4
Programação Linear

4.1.
Conceitos Gerais

Programação Matemática é a ciência e arte da otimização de funções com restrições, geralmente inequações. Foi prevista por Fourier em 1823 juntamente com a análise limite.

O problema fundamental de otimização é fornecer a melhor decisão em qualquer circunstância. Em um problema de otimização matemática escolhe-se uma quantidade, tipicamente uma função de várias variáveis (ou funções), para ser maximizada ou minimizada, podendo n variáveis serem submetidas a uma ou mais restrições, as quais devem ser satisfeitas.

A *Programação Matemática* (PM), é a parte da matemática que trata da determinação de distribuição ótima de recursos limitados para satisfazer determinados objetivos dados, mais especificamente, ela trata de situações onde o número de recursos disponíveis, tais como, homens, materiais, máquinas, etc..., estão para serem combinados para produzir um ou mais produtos. Há, contudo, certas restrições sobre a quantidade total de cada recurso disponível, sobre a quantidade de cada produto feito e/ou sobre a qualidade de cada produto. Mesmo dentro destas restrições, existirão muitas distribuições possíveis. Dentre todas as distribuições permissíveis de recursos, é desejável determinar aquela(s) que maximiza(m) ou minimiza(m) alguma quantidade numérica, tal como lucro ou custo.

A *Programação Linear* (PL) trata desta classe de problemas de *Programação Matemática* para os quais todas as relações são lineares tanto nas restrições como nas funções a serem otimizadas. A PL é freqüentemente utilizada na solução de problemas de programação não-linear, quando estes são resolvidos de forma recursiva, ou seja, como uma seqüência de problemas de PL.

Algumas características de um problema de PL são listadas a seguir:

- o valor “ótimo” global exato é alcançado num número finito de passos. Não existe “ótimo” local;
- os programas computacionais de PL são bastante eficientes;
- devido à alta eficiência e confiabilidade dos programas de PL, eles são freqüentemente utilizados como sub-rotinas na resolução de problemas de programação não-linear, quando estes são resolvidos de forma recursiva, ou seja, uma seqüência de problemas de PL.

A formulação de um problema de PL envolve as seguintes etapas:

- escolhem-se as variáveis do problema, e constitui-se uma função linear de tais variáveis, que é denominada *função objetivo* e seu valor deve ser otimizado (maximizado ou minimizado);
- as relações de interdependência entre as variáveis se expressam por um conjunto de equações e/ou inequações lineares. Essas relações são denominadas *restrições*;
- as variáveis do modelo devem ser positivas ou nulas.

O problema geral da programação linear pode ser descrito como se segue:

“Dado um conjunto de m desigualdades ou equações lineares em r variáveis, queremos determinar valores não negativos dessas variáveis que satisfarão as restrições e maximizarão ou minimizarão alguma função linear das variáveis”.

Matematicamente, isto significa:

$$\text{Min}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_rx_r \qquad (4.1)$$

Sujeito a

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ir}x_r \{\leq, =, \geq\} b_i \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (4.2)$$

Onde cada restrição pode assumir um e somente um dos sinais ≥, =, ≤, mas o sinal pode variar de uma restrição para outra.

Valores das variáveis x_j satisfarão a equação (4.2) e

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,r \qquad (4.3)$$

Onde a_{ij}, b_i, c_j são constantes conhecidas.

Qualquer conjunto que satisfaça às restrições (4.2) será chamado uma *solução* de problema de PL. Qualquer solução que satisfaça as restrições de não-negatividade é chamada uma *solução possível*. Qualquer solução possível que otimize a função-objetivo é chamada uma *solução possível ótima*. Normalmente, haverá um número infinito de soluções possíveis para um problema de PL. De todas essas soluções, precisamos determinar uma que otimize a função-objetivo.

Quando o problema de PL envolver somente duas variáveis, a solução pode ser obtida graficamente, e quando envolver uma gama maior de variáveis, aplicam-se métodos mais sofisticados para a solução do problema.

4.2. A Programação Linear na Forma Padrão

Devido a grande variedade de formas que um mesmo problema de PL pode ser expresso, torna-se necessária, para formulação computacional, a utilização de uma *forma padrão*. A grande vantagem desta forma de representação dos problemas de PL está na possibilidade de se utilizar um *algoritmo padrão* na resolução de tais problemas. As restrições de desigualdade podem ser transformadas em restrições de igualdade através da introdução de variáveis não-negativas ditas de folga (restrições ≤ 0) ou de excesso (restrições ≥ 0).

A forma padrão para problemas de PL é então dada por:

$$\text{Max}Z = f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{c}^{t}\,\underset{\sim}{x} \tag{4.4}$$

Sujeito a:

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \qquad \text{com} \qquad \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}$$

Sendo que $\underset{\sim}{x}$ inclui as novas variáveis introduzidas, que serão abordadas com mais detalhes a seguir.

É sempre possível transformar o sistema de equações em outro equivalente cujas equações são obtidas por combinações lineares das equações originais. Este procedimento chama-se *operação de pivoteamento* e conduz a um novo sistema no qual pelo menos **m** colunas serão compostas por zeros (0) e um único um (1).

Uma vez apresentado o problema de PL na forma padrão, algumas definições fundamentais podem ser feitas:

- solução viável, factível ou compatível – é um vetor x que satisfaz as condições $Ax = b$ e $x \geq 0$;
- região viável, factível ou compatível – é o conjunto de todas as soluções viáveis. Se este conjunto é vazio, o problema é impossível ou inviável;
- solução básica – é uma solução obtida fazendo-se (*n*-*m*) variáveis iguais a zero (variáveis não-básicas) e resolvendo-se em relação às demais (variáveis básicas);
- solução básica viável – é uma solução básica que também satisfaz a condição de não negatividade ($x \geq 0$). Ela será ainda dita degenerada se alguma variável básica for nula;
- solução ótima – é um vetor viável x^* que otimiza o valor da função objetivo, $Z^* = c^t x^*$. Esta solução pode ser única ou podem haver ótimas alternativas $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ quando $Z^* = c^t x_1^* = c^t x_2^* = ... = c^t x_n^*$;
- solução ilimitada – ($\mathrm{Max} Z \rightarrow \infty$ ou $\mathrm{Min} Z \rightarrow -\infty$) é aquela em que há uma região viável, mas o ótimo não é finito.

4.3. Variáveis em Excesso e Folga

Em geral é muito mais conveniente trabalhar com equações de igualdade do que com desigualdade. Por esta razão é viável converter todas as inequações das restrições de (4.2) em equações de igualdade, formando assim um sistema de equações lineares. Esta transformação pode ser facilmente feita introduzindo algumas variáveis adicionais que serão chamadas de variáveis de folga ou excesso.

Seja o conjunto de restrição dado por (4.2)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ir}x_r \{\leq, =, \geq\} b_i \qquad \mathrm{m} \leq \mathrm{n}$$
$$\mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{m}$$

Considerando primeiro as restrições com sinal de ($\leq$), essas podem ser escritas como,

$$\sum_{j=1}^{r} a_{hj} x_j \leq b_h \qquad (4.5)$$

Introduzindo uma nova variável $x_{r+h} \geq 0$, onde

$$x_{r+h} = b_h - \sum_{j=1}^{r} a_{h,j} x_j \geq 0 \qquad (4.6)$$

Denomina-se x_{r+h} variável de folga, porque b_h pode ser considerada a quantia máxima avaliada dos recursos de h, e qualquer conjunto de x_j, $\sum a_{hj} x_j$, é a quantia efetivamente utilizada. A diferença entre a quantia avaliada e realmente usada é a folga.

Desta forma a equação (4.6) pode ser reescrita como,

$$\sum_{j=1}^{r} a_{h,j} x_j + x_{r+h} = b_h \qquad (4.7)$$

Assim, após a introdução da variável de folga, converteu-se a desigualdade em uma igualdade.

Considerando agora as restrições ($\geq$): Estas inequações podem ser representadas como o conjunto de restrições que podem ser escritas na forma,

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j \geq b_k \qquad (4.8)$$

Então definimos uma nova variável $x_{r+k} \geq 0$, por:

$$x_{r+k} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j - b_k \geq 0 \qquad (4.9)$$

Denomina-se x_{r+k} variável de excesso, porque b_k pode ser considerado a quantia mínima de um recurso a ser usado, para qualquer conjunto de x_j, e $\sum a_{kj} x_j$ é a quantia efetivamente usada. A diferença entre a quantia efetivamente usada e o mínimo necessário para ser produzido um determinado valor de uma função é o excesso sobre o mínimo produzido. Assim a equação (4.9) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j - x_{r+k} = b_k \qquad (4.10)$$

Assim a desigualdade (4.8) foi transformada na igualdade (4.10) com a introdução da variável em excesso x_{r+k}. Desta forma converte-se as restrições de desigualdades (4.2) para um conjunto de equações lineares da forma

$$\sum_{j=1}^{r} a_{hj} x_j + x_{r+h} = b_h \qquad h = 1,...u \qquad (4.11a)$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j - x_{r+k} = b_k \qquad k = u+1,...v \qquad (4.11b)$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{pj} x_j = b_p \qquad p = v+1,...m \qquad (4.11c)$$

Assim as restrições (4.11) podem ser escritas na forma matricial,

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = x_1 \underset{\sim}{a_1} + x_2 \underset{\sim}{a_2} + ...x_n \underset{\sim}{a_n} = \underset{\sim}{b} \qquad (4.12)$$

Onde as colunas a_j de A representam os coeficiente das variáveis do problema original e as variáveis de folga e excesso x_{r+i} são representadas pelo vetor unitário e_i quando for de excesso e $-e_i$ quando for de folga.

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & ...... & a_{1r} & +1 & 0 & .... & 0 \\
a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2r} & 0 & +1 & .... & 0 \\
...... & & ..... & & & ...... & & \\
a_{v-1,1} & a_{v-1,2} & ...... & a_{v-1,r} & 0 & -1 & ...... & 0 \\
a_{v1} & a_{v2} & ..... & a_{vr} & 0 & 0 & .... & -1 \\
..... & & ..... & & 0 & 0 & ...... & 0 \\
a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mr} & 0 & 0 & .... & 0
\end{array} \qquad (4.13)$$

Um exemplo de um problema de programação linear [6], com solução gráfica está apresentado a seguir:

Seja

$$\text{Max}Z = 5x_1 + 3x_2 \qquad (4.14)$$

Sujeito a

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15 \qquad (4.15.a)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \qquad (4.15.b)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (4.15.c)$$

Primeiro encontra-se o conjunto de pontos (x_1,x_2), que são soluções do problema. Para isto, cria-se um sistema de coordenadas com eixos em x_1 e x_2. A restrição apresentada em (4.15.c), estabelece que x_1 e x_2 deverão ser maiores ou iguais a zero, logo todos os pontos que estiverem no primeiro quadrante do plano x_1-x_2 que satisfazem essas restrições. Para encontrar os pontos no primeiro quadrante que satisfazem as equações (4.15.a) e (4.15.b) faremos uma interpretação geométrica.

Primeiro transformaremos (4.15.a) numa igualdade,

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15 \text{ ? } \quad 3x_1 + 5x_2 = 15 \tag{4.16}$$

Reescrevendo

$$x_2 = -0.6x_1 + 3 \tag{4.17}$$

Logo os pontos que obedecem a restrição (4.15a) são os pontos que estão sobre e abaixo da reta representada por (4.17), como mostra a *Fig. 4.1*.

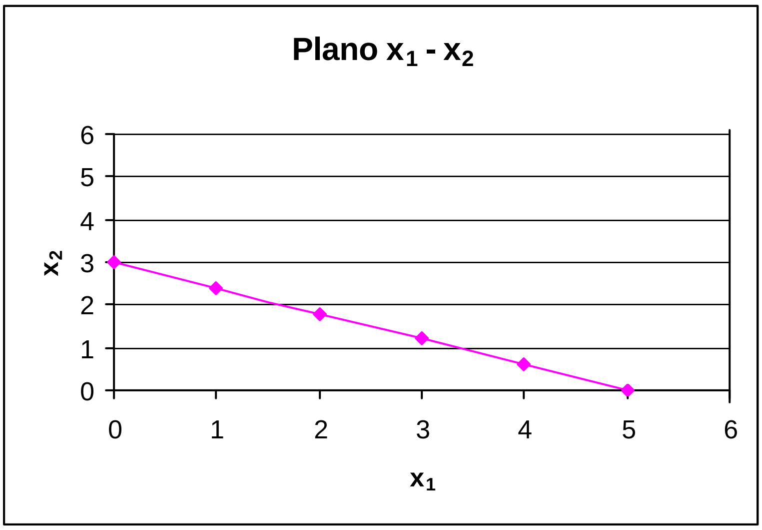

Figura 4.1 - Pontos do Plano x_1-x_2 que são solução para (4.15.a)

Da mesma forma para a restrição (4.15.b) tem-se que,

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \text{ ? } \quad 5x_1 + 2x_2 = 10 \tag{4.18}$$

$$x_2 = -2.5x_1 + 5 \tag{4.19}$$

Logo os pontos que obedecem a restrição (4.15b) são os pontos que estão sobre e abaixo da reta representada por (4.19), como mostra a *Fig. 4.2*.

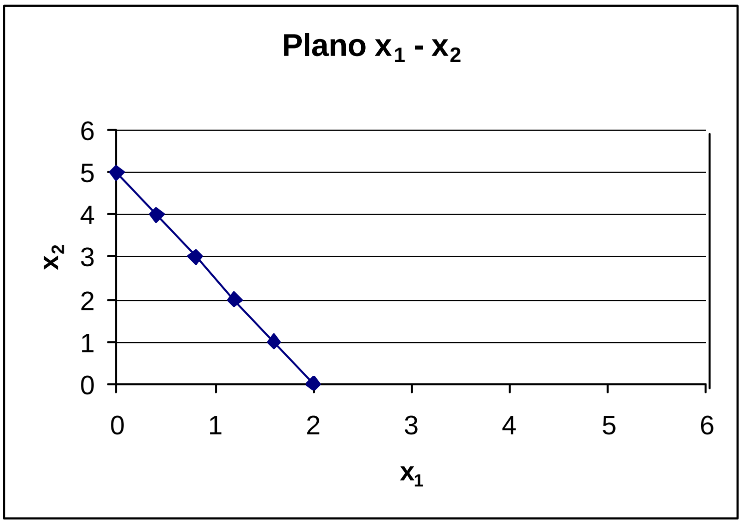

Figura 4.2 - Pontos do Plano x_1-x_2 que são solução para (4.15.b)

Superpondo os gráficos das *Figs. 4.1 e 4.*2, a região viável das soluções para a função-objetivo da equação (4.14) está representada na *Fig. 4.3* pela área hachurada do gráfico. Todos os pontos que estiverem dentro da região viável são possíveis soluções para equação (4.14). Neste passo devemos encontrar o ponto que fornece a melhor solução ou solução ótima para a função objetivo.

Se fixarmos um valor para Z por exemplo igual a 10 na expressão (4.14) teremos a equação da reta $5x_1 + 3x_2 = 10$, representada na *Fig. 4.4*. À medida que mudam-se os valores Z, obteremos novas retas que serão paralelas a esta primeira. Pode-se observar que z_1 $(10 = 5x_1 + 3x_2)$ possui pontos que pertencem à região viável de solução. Mas por outro lado a reta z_3 $(15 = 5x_1 + 3x_2)$ não pertence a região viável. Portanto ao deslocarmos a reta z_1 paralelamente, no sentido de z_3, o trecho de reta que pertence à região viável chegará a desaparecer. Suponhamos uma reta z_4, entre z_1 e z_2, também será um valor de transição entre a região viável e a região não viável. Sobre este trecho de transição o ponto que pertence à interseção das duas restrições é o ponto que maximiza z na expressão (4.14) (z_2).

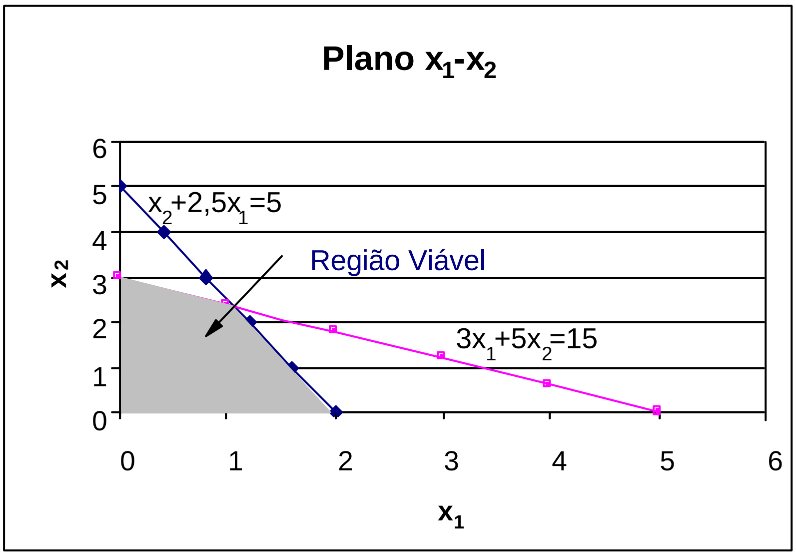

Figura 4.3 - Solução Gráfica para função objetivo da eq. (4.14)

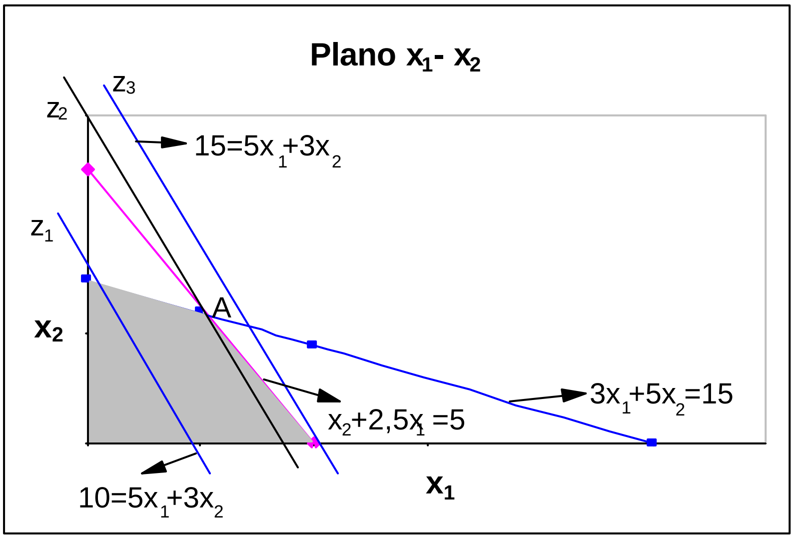

Figura 4.4 - Representação da Função Objetivo com as restrições

Algumas vezes pode ocorrer uma má definição do problema quanto às restrições e não existir uma solução ótima para o problema. Problemas desse tipo podem ter solução ilimitada ou não ter uma região viável.

4.4. Método Simplex

O algoritmo simplex, desenvolvido por George B. Dantzig em 1947 é um procedimento iterativo para resolução de problemas de PL, num número finito de operações aritméticas (usualmente entre *m* e *2m* iterações, onde *m* é o número de restrições do problema).

O termo "simplex" significa o lugar geométrico dos pontos que satisfazem as restrições do problema de PL. Esta região do espaço *n-dimensional* é também conhecida por região viável das restrições.

De acordo com Hadley [6], o conjunto de soluções viáveis de um problema de PL é convexo, isto é, toda interpolação linear de qualquer par de pontos do conjunto também pertencerá ao conjunto. Se o problema admitir solução ótima, esta será atingida para, pelo menos, um vértice do conjunto de soluções viáveis desse problema; cada vértice será uma solução básica possível. Ora, admitindo-se, que o problema tenha solução, se entre as soluções básicas viáveis se encontra uma que é ótima, nada mais lógico do que procurar a solução ótima gerando-se as primeiras.

Partindo de uma solução básica viável inicial, o simplex é capaz de gerar soluções básicas viáveis cada vez melhores até chegar a uma que não pode mais ser melhorada, é a solução ótima.

1. Se existe uma solução compatível para um problema de PL, existe também uma solução compatível básica.
2. Se há uma solução ótima, uma das soluções compatíveis básicas será ótima.
3. Se temos uma solução compatível básica, que não é ótima, então, desde que uma degeneração nunca ocorra, é possível, trocando-se cada vez um único vetor na base (isto é, levando-se a zero uma variável da solução básica e deixando uma outra, que estava fora da solução básica, se tornar positiva), alcançar, em um número finito de passos, uma solução básica ótima ou mostrar que a função-objetivo não tem limite. Aqui temos a essência do procedimento computacional para resolver um problema de PL.