

### 3 Fundamentos de Análise Limite (AL)

#### 3.1. Introdução

Um dos aspectos interessantes da análise plástica ou análise limite é a facilidade com que se pode calcular a carga de colapso. Uma análise puramente estática é muito mais simples do que outra que envolve relação constitutiva, exigida na região elástica. Além disso, os resultados obtidos pela análise limite são insensíveis às imperfeições das condições-limite. Uma pequena rotação num engastamento ou um ligeiro abaixamento de um apoio simples não afeta a carga de colapso plástico, mas tais imperfeições têm considerável efeito sobre o comportamento elástico da estrutura.

O aço tem relação tensão x deformação aproximadamente elasto-plástica. Este material segue a Lei de Hooke até o limite de escoamento  $\sigma_e$ , e, em seguida, deforma-se plasticamente sob tensão constante, conforme mostra o diagrama de tensão-deformação de um material elasto-plástico, cujo limite de escoamento  $\sigma_e$ , e módulo de elasticidade longitudinal  $E$  são os mesmos tanto na tração como na compressão.

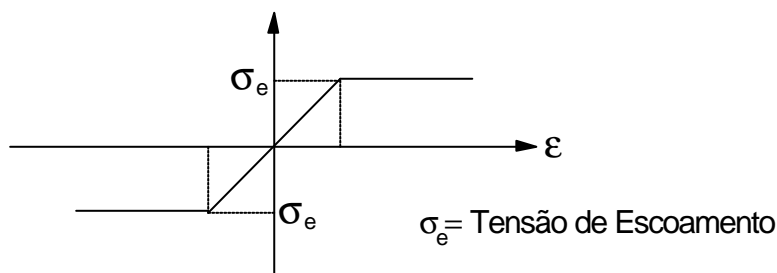


Figura 3.1 - Diagrama tensão-deformação para um material linear elástico perfeitamente plástico

O diagrama tensão-deformação de qualquer tipo de concreto é sempre curvo, não tendo um limite de proporcionalidade ( $e$ , conseqüentemente, um domínio elástico) tão bem caracterizado no caso do aço, por exemplo.

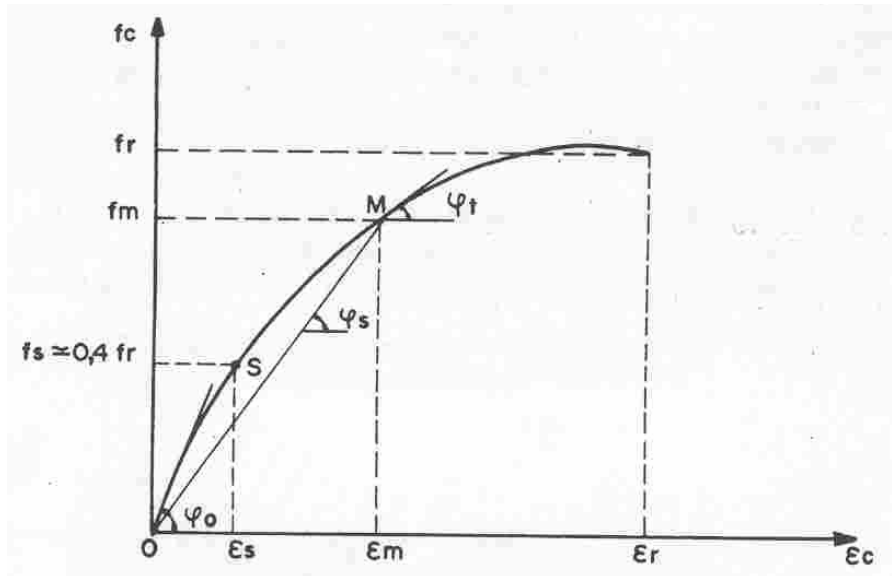


Figura 3.2 - Diagrama tensão-deformação do concreto

Apesar de não existirem corpos de comportamento rígido-plástico perfeito, o modelo pode ser usado sempre que as deformações elásticas forem desprezíveis diante das deformações plásticas e o material apresentar um certo grau de ductilidade.

Sob o aspecto estrutural, o fato da tensão de escoamento ser atingida em alguns pontos, não apresenta qualquer importância, desde que a estrutura consiga resistir aos esforços solicitantes mantendo-se em condições de funcionalidade. Não existe, portanto, razão para se supor que as tensões na estrutura não devam atingir o limite elástico.

Surgem, então, os projetos estruturais baseados no comportamento plástico dos materiais. Em tais procedimentos de projeto, o objetivo principal não é determinar a distribuição de tensões na estrutura, mas sim determinar a carga limite que a estrutura é capaz de suportar antes do colapso. Quando as cargas são aumentadas monotonicamente até o ponto em que a estrutura não consiga mais suportá-las, o corpo é dito haver atingido o colapso e a carga correspondente é chamada *carga de colapso*, *carga limite*, *carga última* ou *capacidade de carga*. O estado de deformação do corpo nesse instante é conhecido como *mecanismo de colapso*. Este tipo de análise é conhecido como *análise limite*.

Para ilustrar o conceito da análise limite, considere-se, por exemplo, a viga hiperestática indicada na *Fig. 3.3*, de seção retangular, submetida a uma

carga concentrada  $P$  no meio do vão, e para a qual deseja-se o valor da carga de colapso  $P_{lim}$ .

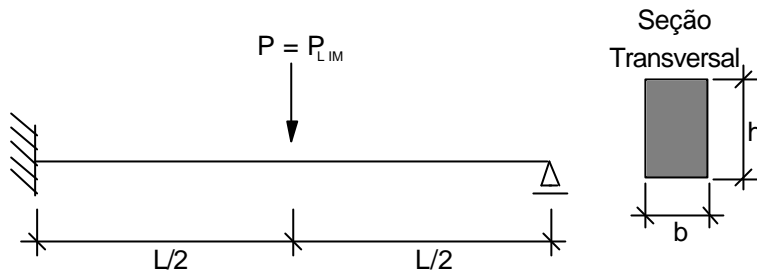


Figura 3.3 - Exemplo de viga hiperestática submetida a uma carga concentrada no meio do vão

Considere-se ainda, que a viga da Fig. 3.3 seja constituída por um material que apresenta um comportamento linear elástico perfeitamente plástico, cuja relação tensão deformação encontra-se na Fig. 3.1.

Para valores baixos da carga aplicada, a viga se encontra no regime elástico, cujas distribuições de momentos fletores e tensões internas, de acordo com a hiperestática, estão representadas nas Figs. 3.4a e 3.5a [17], respectivamente, onde  $s_e$  representa a tensão de escoamento do material.

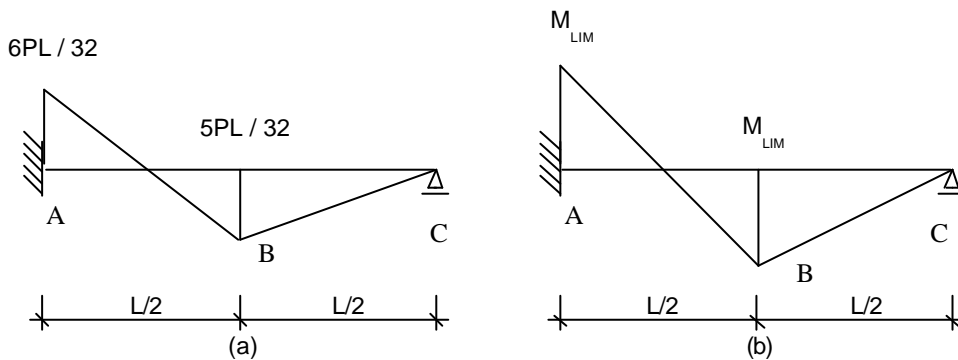


Figura 3.4 - Distribuição de momentos fletores para uma viga: (a) Regime Elástico; (b) Regime Plástico Limite

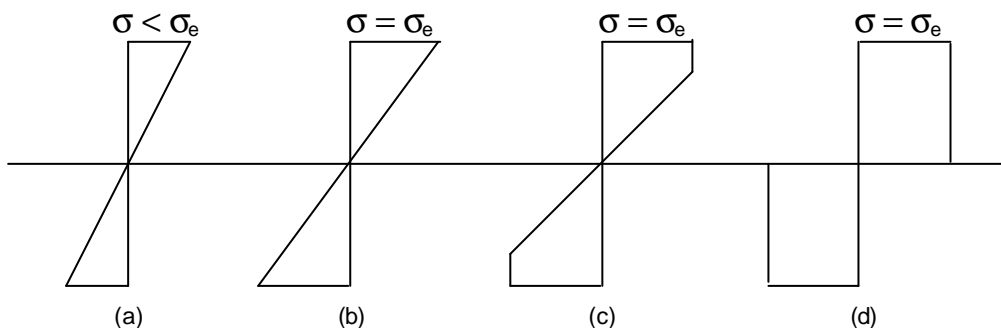


Figura 3.5 - Distribuição de tensões numa seção transversal em material elasto-plástico sob a ação de momento fletor crescente

Aumentando-se gradativamente o valor da carga  $P$  aplicada, chega-se a um ponto em que as fibras externas da seção  $A$  da viga (por ser a seção mais solicitada), atingem primeiramente a tensão de escoamento ( $\sigma_e$ ), de acordo com a *Fig. 3.5b*. Nesse instante, na seção  $A$  atua o maior momento para seção em regime elástico ( $M_e$ ), cujo valor, para vigas de seção transversal retangular ( $bh$ ), é dado por:

$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_e \quad (3.1)$$

A seção  $B$  da viga mantém-se com o comportamento elástico representado pela *Fig. 3.5 a*.

A partir desse instante, qualquer acréscimo no valor da carga  $P$  causará plastificação das fibras mais externas da seção  $A$ , de acordo com a *Fig. 3.5c*. É importante salientar que as fibras externas da seção  $A$  mantêm seus valores de tensão limite de escoamento, respeitando desta forma, as hipóteses de comportamento plástico perfeito.

Continuando-se os incrementos dados na carga  $P$ , chega-se a um estado limite na seção  $A$ , em que todas as suas fibras atingem a tensão de escoamento (*Fig. 3.5d*). O momento fletor atinge, então, o seu valor máximo ( $M_{lim}$ ), cuja expressão para vigas retangulares ( $bh$ ) é dada por:

$$M_{lim} = \frac{bh^2}{4} \sigma_e \quad (3.2)$$

Nesse instante, não poderá haver nenhum aumento no valor do momento na seção  $A$ ; a curvatura da viga nesta seção torna-se indeterminada (? 8); e um fluxo plástico ilimitado se instala nesta. Tudo se passa como se a viga estivesse conectada ao apoio  $A$  por meio de uma articulação ou rótula. Esta idealização de comportamento estrutural recebe o nome de rótula plástica .

Para este nível de carregamento, a viga passa a funcionar como bi-apoiada, com a seção  $B$  parcialmente plastificada. (*Fig. 3.5c*).

Incrementando-se ainda mais a carga  $P$ , ocorre uma redistribuição no diagrama de momentos, e chega-se a um estado limite para a estrutura em que toda a seção B escoá (*Fig. 3.4b*). Nesse instante, uma nova rótula plástica é formada no meio do vão da viga, o que causa o colapso. A viga entra em colapso, então, pela formação de um mecanismo cinemático, denominado *mecanismo de colapso* (*Fig. 3.6*).

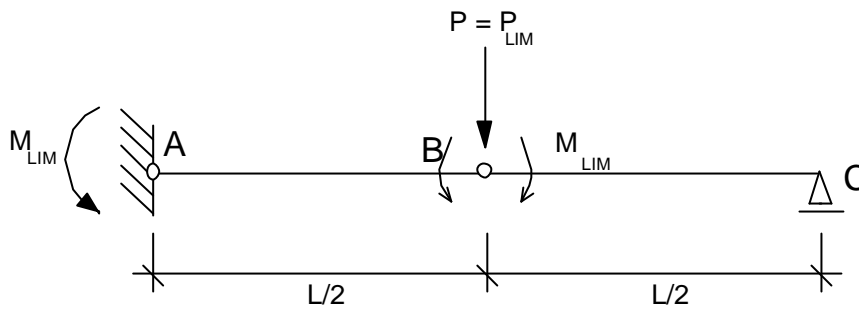


Figura 3.6 - Modelo de uma viga hiperestática na ruptura, com representação esquemática das rótulas plásticas

É interessante observar que o escoamento na seção do engaste produz uma redistribuição de momentos ao longo da viga. Para se determinar o valor da carga de colapso ( $P_{lim}$ ) da viga, não é necessário pesquisar em detalhes o comportamento da viga antes do colapso. Pode-se ir diretamente para a condição de falha. Deve-se observar, por exemplo, que um recalque de apoio não afeta a carga de colapso, mas tem considerável efeito na análise elástica.

Procede-se, por exemplo, da seguinte forma:

Seja  $R_c$ , a reação no apoio C da viga, dada por:

$$M_B = M_{lim} = R_c \frac{L}{2} \quad (\text{Ver Fig. 3.4})$$

ou ainda:

$$R_c = 2 \frac{M_{lim}}{L} \quad (3.3)$$

Mas:

$$M_A = -M_{lim} = R_c L - P_{lim} \frac{L}{2} \quad (3.4)$$

Substituindo-se (3.3) em (3.4), chega-se a:

$$-M_{\text{lim}} = 2 \frac{M_{\text{lim}}}{L} L - P_{\text{lim}} \frac{L}{2}$$

$$P_{\text{lim}} = 6 \frac{M_{\text{lim}}}{L} \quad (3.5)$$

Substituindo-se (3.2) em (3.5), tem-se o valor da carga de colapso em função das dimensões da viga e da tensão de escoamento, ou seja:

$$P_{\text{lim}} = \frac{3}{2} \frac{bh^2}{L} \sigma_e \quad (3.6)$$

Um aspecto fundamental da análise limite, na determinação da carga de colapso, é não ser necessário pesquisar em detalhes o comportamento da estrutura desde o carregamento inicial até o instante de colapso. Pode-se ir direto à condição de colapso da estrutura, obtendo-se o carregamento de colapso através da igualdade do trabalho interno e trabalho externo plástico para um dado mecanismo de colapso, como indicado a seguir.

Em vigas, as seções que atingem o momento limite  $M_{\text{lim}}$  têm curvaturas muito elevadas se comparadas com aquelas onde as seções não atingiram  $M_{\text{lim}}$ . Desta forma os mecanismos de colapso são formados por barras retas ligadas a rótulas plásticas (onde atua  $M_{\text{lim}}$ ). Como as curvaturas são grandes nas seções correspondentes a  $M_{\text{lim}}$ , os raios de curvatura são muito pequenos e a viga praticamente dobra nessas seções.

Admitindo-se para uma viga uma determinada forma de colapso, se conhecido o deslocamento em um ponto fica caracterizada toda a configuração deformada da viga. Em presença desta configuração deformada (modo de colapso), a soma dos trabalhos das forças externas ( $W_e$ ) tem que ser igual à energia de deformação dos esforços internos ( $W_i$ ).

$$W_e = W_i \quad (3.7)$$

Para a viga mostrada na *Fig. 3.3*, o mecanismo de colapso está indicado na *Fig. 3.7*.

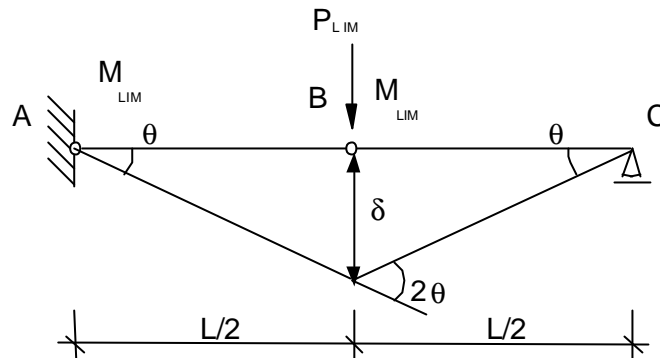


Figura 3.7 - Mecanismo de colapso

O trabalho total das forças externas é dado por:

$$W_e = P_{lim} \delta \quad (3.8)$$

O trabalho total das forças internas é dado por:

$$W_i = M_{lim} \theta + M_{lim} 2\theta = M_{lim} 3\theta \quad (3.9)$$

De acordo com a equação (3.7), tem-se que:

$$P_{lim} \delta = M_{lim} 3\theta \quad (3.10)$$

Para pequenos deslocamentos, a rotação “ $\theta$ ” pode ser aproximada pela sua tangente, e, conseqüentemente, o deslocamento “ $\delta$ ” é dado por:

$$\tan \theta \cong \theta = \frac{\delta}{L/2} \rightarrow \delta = \theta \frac{L}{2} \quad (3.11)$$

Substituindo-se (3.11) em (3.10), tem-se:

$$P_{lim} = 6 \frac{M_{lim}}{L} \quad (3.12)$$

O que coincide com a equação (3.5).

Em geral pode haver mais de um mecanismo de colapso admissível o que levará a diferentes valores de  $P_{lim}$ . Entre os diversos valores determinados o menor será o mais correto pelo teorema do limite superior, conforme descrito a seguir.

Os teoremas fundamentais da análise limite foram formulados primeiramente por GVOZDEV [24] em 1938 e independentemente por DRUCKER [25] et al. em 1952, para corpos com comportamento rígido-plástico perfeito. Esses teoremas fornecem limites inferiores e superiores para a verdadeira carga de colapso.

### 3.2. Teorema do Limite Inferior

“Se a carga atuante tem uma magnitude que permita encontrar um campo de tensões, satisfazendo às condições de equilíbrio no interior e no contorno, e em qualquer ponto do corpo essas tensões estejam satisfazendo um critério de resistência do material, então a carga atuante é menor ou no máximo igual à carga de colapso da estrutura.”

Um campo de tensões desse tipo é denominado *seguro* ou *estaticamente admissível*. Pelo fato da carga de colapso real da estrutura ser sempre maior ou igual a uma carga atuante referida a um campo de tensões estaticamente admissível, os limites inferiores são sempre valores a favor da segurança, então este teorema é conhecido como *safe theorem*.

É possível supor campos de tensões em equilíbrio com a carga aplicada, mas que estejam além do limite de resistência. Nesse caso, não se pode garantir a veracidade do teorema do limite inferior para a carga de colapso.

Definindo-se o carregamento externo aplicado por um parâmetro estritamente positivo  $I_L$ , de modo que as componentes individuais das cargas lhe sejam proporcionais, tem-se o que se chama *carregamento proporcional* ou *cargas proporcionais*, que provoca um colapso, conhecido como *colapso estático*. O teorema pode então ser utilizado para encontrar valores de carga menores ou iguais à carga de colapso correspondente ao fator de proporcionalidade  $I_C$ , denominado *fator de colapso*.



Portanto, dado um fator de carga  $I_L$ , para o qual existe um campo de tensões estaticamente admissível, então:

$$\lambda_L \leq \lambda_C \quad (3.13)$$

Então, pode-se concluir, que dadas duas soluções de distribuição de tensões estaticamente admissíveis, a que conduz a maior carga de colapso é a mais próxima da verdadeira carga de colapso.

### 3.3. Teorema do Limite Superior

“Considerando-se um campo de deslocamentos geometricamente possível, uma carga que realize trabalho externo igual ao trabalho interno plástico de deformação, para o campo de deslocamentos em questão, será maior ou igual à carga de colapso”.

De acordo com o teorema do limite superior, a carga de colapso real da estrutura é sempre menor ou igual à carga obtida conforme descrito acima, conseqüentemente, limites superiores da carga de colapso e, portanto, contrários à segurança. Por isto, o teorema do limite superior é conhecido como *unsafe theorem*.

Através da mesma definição de carregamento proporcional, esse teorema pode ser usado para encontrar valores de carga que são maiores ou iguais à carga de colapso. Conclui-se, portanto, que o fator de carga  $\lambda_U$  encontrado é maior ou igual à carga de colapso, ou seja:

$$\lambda_C \leq \lambda_U \quad (3.14)$$

Nota-se que as tensões correspondentes ao campo de deformações geometricamente possível não necessitam satisfazer às condições de equilíbrio.

De acordo com o teorema do limite superior, dadas duas soluções de campos de deslocamentos geometricamente compatíveis, a que leva à menor carga de colapso é a que se encontra mais próxima da verdadeira carga de colapso.

### 3.4. Teorema da Unicidade

A partir dos dois teoremas da análise limite, pode-se encontrar uma carga de forma a satisfazer duas condições:

- existência de um campo de tensões estaticamente admissível correspondente às tensões dentro ou sobre a superfície de colapso. Nesse caso o carregamento correspondente é menor ou igual à carga de colapso;
- existência de um campo deslocamentos geometricamente admissível. Nesse caso, o carregamento correspondente é obtido da igualdade do trabalho externo e trabalho interno plástico.

Quando ambas as condições são satisfeitas simultaneamente, o fator de carga encontrado é igual ao fator de carga de colapso, que é assim determinada de maneira única.

$$\lambda_L = \lambda_C = \lambda_U \quad (3.15)$$

Nem sempre a estrutura toda participa do colapso. Na maioria das vezes, apenas parte da estrutura está deformada no instante de colapso, enquanto que o restante permanece rígido, impedindo que as tensões sejam determinadas de modo único, sabe-se apenas que correspondem a pontos dentro ou sobre a superfície de colapso. Também ocorre de vários campos de deformação geometricamente possíveis levarem à mesma capacidade de carga. Pode-se concluir que nem o mecanismo de colapso e nem o campo de tensões são determinados de maneira única para um corpo rígido-plástico, somente a carga de colapso é única.