

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Fernanda Dantas Santos

**Análise Limite e Projeto Ótimo de Vigas
em Concreto Armado**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientadores: Marta de Souza Lima Velasco
Luiz Eloy Vaz

Rio de Janeiro
agosto de 2003.



Fernanda Dantas Santos

Análise Limite e Projeto Ótimo de Vigas em Concreto Armado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Marta de Souza Lima Velasco

Orientadora

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Luiz Eloy Vaz

Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da UFRJ

Profa. Cláudia Ribeiro Eboli

Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da UFRJ

Profa. Icléa Reys de Ortiz

Faculdade de Arquitetura da UFRJ

Prof. Ricardo Amorim Einsfeld

IPRJ

Prof. Ney Augusto Dumont

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 25 de agosto de 2003.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fernanda Dantas Santos

Graduou-se em Engenharia Civil na PUC-Rio (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro), onde participou de programas de monitorias e de Iniciação Científica na área de Engenharia Civil.

Ficha Catalográfica

Santos, Fernanda Dantas

Análise limite e projeto ótimo em vigas de concreto armado / Fernanda Dantas Santos; orientadores: Marta de Souza Lima Velasco, Luiz Eloy Vaz. – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2003.

[13], 154 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Incluí referências bibliográficas.

1. Engenharia civil - Teses, 2. Vigas, 3. Trelça de Mörsch, 4. Análise limite, 5. Dimensionamento ótimo. I. Velasco, Marta de Souza Lima. II. Vaz, Luiz Eloy. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pela minha existência e por tudo que conquisei.

A minha família, pelo apoio, incentivo e carinho em todos os momentos da minha vida.

Ao meu marido por todo carinho, incentivo e dedicação ao longo deste período.

Aos professores Marta de Souza Lima Velasco e Luiz Eloy Vaz, pela orientação e apoio recebidos, e também pela amizade demonstrada ao longo da realização deste trabalho.

Aos colegas da Pós-Graduação, professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil, pelo apoio e colaboração.

A todas as pessoas que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho. Em especial aos amigos Fabiana, Anderson, Rodrigo, pelo companheirismo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Santos, Fernanda Dantas; Velasco, Marta de Souza Lima; Vaz, Luiz Eloy. **Análise Limite e Projeto Ótimo em Vigas de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 2003. 167p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

É apresentada uma metodologia para a determinação da carga de colapso e uma outra para o dimensionamento ótimo em vigas de concreto armado.

Para a determinação da carga de colapso a metodologia utiliza a análise limite e o modelo da Treliça Clássica de Morsch. A formulação do problema é obtida a partir dos teoremas limites de plasticidade, que permitem escrever o problema da análise limite na forma de programação linear (PL) e o programa LINGO é utilizado para resolvê-lo.

Para o dimensionamento ótimo o mesmo modelo da treliça de Morsch é utilizado e a formulação do problema também recai num problema de programação linear que pode ser resolvido pelo programa LINGO. A solução fornece tanto as áreas das armaduras longitudinais como dos estribos.

Os exemplos apresentados ilustram a validade e eficiência da formulação proposta. Os resultados obtidos são analisados e comparados com os resultados experimentais e com os obtidos com o uso de outra metodologia.

Finalmente são apresentadas as conclusões e sugeridas propostas para trabalhos futuros.

Palavras-chave

Vigas; Treliça de Morsch; Análise limite; Carga de colapso; Dimensionamento ótimo.

Abstract

Santos, Fernanda Dantas; Velasco, Marta de Souza Lima; Vaz, Luiz Eloy. **Análise Limite e Projeto Ótimo em Vigas de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 2003. 167p. MSc. Dissertation – Civil Engineering Department, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Methodologies for the determination of the collapse load and for the optimal design of concrete beams are presented.

For the collapse load determination the methodology makes use of the limit analysis and of the classical truss model of Morsch. The formulation of the problem is based on the limit theorems of plasticity which allow the limit analysis problem to be expressed as a linear programming problem (LP) which is solved by the program LINGO.

For the optimal design, the same truss model of Morsch is used and the formulation also leads to a linear programming problem which can be solved by the program LINGO. The solution yields both the longitudinal reinforcement and the stirrups.

The examples presented illustrate the validity and efficiency of the proposed formulation. The results obtained are analysed and compared to the experimental ones and to those obtained using other methodologies.

Finally, conclusions are drawn from the results and suggestions are given for future researches in the field.

Keywords

beams; Truss model of Morsch; limit analysis; collapse load; optimal design.

Sumário

1 Introdução	14
2 Treliça de Mörsch	17
2.1. Histórico	17
2.2. Funcionamento Básico e Elementos Constituintes	18
2.3. Treliça Generalizada de Mörsch	18
3 Fundamentos de Análise Limite (AL)	22
3.1. Introdução	22
3.2. Teorema do Limite Inferior	29
3.3. Teorema do Limite Superior	30
3.4. Teorema da Unicidade	31
4 Programação Linear	32
4.1. Conceitos Gerais	32
4.2. A Programação Linear na Forma Padrão	34
4.3. Variáveis em Excesso e Folga	35
4.4. Método Simplex	41
5 Relação entre Análise Limite e Programação Linear	42
5.1. Modelo Matemático para Análise Limite	42
5.2. Modelo Matemático para o Dimensionamento Ótimo	50
6 Descrição do Programa	54
6.1. Introdução	54
6.2. Descrição do modelo	54
6.3. Metodologia para Carga de Colapso de uma Viga	55
6.3.1. Geração do arquivo .pos	55
6.3.2. Geração do arquivo .dat	55
6.3.3. Obtenção da carga de colapso	56
6.4. Metodologia para o Dimensionamento Ótimo de uma Viga	56
7 Exemplos	58
7.1. Introdução	58
7.2. Exemplo 1	58

7.3. Exemplo 2	64
7.4. Exemplo 3	73
7.5. Exemplo 4	80
7.6. Exemplo 5	85
8 Conclusões e Sugestões	90
9 Referências Bibliográficas	91
10 Apêndice A	94

Lista de figuras

Figura 2.1 - Viga na iminência da ruptura e os tipos de fissura que podem ocorrer	20
Figura 2.2 - Treliça análoga de Morsch para o caso de: a) estribos e b) barras dobradas	21
Figura 3.1 - Diagrama tensão-deformação para um material linear elástico perfeitamente plástico	22
Figura 3.2 - Diagrama de tensão-deformação do concreto	23
Figura 3.3 - Exemplo de viga hiperestática submetida a uma carga concentrada no meio do vão	24
Figura 3.4 - Distribuição de momentos fletores para uma viga: (a) Regime Elástico; (b) Regime Plástico Limite	24
Figura 3.5 - Distribuição de tensões numa seção transversal em material elasto-plástico sob a ação de momento fletor crescente	24
Figura 3.6 - Modelo de uma viga hiperestática na ruptura, com representação esquemática das rótulas plásticas	26
Figura 3.7 - Mecanismo de colapso	28
Figura 4.1 - Pontos do Plano x_1 - x_2 que são solução para (4.15.a)	38
Figura 4.2 - Pontos do Plano x_1 - x_2 que são solução para (4.15.b)	39
Figura 4.3 - Solução Gráfica para função objetivo da eq. (4.14)	40
Figura 4.4 - Representação da Função Objetivo com as restrições	40
Figura 5.1 - Modelo generalizado de treliça	44
Figura 5.2 - Distribuição das tensões de compressão no concreto	44
Figura 5.3 - Condição de equilíbrio	49
Figura 7.1 - Esquema estrutural do exemplo 1	58
Figura 7.2 – Mecanismo de colapso 1 do exemplo 1	60
Figura 7.3 – Mecanismo de colapso 2 do exemplo 1	62
Figura 7.4 – Esquema estrutural da viga do exemplo 2	64
Figura 7.5 – Detalhamento da viga do exemplo 2	65
Figura 7.6 – Modelo de bielas e tirantes para o exemplo 2	66
Figura 7.7 – Esquema estrutural da viga do exemplo 3	73
Figura 7.8 – Detalhamento da viga do exemplo 3	74
Figura 7.9 – Modo simplificado do esquema estrutural	75
Figura 7.10 – Mecanismo de colapso do exemplo 3	75
Figura 7.11 – Modelo de bielas e tirantes para o exemplo 3	77
Figura 7.12 – Esquema estrutural da viga do exemplo 4	80
Figura 7.13 – Detalhamento da viga do exemplo 4	80
Figura 7.14 – Mecanismo de colapso 1 do exemplo 4	81

Figura 7.15 – Mecanismo de colapso 2 do exemplo 4	81
Figura 7.16 – Mecanismo de colapso 3 do exemplo 4	81
Figura 7.17 – Modelo de bielas e tirantes para o exemplo 4	83
Figura 7.18 – Esquema estrutural da viga do exemplo 5	85
Figura 7.19 – Detalhamento da viga do exemplo 5	86
Figura 7.20 – Modelo de bielas e tirantes para o exemplo 5	87

Lista de símbolos

ALFABETO ROMANO

a	– espaçamento entre os tirantes;
A	– área da seção comprimida de concreto;
A_b	– área da seção transversal das barras inclinadas;
A_e	– área do ferro do estribo;
A_s	– área da seção transversal da armadura principal;
$A_{s,i}$	– armadura nas barras horizontais i ;
A_{S_1}	– área da seção transversal das barras horizontais superiores;
A_{S_2}	– área da seção transversal das barras horizontais inferiores;
$A_{S_{min}}$	– limite mínimo da área de armadura;
$A_{S_{max}}$	– limite máximo da área de armadura;
A_{S_w}	– área da seção transversal da armadura de alma;
$A_{s_w,i}$	– armadura no tirante i ;
A_t	– área da seção transversal dos estribos;
b_w	– largura da seção transversal da viga;
d	– distância do bordo mais comprimido até o centro de gravidade das barras de aço que constituem a armação tracionada pela flexão;
d'	– a diferença $(h-d)$;
d'_1	– distância do bordo superior ao centro de gravidade da armadura superior;
E_c	– módulo de elasticidade do concreto;
f_c	– tensão admissível à compressão do concreto;
f_{ck}	– valor característico da resistência do concreto à compressão;
f_{ctd}	– resistência de cálculo do concreto à tração direta;
$f_{ctk,inf}$	– resistência característica inferior à tração do concreto;
f_{ctm}	– resistência média do concreto à tração direta;
f_{yd}	– valor de resistência do aço à tração, para as armaduras longitudinais;
f_{yk}	– valor característico da resistência do aço à tração;
f_{ywd}	– resistência ao escoamento do aço da armadura transversal;

f_t	– tensão admissível à tração do concreto;
F_h	– valor da força concentrada horizontal aplicada ao nó;
F_v	– valor da força concentrada vertical, aplicada ao nó;
h	– altura total da seção transversal;
jd	– distância do centro de gravidade da armadura de tração ao centro de gravidade da armadura de compressão.
k_x	– coeficiente que define a posição da linha neutra;
K	– carga de colapso;
l_i	– comprimento das barras horizontais i ;
l_{wi}	– comprimento do tirante i ;
L	– comprimento da viga;
M_e	– maior momento para seção em regime elástico;
M_{lim}	– momento de ruptura;
n_e	– número de divisões da viga;
n_{pe}	– número de pernas do estribo;
N	– esforço normal nas barras;
NB	– número de barras convergentes no nó;
NH	– número de barras horizontais;
NT	– número de tirantes;
N_i	– esforço axial na barra i ;
N_i^l	– limites inferior das forças nas barras
N_i^u	– limites superior das forças nas barras;
P	– carga concentrada;
P_{lim}	– carga de colapso;
P_i	– peso próprio no nó;
P_u	– carga última (obtida no ensaio);
s	– espaçamento do estribo;
V_c	– parcela de contribuição do concreto na resistência ao esforço cortante
V_{sd}	– esforço cortante solicitante de cálculo
W_e	– trabalhos das forças externas;
W_i	– trabalhos das forças internas;

- x – altura da linha neutra da seção;
- z – braço de alavanca entre as resultantes de compressão no concreto e de tração no aço, provocadas pelo momento fletor atuante na seção;
- Z – “custo da solução” ou função objetivo;

ALFABETO GREGO

- α – ângulo de inclinação das bielas;
- α_i – ângulo que a barra de ordem i realiza com o eixo Ox ;
- δ – deslocamento;
- ε_c – encurtamento do concreto na fibra mais comprimida;
- ε_s – alongamento do aço da armadura principal de flexão;
- γ_c – coeficiente de ponderação da resistência do concreto;
- η – fator de correção;
- λ_C – fator de colapso;
- λ_L – fator estático;
- λ_U – fator cinemático;
- μ_{ta} – taxa de armadura transversal determinada segundo a teoria clássica de Morsch;
- $\mu_{ta,G}$ – taxa de armadura transversal corrigida (treliça generalizada);
- θ – rotação;
- σ_e – tensão de escoamento;
- ψ – coeficiente.