dot{\delta}]^T$$

$$\mathbf{u} = [M_{xe} \ M_g]^T$$

### 3.2 Parâmetros do Modelo

Os parâmetros utilizados para a análise e simulações do modelo da motocicleta foram retirados do apêndice E.10 da referência [6], representados na tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros

Parâmetro	Valor	Unidade
Massa (conjunto +piloto)	$m = 290$	kg
Altura do centro de massa	$h = 0,4956$	m
Momento de inércia da motocicleta em relação ao ponto H e ao eixo X	$J_x^* = 80$	$kg.m^2$
Produto de inércia em relação ao eixo Y	$J_{xz} = 0$	$kg.m^2$
Momento de inércia da motocicleta em relação ao eixo Z	$J_z = 40$	$kg.m^2$
Momento de inércia do sistema de direção	$J_{z1} = 2$	$kg.m^2$
Produto de inércia do sistema de direção	$J_{xz1} = 1$	$kg.m^2$
Momento de inércia do conjunto pneu-roda dianteiro e traseiro	$J_{p1} = J_{p2} = 0,4$	$kg.m^2$
Raio efetivo do pneu dianteiro e traseiro	$r_1 = r_2 = 0,3$	m
Força normal no pneu dianteiro	$N_1 = 1451$	N
Força normal no pneu traseiro	$N_2 = 1394$	N
Rigidez do pneu dianteiro ao camber	$F_{y1,\phi} = 1,177*1451$	N/rad
Rigidez do pneu traseiro ao camber	$F_{y2,\phi} = 1,367*1394$	N/rad
Coefficiente linear de rigidez do pneu dianteiro	$C_1 = 27,27*1451$	N/rad
Coefficiente linear de rigidez do pneu traseiro	$C_2 = 30*1394$	N/rad
Coefficiente linear de rigidez do momento do pneu traseiro	$M_{Z1} = 0,210*1451$	Nm/rad
Coefficiente linear de rigidez do momento do pneu traseiro	$M_{Z2} = 0,228*1394$	Nm/rad

Parâmetro	Valor	Unidade
Distância do ponto de contato do pneu dianteiro ao CM	$a = 0,624$	m
Distância do ponto de contato do pneu traseiro ao CM	$b = 0,678$	m
Distância entre os ponto de contato dos pneus	$L = 1,32$	m
Área frontal da motocicleta	$S = 1$	$m^2$
Coeficiente de arrasto aerodinâmico em relação ao eixo Y em função de $\beta$	$C_{y\beta} = 0,026$	1/rad
Coeficiente de arrasto aerodinâmico em relação ao eixo X	$C_x = 0,23$	-
Coeficiente de arrasto aerodinâmico em relação ao eixo Z	$C_z = 0,1$	-
Coeficiente de arrasto de momento aerodinâmico em relação ao eixo Z em função de $\beta$	$C_{M_{z\beta}} = 0,065$	1/rad
Coeficiente de arrasto de momento aerodinâmico em relação ao eixo X em função de $\beta$	$C_{M_{x\beta}} = 0,065$	1/rad
Coeficiente de arrasto de momento aerodinâmico em relação ao eixo Y em função de $\beta$	$C_{M_{y\beta}} = 0$	1/rad
Densidade do ar	$\rho = 1,225$	$kg/m^3$
Gravidade	$g = 9,8$	$m/s^2$
Ângulo de caster do eixo de direção	$\eta = 23$	Graus( $^\circ$ )
Trail	$e = 0,1032$	m
Coeficiente linear de amortecimento do eixo de direção	$c_\delta = 8$	$Nms/rad$

### 3.3 Modos de Vibração de uma Motocicleta

A dinâmica lateral de uma motocicleta envolve os 4 graus de liberdade analisados neste trabalho, que juntos fornecem os 3 principais modos de vibração de uma motocicleta: capsiz, weave e wobble.

**Capsiz** consiste no modo não vibratório da motocicleta, o qual é composto principalmente pelo seu movimento lateral e de rolagem. Este modo pode ser descrito basicamente como o movimento de queda da motocicleta quando parada. Entretanto, ele não ocorre somente para esta situação, podendo também ser instável para todo o range de velocidades ou em determinados ranges, a depender das características do veículo. Um ponto positivo deste modo é que ele é facilmente controlado pelo piloto, levando a estabilidade do veículo.

**Weave** pode ser interpretado como o modo de oscilação de toda a motocicleta. Normalmente ele é instável para velocidades até 7 m/s, tornando-se estável e pouco amortecido a medida que a velocidade aumenta a partir de 100 km/h. Para baixas velocidades o modo de weave é constituído por dois modos distintos: body capsizes e steering capsizes. Como descrito anteriormente, o movimento de body capsizes ocorre de forma que a moto pode ser interpretada como um pêndulo invertido, instável pelo seu movimento de rolagem. Já o steering capsizes ocorre devido ao desalinhamento entre a força normal da roda e o centro de massa da porção dianteira da motocicleta, levando ao efeito que pode ser visualizado na figura 7.

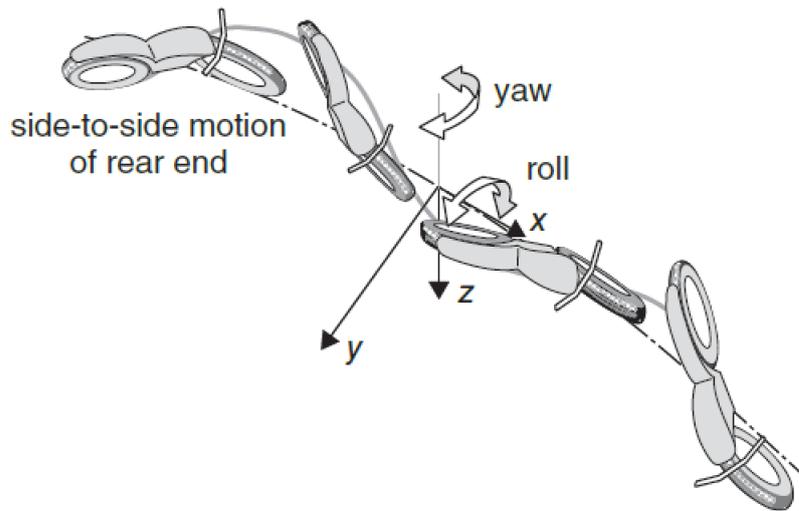


Figura 7: Movimento de Weave de uma motocicleta [14]

**Wobble** é o modo de vibração do eixo de direção. Geralmente ele é perceptível ao piloto ao retirar as mãos do guidão em baixas e médias velocidades, mas pode ocorrer em velocidades mais altas.

No geral, os modos de Wobble e Weave são os mais perigosos, uma vez que os pilotos possuem maior dificuldade em controlá-los. Deve-se, portanto, ao escolher os parâmetros da moto, atentar-se às velocidades onde estes modos ocorrem. Há, entretanto, uma dificuldade na definição de seus valores, uma vez que ao se alterar um dos parâmetros com objetivo de diminuir a instabilidade de um dos modos de vibração, a estabilidade de outro modo é prejudicada [14].

### 3.4 Estabilidade

Analisar a estabilidade de um sistema parte da análise dos autovalores da matriz **A** do espaço de estado. Isso se deve ao fato dos autovalores desta matriz serem os polos da matriz de transferência do modelo de espaço de estado, dada pela matriz **G**, descrita pela equação 43.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \quad (43)$$

Um sistema será estável quando a parte real de seus polos for negativa. Isso se deve ao fato

da parte real dos polos, ao passar o sistema do domínio da frequência para o domínio do tempo, assumir a posição de expoente de uma exponencial. Caso seu valor seja positivo, a exponencial tenderá a infinito, levando a instabilidade do sistema. Por outro lado, sendo um valor negativo, a exponencial tenderá a zero, levando a estabilidade do sistema.

Ademais, sendo o sistema estável, a velocidade de estabilização dependerá do módulo da parte real dos polos. Quanto maior seu valor, mais rapidamente o sistema se estabilizará. Por outro lado, a parte imaginária dos polos indica o grau de oscilação da resposta do sistema em relação ao seu valor estável, a depender do valor de entrada e suas frequências naturais de vibração. Para um sistema de segunda ordem, as diferentes respostas de um sistema para um degrau unitário de entrada pode ser analisada na figura 8.

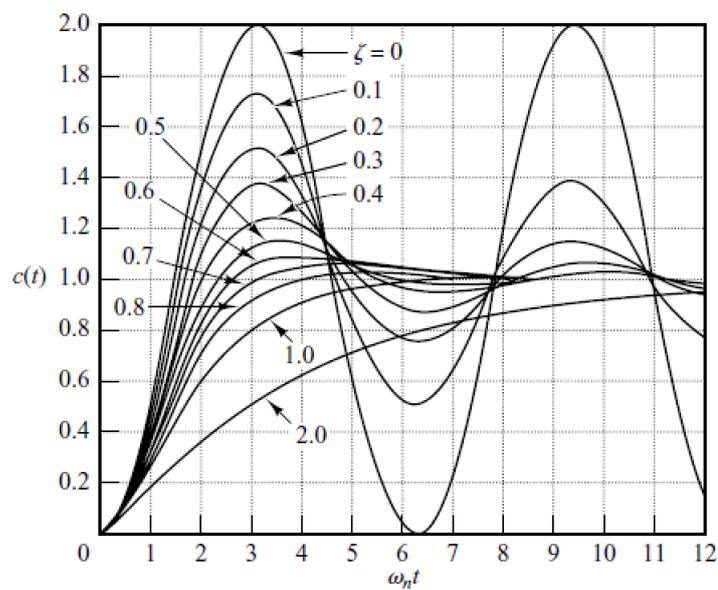


Figura 8: Respostas para um degrau unitário para um sistema de segunda ordem [12]

Tomando o modelo desenvolvido neste trabalho, sabendo que a matriz  $\mathbf{A}$  é dependente da velocidade, plotou-se o gráfico 9 para se analisar a influência desta variável na estabilidade do sistema. Tem-se neste gráfico a parte real e imaginária plotadas separadamente para cada velocidade. O código *Matlab* para a plotagem deste gráfico pode ser encontrado no apêndice A.1.

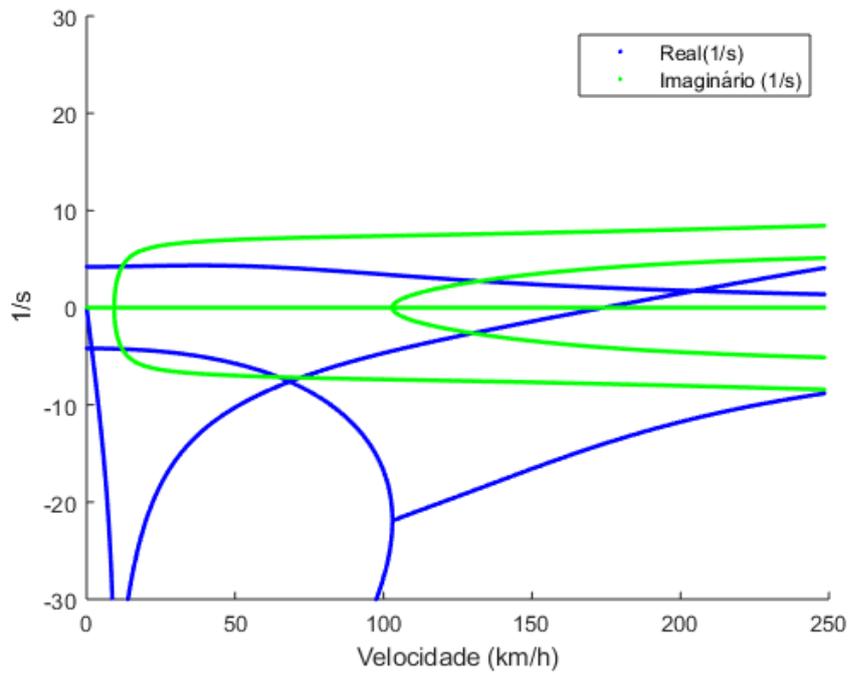


Figura 9: Influência da velocidade na estabilidade do sistema

Tomando-se os valores dos polos obtidos pode-se também plotar o lugar geométrico das raízes para seus diferentes valores em função da velocidade, apresentado na figura 10

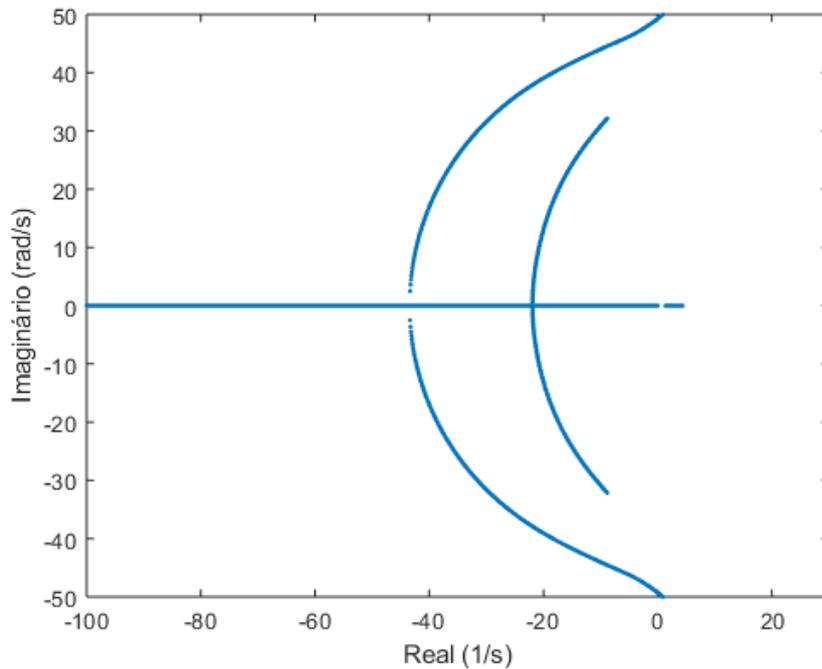


Figura 10: Lugar geométrico das raízes em função da velocidade

Observando o gráfico 9 percebe-se que somente um polo real positivo é encontrado até 174 km/h, havendo depois dois polos reais positivos com o aumento da velocidade. Em 204 km/h

estes dois polos reais assumem o mesmo valor, tornando-se assim maior com o aumento da velocidade o segundo polo real a aparecer em relação ao primeiro.

Ao fazer uma análise mais detalhada, pode-se perceber que o primeiro polo real positivo a aparecer não é complexo conjugado, portanto, não há oscilação associada a seu movimento. Assim, conclui-se que esta instabilidade está ligada ao movimento de Capsize da motocicleta, que é de fato instável em malha aberta.

Quanto ao segundo polo instável a aparecer, ele é um polo complexo conjugado associado aos maiores valores imaginários do gráfico 9. Resta, portanto, saber se estes valores estão relacionados ao movimento de Wobble ou Weave da motocicleta. Para isso, deve-se fazer a análise modal do modelo, uma vez que os autovetores associados aos autovalores complexos conjugados também o são, o que dificulta sua análise.

### 3.5 Análise Modal

O método de análise modal, principalmente pela superposição de modos de vibração, é uma importante ferramenta para avaliação da dinâmica de um sistema. Com ela é possível determinar quais parâmetros do sistema um determinado modo de vibração mais influencia. Trazendo para a análise da motocicleta aqui estudada, com esta análise é possível determinar a quais modos de instabilidade do sistema um determinado polo está associado, facilitando a compreensão do sistema e seu controle.

Tradicionalmente a análise modal pode ser feita pela decomposição modal de uma equação no mesmo formato da equação 41. Entretanto, diferentemente do problema clássico, onde a matriz de amortecimento  $\mathbf{B}$  ou tem baixa influência, ou é inexistente ou tem o formato do problema de Rayleigh, no qual a matriz  $\mathbf{B}$  é uma combinação das matrizes de inércia e rigidez, no problema analisado a matriz de amortecimento possui grande influência. Esse fato leva o sistema a possuir modos de vibração complexos conjugados, o que inviabiliza a decomposição modal pelo método tradicional.

Tradicionalmente a decomposição é feita a partir de uma transformação linear do sistema, impondo que

$$x = T \cdot q$$

onde  $T$  é a matriz cujas colunas são os autovetores normalizados do sistema.

Aplicando esta transformação na equação

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F$$

e fazendo-se algumas operações algébricas obtêm-se

$$T^T M T \ddot{q} + T^T B T \dot{q} + T^T K T q = T^T F$$

Na equação acima, as matrizes  $T^T MT$  e  $T^T KT$  são diagonais, entretanto a matriz  $T^T BT$  somente será diagonal no caso especial onde  $\mathbf{B}$  é uma combinação linear de  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$ . Outra explicação para não ocorrer a diagonalização da matriz  $\mathbf{B}$  é o fato de haver o dobro no número de autovetores e autovalores em relação ao problema clássico, cuja ordem é a mesma do número de coordenadas do sistema. Por este fato, utilizando esta abordagem não será possível decompor o sistema pelos seus modos.

Para que isto seja feito é necessário transformar o sistema de  $n$  sistemas de segunda ordem em  $2n$  sistemas de primeira ordem ao introduzir as velocidades/ derivadas temporais das coordenadas do sistema. Defini-se, então, duas novas matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$ , onde  $m$ ,  $b$  e  $k$  são as antigas matrizes de mesmo nome maiúsculas.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ b & m \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

A nova equação será dada pelo sistema 44, onde  $Y$  é dado por

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$M\dot{Y} + KY = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (44)$$

A solução da equação 44 é encontrada ao substituir  $Y$  por

$$Y = e^{\alpha t} \Phi$$

Substituindo encontra-se

$$\alpha M\Phi + K\Phi = 0$$

Fazendo algumas operações encontra-se a mesma equação no formato

$$D\Phi = \frac{1}{\alpha} \Phi$$

onde  $D$  é dado por

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} & \mathbf{m}^{-1} \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Deste resultado pode-se retirar duas conclusões. A primeira é a prova de que os autovalores e autovetores da matriz  $\mathbf{A}$  do modelo de espaço de estado levam de fato aos modos de vibração do sistema. A segunda é que o inverso dos autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são os expoentes da exponencial da solução  $\mathbf{Y}$ , que são o decaimento exponencial e a frequência de vibração do sistema.

É interessante também notar que os autovetores são da forma

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \alpha_r \phi \end{bmatrix}$$

no qual as amplitudes das velocidades dos parâmetros são os mesmos dos parâmetros multiplicados por  $\alpha$ , o inverso dos autovalores[10].

Como os autovetores são complexos conjugados, é interessante fazer uma análise de sua interpretação física, já que se desvia da interpretação do problema clássico. No problema de decomposição clássico, os autovetores são todos reais, podendo variar somente o sinal de suas componentes. Passando-os para sua forma exponencial, percebe-se que há somente fases de 0 ou 180°, indicando que as diferentes coordenadas do sistema chegam a seus máximos simultaneamente. Já no caso aqui estudado, como os autovetores são complexos conjugados, ao passar para sua forma exponencial percebe-se que suas coordenadas atingem suas máximas amplitudes em diferentes instantes uma vez que suas fases são diferentes umas das outras [1]. A seguir será feita a análise dos autovetores e autovalores da motocicleta a uma velocidade a 180 km/h.

Esta velocidade foi escolhida uma vez que possui 3 autovalores/ autovetores instáveis, 2 complexos conjugados e 1 real. Determina-se então os autovalores e autovetores do modelo para 180 km/h segundo o apêndice A.7. Abaixo serão representados os autovalores e seus respectivos autovetores, tanto na forma complexa conjugada quanto suas magnitudes e fases na sua forma polar.

$$\text{Autovalores} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3310 + 49.5376i \\ 0.3310 - 49.5376i \\ 1.9871 \\ -13.4604 + 26.5218i \\ -13.4604 - 26.5218i \\ -54.5268 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0059 + 0.0003i & \bar{V}_3 & -0.1785 & 0.0134 - 0.0071i & \bar{V}_7 & -0.0096 \\ 0 & 1 & -0.0025 + 0.0041i & \bar{V}_3 & -0.0196 & -0.0081 - 0.0088i & \bar{V}_7 & -0.0010 \\ 0 & 0 & -0.0032 + 0.0052i & \bar{V}_3 & 0.4121 & 0.0109 + 0.0214i & \bar{V}_7 & -0.016 \\ 0 & 0 & 0.0001 - 0.0176i & \bar{V}_3 & -0.0024 & 0.0044 + 0.0126i & \bar{V}_7 & -0.0004 \\ 0 & 0 & -0.0165 - 0.2927i & \bar{V}_3 & -0.3547 & 0.0096 + 0.4508i & \bar{V}_7 & 0.52 \\ 0 & 0 & -0.2063 - 0.1225i & \bar{V}_3 & -0.0390 & 0.3439 - 0.0964i & \bar{V}_7 & 0.053 \\ 0 & 0 & -0.2583 - 0.1589i & \bar{V}_3 & 0.8189 & -0.7139 + 0.0000i & \bar{V}_7 & 0.85 \\ 0 & 0 & 0.8741 + 0.0000i & \bar{V}_3 & -0.0048 & -0.3943 - 0.0536i & \bar{V}_7 & 0.0237 \end{bmatrix}$$

$$Magnitude = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0.0068 & 0.0068 & 0.2180 & 0.0212 & 0.0212 & 0.0112 \\ 0 & 1.0000 & 0.0055 & 0.0055 & 0.0240 & 0.0168 & 0.0168 & 0.0011 \\ 0 & 0 & 0.0070 & 0.0070 & 0.5033 & 0.0336 & 0.0336 & 0.0183 \\ 0 & 0 & 0.0202 & 0.0202 & 0.0030 & 0.0187 & 0.0187 & 0.0005 \\ 0 & 0 & 0.3354 & 0.3354 & 0.4332 & 0.6315 & 0.6315 & 0.6123 \\ 0 & 0 & 0.2745 & 0.2745 & 0.0476 & 0.5002 & 0.5002 & 0.0623 \\ 0 & 0 & 0.3469 & 0.3469 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0.0059 & 0.5573 & 0.5573 & 0.0278 \end{bmatrix}$$

$$Fase = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 177.1601 & -177.1601 & 180.0000 & -28.1272 & 28.1272 & 180.0000 \\ 0 & 0 & 121.0786 & -121.0786 & 180.0000 & -132.5614 & 132.5614 & 180.0000 \\ 0 & 0 & 121.9804 & -121.9804 & 0 & 63.0913 & -63.0913 & 180.0000 \\ 0 & 0 & -89.6172 & 89.6172 & 180.0000 & 70.8356 & -70.8356 & 180.0000 \\ 0 & 0 & -93.2227 & 93.2227 & 180.0000 & 88.7815 & -88.7815 & 0 \\ 0 & 0 & -149.3042 & 149.3042 & 180.0000 & -15.6527 & 15.6527 & 0 \\ 0 & 0 & -148.4024 & 148.4024 & 0 & 180.0000 & 180.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180.0000 & -172.2557 & 172.2557 & 0 \end{bmatrix}$$

Na matriz de autovetores cada coluna representa um autovetor, que está associado a um autovalor cuja posição no vetor de autovalores é o mesmo de sua coluna. Já as matrizes de magnitude e fase tem seus valores correspondendo a cada posição na matriz de autovetores.

Como explicado anteriormente, as fases entre as posições dos autovetores complexos conjugados são distintas umas das outras, o que comprova que cada coordenada atinge sua máxima amplitude em diferentes instantes de tempo em um ciclo. Enquanto isso, para os autovetores reais suas fases são 0 ou 180, atingindo seus máximos no mesmo instantes de tempo, embora invertido.

Em relação às magnitudes, pode-se associar o autovalor complexo conjugado instável à coordenada  $\delta$ , o que indica que este é o modo de Wobble. Isto se deve ao fato da coordenada em questão sofrer a maior influência de uma excitação nas frequências associadas ao 3º e 4º autovalores, dada pela parte imaginária de seu inverso. Verifica-se isto ao observar as 3ªs e 4ªs colunas da matriz de magnitudes.

Já o 5º modo, real e instável, possui maior influência na coordenada  $\dot{\phi}$ , com alguma menor influência também em  $y$ ,  $\phi$  e  $v$ , o que configura o modo de Capsize.

Quanto ao modo complexo conjugado estável sua maior influência é na coordenada  $\dot{\phi}$ , apresentando alguma influência também em  $v$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\phi}$  e  $\delta$ , o que configura o modo de Weave.

Além da decomposição modal complexa, iniciou-se uma análise por meio da transformação da matriz A de espaço de estado em sua forma de estado modal. Esta forma é caracterizada por uma matriz diagonal em blocos, cuja estrutura dos blocos é dada da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

onde  $\sigma$  é a parte real dos autovetores e  $\omega$  é sua parte imaginária.

Pensou-se que, da mesma forma que a matriz de autovetores complexos leva à diagonalização da matriz  $A$  e esta possui um significado como visto anteriormente, seria possível extrair um significado físico da matriz de transformação que leva a matriz  $A$  a sua forma de estado modal. Neste caso, a matriz de transformação para o estado modal seria uma forma modificada da matriz de autovetores, como se fosse sua versão real.

Uma possível solução para descobrir a matriz de transformação que leva a matriz  $A$  para sua forma de estado modal seria utilizar da equação de Lyapunov. Pelo fato do método de determinação desta matriz fugir do escopo deste trabalho, utilizou-se a função *cdf2rdf* do *Matlab*, que retorna a matriz  $A$  na sua forma modal e a matriz de transformação.

Para o mesmo problema analisado pelo outro método, a matriz  $A$  na sua forma modal pode ser expressa por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3310 & 49.5376 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -49.5376 & 0.3310 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9871 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.4604 & 26.5218 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -26.5218 & -13.4604 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -54.5268 \end{bmatrix}$$

com matriz de transformação dada por

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & -0.0059 & 0.0003 & -0.1785 & 0.0134 & -0.0071 & -0.0096 \\ 0 & 1.0000 & -0.0025 & 0.0041 & -0.0196 & -0.0081 & -0.0088 & -0.0010 \\ 0 & 0 & -0.0032 & 0.0052 & 0.4121 & 0.0109 & 0.0214 & -0.0156 \\ 0 & 0 & 0.0001 & -0.0176 & -0.0024 & 0.0044 & 0.0126 & -0.0004 \\ 0 & 0 & -0.0165 & -0.2927 & -0.3547 & 0.0096 & 0.4508 & 0.5212 \\ 0 & 0 & -0.2063 & -0.1225 & -0.0390 & 0.3439 & -0.0964 & 0.0530 \\ 0 & 0 & -0.2583 & -0.1589 & 0.8189 & -0.7139 & 0 & 0.8513 \\ 0 & 0 & 0.8741 & 0 & -0.0048 & -0.3943 & -0.0536 & 0.0237 \end{bmatrix}$$

É possível notar um fato interessante nas colunas da matriz de transformação respectivas aos autovalores complexos conjugados. Uma das colunas respectivas aos autovalores complexos conjugados é formada pela parte real de seu autovetor respectivo, enquanto a outra é formada pela sua parte imaginária. Apesar deste fato, não foi possível determinar alguma explicação física que pudesse associar os modos de vibração às respectivas coordenadas.

### 3.6 Controlabilidade

A teoria de controle por espaço de estado define uma propriedade do sistema chamada controlabilidade. Ela define se é possível por meio de um sinal de controle transferir o sistema de um estado inicial para um final em um espaço finito de tempo. Caso todos os estados sejam controláveis, então o sistema é dito completamente controlável [12].

Esta propriedade é calculada por meio do posto da matriz de controlabilidade. Caso seu posto seja igual a sua ordem ( $p = n$ ) indica que todas as linhas da matriz de controlabilidade são linearmente independentes, o que garante que o sistema seja completamente controlável. Caso seja inferior ( $p < n$ ), indica que há  $p$  variáveis de estado controláveis e  $n-p$  não controláveis, sendo necessária uma arrumação da matriz  $A$  para que o controle seja efetuado. A matriz de controlabilidade é definida como

$$\mathbf{CTRB} = ( \mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} )$$

A importância desta propriedade reside no fato de indicar se é possível estabilizar o sistema por meio de alguma técnica de controle. Para avaliar se o sistema aqui estudado é inteiramente controlável utilizaram-se as funções *ctrb* e *rank* do *Matlab*. Como a matriz  $A$  é dependente da velocidade, avaliou-se se no range de 0 a 250 km/h se o sistema era controlável, como pode ser visto no apêndice A.2.

Inicialmente foi encontrado um resultado pouco intuitivo, indicando que dentro de todo o range de velocidades da motocicleta o sistema não era completamente controlável. Isso ia ao contrário do que se imagina de uma motocicleta, que é um meio de transporte feito para se pilotar, ou seja, controlá-lo. A partir deste resultado iniciou-se então uma investigação para se descobrir se os modos não controláveis eram ao menos estáveis, o que permitiria o controle da motocicleta. Para isso transformou-se o sistema na forma canônica de Kalman, que divide o sistema em subsistemas controláveis e não controláveis nas matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do espaço de estado [2] por meio da função *ctrbf*.

O resultado ao utilizar esta função não foi igual ao esperado, o qual divide a matriz  $A$  em 4 blocos, sendo estes em um formato bem definido. Ao investigar o porquê do resultado não ser como o esperado, chegou-se na função *rank* do *Matlab*. Segundo a documentação do *Matlab*, a função *rank* utiliza um método numérico baseado na decomposição em valores singulares, computando o posto como o número de valores singulares maiores que uma tolerância default dada por

$$Tol = \max(\text{size}(A)) \cdot \text{eps}(\text{norm}(A))$$

Os valores desta tolerância para as matrizes de controlabilidade do problema estudado foi da ordem de  $10^{-2}$ , que é 100x maior que o termo de menor valor na matriz de controlabilidade, dado que esta matriz apresenta uma grande disparidade de tamanho entre os termos que a compõem, variando de  $10^{-4}$  a  $10^{11}$ . Com isso, o método estava computando como zero uma linha que na realidade apresenta um valor abaixo da tolerância default. Portanto, definiu-se uma nova tolerância ao se calcular o valor do *rank* para  $10^{-6}$ , obtendo-se então o resultado esperado de

controlabilidade do sistema, no qual em todo o range de velocidades o sistema é completamente controlável.

A seguir será apresentada uma proposta de controle por meio do design de servo-sistemas, onde o ângulo de guinada  $\psi$  da motocicleta será a variável de controle.

## 4 Controle

A partir da análise dos autovalores feita para diferentes velocidades percebe-se que o sistema é instável para toda a gama de velocidades, uma vez que apresenta sempre pelo menos um autovalor com parte real positiva. O controle entra justamente com o objetivo de levar os autovalores instáveis de um sistema para o lado negativo do plano S, de forma a estabilizá-lo.

A técnica de controle utilizada neste trabalho tem como objetivo fazer o controle de trajetórias da motocicleta, de forma que a partir de um input do percurso a ser percorrido pela motocicleta, os respectivos torques no guidão e eixo possam ser ajustados automaticamente. Serão feitas simulações para duas manobras distintas, uma de desvio de um obstáculo e outra de um teste de Slalom, analisando para o último caso a resposta em frequência do sistema com controle.

A figura 13 ilustra a malha de controle construída no *Simulink* para ser feita a simulação do controle por meio da técnica de controle de trajetória para um percurso especificado.

### 4.1 Determinação das matrizes $K_d$ e $K$

O processo de determinação das matrizes de controle inicia-se pela escolha dos autovalores que a malha de controle levará o sistema a ter. Este processo é arbitrário e somente será possível caso o sistema seja inteiramente controlável, sendo então possível alocar os autovalores a quaisquer posições no plano-S. Entretanto, deve-se levar em conta sempre os limites físicos do problema, uma vez que autovalores de módulo muito grande levam o sistema a ter uma matriz  $K$  com coeficientes muito grandes, inviabilizando o controle, uma vez que não existem atuadores capazes de responder com tamanho torque e velocidade. Caso sejam encontrados valores que inviabilizam o controle, os autovalores devem ser reestabelecidos, geralmente para valores de menor módulo, tornando assim o sistema mais lento e viabilizando um controle real do sistema.

A partir do sistema 42 de espaço de estado e tomando-se como base o bloco azul (2) do diagrama definido em 13 pode-se definir as entradas como

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{K}_d\varepsilon_d$$

onde  $\varepsilon_d$  é o erro entre o valor de entrada desejado e o valor real da coordenada controlada.

Substituindo o novo  $\mathbf{U}$  na equação 42 e depois de algum algebrismo obtêm-se a equação 45. Define-se  $K' = K + K_d C$  e  $B' = B K_d$

$$\dot{\mathbf{X}} = (A - B(K + K_d C))\mathbf{X} + BK_d \mathbf{Y}_d \quad (45)$$

Para o ajuste das matrizes de ganho fez-se o seguinte procedimento:

1. Determina-se  $K'$  pelo método de alocação de polos descrito em [12] pela função *place* do *Matlab*. Essa função recebe como input as matrizes  $A$  e  $B$  do espaço de estado e os polos aos quais deseja-se que sistema tenha, retornando a matriz de ganhos  $K'$ .
2. Considerando  $Y_d = Y_0 = cte$ , as derivadas serão nulas, logo ter-se-á o novo sistema 46

$$\mathbf{X}_\infty = -(A - BK')^{-1}B'\mathbf{Y}_0 \quad (46)$$

$$Y_\infty = -C(A - BK')^{-1}B'\mathbf{Y}_0$$

Como  $\varepsilon_\infty = 0$ , tem-se

$$-C(A - BK')^{-1}B' = -C(A - BK')^{-1}BK_d = I \quad (47)$$

3. A partir da equação 47 pode-se determinar o valor de  $K_d$  por

$$K_d = -(C(A - BK')^{-1}B)^{-1}$$

Como a matriz  $C(A - BK')^{-1}B$  pode não ser quadrada, sua inversa deverá ser calculada pela sua pseudo-inversa.

4. Para determinar  $K$  basta fazer  $K = K' - K_d C$

Utilizando este procedimento para o modelo da motocicleta desenvolvido neste trabalho para uma velocidade de 180 km/h, que possui 3 modos instáveis, 2 complexos conjugados e 1 real, decidiu-se inicialmente alocar os novos polos nas seguintes coordenadas  $[-1 - 1.2 - 1.3 - 1.4 - 1.5 - 1.6 - 1.7 - 1.8]$ . Tomando como entrada do sistema ( $Y_d$ ) o ângulo de guinada ( $\psi$ ), as matrizes  $K$  e  $K_d$  encontradas foram

$$K_d = \begin{bmatrix} 0.0019 \\ -0.0116 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2.86 & 1.13 & -559.45 & 21158.97 & -5325.17 & -85.55 & 7.61 & 220.03 \\ 0.48 & -0.19 & -16.07 & -19689.78 & 83.0745 & 2668.17 & 5.80 & -109.87 \end{bmatrix}$$

## 4.2 Robustez do controle

Os resultados de  $K$  obtidos na seção anterior foram calculados para 180 km/h, de forma a estabilizar o sistema por meio da alocação de autovalores. De forma a saber se é possível estabilizar o sistema para outras velocidades com as mesmas matrizes  $K$ , foi feita uma análise da robustez desta metodologia de controle.

Foi desenvolvido então um programa em *Matlab*, indicado no apêndice A.3, de forma a plotar os diferentes autovalores calculados para diferentes velocidades utilizando a mesma matriz  $K$  calculada anteriormente. Seu resultado é indicado na figura 11.

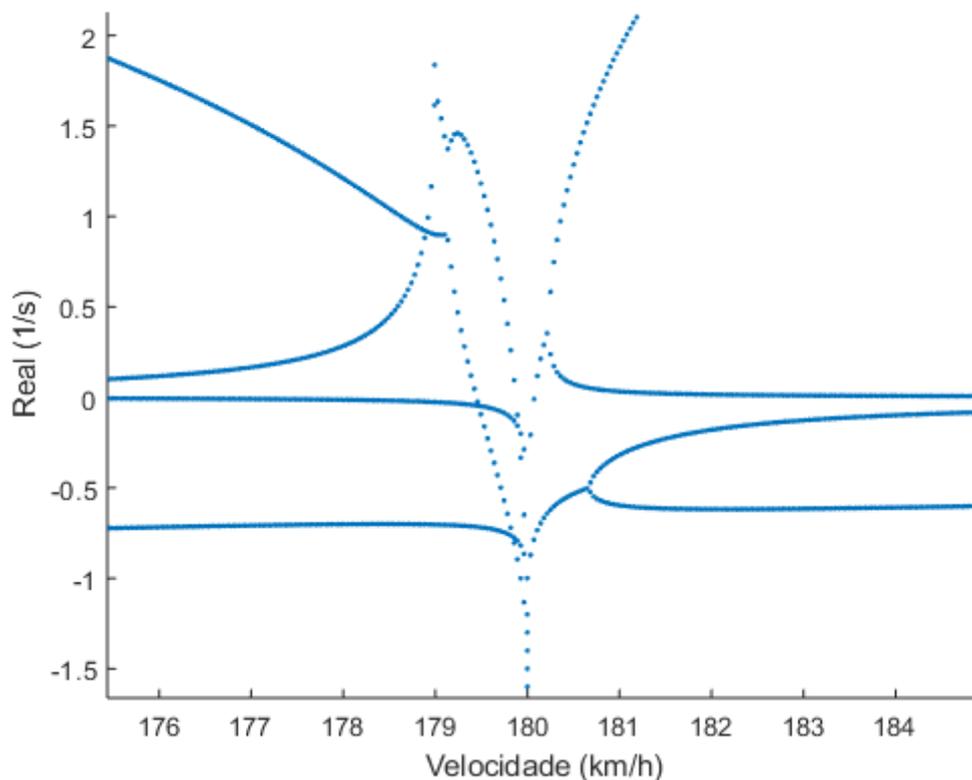


Figura 11: Robustez do controle

Pode-se observar que o sistema é somente estável para 180 km/h, já que para quaisquer outras velocidades há algum autovalor com parte real positiva.

Tentou-se também setar autovalores mais rápidos, de forma a se alterar as matrizes  $K$  e observar se essa mudança levaria à estabilidade para outras velocidades. Os autovalores escolhidos foram 20 vezes maiores que os testados anteriormente. A figura 12 apresenta o resultado obtido.

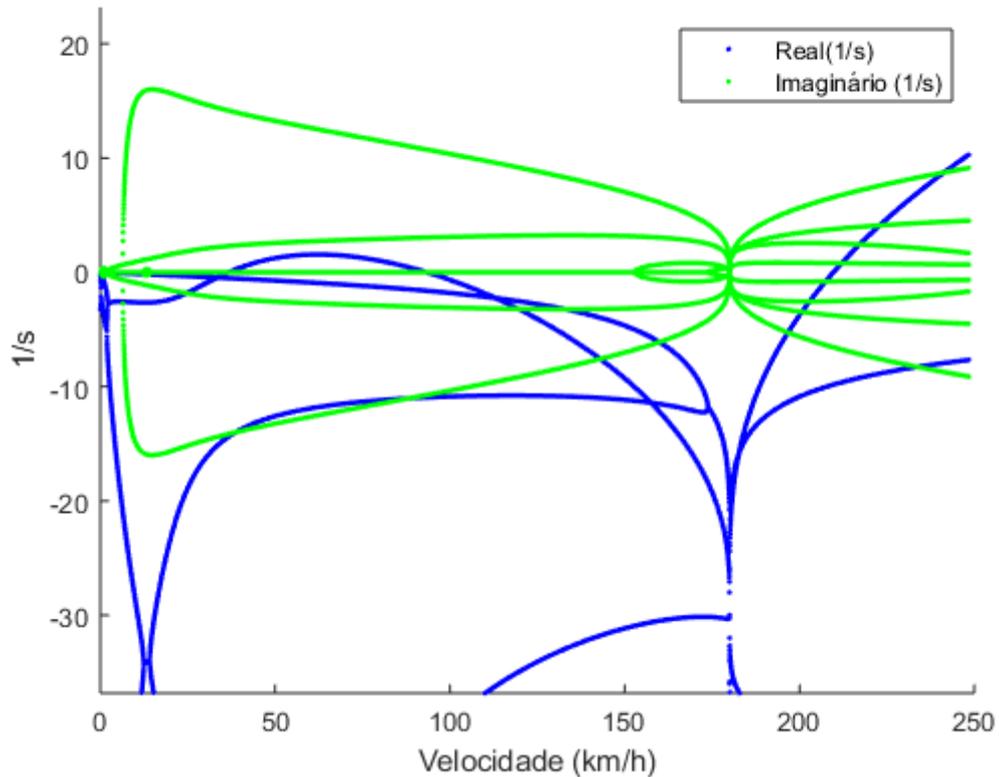


Figura 12: Robustez do controle para uma dinâmica de controle mais rápida

É interessante notar que para uma dinâmica mais rápida as matrizes  $K$  obtidas para a velocidade de 180 km/h são eficazes em estabilizar o sistema para uma gama de velocidades considerável, não servindo para velocidades maiores que 210 km/h e entre 36.5 km/h e 93 km/h. Entretanto, os autovalores obtidos para as outras velocidades são distintos daqueles estipulados para 180 km/h, devendo atentar-se se o comportamento do sistema para os diferentes polos, inclusive complexos conjugados, como pode-se observar na figura 12.

Entende-se, portanto, que quanto mais rápida a dinâmica desejada para o sistema, maior a capacidade dos parâmetros de controle das matrizes  $K$  de estabilizar o sistema para diferentes velocidades. Entretanto, deve-se sempre atentar-se para os limites físicos dos atuadores que desempenharão de fato o controle sobre a motocicleta, devendo ser feita uma análise minuciosa entre os valores encontrados na teoria e sua utilização prática. Além disso, deve-se atentar para o comportamento do sistema devido aos diferentes polos assumidos para velocidades distintas.

Uma técnica de controle interessante seria definir matrizes de controle  $K$  calculadas para algumas velocidades em uma dinâmica de caráter médio, utilizando-as em pequenos ranges de velocidade da ordem de  $\pm 10\%$  de cada velocidade, de forma que o sistema se adapte a medida que a velocidade da motocicleta é alterada.

### 4.3 Montagem da Malha de Simulação

Como ilustrado na figura 13, o diagrama de blocos do problema de controle por acompanhamento de trajetória pode ser dividida em três blocos.

O bloco preto (1) determina a entrada no sistema de controle da motocicleta, expresso no bloco azul (2). Inicialmente tentou-se controlar a trajetória por meio da variável  $Y_d$ , que representa a posição  $Y$  global desejada da motocicleta, calculando o erro subtraindo-a da primeira coordenada generalizada  $y$ . Porém, após algumas simulações constatou-se que isto não poderia ser feito, uma vez que  $y$  não representa a posição da motocicleta no eixo  $Y$ , mas é apenas a integral da velocidade lateral da motocicleta, não tendo qualquer significado físico [6].

Portanto, o controle deverá ser feito por meio do ângulo de guinada ( $\psi$ ) da motocicleta, que no diagrama é dado por meio de uma função no bloco 1. Para cada percurso desejado esta função será diferente, porém ela é sempre dada pelo arco tangente da derivada da função que representa a trajetória em relação ao eixo  $x$ , o que representa assim o ângulo de inclinação da curva de trajetória. Como este ângulo deverá ser o mesmo desenvolvido pela motocicleta ao percorrer a trajetória, esta variável poderá ser usada como parâmetro de entrada para o controle de trajetórias.

O bloco 2 representa o sistema em si, tendo em evidência as matrizes de controle  $K_d$  e  $K$ , no bloco chamado de  $K_{cor}$ , e as matrizes do espaço de estado. Pode-se notar no canto superior direito a matriz  $C_{cor}$ , que é dada pelo vetor  $[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ , com o objetivo de se filtrar a coordenada  $\psi$  e utilizá-la no cálculo do erro.

Já o bloco marrom (3) foi construído para que se pudesse analisar a real trajetória percorrida pela motocicleta, tanto pelo método aproximado dado pela linearização do sistema, dado por  $Y_{real1}$ , quanto pela matriz de rotação  $\mathbf{R}_\psi$ , obtendo-se  $Y_{real2}$ .

Como método de solução numérica optou-se pela `ode23`, que utiliza o método de Runge-Kutta de 2<sup>o</sup> e 3<sup>o</sup> ordem, apropriada para solucionar equações diferenciais pouco ou não rígidas (do inglês *Stiff*).

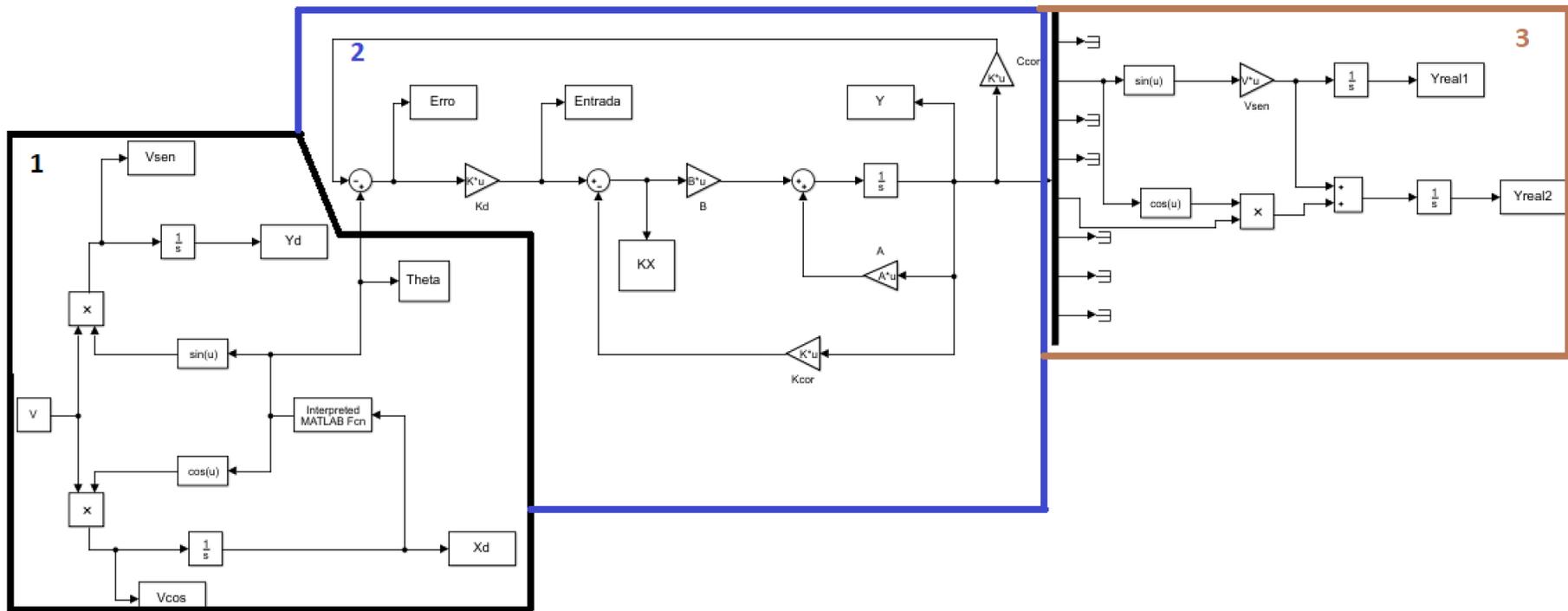


Figura 13: Malha de Simulação

## 4.4 Simulação Desvio

Uma situação bem corriqueira ao se pilotar uma moto é o desvio de obstáculos, principalmente no caso para se evitar um acidente. Por este fato elencou-se esta manobra para que a simulação fosse feita. Para a simulação foi considerada uma manobra que tivesse a trajetória ilustrada na figura 14, a uma velocidade de 50 km/h. Seu formato não contínuo foi escolhido propositalmente para se verificar o comportamento do controle.

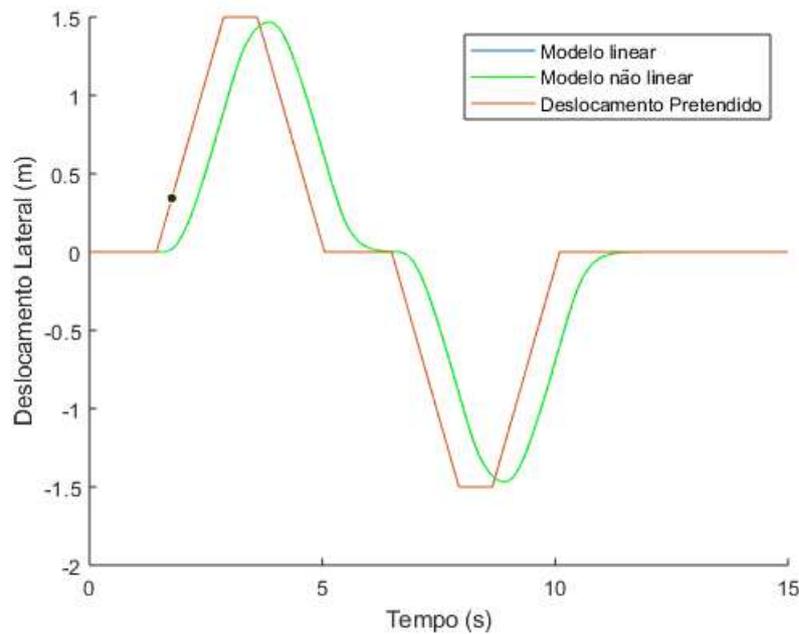


Figura 14: Trajetória pretendida para o desvio

Os torques desempenhados pelos atuadores estão indicados na figura 15. É interessante notar que o formato das curvas de torque são as mesmas, mudando somente a intensidade e o sinal dos torques. Embora os sinais de ambas sejam trocados, ambos atuam no mesmo sentido, uma vez que o torque do guidão é positivo quando o guidão é esterçado para a esquerda, porém o torque no eixo será negativo quando o piloto se inclinar para esquerda.

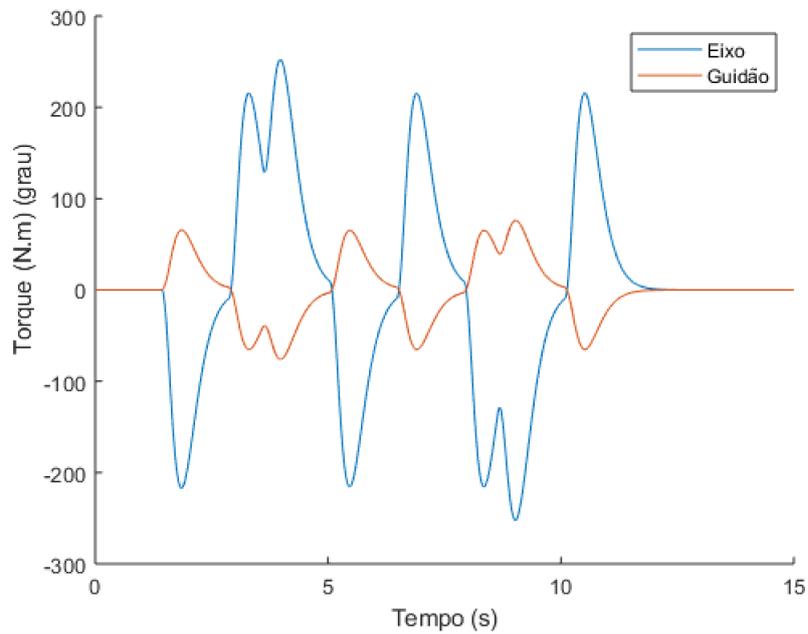


Figura 15: Torques no eixo e guidão

Os polos utilizados para esta simulação foram 5 vezes maiores que os utilizados na seção de determinação das matrizes  $K_d$  e  $\mathbf{K}$ , levando portanto a uma dinâmica mais rápida. Apesar deste fato, pode-se perceber pela resposta no tempo do deslocamento executado pela motocicleta que a resposta do sistema ainda não foi rápida o suficiente para acompanhar a trajetória corretamente. Houve uma defasagem da resposta, o que em uma situação de risco poderia causar um acidente, caso esta manobra fosse realizada para desviar de uma batida, por exemplo. Para corrigir isto basta aumentar os módulos dos polos alocados do sistema, checando se os limites do controlador não foram ultrapassados. Fazendo uma simulação para para polos 10 vezes maiores obteve-se o gráfico 16.

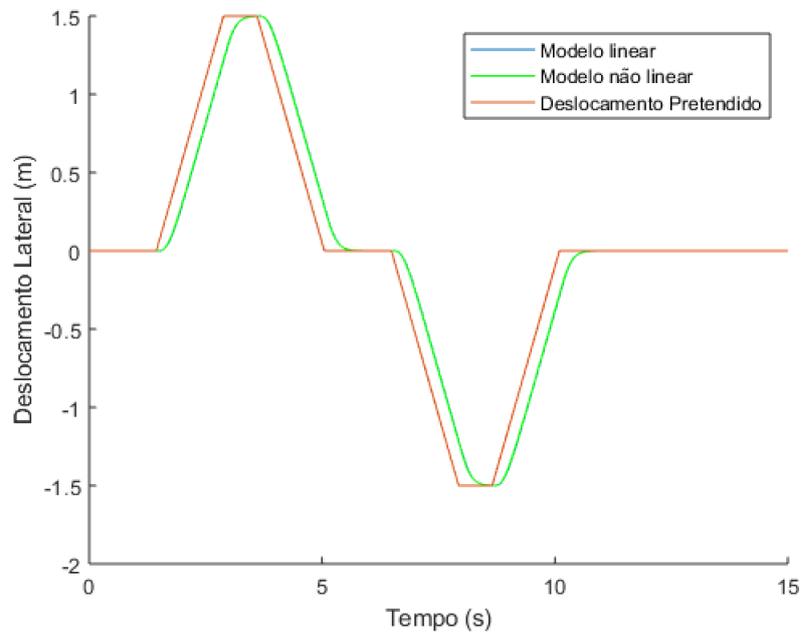


Figura 16: Trajetória pretendida para o desvio para um controle mais rápido

Pode-se observar que a defasagem foi diminuída consideravelmente. Por outro lado, o torque dos atuadores aumentou, como pode ser observado na figura 17.

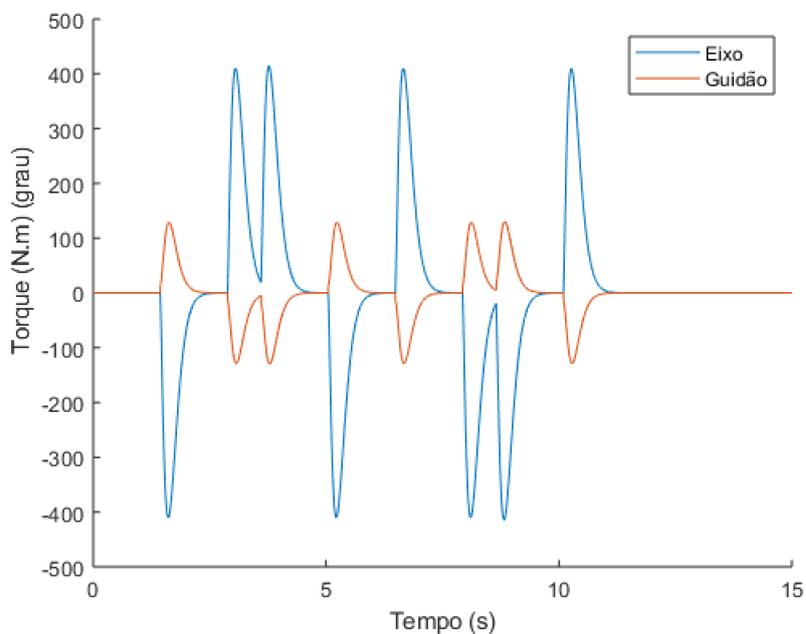


Figura 17: Torques no eixo e guidão

Para o acompanhamento da trajetória foi definida uma função no *Matlab* que, atrelada ao *Simulink* no bloco 1 do diagrama, fornece o valor pretendido do ângulo de guinada  $\psi$ . Sua definição pode ser observada no apêndice A.6, tendo como input a coordenada X global desejada para a motocicleta.

A seguir serão plotados os gráficos das coordenadas da motocicleta para a manobra analisada para o caso da dinâmica de controle mais rápida.

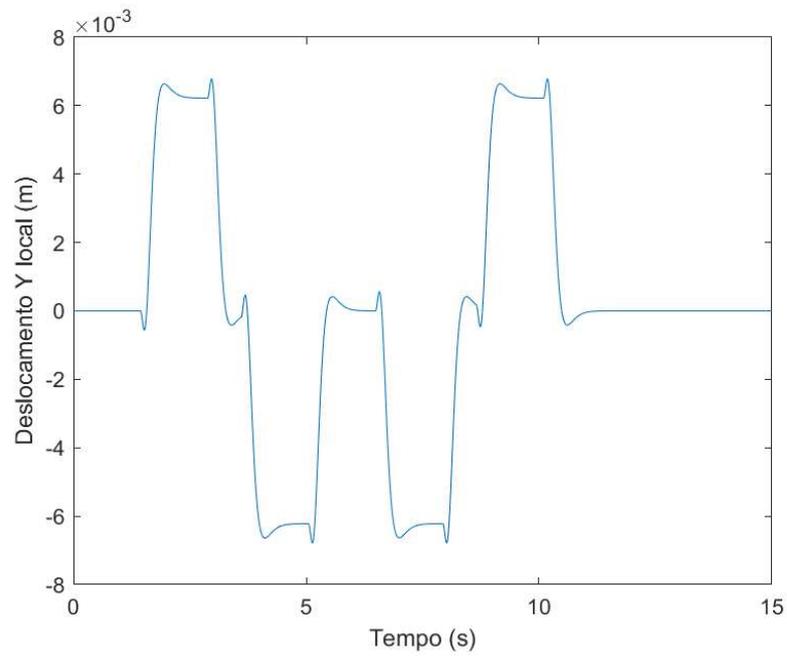


Figura 18: Y local x tempo

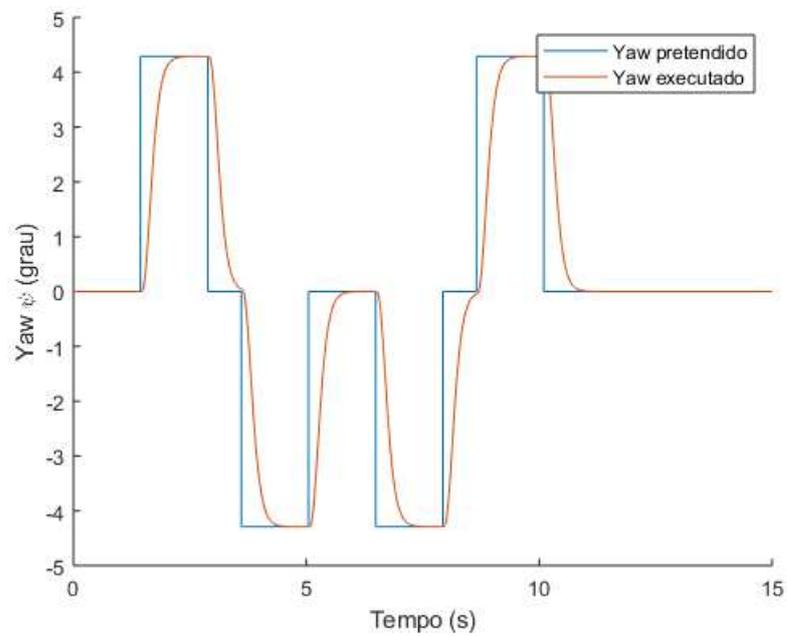


Figura 19:  $\psi$  x tempo

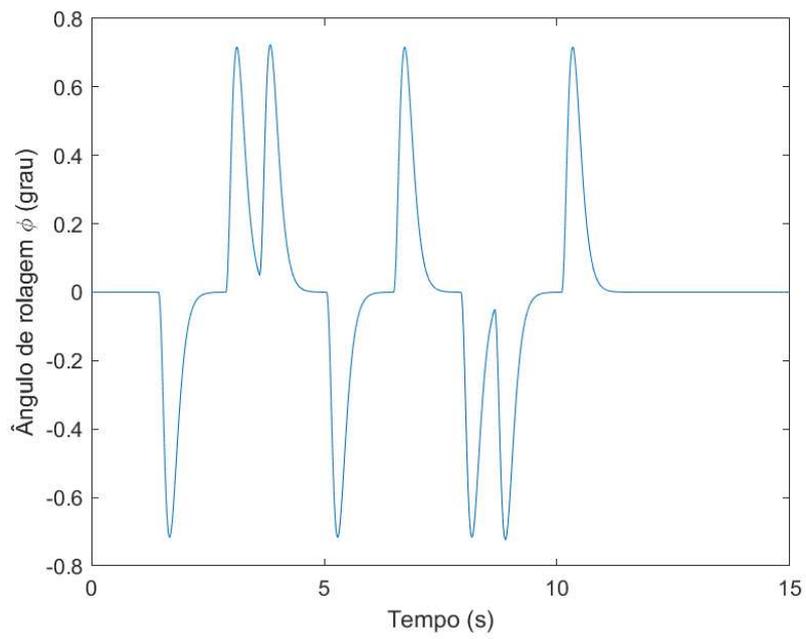


Figura 20:  $\phi$  x tempo

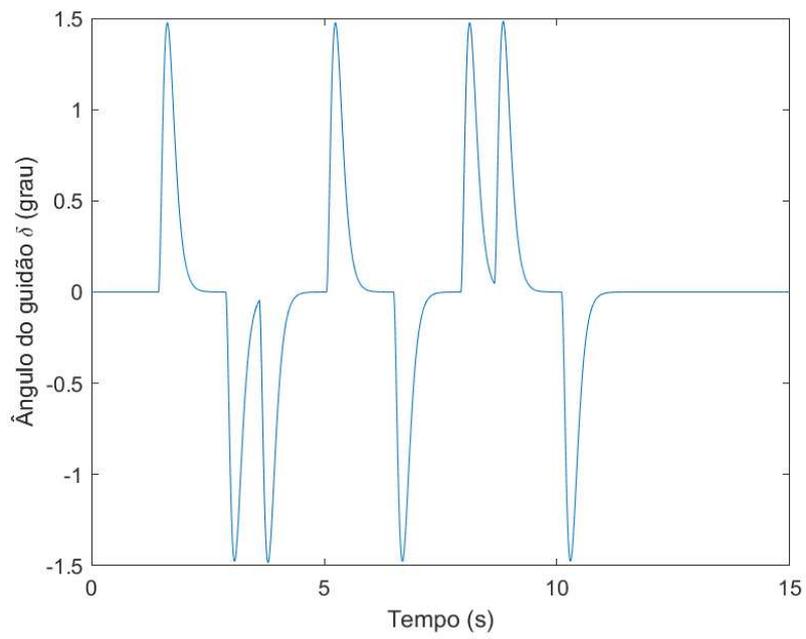


Figura 21:  $\delta$  x tempo

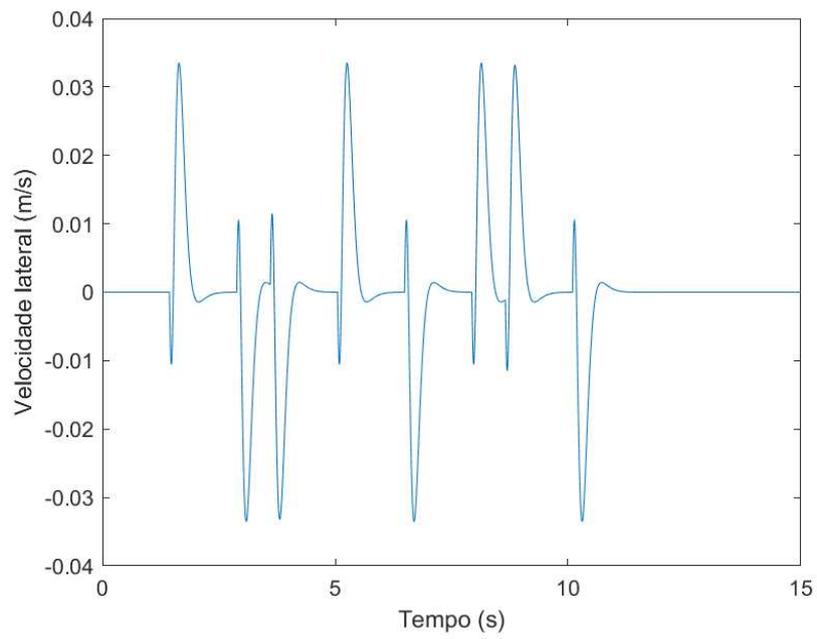


Figura 22: Velocidade lateral x tempo

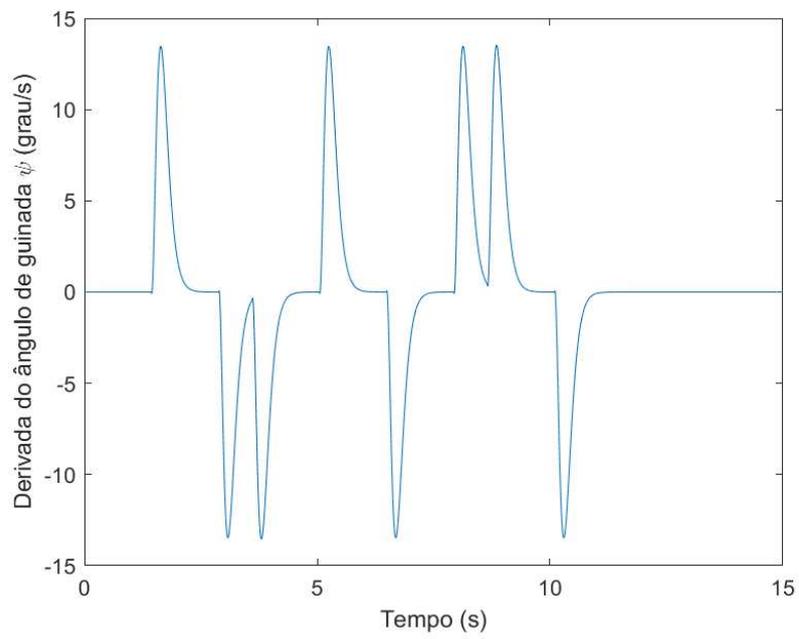


Figura 23:  $\dot{\psi}$  x tempo

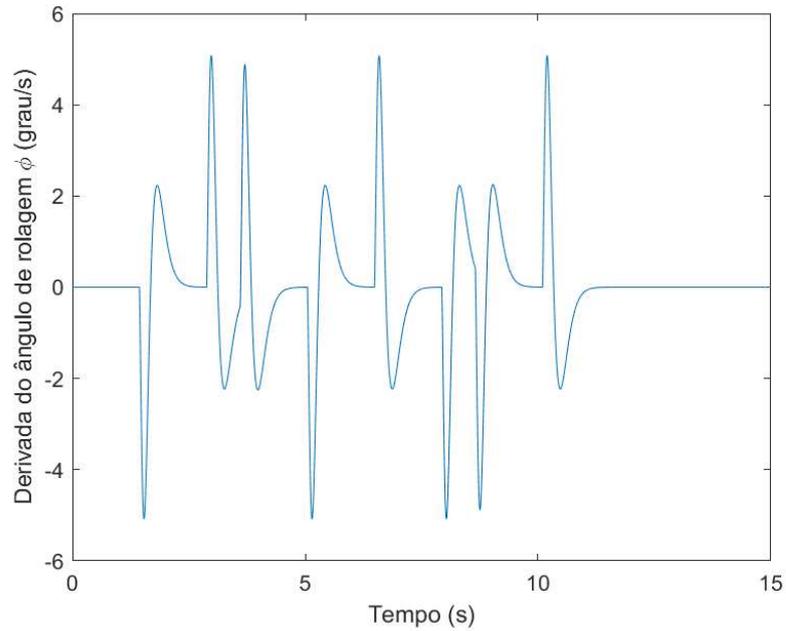


Figura 24:  $\dot{\psi}$  x tempo

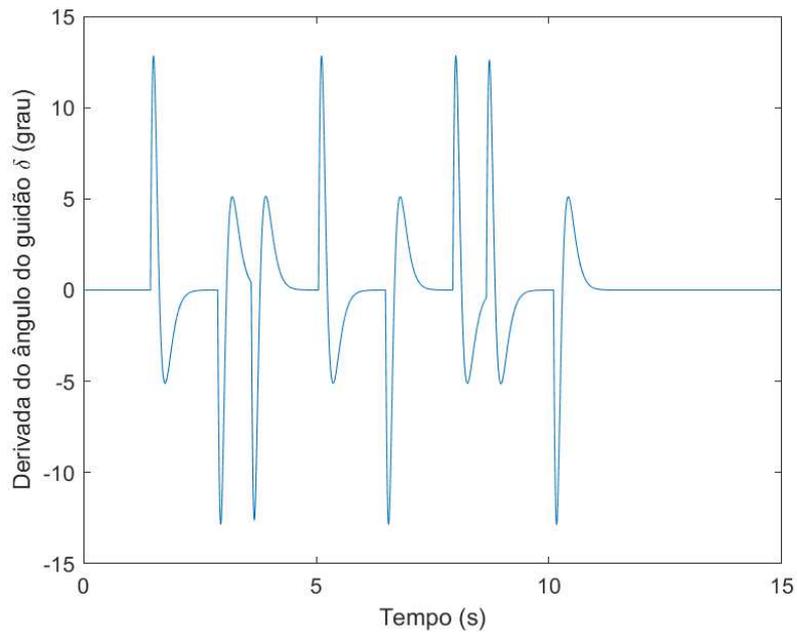


Figura 25:  $\dot{\delta}$  x tempo

É interessante comentar que da mesma forma que há uma defasagem no deslocamento, há também no ângulo de guinada. Na verdade, é esta defasagem no ângulo de guinada, que é o parâmetro de controle, que leva a defasagem na trajetória. Outro ponto a se notar é o formato das curvas de ângulo de rolagem (20) e ângulo do guidão (21), que seguem o mesmo formato das curvas de torque.

Interpretando a simulação fisicamente, quando se quer ir para a esquerda inclina-se o corpo

inicialmente para a esquerda e gira-se o guidão neste sentido. Este comportamento pode ser visto também nos gráficos 20 e 21. Em relação aos valores obtidos para os ângulos de guinada e do guidão, os mesmos permanecem dentro dos limites de linearidade dado pela linearização do modelo, com valores de até  $0,8^\circ$  para rolagem e  $1,5^\circ$  para o guidão.

## 4.5 Simulação Slalom

Outro tipo de teste realizado em motocicletas é denominado Slalom. Com este teste tem-se o objetivo de se medir a resposta em frequência da motocicleta a partir de uma entrada periódica no sistema de direção. Como será observado, dois fenômenos diferentes poderão ocorrer com a resposta do sistema, sendo eles a diferença de amplitude e de fase em relação a entrada.

O sistema utilizado para a simulação é o mesmo do teste anterior, sendo necessário somente alterar o percurso desejado pela motocicleta definido pela sua inclinação com relação ao eixo horizontal. Para isso deve ser definida a função que descreve este percurso. Foi considerada uma função seno dependente da posição no eixo horizontal, com comprimento de onda  $\lambda = 28$  m e amplitude com mesmo comprimento da motocicleta, indicando uma distância de 14 m entre os cones, conforme ilustrado na figura 26. Como a entrada do sistema é o ângulo de guinada da motocicleta, deve-se encontrar a inclinação da curva que indica a trajetória a ser percorrida, dada pela equação disposta na função  $teta\_x\_sin$  do apêndice A.5.

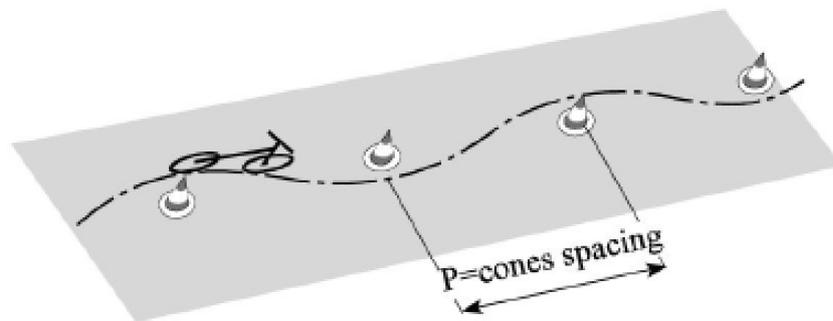


Figura 26: Disposição dos cones em pista para o teste de Slalom [3]

A simulação foi feita para uma velocidade de 30 km/h, alocando-se os polos em valores 3 vezes maiores que aqueles apresentados na seção 4.1. Os resultados obtidos na simulação estão expostos entre as figuras 27 a 36

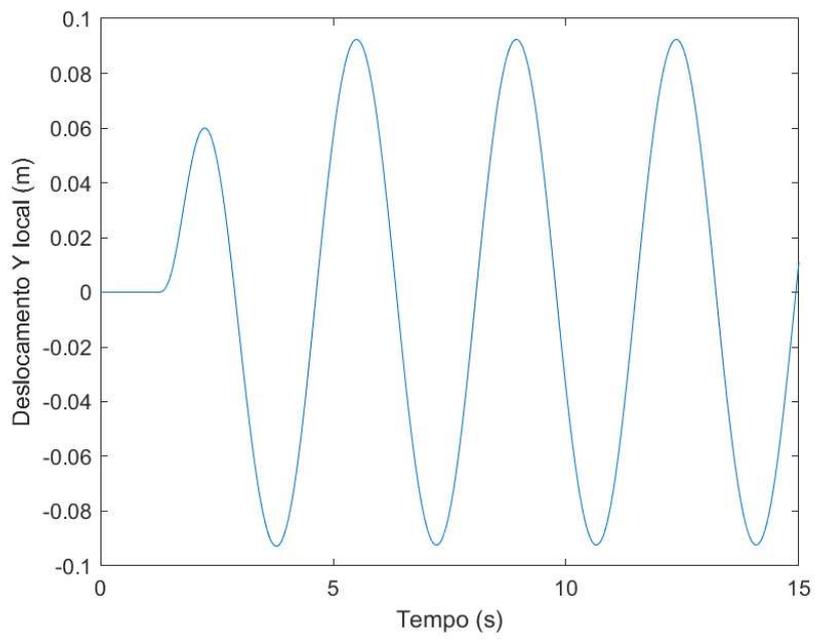


Figura 27: Y local x tempo

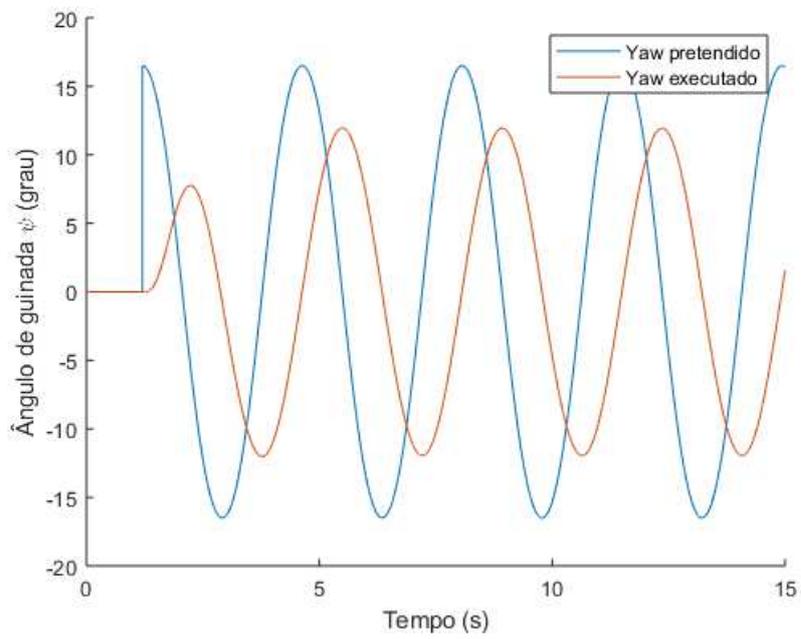


Figura 28:  $\psi$  x tempo

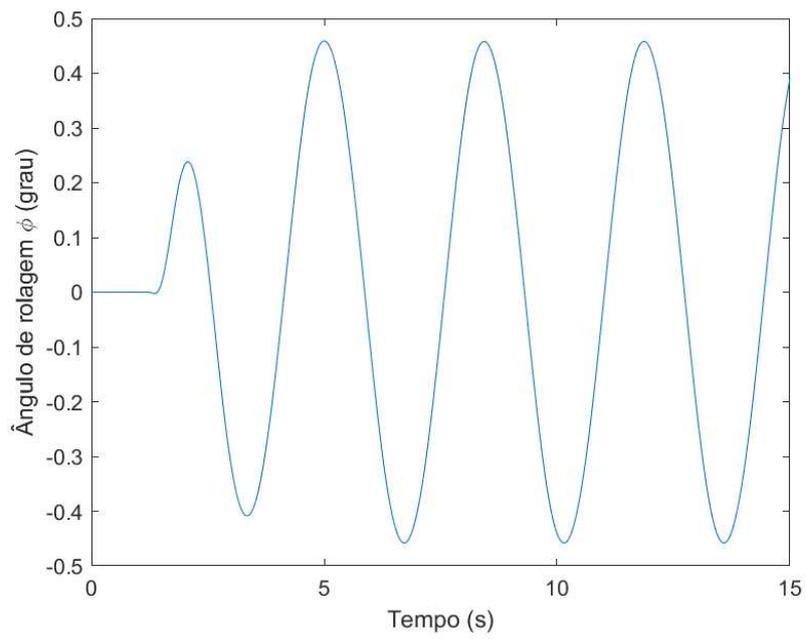


Figura 29:  $\phi$  x tempo

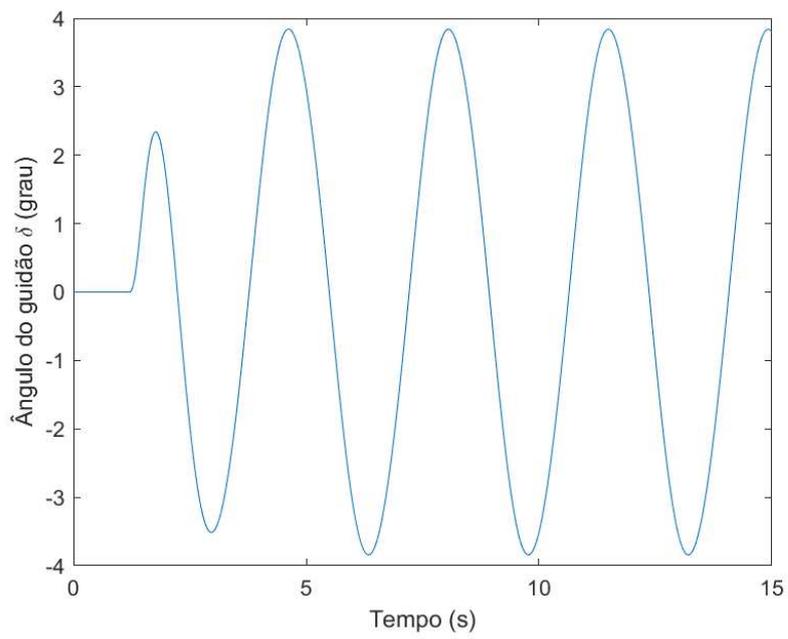


Figura 30:  $\delta$  x tempo

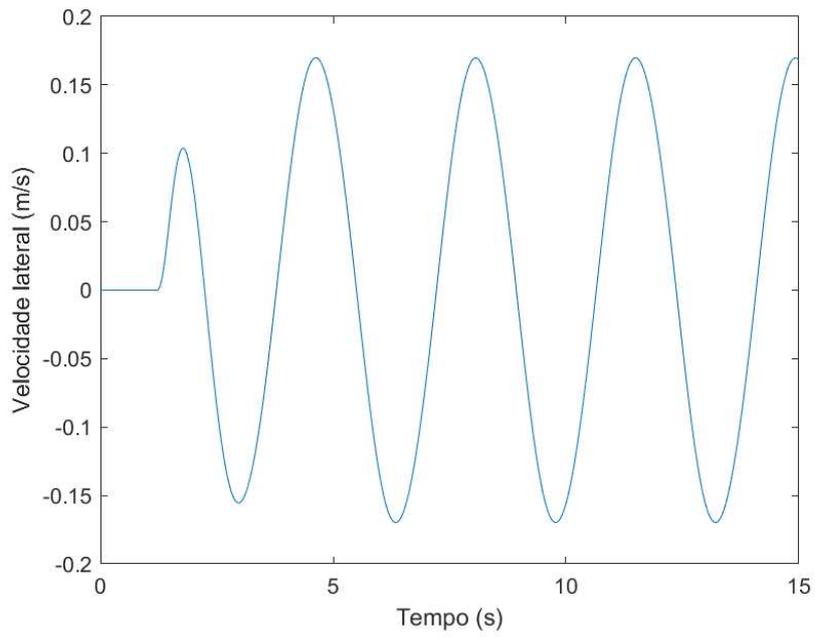


Figura 31: Velocidade lateral x tempo

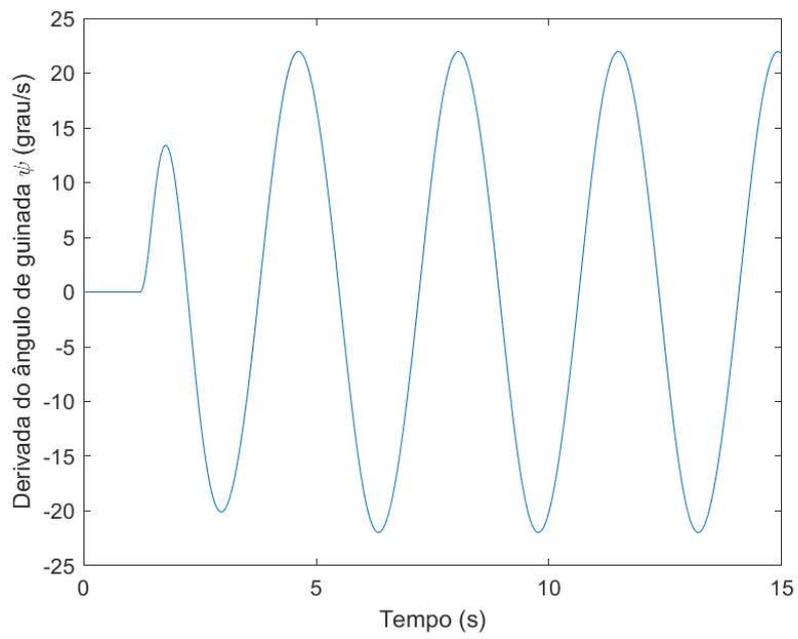


Figura 32:  $\dot{\phi}$  x tempo

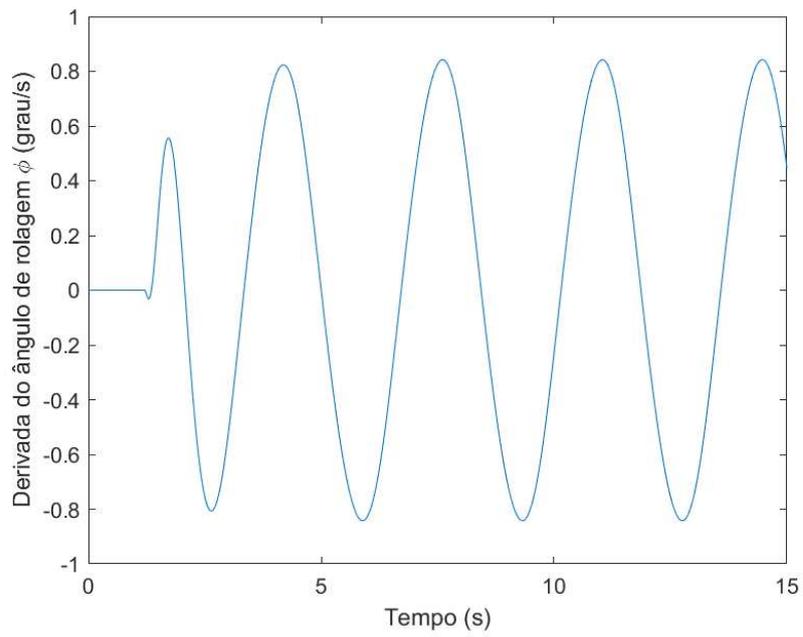


Figura 33:  $\dot{\psi}$  x tempo

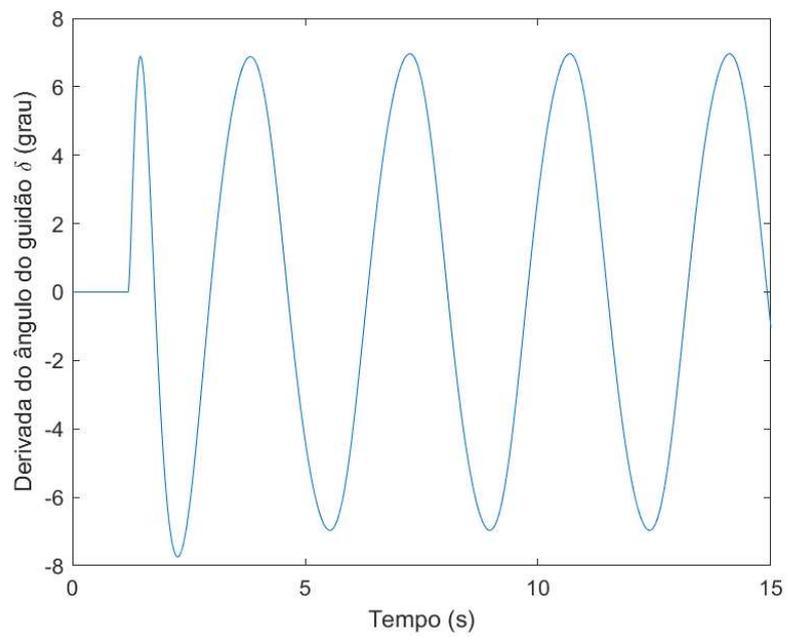


Figura 34:  $\dot{\delta}$  x tempo

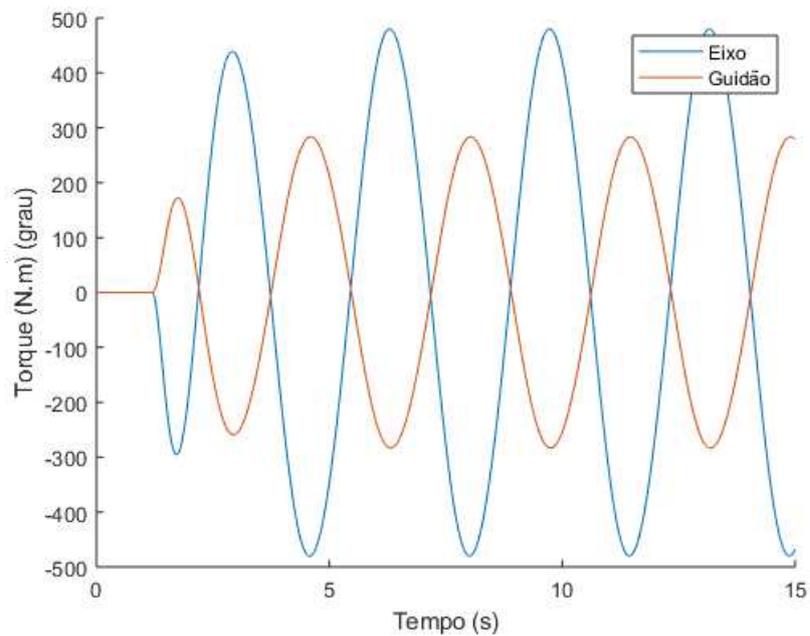


Figura 35: Torques no eixo e guidão

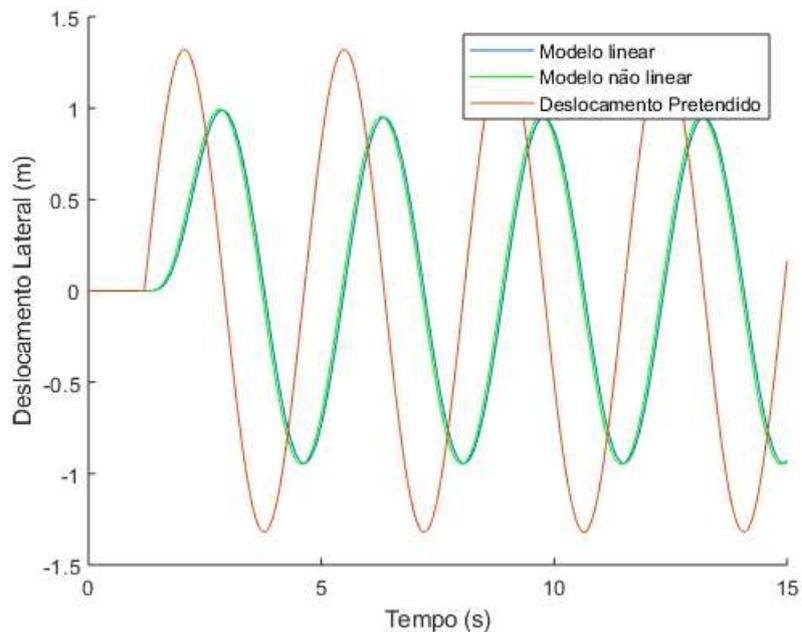


Figura 36: Trajetória

Como pode ser observado nas figuras 28 e 36, há uma diferença de amplitude e de fase entre a trajetória pretendida e a de fato executada no regime permanente. Esse fato pode ser explicado pela teoria de resposta em frequência [9].

A resposta de um sistema a uma entrada senoidal pode ser descrita segundo a equação 48, onde  $G(j\omega)$  e  $\phi$  são, respectivamente, o módulo e o argumento da função de transferência do sistema em sua forma senoidal.

$$Y_{rt} = |G(j\omega)|U_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (48)$$

A função de transferência da malha fechada para o sistema simulado, considerando todas as matrizes K de controle é dada pela equação 49 em sua forma de zero, polos e ganhos. Esta função de transferência possui como entrada o ângulo de guinada ao qual se quer que a motocicleta exerça e como saída o ângulo de guinada efetivo.

$$G(s) = \frac{-0.033477(s - 183.8)(s + 61.35)(s + 5.1)(s + 4.49)(s + 3.91)(s + 3.114)}{(s + 5.4)(s + 5.1)(s + 4.8)(s + 4.5)(s + 4.2)(s + 3.9)(s + 3.6)(s + 3)} \quad (49)$$

Um bom artifício para visualizar a razão de amplitude e a diferença de fase da resposta em frequência é o diagrama de Bode. Nele são plotadas a amplitude em dB e a fase em graus em função da frequência de entrada. O diagrama de bode para este sistema é indicado na figura 37.

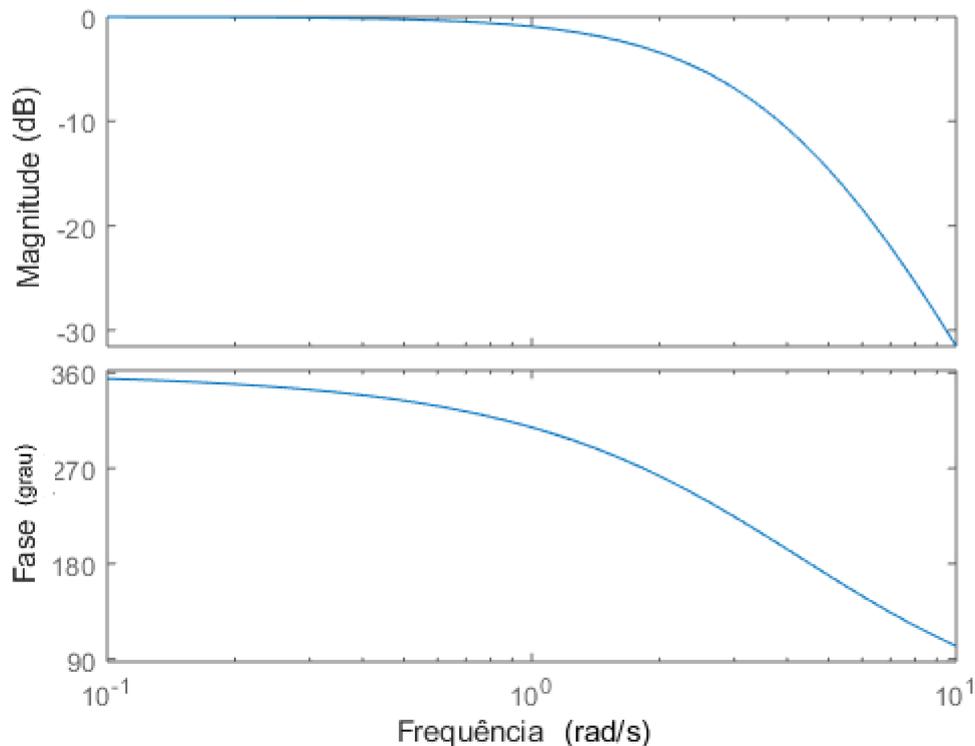


Figura 37: Diagrama de Bode

É importante salientar que a frequência com a qual se definiu a função seno de entrada para esta simulação estava em rad/m, sendo necessário multiplicar pela velocidade longitudinal da motocicleta (V) para se encontrar a frequência em rad/s, a qual poderá ser usada no diagrama de bode para encontrar a razão de amplitude e a diferença de fase.

A frequência de entrada na simulação é de 1,87 rad/s, havendo uma diferença de fase de 0,805 s ( $-86,25^\circ$ ) e razão de amplitudes de 0,72, enquanto que pelo diagrama de bode os valores encontrados foram 268,48° e 0,70, respectivamente. Pode-se perceber que os valores encontrados pelos dois métodos foram muito parecidos para a magnitude. Em um primeiro

momento pode-se estranhar o valor encontrado para a diferença de fase, porém, uma fase de  $268,48^\circ$  é a mesma que  $-91,52^\circ$ , também muito próximo do valor encontrado na simulação.

## 5 Conclusão

Após as análises e simulações feitas do modelo desenvolvido neste trabalho pode-se dizer que ele é confiável dentro de seus limites de linearização, uma vez que os valores obtidos para as coordenadas da motocicleta permaneceram dentro desses limites. As simulações entregaram resultados muito próximos da realidade, tanto das coordenadas da motocicleta quando das forças exercidas pelo controle.

A seguir são propostas algumas melhorias do modelo e sugestões para trabalhos futuros:

- Considerar a dinâmica dos atuadores na simulação, de forma que sejam obtidos resultados ainda mais próximos da realidade. Observando os resultados é possível perceber que há picos nos torques de entrada, o que seria impossível fisicamente.
- Simular o modelo da motocicleta em um modelo de pista real, como Interlagos, por exemplo.
- Simular o modelo com a velocidade variando. Para isso deverão ser definidas diversas matrizes K de controle da mesma forma que foi sugerido na seção 4.2.

## A Apêndice

### A.1 Análise da estabilidade em função da velocidade

```
1 clc;
2 clear all;
3 close all;
4
5 g=9.81;
6 m=290;
7 h=0.4956;
8 Jx=80;
9 Jxz=0;
10 Jz=40;
11 Jz1=2;
12 Jxz1=1;
13 Jp1=0.4;
14 Jp2=0.4;
15 Re1=0.3;
16 Re2=0.3;
17 Fy1g=-1.177*1451;
18 Fy2g=-1.367*1394;
19 C1=27.27*1451;
```

```

20 C2=30*1394;
21 a=.624;
22 b=.678;
23 L=1.32;
24 S=1;
25 Cyb=0.026;
26 Cx=0.23;
27 Cz=0.1;
28 Cmb=0.065;
29 Cmx=Cmb;
30 Cmy=0;
31 Mz1a=0.210*1451;
32 Mz2a=0.228*1394;
33 rho=1.225;
34 eta=23*pi/180;
35 e=(95)*10^(-3)/cos(eta);
36 cΔ=8;
37
38 v0=0.01;
39 j=1;
40 p=1;
41
42 for i=1:0.5:6900
43     V=v0*i;
44     Vr=V;
45
46 Yv=-C1/V-C2/V+1/2*rho*Vr*S*Cyb;
47 Yr=-1/V*(a*C1-b*C2);
48 Yphi=Fy1g + Fy2g;
49 YΔ=C1*cos(eta);
50 YΔp=C1*e/V*cos(eta);
51
52 Nv=1/V*(-a*C1+b*C2+Mz1a+Mz2a+1/2*rho*Vr^2*L*S*Cmb);
53 Nr=1/V*(-a^2*C1-b^2*C2+Mz1a*a-Mz2a*b);
54 Nphi=a*Fy1g-b*Fy2g+1/2*rho*Vr^2*S*h*Cx;
55 NΔ=(C1*a*cos(eta)-Mz1a*cos(eta));
56 NΔp=C1*a*e/V*cos(eta)-Mz1a*e/V*cos(eta);
57
58 Lv=1/2*rho*Vr*S*(L*Cmx-h*Cyb);
59 Lphi=-1/2*rho*Vr^2*S*Cz;
60
61 Mv=1/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
62 Mr=a/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
63 Mphi=-e*Fy1g*cos(eta);
64 MΔ=-(C1*e+Mz1a)*cos(eta)^2;
65 MΔp=-e/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
66
67 Ng=V*(Jp1/Re1 + Jp2/Re2);
68 Ss=Jp1/Re1*sin(eta);
69 Cs=Jp1/Re1*cos(eta);
70
71 M=[m 0 -m*h 0;
72     0 Jz Jxz (Jz1*cos(eta)+Jxz1*sin(eta));
73     -m*h Jxz Jx (-Jz1*sin(eta)+Jxz1*cos(eta));
74     0 (Jz1*cos(eta)+Jxz1*sin(eta)) (-Jz1*sin(eta)+Jxz1*cos(eta)) Jz1 ];
75
76 B=[-Yv (m*V-Yr) 0 -YΔp;
77     -Nv -Nr Ng (-NΔp-V*Ss);

```

```

78     -Lv (-m*h*V-Ng) 0 -V*Cs;
79     -Mv (Mr+V*Ss) V*Cs (-MΔp+cΔ)];
80
81     K=[0 0 -Yphi -YΔ;
82         0 0 -Nphi -NΔ;
83         0 0 (-m*g*h-Lphi) 0
84         0 0 -Mphi -MΔ];
85
86     A=[zeros(4) eye(4);
87         -M^-1*K -M^-1*B];
88
89     Av=eig(A);
90
91     Real=real(Av);
92
93     Imag=imag(Av);
94
95     for k=1:size(Real)
96         R(j)=Real(k);
97         Vel(j)=V;
98         j=j+1;
99     end
100
101     for k=1:size(Imag)
102         I(p)=Imag(k);
103         p=p+1;
104     end
105 end
106
107 figure(1)
108 plot(R,I, '.')
109 axis([-100 30 -50 50])
110 xlabel('Real (1/s)')
111 ylabel('Imaginrio (rad/s)');
112
113 figure(2)
114 scatter(Vel.*3.6,I, '.')
115 xlabel('Velocidade (km/h)')
116 ylabel('Imaginrio (rad/s)');
117
118 figure(3)
119 hold on
120 scatter(Vel.*3.6,R, '.b')
121 scatter(Vel.*3.6,I./(2*pi), '.g')
122 hold off
123 legend('Real(1/s)', 'Imaginrio (1/s)');
124 axis([0 250 -30 30])
125 xlabel('Velocidade (km/h)')
126 ylabel('1/s');

```

## A.2 Controlabilidade do sistema em função da velocidade

```

1 %Defini de parmetros omitida
2

```

```

3  j=1;
4  k=1;
5  VO8(j)=0;
6  VC8(k)=0;
7  for i=0.01:.01:150
8      V=1*i;
9      p=1;
10     Vr=V;
11
12     Yv=-C1/V-C2/V+1/2*rho*Vr*S*Cyb;
13     Yr=-1/V*(a*C1-b*C2);
14     Yphi=Fy1g + Fy2g;
15     YΔ=C1*cos(eta);
16     YΔp=C1*e/V*cos(eta);
17
18     Nv=1/V*(-a*C1+b*C2+Mz1a+Mz2a+1/2*rho*Vr^2*L*S*Cmzb);
19     Nr=1/V*(-a^2*C1-b^2*C2+Mz1a*a-Mz2a*b);
20     Nphi=a*Fy1g-b*Fy2g+1/2*rho*Vr^2*S*h*Cx;
21     NΔ=(C1*a*cos(eta)-Mz1a*cos(eta));
22     NΔp=C1*a*e/V*cos(eta)-Mz1a*e/V*cos(eta);
23
24     Lv=1/2*rho*Vr*S*(L*Cmxb-h*Cyb);
25     Lphi=-1/2*rho*Vr^2*S*Cz;
26
27     Mv=1/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
28     Mr=a/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
29     Mphi=-e*Fy1g*cos(eta);
30     MΔ=-(C1*e+Mz1a)*cos(eta)^2;
31     MΔp=-e/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
32
33     Ng=V*(Jp1/Re1 + Jp2/Re2);
34     Ss=Jp1/Re1*sin(eta);
35     Cs=Jp1/Re1*cos(eta);
36
37     M=[m 0 -m*h 0;
38         0 Jz Jxz (Jz1*cos(eta)+Jxz1*sin(eta));
39         -m*h Jxz Jx (-Jz1*sin(eta)+Jxz1*cos(eta));
40         0 (Jz1*cos(eta)+Jxz1*sin(eta)) (-Jz1*sin(eta)+Jxz1*cos(eta)) ...
          Jz1 ];
41
42     C=[-Yv (m*V-Yr) 0 -YΔp;
43         -Nv -Nr Ng (-NΔp-V*Ss);
44         -Lv (-m*h*V-Ng) 0 -V*Cs;
45         -Mv (Mr+V*Ss) V*Cs (-MΔp+cΔ)];
46
47     K=[0 0 -Yphi -YΔ;
48         0 0 -Nphi -NΔ;
49         0 0 (-m*g*h-Lphi) 0
50         0 0 -Mphi -MΔ];
51
52     A=[zeros(4) eye(4);
53         -M^-1*K -M^-1*C];
54
55     B=[zeros(4,2);M^-1*[0 0; 0 0; 1 0; 0 1]];
56
57     CT= ctrb(A,B);
58
59     OB=obsv(A,eye(8));

```

```
60
61     RO=rank (OB,1e-3);
62
63     RC=rank (CT,1e-6);
64
65     if RC==8
66         VC8 (j)=V;
67         j=j+1;
68     end
69
70     if RO==8
71         VO8 (k)=V;
72         k=k+1;
73     end
74
75 end
```

### A.3 Robustez do controle

```
1 %Definies de parmetros e matrizes K, M e B omitidas
2
3 A=zeros(4) eye(4);
4     -M^-1*K -M^-1*C];
5
6 B=zeros(4,2);M^-1*[0 0; 0 0; 1 0; 0 1]];
7
8 C=eye(8);
9
10 D=zeros(8,2);
11
12 %Aloca de Polos
13 p=10*[-1 -1.2 -1.3 -1.4 -1.5 -1.6 -1.7 -1.8];
14 %p=[-0.1, -0.2, -1+1.4584i, -1-1.4584i, -0.5, -1.5+30.425i, ...
15     -1.5-30.425i, -1];
16 KD=place(A,B,p);
17
18 %Controle
19 Ccor=[0 1 0 0 0 0 0 0];
20 Klinha= KD;
21 Kd= -pinv(Ccor*inv(A-B*Klinha)*B);
22
23 %correcao da matriz
24 Kcor=Klinha-Kd*Ccor;
25
26 v0=0.01;
27 j=1;
28 p=1;
29
30 for i=1:1:6900
31     V=v0*i;
32     Vr=V;
33
34 Yv=-C1/V-C2/V+1/2*rho*Vr*S*Cyb;
35 Yr=-1/V*(a*C1-b*C2);
36 Yphi=Fy1g + Fy2g;
37 YΔ=C1*cos(eta);
38 YΔp=C1*e/V*cos(eta);
39
40 Nv=1/V*(-a*C1+b*C2+Mz1a+Mz2a+1/2*rho*Vr^2*L*S*Cmzb);
41 Nr=1/V*(-a^2*C1-b^2*C2+Mz1a*a-Mz2a*b);
42 Nphi=a*Fy1g-b*Fy2g+1/2*rho*Vr^2*S*h*Cx;
43 NΔ=(C1*a*cos(eta)-Mz1a*cos(eta));
44 NΔp=C1*a*e/V*cos(eta)-Mz1a*e/V*cos(eta);
45
46 Lv=1/2*rho*Vr*S*(L*Cmxb-h*Cyb);
47 Lphi=-1/2*rho*Vr^2*S*Cz;
48
49 Mv=1/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
50 Mr=a/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
51 Mphi=-e*Fy1g*cos(eta);
52 MΔ=-(C1*e+Mz1a)*cos(eta)^2;
53 MΔp=-e/V*cos(eta)*(C1*e+Mz1a);
```

```

54
55 Ng=V*(Jp1/Re1 + Jp2/Re2);
56 Ss=Jp1/Re1*sin(eta);
57 Cs=Jp1/Re1*cos(eta);
58
59 M=[m 0 -m*h 0;
60     0 Jz Jxz (Jz1*cos(eta)+Jxz1*sin(eta));
61     -m*h Jxz Jx (-Jz1*sin(eta)+Jxz1*cos(eta));
62     0 (Jz1*cos(eta)+Jxz1*sin(eta)) (-Jz1*sin(eta)+Jxz1*cos(eta)) Jz1 ];
63
64 C=[-Yv (m*V-Yr) 0 -YΔp;
65     -Nv -Nr Ng (-NΔp-V*Ss);
66     -Lv (-m*h*V-Ng) 0 -V*Cs;
67     -Mv (Mr+V*Ss) V*Cs (-MΔp+cΔ)];
68
69 K=[0 0 -Yphi -YΔ;
70     0 0 -Nphi -NΔ;
71     0 0 (-m*g*h-Lphi) 0
72     0 0 -Mphi -MΔ];
73
74 A=[zeros(4) eye(4);
75     -M^-1*K -M^-1*C];
76
77 B=[zeros(4,2);M^-1*[0 0; 0 0; 1 0; 0 1]];
78
79 C=eye(8);
80
81 D=zeros(8,2);
82
83 Aest= A-B*(Kcor + Kd*Ccor);
84
85 Av=eig(Aest);
86
87 Real=real(Av);
88
89 Imag=imag(Av);
90
91 for k=1:size(Real)
92     R(j)=Real(k);
93     Vel(j)=V;
94     j=j+1;
95 end
96
97 for k=1:size(Imag)
98     I(p)=Imag(k);
99     p=p+1;
100 end
101
102 end
103
104 %Grficos omitidos

```

## A.4 Função de definição da guinada para desvio

```
1 function [teta] = teta_x_d(x)
2
3 x1=20;
4 x2=40;
5 x3=50;
6 x4=70;
7 x5=90;
8 x6=110;
9 x7=120;
10 x8=140;
11 yf=1.5;
12 y0=0;
13
14 if x < x1
15     teta = 0;
16 end
17
18 if x ≥ x1 && x < x2
19     teta = atan(yf/(x2-x1));
20 end
21
22 if x ≥ x2 && x < x3
23     teta= 0;
24 end
25
26 if x ≥x3 && x < x4
27     teta = atan((y0-yf)/(x4-x3));
28 end
29
30 if x ≥ x4 && x < x5
31     teta = 0;
32 end
33
34 if x ≥ x5 && x < x6
35     teta = atan(-yf/(x2-x1));
36 end
37
38 if x ≥ x6 && x < x7
39     teta= 0;
40 end
41
42 if x ≥x7 && x < x8
43     teta = atan(-(y0-yf)/(x4-x3));
44 end
45
46 if x ≥ x8
47     teta = 0;
48 end
49
50
51 end
```

## A.5 Função de definição da guinada para Slalom

```
1 function [teta] = teta_x_sin(x)
2
3 global L
4 x1=10;
5
6 if x < x1
7 teta = 0;
8
9 else
10 teta = atan(L*2*pi/28*cos(2*pi*(x-x1)/(28)));
11 end
12
13
14 end
```

## A.6 Código de Simulação do Diagrama de Blocos e Resposta em Frequência

```
1 %Omitida a defini de parmetros e matrizes M, K e B
2
3 global V;
4 V=30/3.6;
5
6 A=[zeros(4) eye(4);
7     -M^-1*K -M^-1*C];
8
9 B=[zeros(4,2);M^-1*[0 0; 0 0; 1 0; 0 1]];
10
11 C=eye(8);
12
13 D=zeros(8,2);
14
15 %Controlabilidade
16 CT= ctrb(A,B);
17
18 RC=rank(CT,1e-4);
19
20 AV=eig(A);
21
22 %Aloca de Polos
23 p=3*[-1 -1.2 -1.3 -1.4 -1.5 -1.6 -1.7 -1.8];
24 %p=[-0.1, -0.2, -1+1.4584i, -1-1.4584i, -0.5, -1.5+30.425i, ...
25     -1.5-30.425i, -52];
26
27 KD=place(A,B,p);
28
29 %Defini do controle
30 Ccor=[0 1 0 0 0 0 0 0];
31 Klinha= KD;
32 Kd= -pinv(Ccor*inv(A-B*Klinha)*B);
```

```

32
33 %correcao da matriz
34 Kcor=Klinha-Kd*Ccor;
35
36 %verifica
37 Aest= A-B*(Kcor + Kd*Ccor);
38 % eig(Aest);
39 % Ver = -Ccor*inv(A-B*(Kcor+Kd*Ccor))*B*Kd;
40
41 %Simula
42 sim('Parte_4')
43
44 %Resposta em Frequncia
45 Blinha=B*Kd;
46 Dlinha=zeros(8,1);
47
48 [num,den]=ss2tf(Aest,Blinha,C,Dlinha);
49
50 Vmedia=Xd.signals.values(90)/Xd.time(90);
51
52 zpk(tf(num(2,:),den))
53
54 [mag,phase,wout] = bode(tf(num(2,:),den),2*pi/28*Vmedia);
55 mag
56
57 figure(20)
58 bode(tf(num(2,:),den),{0,10});
59
60 difamp=max(Y.signals.values(round(end/2):end,2))/max(Theta.signals.values);
61 difamp
62
63 %Grficos omitidos

```

## A.7 Análise de autovalores e autovetores

```
1 %Defini dos parmetros e matrizes K, M e B omitidos
2
3 A=[zeros(4) eye(4);
4     -M^-1*K -M^-1*B];
5
6 [Avec, Av]=eig(A);
7
8 mag=zeros(8);
9 fase=zeros(8);
10 for i=1:8
11     for j=1:8
12         [fase(j,i), mag(j,i)]=cart2pol(real(Avec(j,i)), imag(Avec(j,i)));
13     end
14 end
15
16 fase=180/pi*fase;
17
18 for i=1:8
19     mag(:,i)=mag(:,i)./max(mag(:,i));
20 end
21
22 sqrt(real(Avec(:,4)).^2+(imag(Avec(:,4)).^2));
23
24 [Avec2,Av2]=cdf2rdf(Avec,Av);
25
26 [Avec3, Av3]=eig(Av2);
```

## Referências

- [1] Carlos E. Venturas Anestis S. Veletsos. Modal analysis of non-classically damped linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14:217–243, 1986.
- [2] Willian L. Brogan. *Modern Control Theory*. Prentice Hall, 3rd edition, 1991.
- [3] Vittore Cossalter. *Motorcycle Dynamics*. Second edition, 2006.
- [4] Ali Imam Fai Ma, Matthias Morzfeld. The decoupling of damped linear systems in free or forced vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 329:3182–3202, 2010.
- [5] Giancarlo Genta and Lorenzo Morello. *The Automotive Chassis. Volume 1: Componentes Design*. Springer, 2009.
- [6] Giancarlo Genta and Lorenzo Morello. *The Automotive Chassis. Volume 2: System Design*. Springer, 2009.
- [7] Safko Goldstein, Poole. *Classical Mechanics*. Pearson Education, third edition, 2002.
- [8] Jim M. Papadopoulos Andy Ruina A. L. Schwab J. D. G. Kooijman, J. P. Meijaard. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. *Science*, 332(6027):339–342, 2011.
- [9] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. Wiley, 2015.
- [10] Leonard Meirovitch. *Analytical Methods in Vibrations*. The Macmillan Company, New York, 1967.
- [11] Li L. & Shi Mu, Y. Modified tire-slip-angle model for chaotic vehicle steering motion. <https://doi.org/10.1007/s42154-018-0019-7>, 2018.
- [12] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 5th edition, 2010.
- [13] Hans B. Pacejka. *Tire and Vehicle Dynamics*. SAE, 2002.
- [14] Savaresi Tanelli, Corno. *Modelling, Simulation and Control of Two Wheeled Vehicles*. Wiley, 2014.