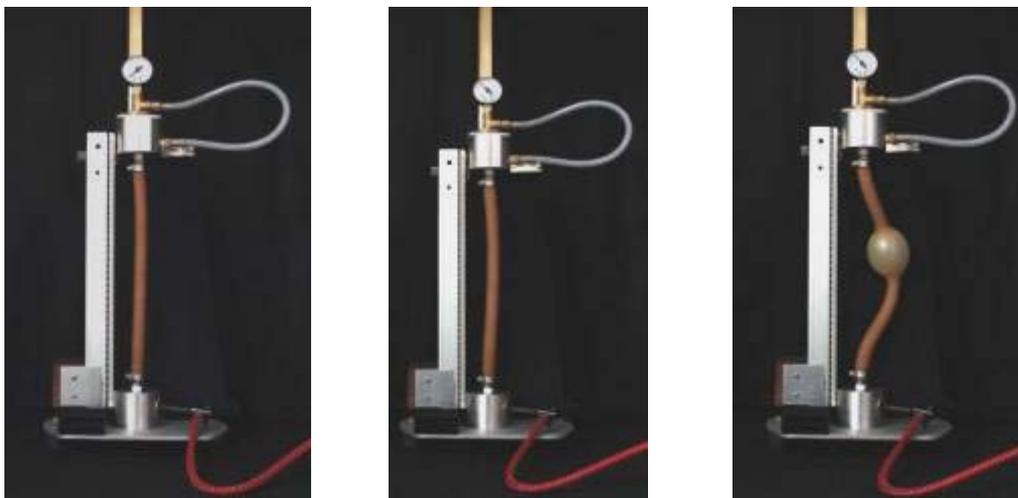


## 6 Análise de cascas cilíndricas hiperelásticas

### 6.1. Cascas cilíndricas perfeitas

#### 6.1.1. Análise experimental de cascas cilíndricas: ensaio de tração e pressão interna uniformes

A Figura 6.1 apresenta uma série de fotos de um ensaio de tração e pressão interna, para uma casca cilíndrica hiperelástica com raio externo de  $9.33 \text{ mm}$ , espessura de  $3.58 \text{ mm}$  e comprimento inicial de  $317 \text{ mm}$  ( $R/H = 2.63$ ), inicialmente sem tração e submetida a três níveis de pressão interna,  $P$  ( $\times 10^{-2} \text{ MPa}$ ).



(a)  
 $P = 0$

(b)  
 $P = 7.0$

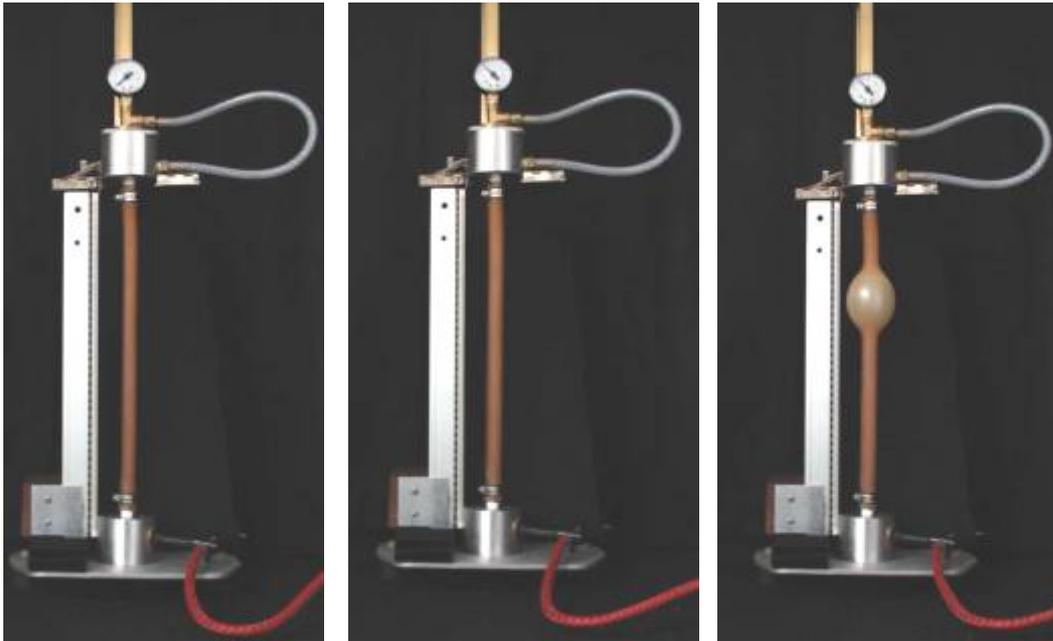
(c)  $P_{\text{cr}} = 13.0$   
 $P_{\text{final}} = 7.0$

Figura 6.1 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna inicialmente sem tração para a borracha  $B210$  ( $R/H = 2.63$ ,  $L/R = 34$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^{-2} \text{ MPa}$ ). Configuração inicial (a); configuração crítica (c).

Devido à inexistência de uma tração axial na casca e das imperfeições iniciais, após um determinado nível de pressão interna pode-se observar que a casca apresenta um comportamento global característico de uma coluna de Euler. Verifica-se, também, que até um nível de pressão de  $7.0 \times 10^{-2}$  MPa, a casca apresenta um acréscimo uniforme do diâmetro ao longo de praticamente todo o comprimento, predominando esforços de membrana. Contudo, em um dado instante, a membrana atinge um nível de pressão crítica e sofre uma mudança brusca de forma com o aparecimento de um bulbo situado ao longo do comprimento da casca, caracterizando assim uma flambagem local da estrutura. Após atingir a carga crítica, a pressão cai bruscamente atingindo um valor bem menor que o crítico. A formação deste bulbo ocorre em diversos problemas práticos, inclusive na formação de aneurismas.

### **6.1.2. Estudo dos efeitos da tração inicial**

Nas Figuras 6.2 a 6.4, mostram-se cascas submetidas a níveis crescentes de tração através de um deslocamento axial imposto. Verifica-se que, devido ao aumento de rigidez efetiva na direção axial, gerado pela aplicação da força de tração, e a conseqüente diminuição da influência das imperfeições geométricas iniciais nesta direção, não se observou, nestes casos, a flambagem global da estrutura. Apesar deste aumento de rigidez, conforme se pode observar comparando a Figura 6.2 e 6.3, a pressão crítica diminui à medida que a tração inicial aumenta devido, possivelmente, à maior influência da redução de espessura da casca nesta faixa de carregamento. Porém, a partir de um certo nível de tração axial, a pressão crítica volta a subir, como se pode observar, comparando os resultados apresentados nas Figuras 6.3 e 6.4. Este valor crítico de tração ocorre para um alongamento em torno de trinta por cento do comprimento inicial da casca. Verifica-se também que a formação do bulbo não tem um local fixo, variando para cada ensaio. Acredita-se que a variação do local onde se forma o bulbo seja devido à presença de imperfeições iniciais locais.

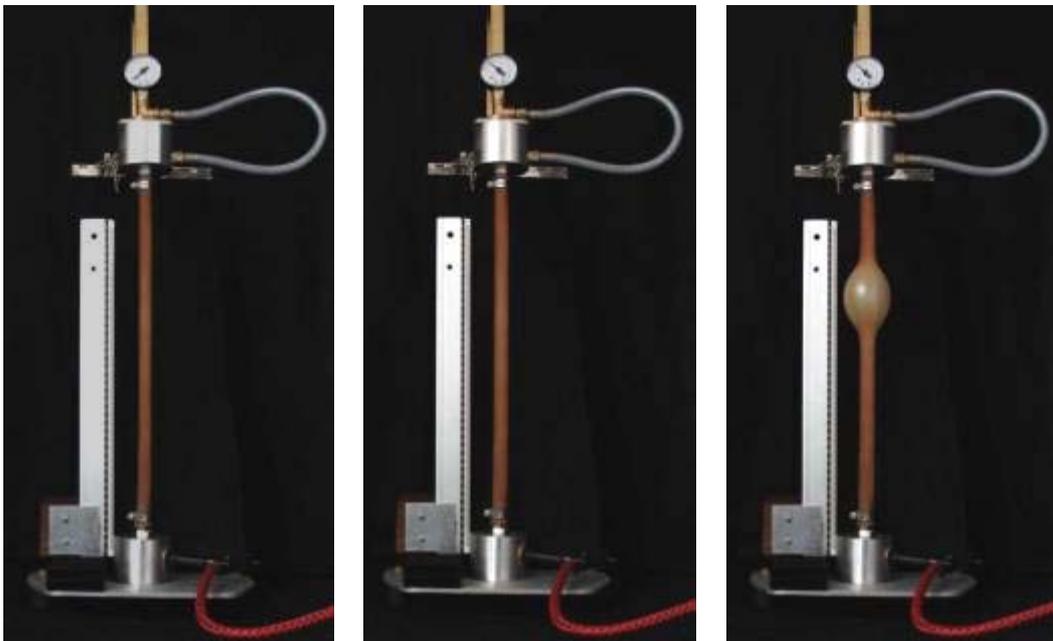


(a)  
 $P = 0$

(b)  
 $P = 7.0$

(c)  $P_{cr} = 12.0$   
 $P_{final} = 7.0$

Figura 6.2 – Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna com tração equivalente a  $\Delta L/L = 0.16$  para a borracha B210 ( $R_H = 2.63$ ,  $L_R = 34$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa). Configuração inicial (a); configuração crítica (c).



(a)  
 $P = 0$

(b)  
 $P = 7.0$

(c)  $P_{cr} = 11.4$   
 $P_{final} = 7.0$

Figura 6.3 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna com tração equivalente a  $\Delta L/L = 0.32$  para a borracha B210 ( $R_H = 2.63$ ,  $L_R = 34$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa). Configuração inicial (a); configuração crítica (c).

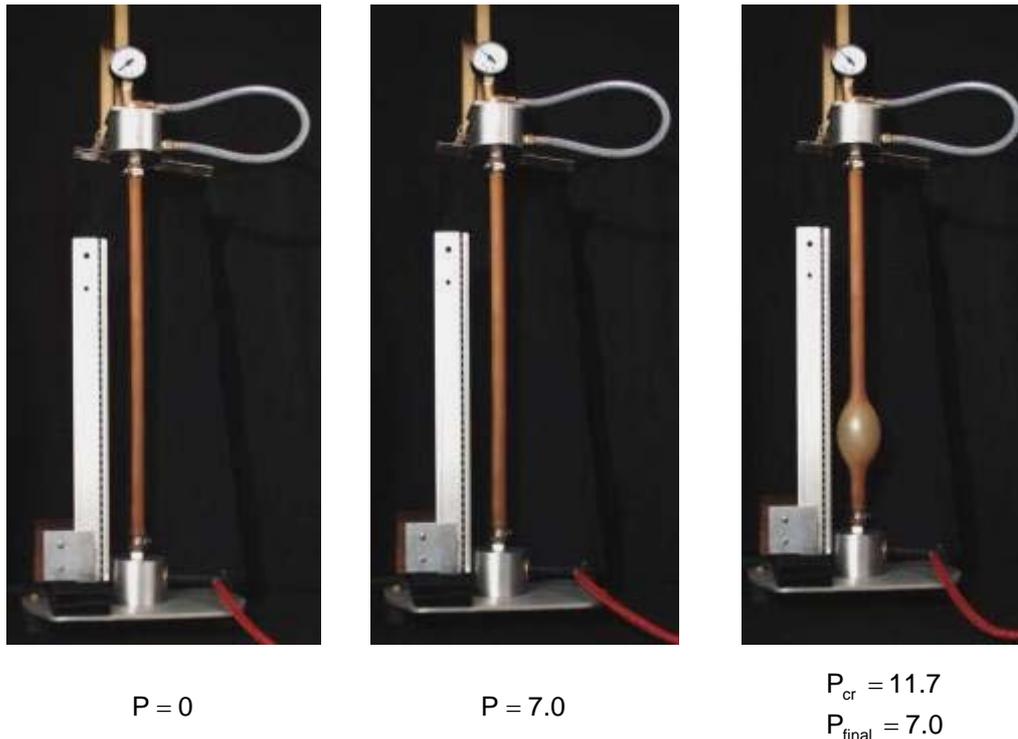


Figura 6.4 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna com tração equivalente a  $\lambda/L = 0.47$  para a borracha B210 ( $R_H = 2.63$ ,  $L/R = 34$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa). Configuração inicial (a); configuração crítica (c).

Para que se possa fazer um estudo paramétrico do comportamento de cascas cilíndricas, ensaios experimentais foram realizados em cascas com diversas relações raio/espessura. Os resultados obtidos experimentalmente são apresentados a seguir.

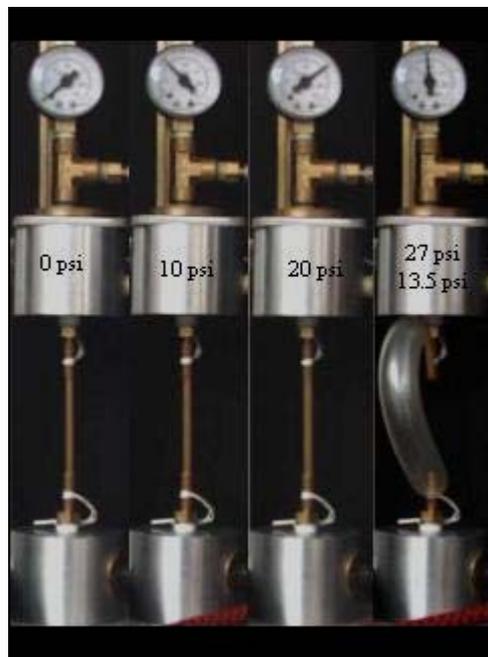
A Figura 6.5 mostra uma série de fotos de um ensaio para uma casca cilíndrica com diâmetro externo de  $4.84\text{mm}$ , espessura de  $1.22\text{mm}$  e comprimento inicial de  $80\text{mm}$ , inicialmente sem tração e submetida a três níveis de pressão interna (casca B200 ( $R_H = 2.0$ ,  $L/R = 34$ )). Verifica-se o mesmo comportamento global observado para a casca B210, com um leve aumento do raio da casca à medida que a pressão interna aumenta, até atingir um valor crítico quando há a formação do bulbo. Entretanto, neste caso, sendo a casca mais curta, o bulbo ocupa praticamente toda a extensão da casca.

Da mesma forma que a casca analisada anteriormente, esta foi submetida a vários níveis de tração, como ilustra a Figura 6.6.

O mesmo comportamento da casca analisada anteriormente é verificado. Entretanto, a formação do bulbo nesta série de ensaios ocorreu sempre na extremidade inferior da casca. Ainda não se sabe exatamente o motivo deste

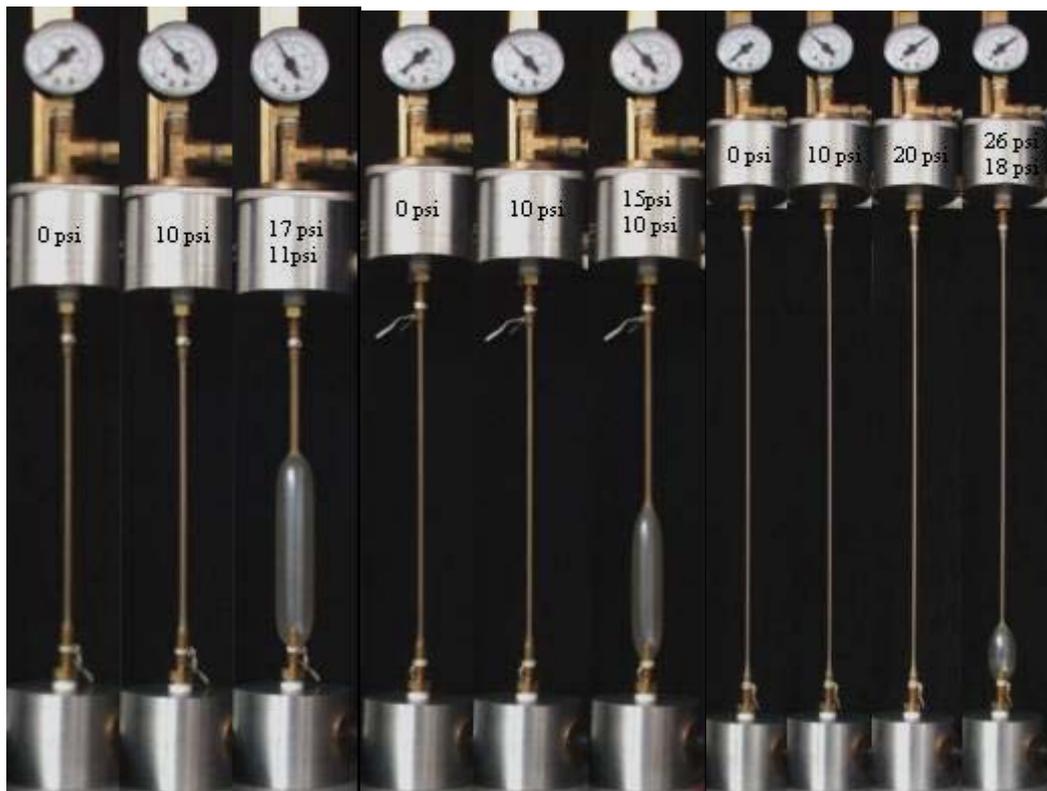
comportamento, mas uma das possíveis causas é o aumento do diâmetro inicial da extremidade inferior da casca causado pelo injetor de ar, uma vez que não foi possível confeccionar um bico para a aplicação da pressão tão fino quanto o diâmetro interno deste corpo de prova. Assim uma curvatura inicial negativa já existe antes mesmo de se aplicar a pressão. Outro fenômeno observado durante estes ensaios é que o comprimento do bulbo decresce com o nível de tração inicial aplicada.

Esses resultados experimentais permitem caracterizar o comportamento do material e observar o comportamento não-linear e diversos tipos de instabilidade que podem ocorrer em cascas cilíndricas hiperelásticas sob tração e pressão interna uniforme.



(a) (b) (c) (d)  $P_{cr} = 18.6$   
 $P = 0$   $P = 7.0$   $P = 13.8$   $P_{final} = 9.3$

Figura 6.5 – Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna inicialmente sem tração para o corpo de prova B200 ( $R_H = 2.0$ ,  $L_R = 34$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa). Configuração inicial (a); configuração crítica (d).



$P = 0$	$P = 7.0$	$P_{cr} = 11.7$	$P = 0$	$P = 7.0$	$P_{cr} = 10.3$	$P = 0$	$P = 7.0$	$P = 13.8$	$P_{cr} = 17.9$
		$P_{final} = 7.6$			$P_{final} = 7.0$				$P_{final} = 12.0$
	$\Delta L/L = 1.25$			$\Delta L/L = 1.87$			$\Delta L/L = 3.75$		

Figura 6.6 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B200 ( $R_H = 2.0$ ,  $L/R = 34$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa)

As Figuras 6.7 a 6.10 apresentam seqüências de fotos de ensaios realizados em laboratório com as cascas designadas por B204, B205, B207 e B209 que possuem relações raio/espessura distintas. O mesmo comportamento descrito para a casca B210 é observado. Como conclusão para esta série de ensaios, tem-se que, para todas as configurações analisadas a pressão crítica decresce com o aumento da tração, o bulbo de deformação se forma em pontos aleatórios ao longo do comprimento da casca e há também um ligeiro decréscimo no comprimento do bulbo de deformação com o aumento do nível de tração.

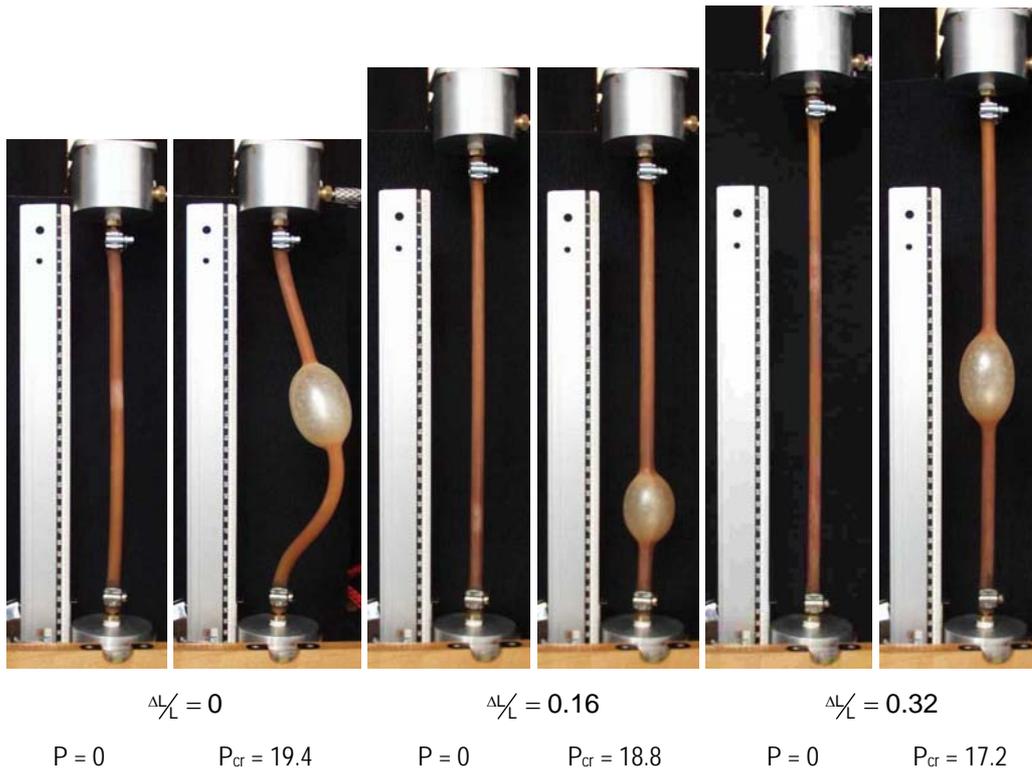


Figura 6.7 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B204 ( $R_H = 2.0$ ,  $L_R = 55$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa).

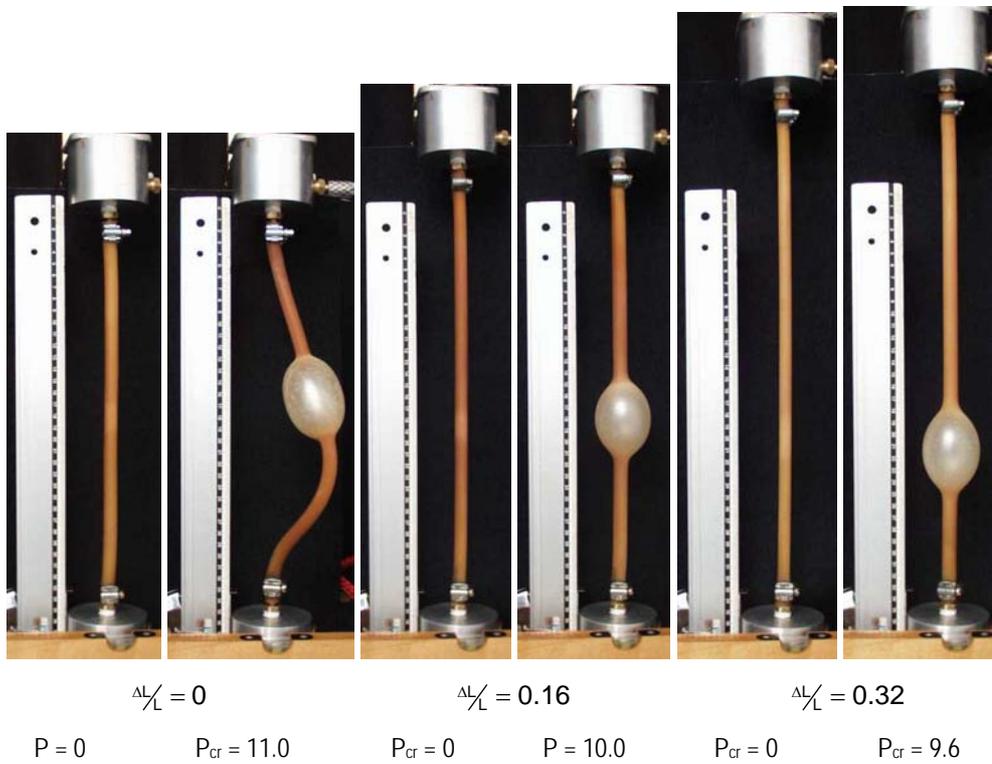


Figura 6.8 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B205 ( $R_H = 2.78$ ,  $L_R = 52.3$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa)

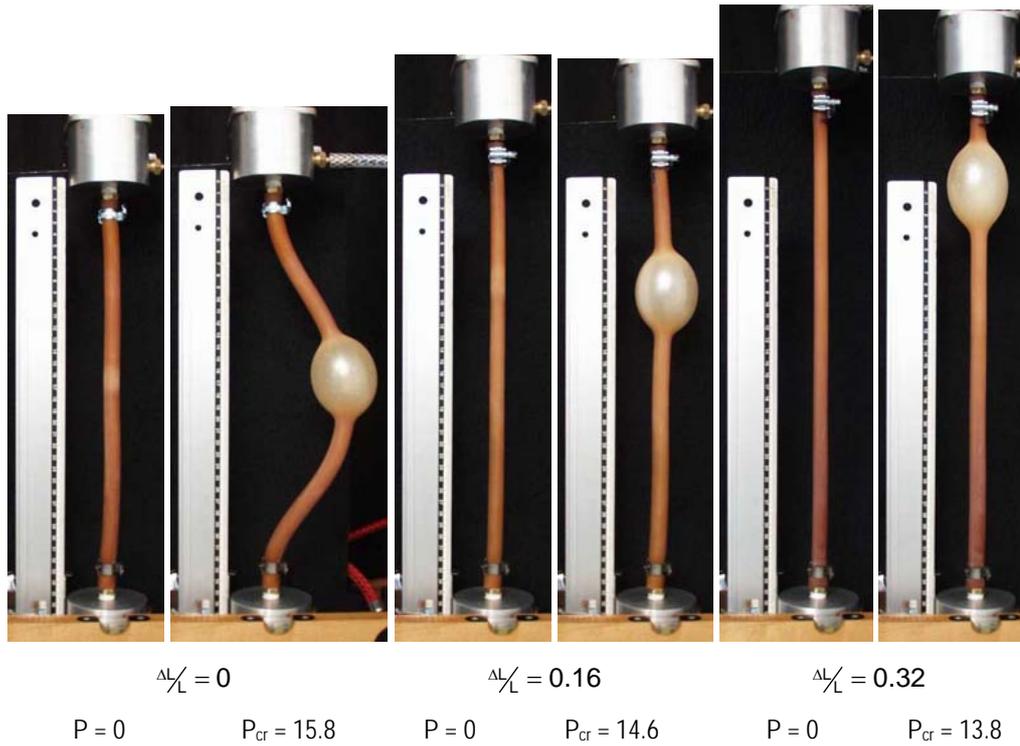


Figura 6.9 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B207 ( $R_H = 2.22$ ,  $L_R = 45.7$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa)

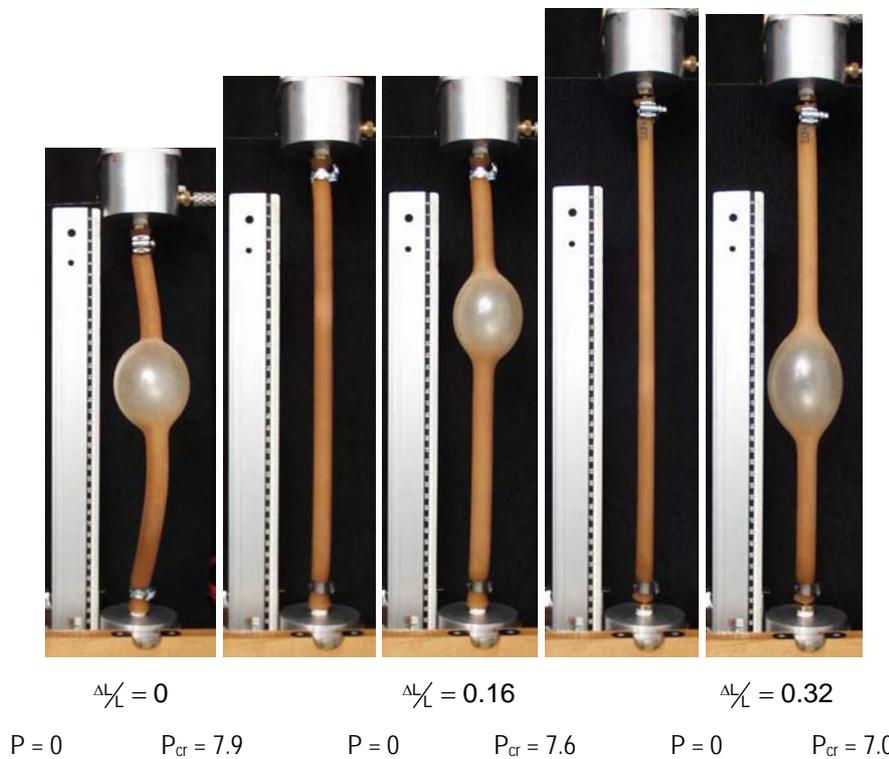


Figura 6.10 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B209 ( $R_H = 4.0$ ,  $L_R = 38$ ).  $P$ , pressão em ( $\times 10^2$  MPa)

No gráfico apresentado na Figura 6.11, observa-se o decréscimo da pressão crítica com o aumento do nível de tração para todas as configurações de cascas analisadas. Observa-se também, como esperado, que quanto maior a relação R/H menor é a pressão crítica da casca.

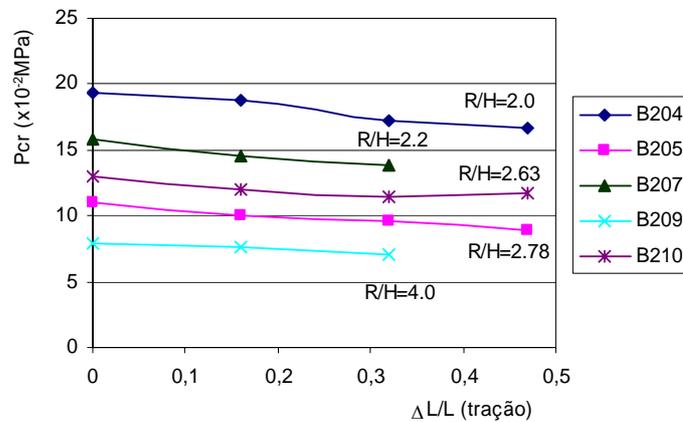


Figura 6.11 – Variação da pressão crítica com o nível de tração para as cascas analisadas experimentalmente

Na Figura 6.12 observa-se claramente o decréscimo de pressão crítica com o aumento da relação R/H para os níveis de tração analisados.

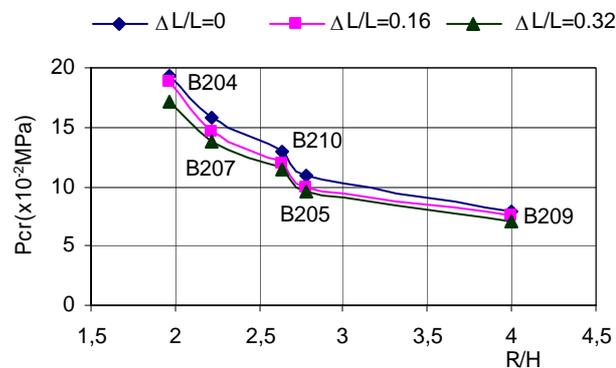


Figura 6.12 – Variação da pressão crítica com a relação R/H para três níveis de tração analisados

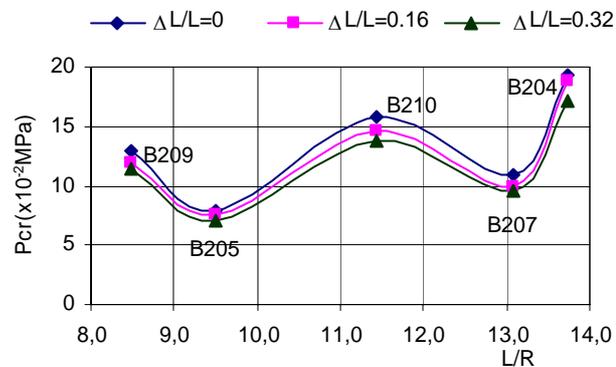


Figura 6.13 - Variação da pressão crítica com a relação L/R para três níveis de tração analisados

### 6.1.3.

#### Análise numérica de cascas cilíndricas tracionadas submetidas a pressões internas uniformes.

Para a aferição do modelo numérico utilizado, a casca B210 utilizada nos ensaios experimentais apresentados no item anterior é analisada numericamente através do programa de elementos finitos, ABAQUS.

Primeiramente um estudo da convergência da malha utilizada foi realizado para cada conformação de casca analisada. A Figura 6.14 apresenta o número de nós e elementos mínimos para os quais ocorre a convergência da solução, em termos de carga crítica.

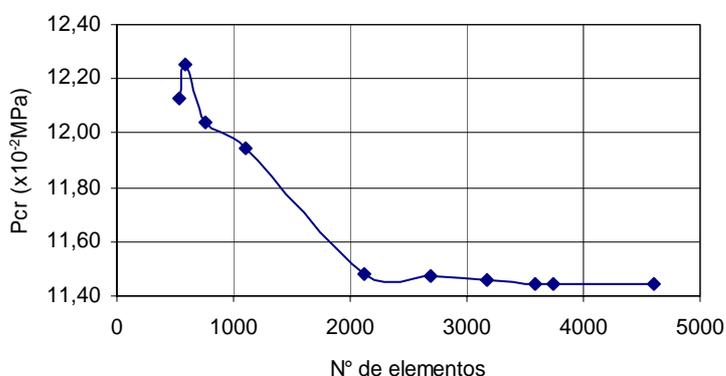


Figura 6.14 – Análise de convergência da carga crítica com o número de elementos da malha para a casca perfeita

Nota-se, através da Tabela 6.1 que a resposta apresenta uma boa convergência para a carga crítica para uma relação entre o comprimento do elemento e comprimento da casca ( $L_{ele}/L$ ), inferior a 0.95%, ou seja, números de elementos superiores a 2000.

$(L_{ele}/L) \times 100\%$	2.05	1.89	1.58	1.26	0.95	0.73	0.69	0.63
Nº nós	500	540	768	1120	2140	3614	3770	4640
Nº elementos	490	530	756	1106	2120	3588	3744	4611
Pcr (x10 <sup>-2</sup> MPa)	11.26	12.13	12.04	11.94	11.48	11.45	11.45	11.45

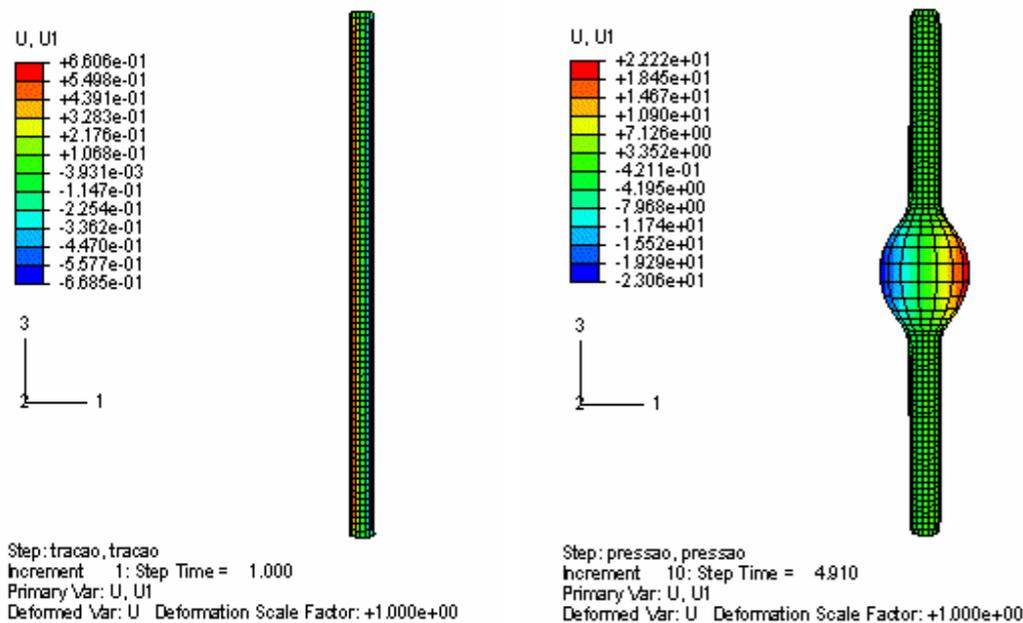
Tabela 6.1 – Convergência da carga crítica com o número de elementos da malha para uma casca perfeita

A análise numérica realizada no ABAQUS utiliza elementos de casca do tipo S4R e análise estática não-linear com utilização do método de Riks Modificado.

Na Figura 6.15 são apresentadas as deformadas, obtidas através programa ABAQUS, para uma casca (B210) de espessura de  $3.58\text{mm}$ , diâmetro externo de  $18.67\text{mm}$  e comprimento inicial de  $317\text{mm}$ , submetida a uma tração decorrente de um deslocamento longitudinal imposto equivalente a um  $\Delta L/L=0.16$ , para vários níveis de pressão interna (ver Figura 6.2 resultados experimentais).

Nesta análise foram gerados 2140 nós e 2120 elementos. Foram considerados três pontos de integração utilizando-se a quadratura de Gauss. Efeitos de não-linearidade geométrica também foram considerados.

A pressão máxima obtida numericamente assumiu um valor de noventa e cinco por cento da carga obtida experimentalmente, a saber,  $11.48 \times 10^{-2} \text{MPa}$ , o que representa uma excelente concordância entre os valores obtidos experimentalmente e os obtidos através da análise numérica. A modelagem matemática, portanto, pode ser considerada como bastante apropriada e as análises numéricas podem ser executadas com o nível de confiabilidade desejado.



(a)  $P = 0 \times 10^{-2} \text{MPa}$

(b)  $P_{cr} = 11.87 \times 10^{-2} \text{MPa}$

Figura 6.15 - Deformadas da casca B210 ( $R_H = 2.63$ ,  $L/R = 34$ ) geradas numericamente através do programa ABAQUS, para os três níveis de pressão e configuração obtida somente para esforço de tração (a).

Na análise numérica, a casca não possui imperfeições e a pressão é aplicada uniformemente. Assim observa-se que não há variação do local de formação do bulbo. Em todas as análises já realizadas ele sempre aparece na

região central da casca. Posteriormente serão introduzidas imperfeições geométricas na casca para que sejam analisados os efeitos que elas provocam na deformação e qual a sua influência no valor da carga crítica.

#### 6.1.4.

#### **Análise paramétrica de cascas cilíndricas tracionadas e sob pressão interna**

##### 6.1.4.1.

##### **Influência da variação da espessura indeformada**

É realizado, utilizando-se o programa de elementos finitos ABAQUS, um estudo da influência da variação da espessura, mantendo-se o raio e o comprimento constantes, no comportamento de cascas cilíndricas submetidas a uma tração constante equivalente a um deslocamento axial imposto correspondente a um  $\Delta L/L=0.16$  e a pressões internas uniformes. Foi escolhida uma casca com comprimento inicial indeformado de  $L=317\text{mm}$  e raio indeformado de  $R=9.33\text{mm}$  ( $L/R=34$ ), inicialmente com uma espessura de  $H=1.0\text{mm}$ . Uma variação seqüencial na espessura da casca de  $0.5\text{mm}$  é realizada até que ela finalmente atinja uma espessura de  $3.5\text{mm}$  como mostra a relação apresentada na Tabela 6.2.

H (mm)	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.58
R/H	9.33	6.22	4.67	3.73	3.11	2.63
L/H	317	211	158	127	106	91

Tabela 6.2 - Variação das espessuras das cascas hiperelásticas e relações R/H e L/H analisadas

Na Figura 6.16 é apresentada a variação da pressão interna uniforme com o deslocamento radial máximo ( $U_r$ ) sofrido pela casca para diversas espessuras de casca (ver legenda). Observa-se que a pressão crítica cresce de forma significativa com o aumento da espessura. São apresentados também os pontos de pressão crítica e pressão final obtidos experimentalmente para a casca B210.

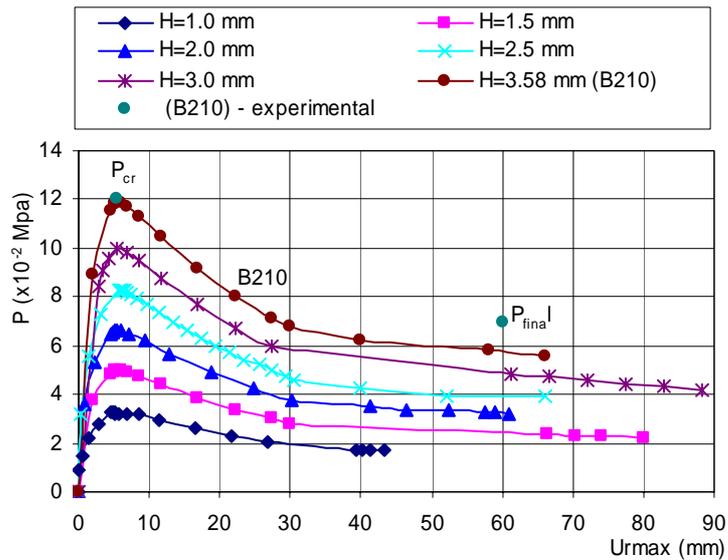


Figura 6.16 - Curvas carga-deslocamento radial máximo para cascas de espessuras variando entre  $1 \leq H \leq 3.5$  mm, ou seja,  $9.33 \leq R/H \leq 33.4$  e  $L/R = 34$  constante.

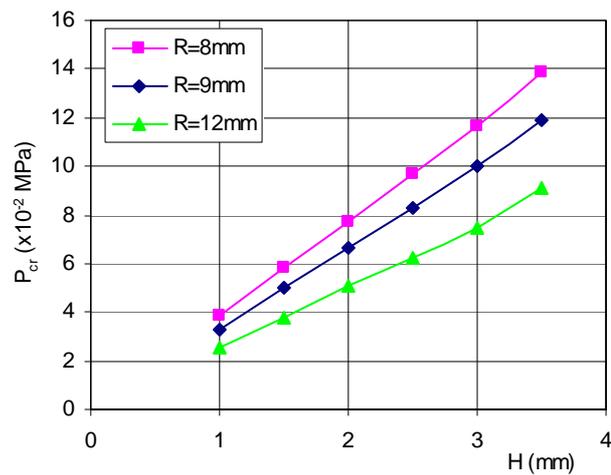


Figura 6.17 - Variação da pressão crítica com a espessura das cascas para três valores distintos do raio  $R$ .

A Figura 6.7 mostra a variação da carga crítica com a espessura de cascas para três valores distintos do raio,  $R$ . Nota-se que, para as configurações escolhidas, a variação da pressão crítica com a espessura da casca é praticamente linear.

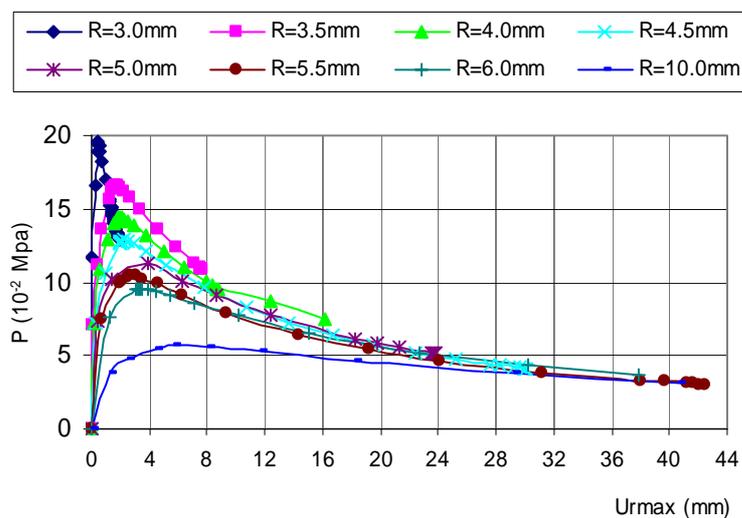
### 6.1.4.2. Influência da variação do raio indeformado

Utilizando-se também o programa de elementos finitos ABAQUS, um estudo da influência da variação do raio em cascas cilíndricas, mantendo-se a espessura e o comprimento constantes, submetidas a uma tração constante equivalente a um deslocamento imposto correspondente a um  $\Delta L/L=0.16$  e a pressões uniformes internas, é apresentado. Foi escolhida uma casca com comprimento inicial indeformado de  $L = 200\text{mm}$  e espessura indeformada de  $H = 2\text{mm}$  inicialmente com uma raio de  $R = 3.0\text{mm}$  ( $L/H = 100$ ). Variando-se o raio da casca de 0.5mm até atingir 6mm (Tabela 6.3) chega-se aos resultados apresentados na Figura 6.18.

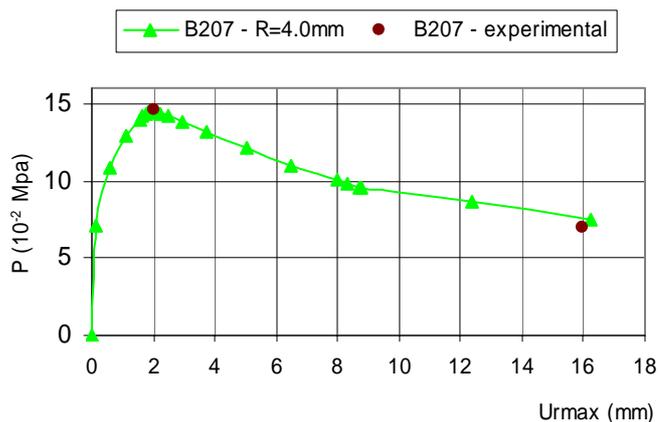
R(mm)	3.0	3.5	4.0	4.5	<b>5.0</b>	5.5	6.0	10.0	30
R/H	1.50	1.75	2.00	2.25	<b>2.50</b>	2.75	3.00	5.00	15.0
L/R	67.0	57.0	50.0	44.5	<b>40.0</b>	36.4	33.3	20.0	6.67

Tabela 6.3 - Variação das espessuras analisadas e relações R/L e L/H

Através da Figura 6.18, pode-se observar que há um decréscimo da pressão crítica com o aumento do raio da casca.



(a)



(b)

Figura 6.18- (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo para uma casca com raio variando entre  $3\text{mm} \leq R \leq 10\text{mm}$ , ou seja,  $1.5 \leq R/H \leq 5.0$  e (b) comparação entre a análise numérica e experimental para a casca B207

A Figura 6.19 mostra claramente o decréscimo da carga crítica com o raio. Para um aumento de 30% em relação ao menor raio admitido houve um decréscimo de 34% na pressão crítica.

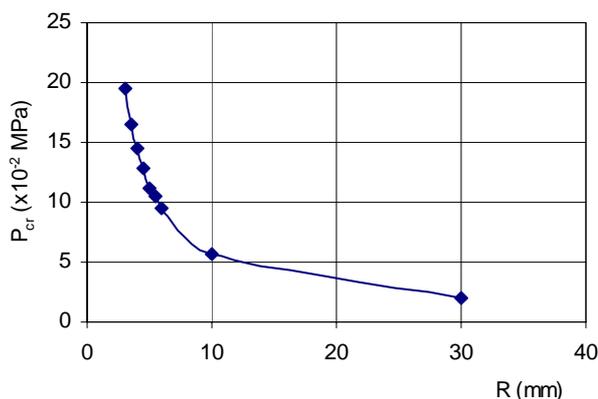


Figura 6.19 - Variação da carga crítica com o raio indeformado, R.

Porém, através da análise no programa de elementos finitos ABAQUS, nota-se uma mudança de configuração no modo de flambagem da casca quando o raio atinge uma magnitude de 5.0mm. Para tamanhos de raio, admitidos nesta análise menores ou maiores que este valor, a configuração deformada apresenta a formação de apenas um bulbo na região central da casca e para a configuração deformada, para um raio de 5.0mm, a casca apresenta a formação de dois bulbos ao longo do comprimento do cilindro como é ilustrado na Figura 6.20. Pequenas variações na vizinhança deste valor levaram a configurações com apenas um bulbo de pressão.

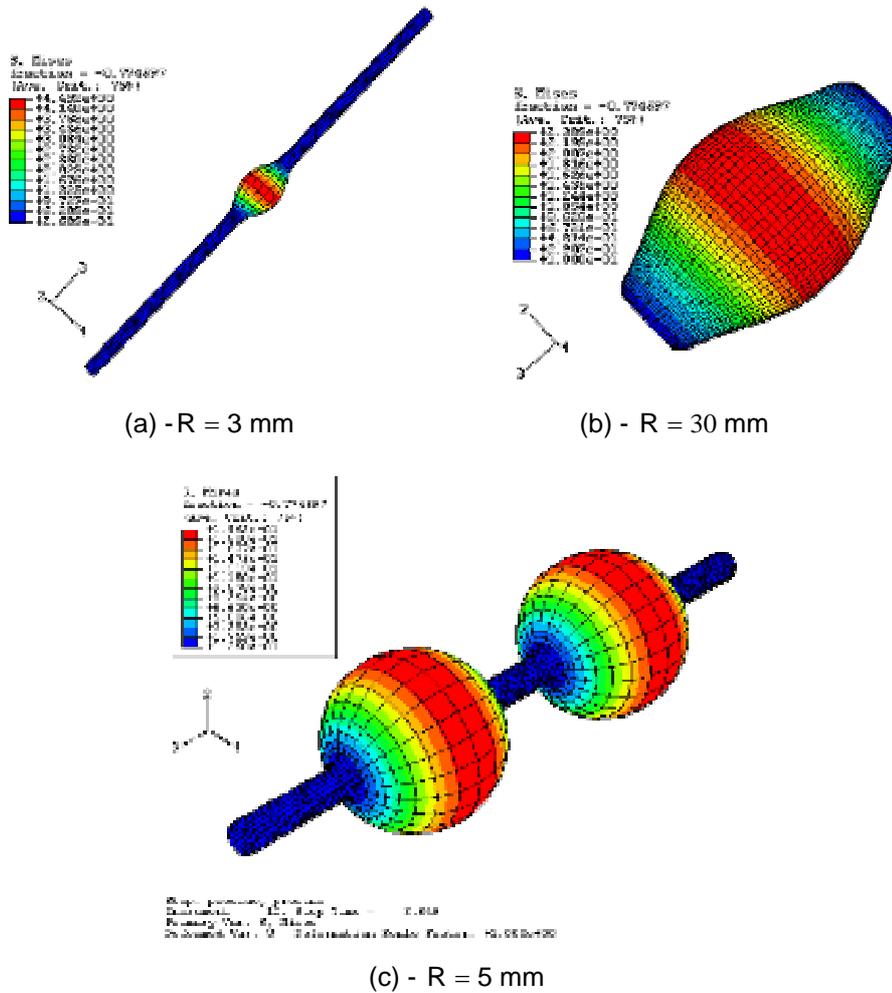


Figura 6.20 – Configuração de formada obtida numericamente, através do programa ABAQUS, para cascas com raios indeformados de  $R = 3, 30$  e  $5\text{mm}$

É apresentada também na Figura 6.21 a variação do deslocamento radial máximo com a pressão crítica para os valores de raio analisados.

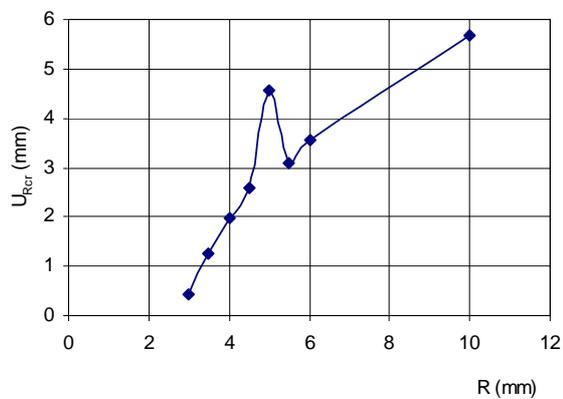


Figura 6.21 – Variação do deslocamento radial, quando a pressão atinge níveis críticos  $U_{Rcr}$ , com os raios analisados.

Outro fato a ser observado é que, além da mudança no modo de deformação, ocorre também um súbito acréscimo na amplitude da deformação radial quando o raio atinge a dimensão de 5.0 mm.

### 6.1.4.3. Influência da variação do comprimento indeformado

Novamente, utilizando-se o programa ABAQUS, um estudo da influência da variação da altura em cascas com espessura e raio constantes submetidas a uma tração constante correspondente a um deslocamento imposto de  $\Delta L/L=0.16$  e a pressão interna uniforme é apresentado. Foi escolhida uma casca com raio indeformado de  $R = 5.5\text{mm}$  e espessura indeformada de  $H = 2\text{mm}$  ( $R/H = 2.75$ ), inicialmente com um comprimento de  $L = 200\text{mm}$ . Variando-se o comprimento da casca de 50mm até atingir 1000mm (Tabela 6.4) chega-se aos resultados apresentados na Figura 6.22.

L(mm)	50	200	250	300	400	<b>500</b>	600	800	1000
L/H	25	100	125	150	200	<b>250</b>	300	400	500
L/R	9.09	36.4	45.5	54.5	72.7	<b>90.9</b>	109.1	145.5	181.8

Tabela 6.4 – Variação das espessuras analisadas e relações L/H e L/R

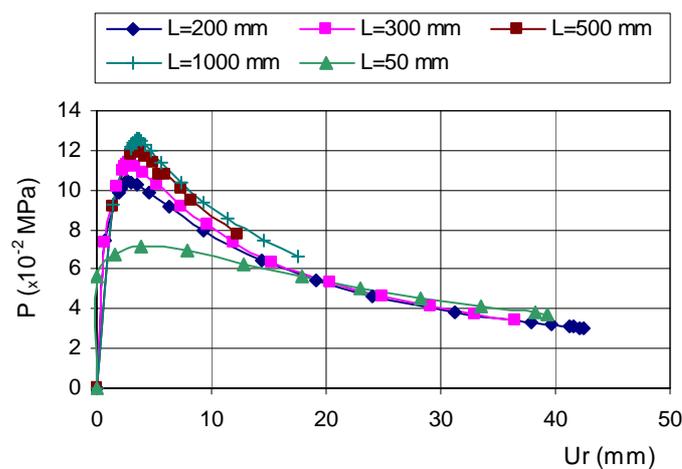


Figura 6.22 – Curva pressão-deslocamento radial máximo para cascas de comprimentos que variam de  $100 \leq L \leq 1000\text{mm}$

Pela Figura 6.22 observa-se um pequeno aumento da carga crítica com o aumento do comprimento da casca.

Como no caso anterior, para um comprimento de casca de 500 mm há uma mudança no modo de deformação da casca. Observa-se, na Figura 6.23, que quando o comprimento da casca é de 500mm há uma formação de quatro bulbos uniformemente distribuídas ao longo da casca.

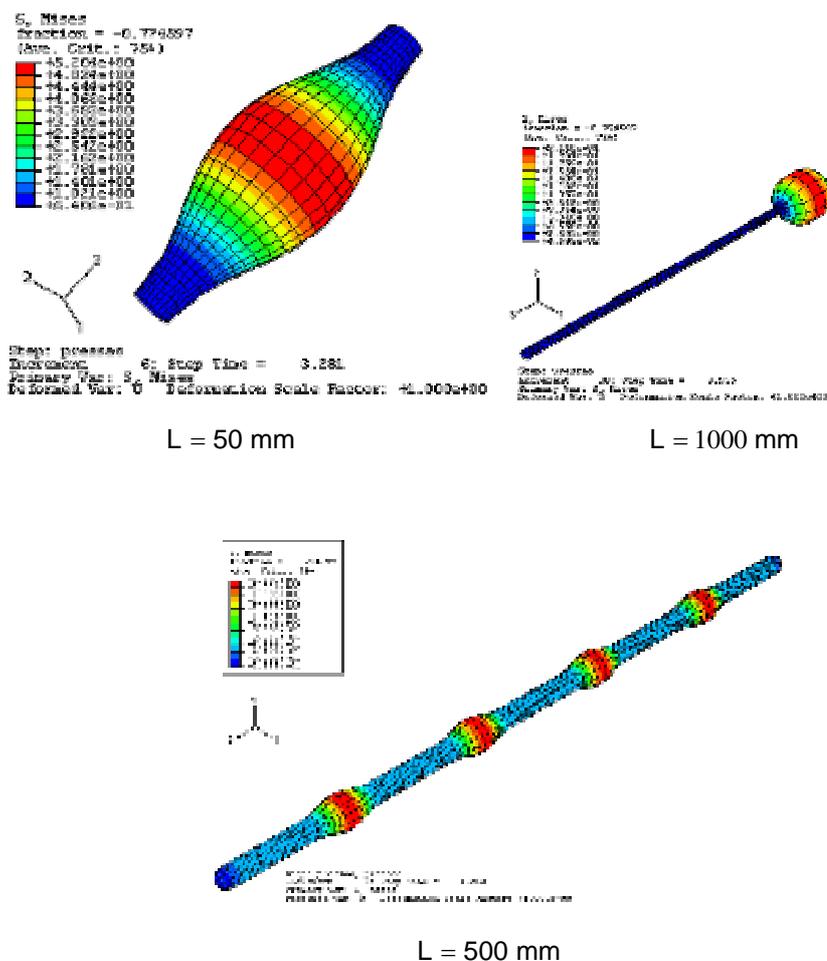


Figura 6.23 – Modo de deformação obtido numericamente, através do programa ABAQUS, para cascas com comprimentos indeformados de L= 50, 1000 e 500mm

A Figura 6.24 apresenta a variação da pressão crítica com o comprimento da casca. Nota-se que, quanto maior o comprimento da casca, maior é a carga crítica.

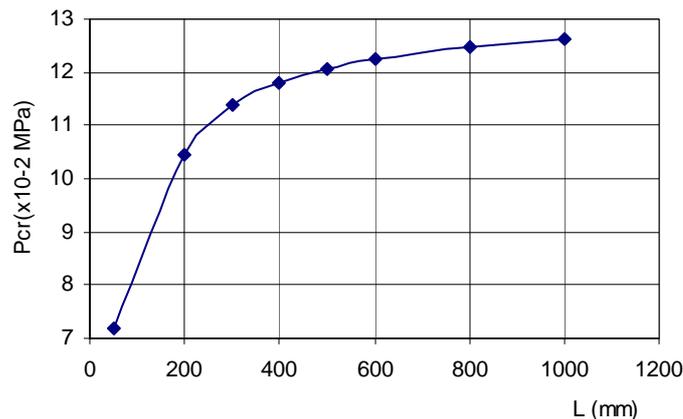


Figura 6.24 – Variação da pressão crítica com o comprimento da casca

## 6.2. Casca hiperelástica com imperfeições iniciais

Nos itens anteriores foi realizado um estudo paramétrico do comportamento não-linear de cascas consideradas perfeitas em função dos parâmetros geométricos da casca. Foram também mostradas comparações entre os dados numéricos e experimentais. Sendo pequenas as imperfeições nos corpos de prova analisados, obteve-se sempre uma boa comparação entre resultados teóricos e experimentais. Entretanto, as imperfeições geométricas iniciais podem ter uma influência marcante no comportamento da estrutura, como acontece na análise de cascas esbeltas. Koiter foi o primeiro a desenvolver uma teoria que explica de forma racional, com base nas imperfeições, a discrepância entre resultados teóricos e experimentais na flambagem de certas estruturas, dentre as quais cascas cilíndricas axialmente comprimidas e cascas esféricas submetida a pressão uniforme externa. A teoria de Koiter permite determinar o tipo de bifurcação que ocorre ao se atingir o primeiro ponto de bifurcação ao longo de um caminho fundamental de equilíbrio e verificar a sensibilidade dessa carga crítica a imperfeições geométricas iniciais.

Nesta etapa são analisadas numericamente e experimentalmente a sensibilidade da carga crítica a imperfeições geométricas iniciais em cascas cilíndricas hiperelásticas espessas. Cabe ressaltar que não foi encontrada qualquer referência

bibliográfica que tratasse do efeito de imperfeições iniciais em membranas e cascas hiperelásticas. As imperfeições nestas estruturas podem ser globais ou locais. Resolveu-se, em virtude de sua importância em diversos problemas práticos, se analisar nesta tese com mais profundidade o efeito de imperfeições locais. São consideradas imperfeições locais assimétricas e axi-simétricas.

### 6.2.1. Estudo de imperfeições locais – diminuição da espessura da casca

Para se estudar o efeito de imperfeições locais, foi produzida na casca hiperelástica, com o auxílio de uma lixadeira elétrica, uma imperfeição local em forma de anel. A casca contendo imperfeições geométricas iniciais é tracionada e posteriormente preenchida com ar, através do apoio inferior. O ensaio é repetido para cinco posições da imperfeição,  $Z_i$ , como mostra a Figura 6.25. Estas posições se localizam a distâncias que variam de  $0.02L$  a  $0.45L$  do apoio superior da membrana, como mostra a Tabela 6.5.

A casca é constituída por um material homogêneo, isotrópico e incompressível (tubo cilíndrico de látex). São utilizadas as configurações das cascas designadas como borracha B210 ( $\frac{R}{H} = 2.63$ ) cujas dimensões são apresentadas na Tabela 4.5 com comprimento inicial indeformado de  $L = 200\text{mm}$ , ou seja, ( $\frac{L}{R} = 22$ ).

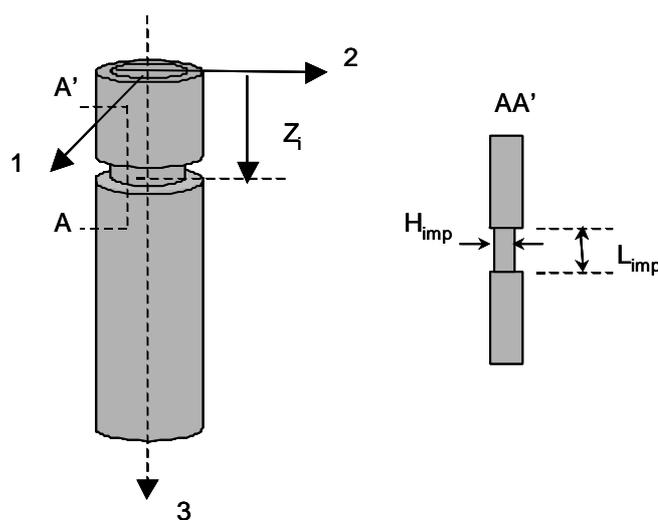


Figura 6.25 – Representação gráfica das posições de imperfeições locais axissimétricas em forma de anel

A Tabela 6.5 relaciona a designação da posição à sua distância ao bordo inferior da casca de 200mm de comprimento.

posição da imperfeição	distância do apoio
$Z_1$	0.02L
$Z_2$	0.05L
$Z_3$	0.20L
$Z_4$	0.30L
$Z_5$	0.45L

Tabela 6.5 – Posições das imperfeições e suas respectivas distâncias em relação ao apoio inferior da casca medidas em porcentagem do comprimento da casca (%L)

Fotos dos ensaios típicos para cascas com imperfeições nas posições citadas, submetida a esforços de tração e pressão interna são apresentadas nas Figuras 6.26 a 6.28. São apresentados estágios de pressão nula e crítica para cada um dos corpos de prova.

Nota-se que para imperfeições nas posições  $Z_1$  e  $Z_2$  a formação do bulbo de deformação ocorre fora do local da imperfeição. Entretanto para as posições  $Z_3$  a  $Z_5$ , nota-se que o bulbo se forma exatamente no local onde foi gerada a imperfeição. O que será também verificado no item seguinte durante a análise numérica.



Perfeita

(a) -  $P = 0$

(b) -  $P_{cr} = 11.8$

Figura 6.26 – Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para casca perfeita B210 ( $\beta_H = 2.63$ ,  $L/R = 22$ ). Configuração inicial (a); configuração crítica (b).


 $Z_1 = 0.02L$ 
 $Z_2 = 0.05L$ 
(a) -  $P = 0$ (b) -  $P_{cr} = 11.98$ (c) -  $P = 0$ (d) -  $P_{cr} = 11.67$ 

Figura 6.27 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para a casca B210 ( $R_H = 2.63$ ,  $L/R = 22$ ) com imperfeição inicial nas posições  $Z_1 = 0.02L$ (a,b) e  $Z_2 = 0.05L$ (c,d) . Configuração inicial (a,c); configuração crítica (b,d).


 $Z_3 = 0.20L$ 
(a) -  $P = 0$ (b) -  $P_{cr} = 11.43$



(c) -  $Z_4 = 0.30L$        $Z_5 = 0.45L$   
 (d) -  $P = 0$        $P_{cr} = 11.3$       (e) -  $P = 0$       (f) -  $P_{cr} = 11.33$

Figura 6.28 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para a casca B210 ( $R_H = 2.63$   $L_R = 22$ ) com imperfeição inicial nas posições  $Z_3 = 0.20L$  (a,b)  $Z_4 = 0.30L$  (c,d) e  $Z_5 = 0.45L$  (e,f). Configuração inicial (a,c,e); configuração crítica (b,d,f).

O gráfico apresentado na Figura 6.29 mostra a variação da carga crítica com a distância da imperfeição em relação ao apoio. Nota-se que para a posição  $Z_1$  a carga crítica sofre um ligeiro acréscimo em relação à casca sem imperfeições, fato este, que também foi notado posteriormente na análise numérica.

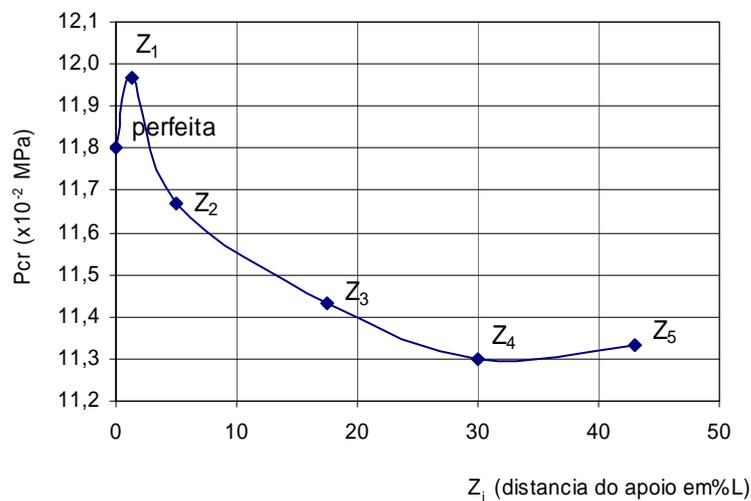


Figura 6.29 – Variação da carga crítica experimental com as posições da imperfeição. ( $0.02 \leq Z_i \leq 0.45L$ ).

### 6.2.2.

#### Análise numérica de imperfeição local axissimétrica em forma de anel ao longo do comprimento da casca

A seguir foi realizado um estudo numérico considerando-se uma imperfeição em forma de anel ao longo do comprimento da casca, como mostra a Figura 6.30. Este estudo é realizado em três etapas: na primeira etapa é considerado o efeito da variação da posição da imperfeição ( $Z_i$ ) ao longo do comprimento da casca, depois o efeito da espessura do anel ( $H_{imp}$ ) e finalmente o efeito do comprimento de imperfeição ( $L_{imp}$ ). Este estudo é também realizado considerando-se dois casos:

- Caso 1 - onde a imperfeição é gerada através da diminuição da espessura da casca;
- Caso 2 - onde a imperfeição é gerada através de um acréscimo na espessura da casca.

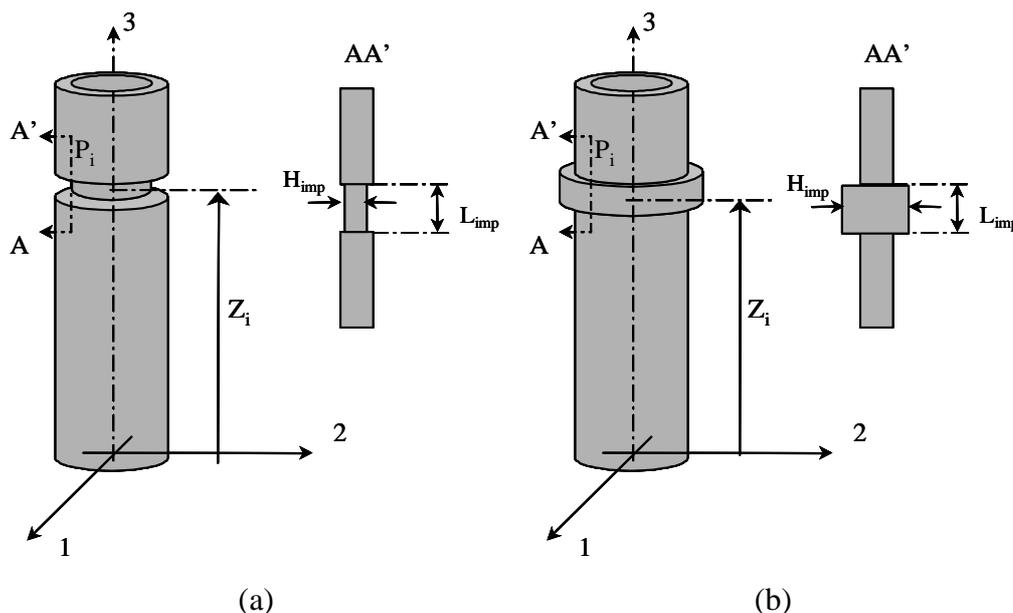


Figura 6.30 – Representação gráfica de uma imperfeição axissimétrica com redução (a) e acréscimo (b) na espessura da casca

Novamente uma análise de convergência da malha é realizada.

$(\frac{L_{ele}}{L}) \times 100\%$	3.3	3	2.7	2.5	2	1.5	1.3	1.2	1.1
Nº Nós	320	340	370	492	714	1360	1650	1716	2016
Nº Elementos	310	330	360	480	700	1340	1628	1694	1992
$P_{cr} (\times 10^{-2} \text{MPa})$	11.40	11.41	11.40	11.24	11.14	11.05	11.03	11.03	11.03

Tabela 6.6 – Análise de convergência para uma membrana com imperfeição em forma de anel

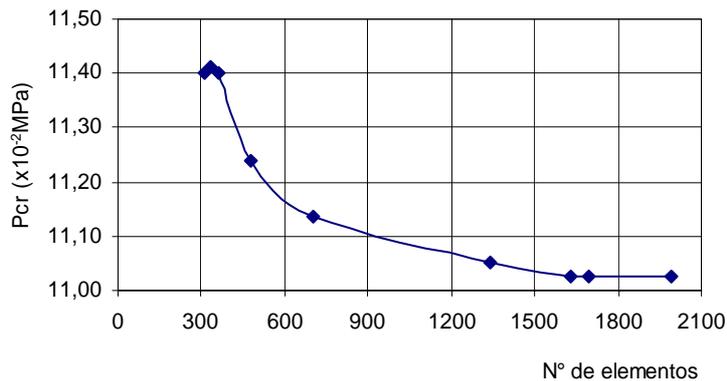


Figura 6.31 – Curva de convergência da carga crítica com o número de elementos para cascas com imperfeição em forma de anel.

Observa-se que há uma boa convergência para a carga crítica para um número de elementos acima de 1340. Portanto, para as análises realizadas a seguir foram utilizados 1992 elementos de casca do tipo S4R compostos por 2016 nós.

#### 6.2.2.1.

#### Efeito da variação da posição da imperfeição local ao longo do comprimento da casca, $Z_i$

##### Caso 1: diminuição na espessura da casca.

Em uma casca com espessura indeformada de  $H = 3.5\text{mm}$ , raio indeformado de  $R = 9\text{mm}$  ( $R/H = 2.63$ ) e comprimento indeformado de  $L = 200\text{mm}$  ( $t/R = 22$ ), submetida a uma tração correspondente a um alongamento  $\Delta L/L = 0.16$  e a pressão interna uniforme, são analisados os efeitos de imperfeições na forma de anel localizadas em posições ( $Z_i$ ) que variam de  $0.02L$  a  $0.45L$  de distância em relação ao apoio inferior da casca (Figura 6.32). A imperfeição possui espessuras que variam de  $H_{imp} = 1.5$  a  $3\text{mm}$  ou  $H_{imp} = 0.40H$  a  $0.85H$ , sendo  $H$  a espessura da casca indeformada. Para a altura da imperfeição consideram-se dois valores:  $L_{imp} = 5\text{mm}$ , ou seja,  $L_{imp} = 0.025L$ , onde  $L$  é o comprimento indeformado da casca.

A Tabela 6.7 relaciona a designação da posição à sua distância ao bordo superior da casca de  $200\text{mm}$  de comprimento.

posição da imperfeição	distância do apoio
$Z_1$	0.02L
$Z_2$	0.05L
$Z_3$	0.20L
$Z_4$	0.30L
$Z_5$	0.45L

Tabela 6.7 – Posições das imperfeições e suas respectivas distâncias em relação ao apoio inferior da casca expressas em porcentagem do comprimento inicial da casca (%L)

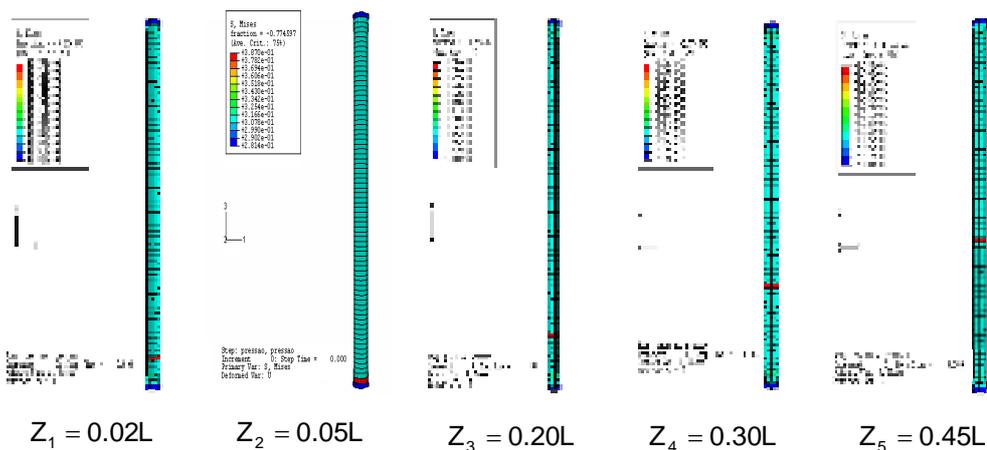


Figura 6.32 – Posições dos anéis de imperfeição representadas na cor vermelha e evidenciadas através do programa ABAQUS após a aplicação da tração

A Figura 6.33 mostra a curva pressão-deslocamento radial máximo para as diversas posições de imperfeição adotadas, bem como a curva para a casca perfeita. Nota-se que, quanto mais próxima do apoio se encontra a imperfeição, menor é a sua influência na pressão crítica.

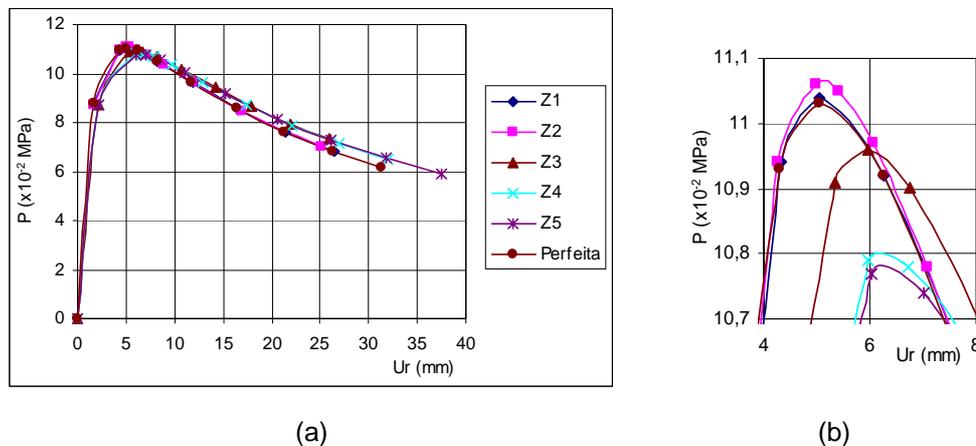


Figura 6.33 – (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo de uma casca com imperfeição em forma de anel localizada em diversas posições ao longo do comprimento da casca B210 ( $\frac{h}{R} = 0.38$ ,  $\frac{L}{R} = 22$ ) (b) e detalhe da região de pressões máximas atingidas.

Observa-se também, na Figura 6.34 que, para uma imperfeição de espessura  $H_{imp} = 0.15H$  nas posições  $Z_1$  e  $Z_2$ , a formação do bulbo de deformação ocorre, como para a casca perfeita, na região central da casca. No entanto para as posições  $Z_3$ ,  $Z_4$  e  $Z_5$  o bulbo se forma na posição onde se encontra o anel de imperfeição. Para as demais espessuras de imperfeição analisadas, a formação do bulbo só ocorre na região central para a posição  $Z_1$ .

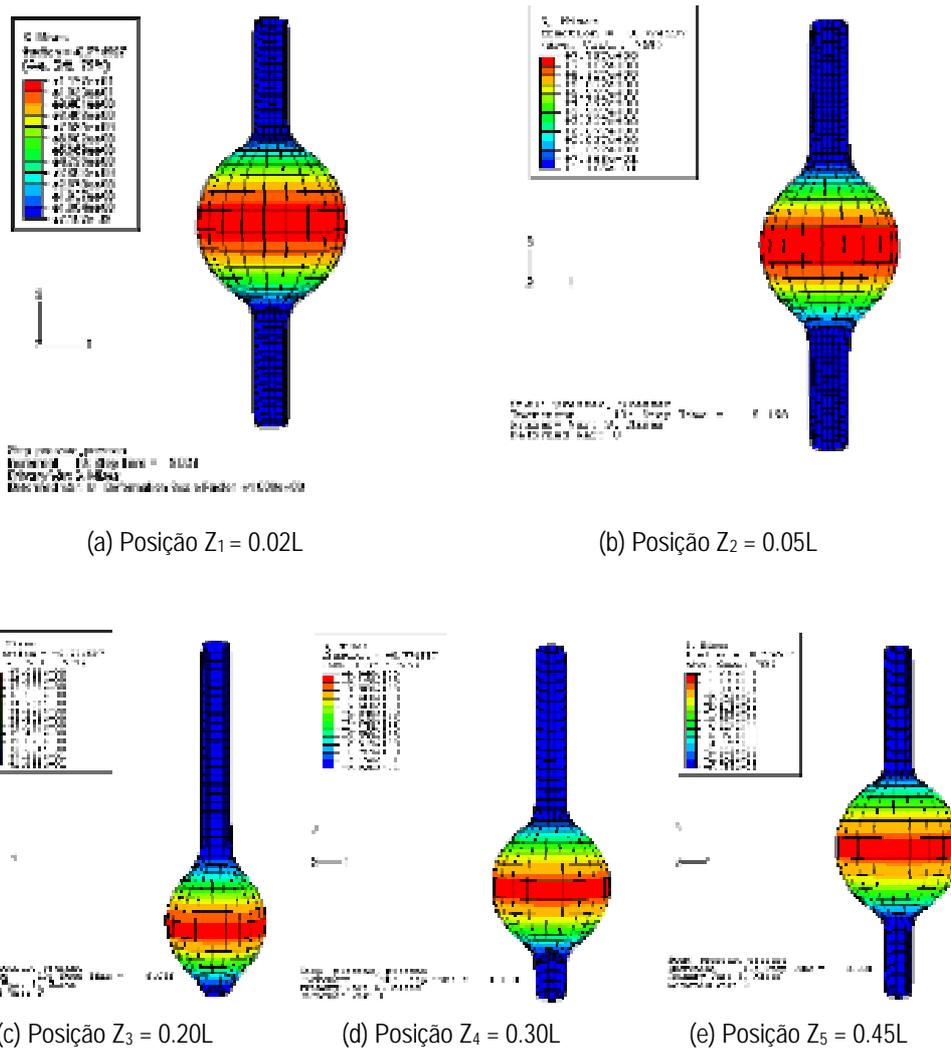


Figura 6.34- Deformadas de uma casca cilíndrica com espessura de imperfeição de  $H_{imp} = 0.15H$ , obtidas através do programa ABAQUS, para as posições  $Z_1$  a  $Z_5$  respectivamente

A Figura 6.35 mostra a variação da pressão crítica com a posição da imperfeição para várias espessuras de imperfeição.

Nota-se que há um pequeno acréscimo da pressão crítica para as posições  $Z_1$  e  $Z_2$  em relação à casca perfeita quando se tem uma espessura de imperfeição de entre  $H$  e  $0.85H$ . Cabe observar que estas posições estão muito próximas a um dos apoios. No entanto, para as demais espessuras de imperfeição o acréscimo na pressão crítica ocorre unicamente para a posição  $Z_1$ . Nas demais posições ocorre um decréscimo da pressão crítica à medida que a imperfeição se distancia do apoio. Este decréscimo de pressão é acompanhado também de uma mudança no modo de deformação da casca (Figura 6.34).

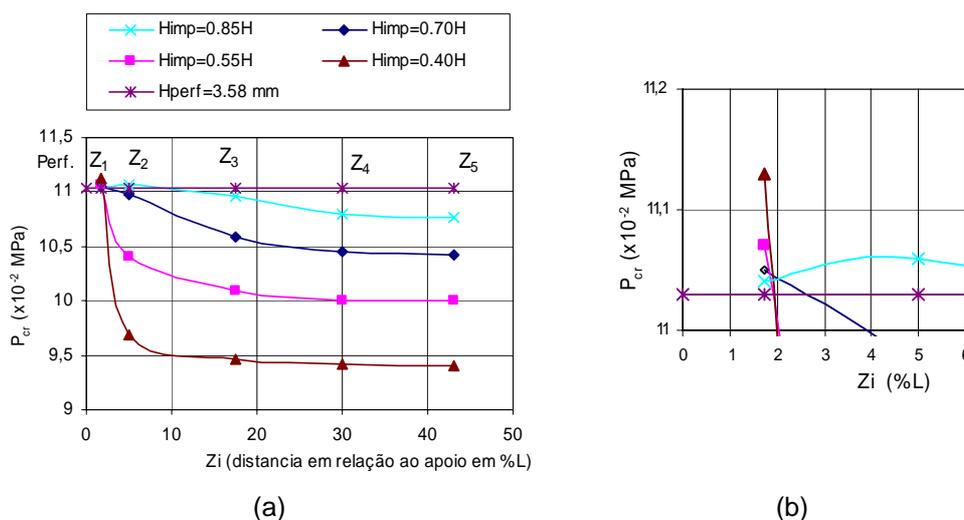


Figura 6.35 – (a) Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição em função da distância, em porcentagem do comprimento da casca, em relação ao apoio inferior da casca para diversas espessuras de imperfeição (b) e detalhe das cargas críticas obtidas para a posição  $Z_1$ .

#### 6.2.2.2.

#### Efeito da variação da espessura do anel de imperfeição, $H_{imp}$ Caso 1: diminuição na espessura da casca.

Considerando-se novamente uma casca com relações  $(R/H = 2.63)$  e  $(L/R = 22)$ , submetida ao mesmo nível de tração citada no item anterior e a pressões internas uniformes, são analisados os efeitos da variação de espessura de uma imperfeição na forma de anel localizada na posição  $Z_5$  (Tabela 6.5). São consideradas duas alturas para a imperfeição:  $L_{imp} = 0.0125L$  e  $0.0250L$ . A espessura da imperfeição sofre uma variação numa faixa de 0.45 a 0.85 de  $H$  e os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.36 onde se mostra a variação pressão interna da membrana com o deslocamento radial máximo.

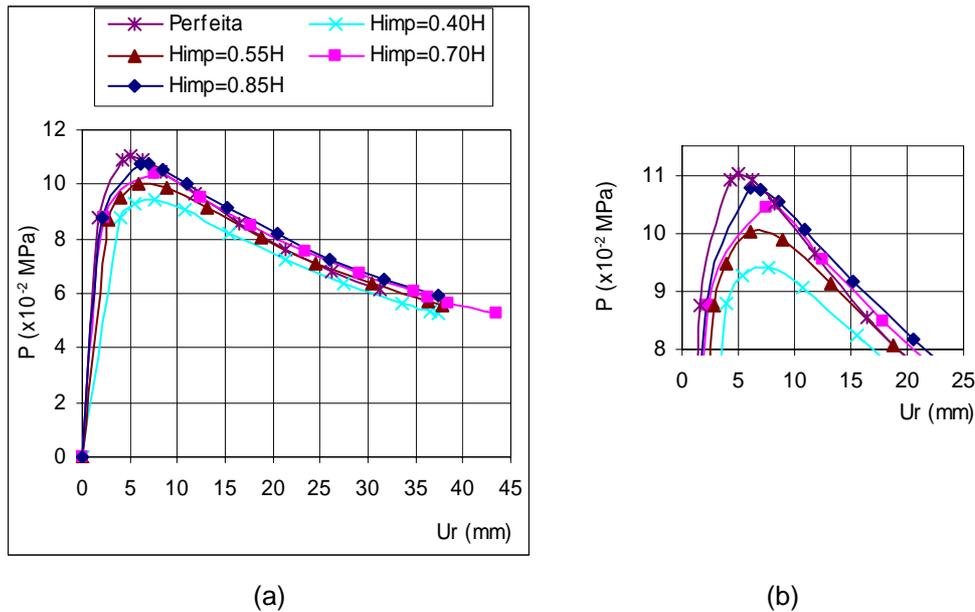


Figura 6.36 – (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição em forma de anel na posição  $Z_5$  com comprimento de  $L_{imp} = 0.0250L$  e espessuras variáveis (b) e detalhe da região de pressão máxima.

O gráfico apresentado na Figura 6.37 mostra a variação da pressão crítica com a espessura da casca na região da imperfeição para dois comprimentos de imperfeição distintos.

Nota-se que, como esperado, a pressão crítica da casca é diretamente proporcional à espessura da imperfeição, mas inversamente proporcional ao comprimento da imperfeição.

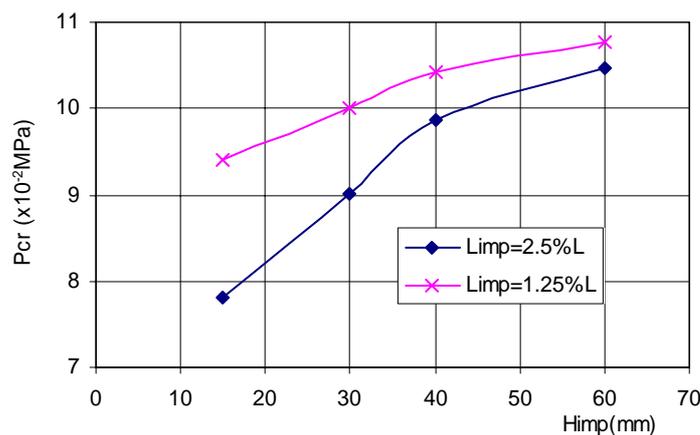


Figura 6.37 – Variação da pressão crítica em função da espessura da casca na região da imperfeição para comprimentos de imperfeição de  $0.0125L$  e  $0.0250L$ .

A Figura 6.38 ilustra a variação da deformação, na direção do eixo 1, da casca para os comprimentos de imperfeições estudados. Nota-se que, quanto

maior é o comprimento da a imperfeição, maior é o raio atingido pelo bulbo na configuração crítica.

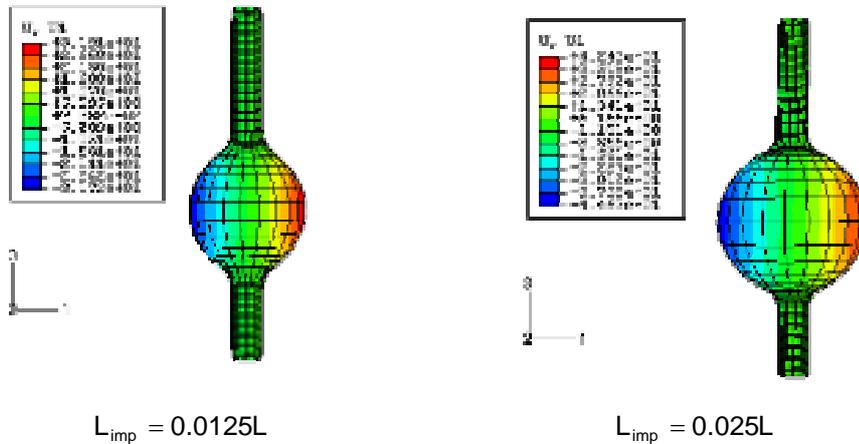


Figura 6.38 – Deformadas obtidas numericamente, através do programa ABAQUS, para  $H_{imp} = 0.85H$  para os dois comprimentos de imperfeição analisados.  $U_1$  corresponde à deformação na direção 1.

### 6.2.2.3.

#### Efeito da variação do comprimento da imperfeição, $L_{imp}$ Caso 1: diminuição na espessura da casca.

Novamente para a mesma casca descrita anteriormente, com relações  $(R/H = 2.63)$  e  $(t/R = 22)$ , são analisados os efeitos da variação do comprimento de uma imperfeição localizada nas posições  $Z_2$  e  $Z_5$ , com espessura de  $0.85H$ . O comprimento da imperfeição sofre uma variação numa faixa de  $0.0125L$  a  $0.05L$  e os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.39.

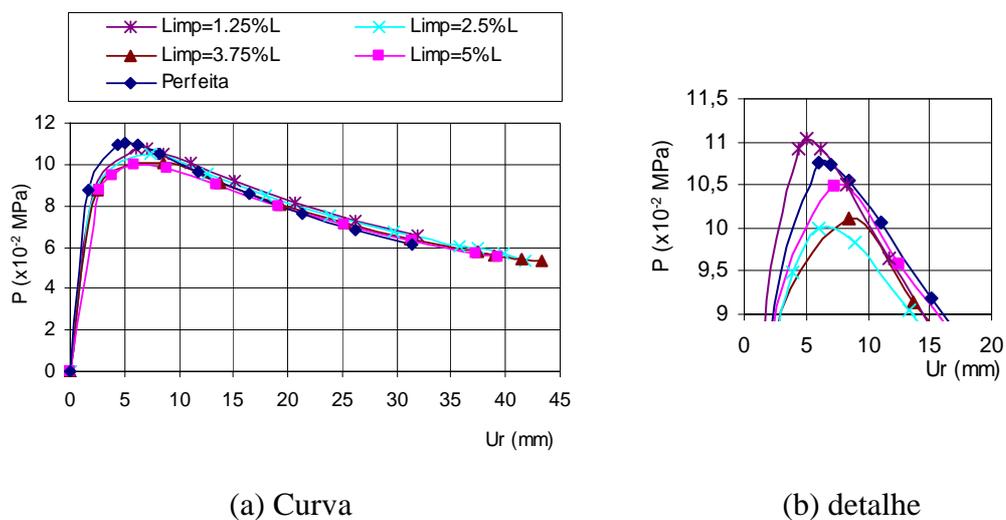


Figura 6.39 – Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição em forma de anel com altura da imperfeição variável ( $0.0125 \leq L_{imp} \leq 0.05L$ )

A Figura 6.40 apresenta a variação da carga crítica com o aumento do comprimento da imperfeição. Nota-se que quanto maior o comprimento da imperfeição, menor é a carga crítica atingida pela casca imperfeita.

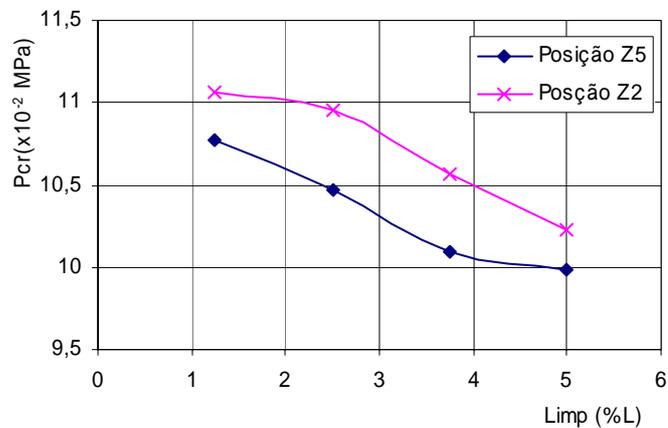
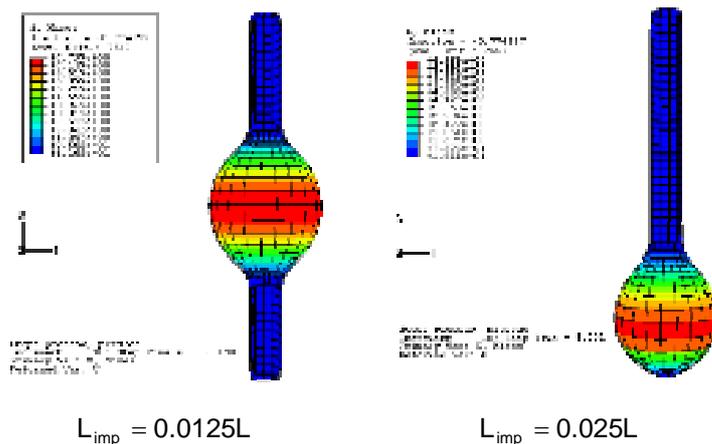


Figura 6.40 – Variação da carga crítica com o aumento do comprimento do anel de imperfeição para as posições  $Z_2$  e  $Z_5$ .

Para a posição da imperfeição  $Z_2$ , o bulbo se forma inicialmente na região central da casca. Ocorre entretanto uma mudança da localização do bulbo de deformação para o local da imperfeição para comprimentos de imperfeição de 0,025 a 0,05L (Figura 6.41). No entanto, para a posição da imperfeição em  $Z_5$ , o bulbo se forma na região central para todos os comprimentos de imperfeição considerados.



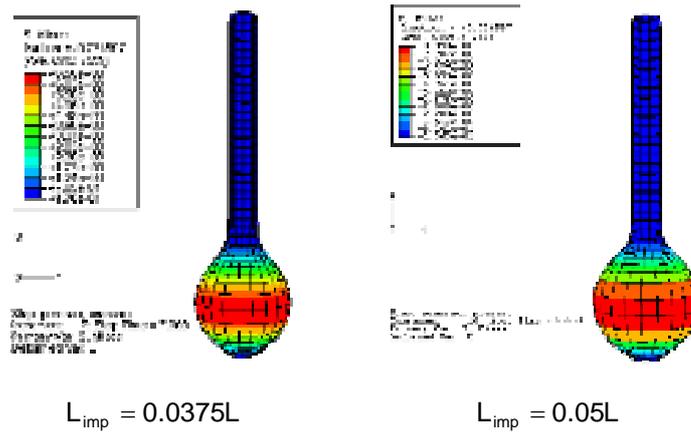


Figura 6.41 - Deformadas obtidas para uma casca com imperfeição localizado na posição  $Z_2$  para comprimentos de imperfeições variando de  $0.0125L \leq L_{imp} \leq 0.05L$ .

#### 6.2.2.4.

#### Efeito da variação da posição da imperfeição ao longo do comprimento da casca, $Z_i$

#### Caso 2: acréscimo na espessura da casca.

Considerando-se a mesma configuração de casca do item anterior, uma análise é realizada considerando um aumento na espessura da casca em forma de um anel imperfeição. Foram consideradas para a análise as mesmas posições citadas no item anterior com acréscimos nesta região da casca que geraram espessuras de imperfeições variando de  $1.15H$  a  $1.60H$ .

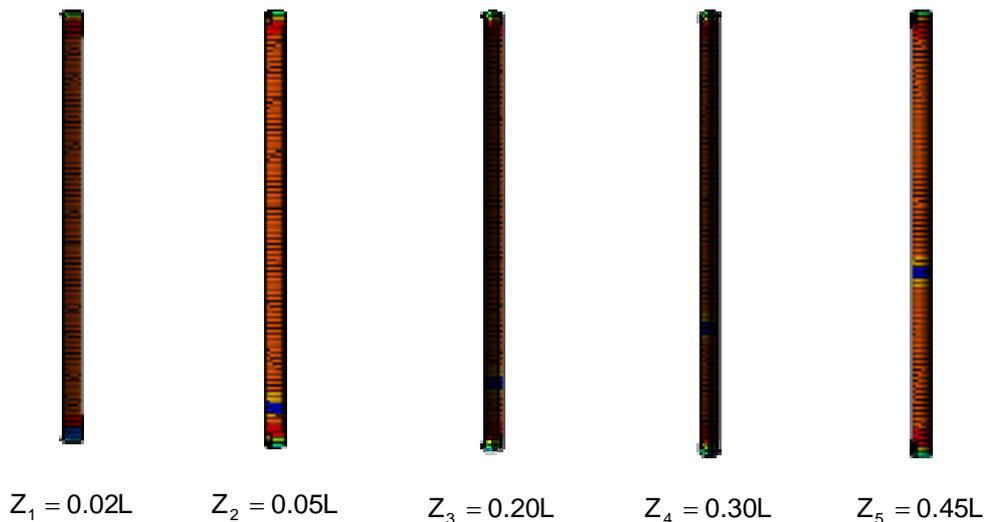


Figura 6.42 - Posições dos anéis de imperfeição, representadas na cor azul, evidenciadas através da saída do programa ABAQUS após a aplicação da tração

A Figura 6.43-(a) mostra as curvas pressão-deslocamento radial máximo para uma casca com espessura de imperfeição de  $1.60H$  e diversas posições do anel de imperfeição. Nota-se que, para as posições  $Z_1$  a  $Z_4$  a pressão crítica é menor que aquela obtida para a casca perfeita, entretanto para a posição  $Z_5$ , próxima à região central da casca, apesar da diminuição da pressão crítica em relação à casca perfeita ocorre um ligeiro aumento em relação às posições  $Z_3$  e  $Z_4$ . Este comportamento também é observado para as demais espessuras analisadas.

Um detalhe da região de pressão crítica é apresentado na Figura 6.43-(b).

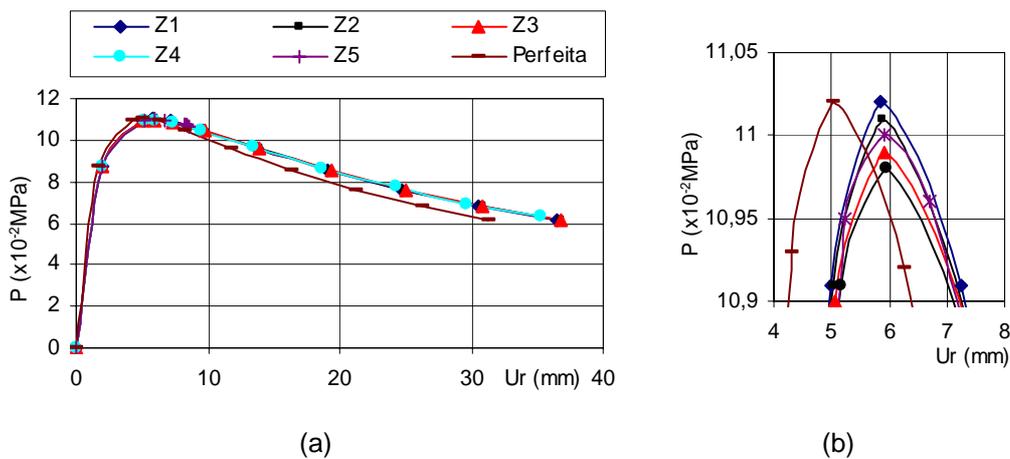


Figura 6.43 – (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo de uma casca com imperfeição em forma de anel localizada em diversas posições ao longo do comprimento da casca B210 ( $R/H = 2.63$ ,  $L/R = 22$ ) (b) e detalhe da região da pressões críticas

Observa-se também, na Figura 6.44 que, para uma imperfeição de espessura  $H_{imp} = 1.40 H$ , ou menores, nas posições  $Z_1$  e  $Z_2$  a formação do bulbo de deformação ocorre, como para a casca perfeita, na região central da casca. Para as posições  $Z_3$ ,  $Z_4$  e  $Z_5$  o bulbo se forma na parte central do ramo compreendido entre o anel de imperfeição e apoio mais distante deste anel (Figura 6.44-(d)). No entanto, para espessuras de imperfeição acima do valor mencionado, na posição  $Z_5$  o bulbo se forma na região central do ramo compreendido entre o anel de imperfeição e o apoio mais próximo deste anel de imperfeição (Figura 6.45-(d)).

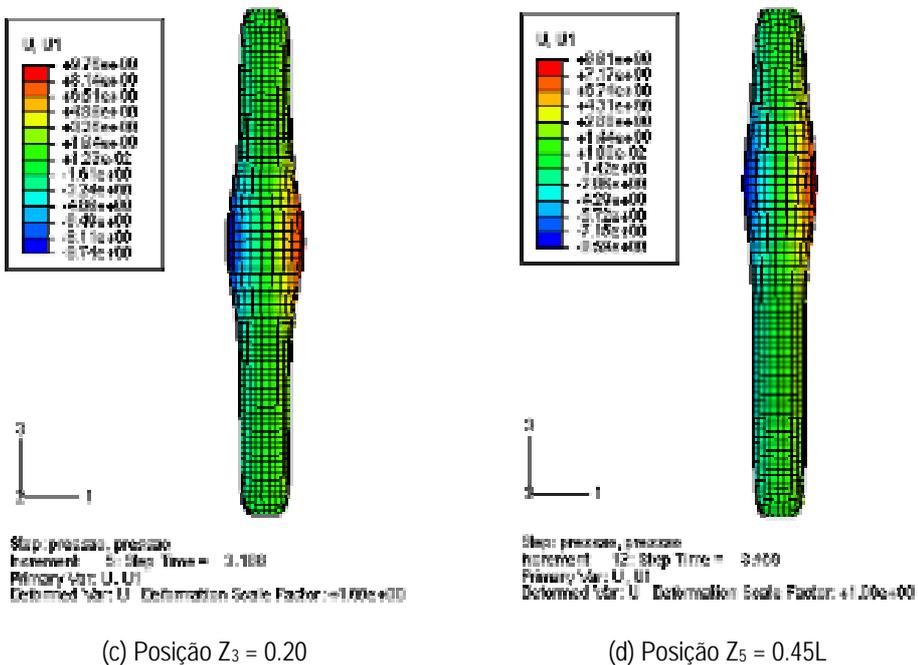
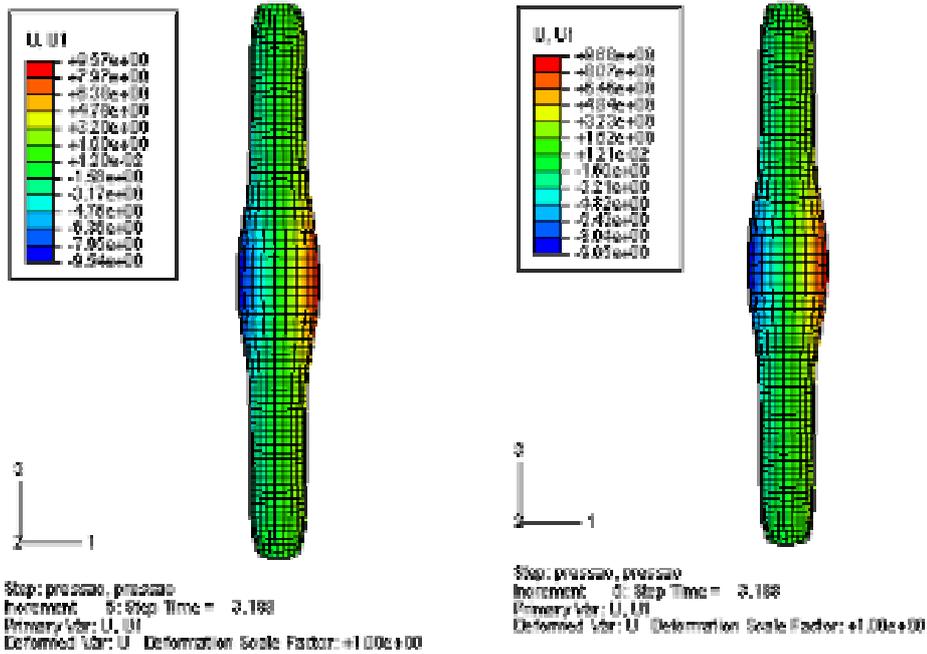


Figura 6.44- Deformadas de uma casca cilíndrica com espessura de imperfeição de  $H_{imp} = 1.40 H$  obtidas através do programa ABAQUS para as posições  $Z_1$  a  $Z_5$  respectivamente

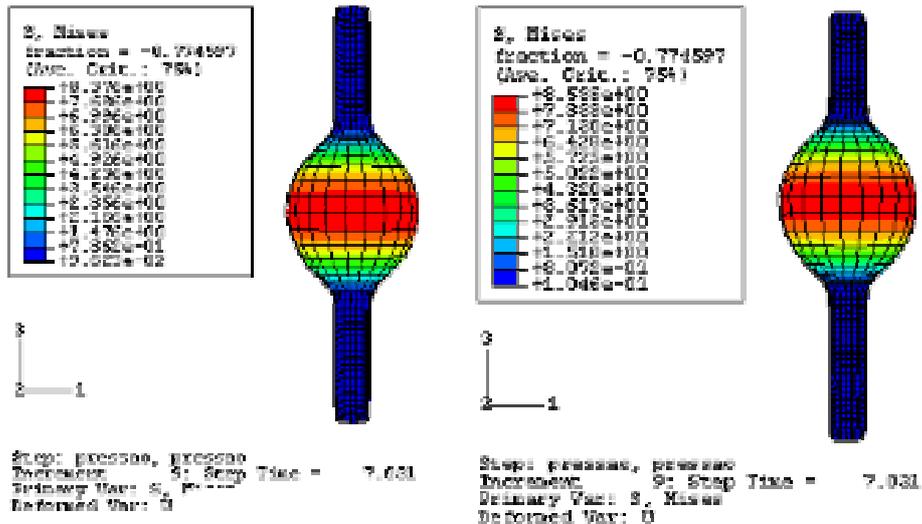
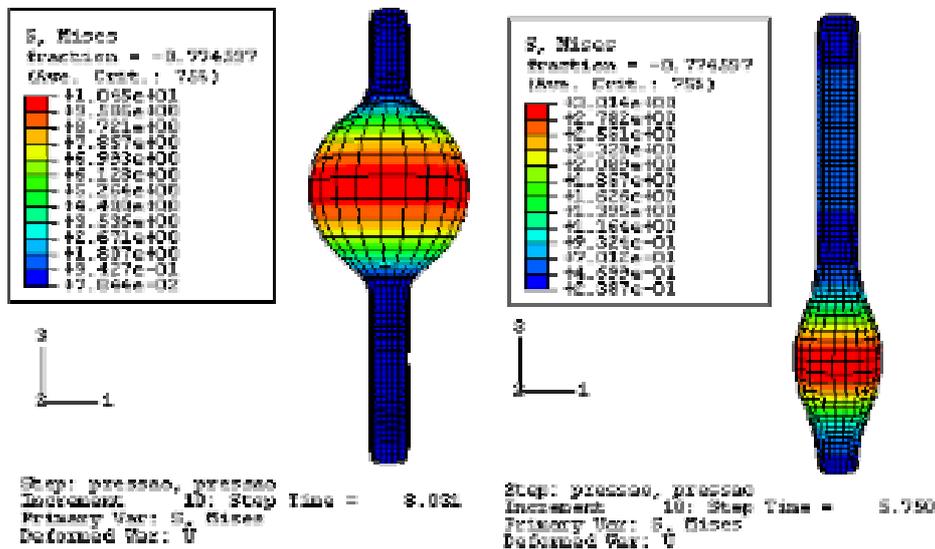
(a) Posição  $Z_1 = 0.02L$ (b) Posição  $Z_2 = 0.05L$ (c) - Posição  $Z_4 = 0.30L$ (d) - Posição  $Z_5 = 0.45L$ 

Figura 6.45 - Deformadas de uma casca cilíndrica com espessura de imperfeição de  $H_{imp} = 1.60 H$  obtidas através do programa ABAQUS para as posições  $Z_1$  a  $Z_5$  respectivamente

O gráfico da Figura 6.46, mostra a variação da pressão crítica com a posição da imperfeição.

Em relação à distância da imperfeição ao apoio, nota-se que, quanto mais distante do apoio está a imperfeição menor é a carga crítica, exceto para posições muito próximas à região central da casca ( $Z_5$ ) onde ocorre um pequeno acréscimo da pressão crítica em relação às posições imediatamente mais próximas do apoio ( $Z_3$  e  $Z_4$ ).

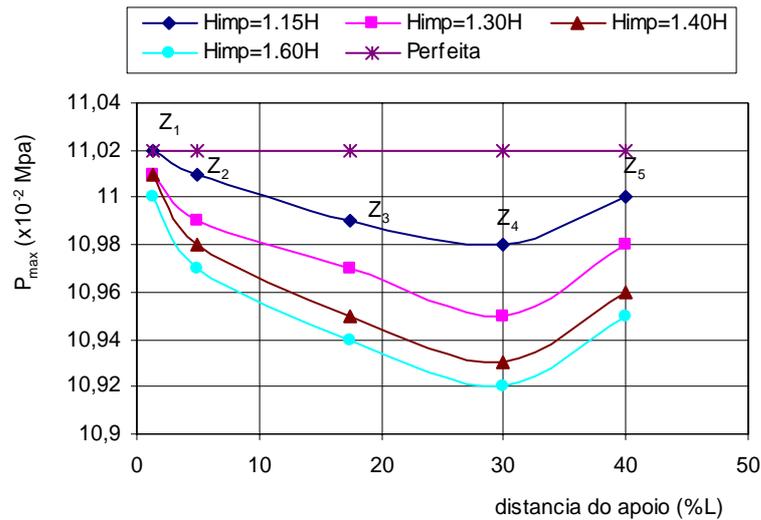


Figura 6.46 - Variação da carga crítica com a posição da imperfeição para diversas espessuras de imperfeição

### 6.2.2.5.

#### Efeito da variação da espessura da imperfeição, $H_{imp}$ Caso 2: acréscimo na espessura da casca.

Para as mesmas cascas analisadas no Caso 1, a espessura da imperfeição sofre uma variação numa faixa de 1.15 a 1.60H e os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.47. onde são mostradas as curvas pressão-deslocamento radial máximo.

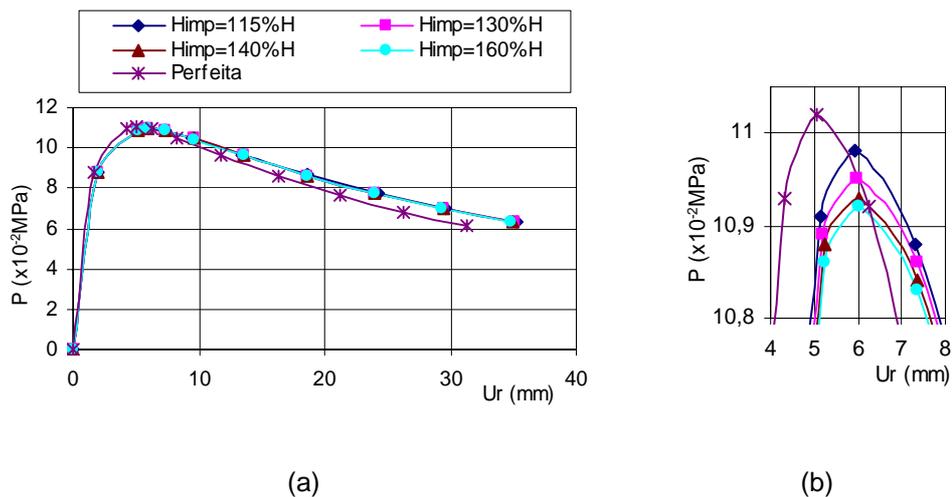


Figura 6.47 – Curva pressão-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição em forma de anel com altura de  $L_{imp} = 0.025L$  e espessuras variáveis na posição  $Z_4$  (a) e detalhe da região de pressão máxima (b).

A Figura 6.48 ilustra a variação da deformação para uma casca com imperfeição na posição  $Z_5$  para as diversas espessuras de imperfeição. É interessante notar que, quanto maior é a espessura da imperfeição, maior é o raio atingido pelo bulbo de deformação. Este resultado é importante em muitos casos práticos, por exemplo, a diminuição do diâmetro de veias e artérias em virtude de depósitos locais de gordura.

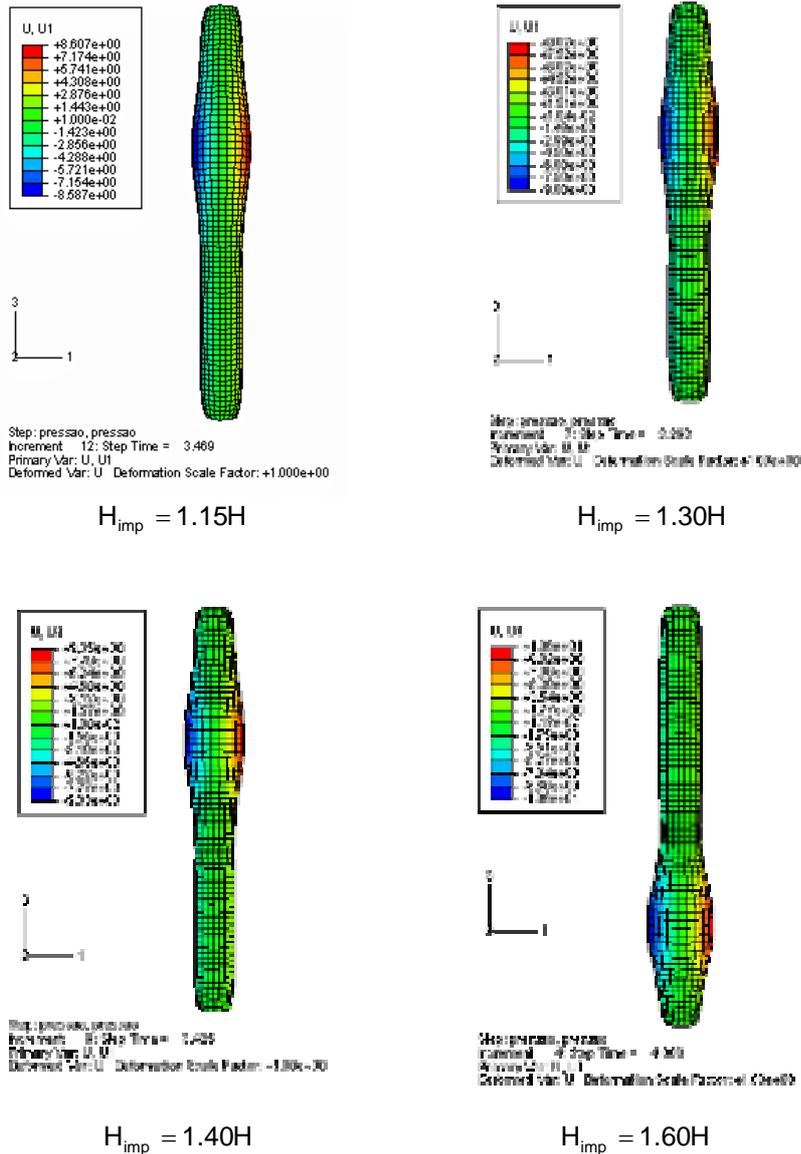


Figura 6.48 - Deformadas obtidas através do programa ABAQUS para as espessuras de imperfeição analisadas.

O gráfico apresentado na Figura 6.49 mostra a variação da pressão crítica com a espessura da imperfeição da casca para dois comprimentos de imperfeição distintos.

Nota-se que, para qualquer posição da imperfeição, a pressão crítica da casca é decresce com o aumento da espessura da casca na região da imperfeição.

Mais uma vez, nota-se um aumento da pressão crítica para posições de imperfeição próximas à região central da casca ( $Z_5$ ) em relação àquelas imediatamente mais próximas do apoio ( $Z_3$  e  $Z_4$ ).

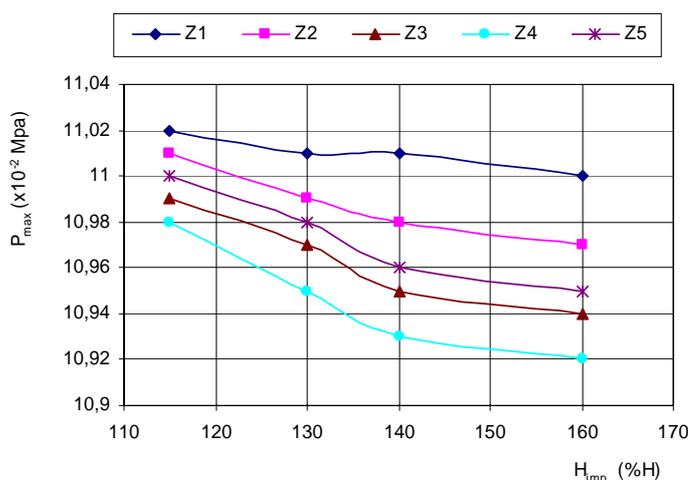


Figura 6.49 – Variação da carga crítica com a espessura da imperfeição para diversas posições da imperfeição

#### 6.2.2.6.

#### Efeito da variação do comprimento do anel de imperfeição, $L_{imp}$ Caso 2: acréscimo na espessura da casca.

Para as mesmas configurações de cascas estudadas no Caso 1 são analisados os efeitos da variação do comprimento de uma imperfeição na forma de anel localizada na posição  $Z_5$ , descrita anteriormente, com espessura de  $1.40H$ . O comprimento da imperfeição sofre uma variação numa faixa de  $0.0125L$  a  $0.05L$ . Nota-se, assim como para o caso 1 (redução da espessura da casca), para as posições  $Z_1$  a  $Z_4$  um pequeno decréscimo da carga crítica em relação à casca perfeita. Entretanto, para a posição  $Z_5$  ocorre um acréscimo na carga crítica em relação às posições  $Z_2$  a  $Z_4$  como pode se observado na Figura 6.50.

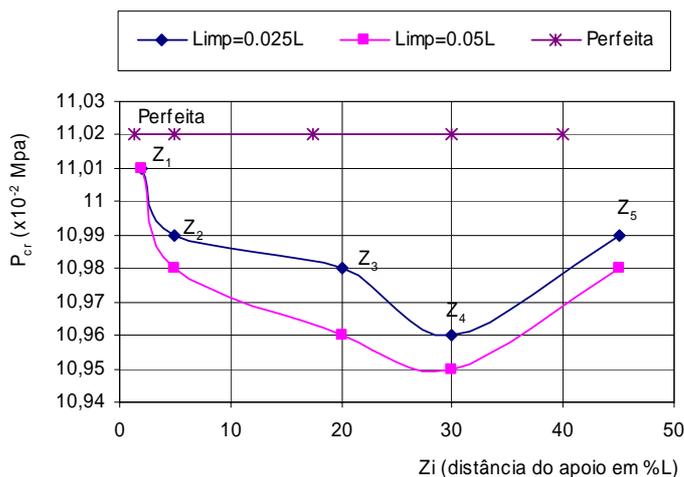


Figura 6.50 – Variação da carga crítica com o comprimento do anel de imperfeição para as posições  $Z_1$  a  $Z_5$ .

Assim como para o Caso 1, para a posição da imperfeição em  $Z_2$ , ocorre a mudança da localização do bulbo de deformação para o local da imperfeição quando o comprimento da imperfeição é superior a  $0.025L$ . No entanto, para a posição da imperfeição em  $Z_5$ , o bulbo se forma na região central para todos os comprimentos de imperfeição admitidos.

### 6.2.3. Imperfeição local em uma região quadrada – diminuição da espessura da casca

Novamente, para a mesma configuração de casca citada no item 6.2.2, ( $R/H = 2.63$ ) e ( $L/R = 22$ ), foram realizados ensaios em cascas com imperfeições localizadas em uma pequena região quadrada ao longo do comprimento da casca (Figura 6.51). Estas imperfeições também são geradas com o auxílio de uma lixadeira elétrica, através da diminuição da espessura da casca em uma região quadrada situada em posições ao longo do comprimento da casca com dimensões de  $0.025L \times 0.025L$ . A variação da posição da imperfeição ao longo do comprimento da casca é a mesma adotada no item 6.2.2 ( $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  e  $Z_4$ ).

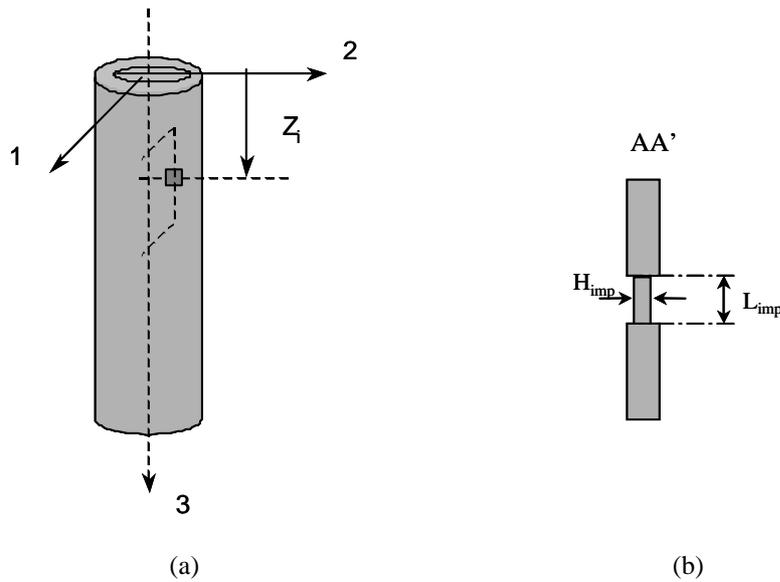


Figura 6.51 - Representação gráfica da imperfeição local em uma região quadrada da casca

As Figuras 6.52 e 6.53 são fotos dos ensaios experimentais realizados em laboratório para cascas com imperfeições locais em uma região quadrada ao longo do comprimento da casca nas posições  $Z_1$  a  $Z_4$ .

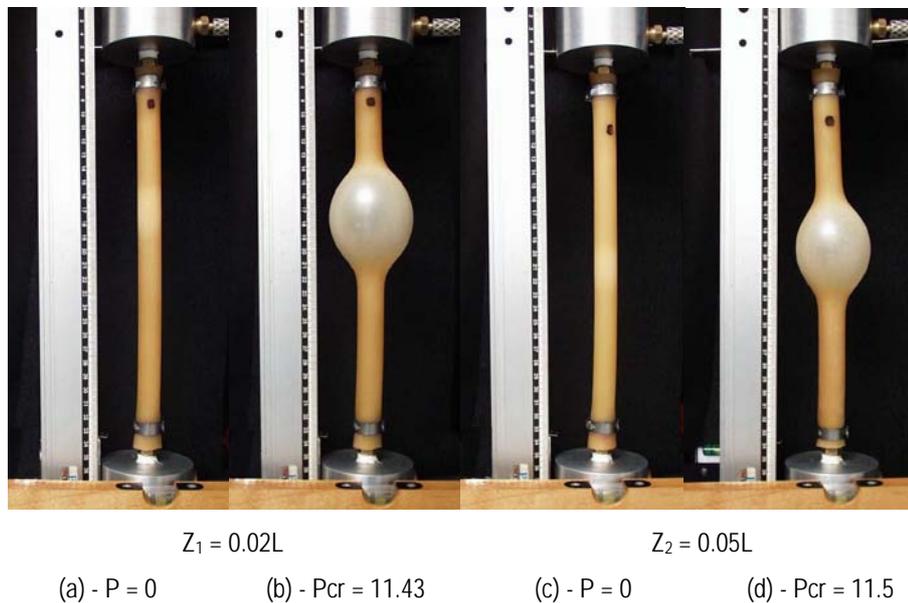
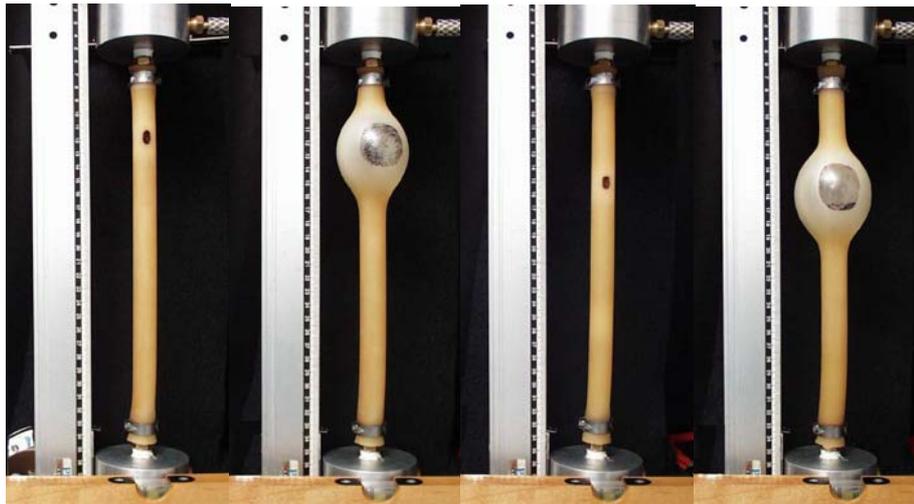


Figura 6.52 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para cascas com imperfeição inicial em uma região quadrada nas posições  $Z_1$  (a,b) e  $Z_2$  (c,d). ( $\frac{R}{H} = 2.63$ ) e ( $\frac{L}{R} = 22$ ). Configuração inicial (a,e); configuração crítica (b,d).



$Z_3 = 0.20L$   $Z_4 = 0.30L$   
 (a) -  $P = 0$       (b) -  $P_{cr} = 11.32$       (c) -  $P = 0$       (d) -  $P_{cr} = 11.28$

Figura 6.53 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para cascas com imperfeição inicial em uma região quadrada nas posições  $Z_3$  (a,b) e  $Z_4$  (c,d). ( $\frac{R}{H} = 2.63$ ) e ( $\frac{L}{R} = 22$ ). Configuração inicial (a,e); configuração crítica (b,d).

O gráfico apresentado na Figura 6.54 mostra a variação da pressão crítica com a posição da imperfeição. Nota-se que, para todas as posições de imperfeição, ocorre um pequeno decréscimo da pressão crítica. Entretanto para a posição  $Z_2$  ocorre um ligeiro aumento de pressão crítica quando comparada com a posição  $Z_1$ .

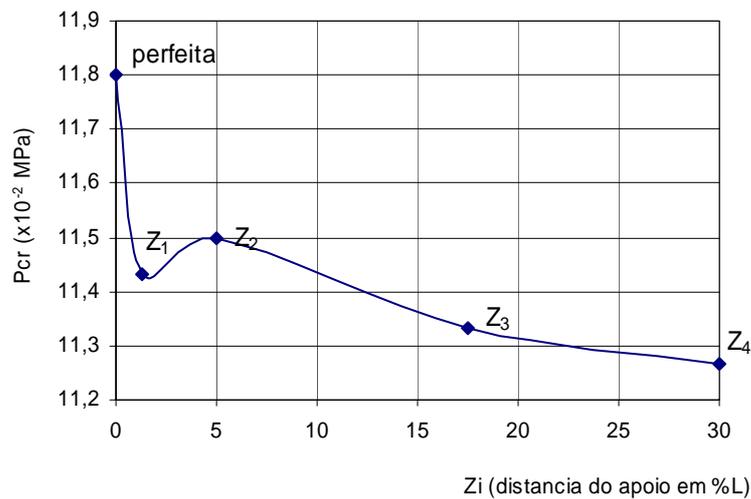


Figura 6.54 – Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição obtida experimentalmente

### 6.2.3.1. Estudo do efeito de imperfeições localizadas

Para a mesma configuração de casca citada no item anterior foi realizado um estudo numérico do comportamento da casca com imperfeições localizadas em uma região quadrada ao longo do comprimento da casca. Esta imperfeição é representada pela diminuição da espessura da casca em uma região quadrada ao longo do comprimento da casca com dimensões de  $0.025 \times 0.025L$  e espessura variável (Figura 6.51). A variação da posição da imperfeição ao longo do comprimento da casca é a mesma adotada no item anterior ( $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  e  $Z_4$ ).

A análise de convergência realizada no item anterior também se aplica a esta análise uma vez que a mesma configuração de casca foi admitida. Assim, como na análise anterior, foi admitida uma malha com elementos do tipo S4R com 1992 elementos e 2016 nós.

Nesta análise observa-se uma pequena variação da carga crítica tanto com a variação da posição da imperfeição quanto de sua espessura. As Figuras 6.55 a 6.57 ilustram esta variação para imperfeições com espessuras de  $H_{imp} = 0.85H$ ,  $0.75H$  e  $0.55H$  para as posições citadas.

Na Figura 6.55 observa-se, através da análise das curvas pressão-deslocamento radial máximo, uma pequena variação da pressão crítica para uma casca com espessura de imperfeição de  $0.85H$ .

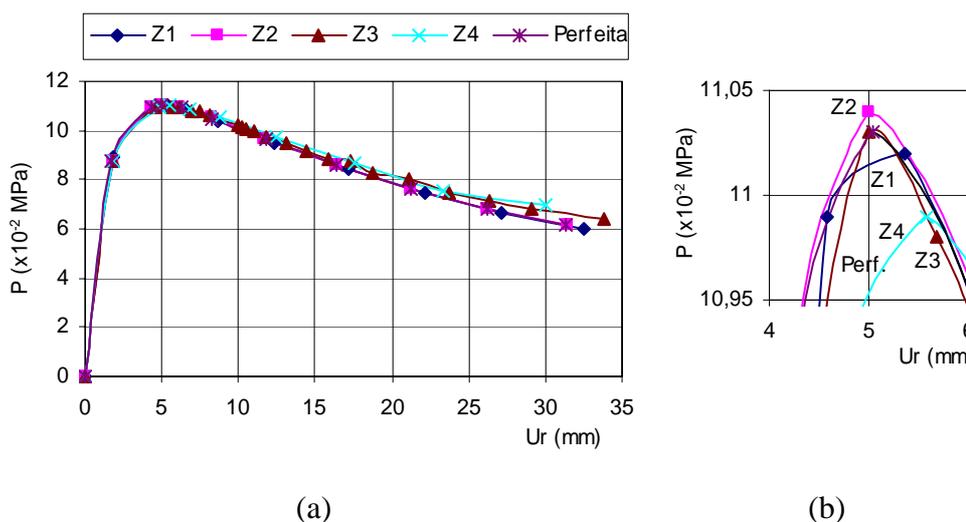


Figura 6.55 –Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição localizada de dimensões  $0.025 \times 0.025L \times 0.85H$  nas posições  $Z_1$  a  $Z_4$ (a) e detalhe da região próxima a carga crítica (b).

Nesta configuração da casca, para as posições  $Z_1$  e  $Z_2$  o bulbo de deformação se forma na região central da casca, sendo que, para as demais posições, o bulbo se forma no local onde se encontrava a imperfeição gerando uma perda de simetria da estrutura deformada, como mostram as Figuras 6.56 - (c, d).

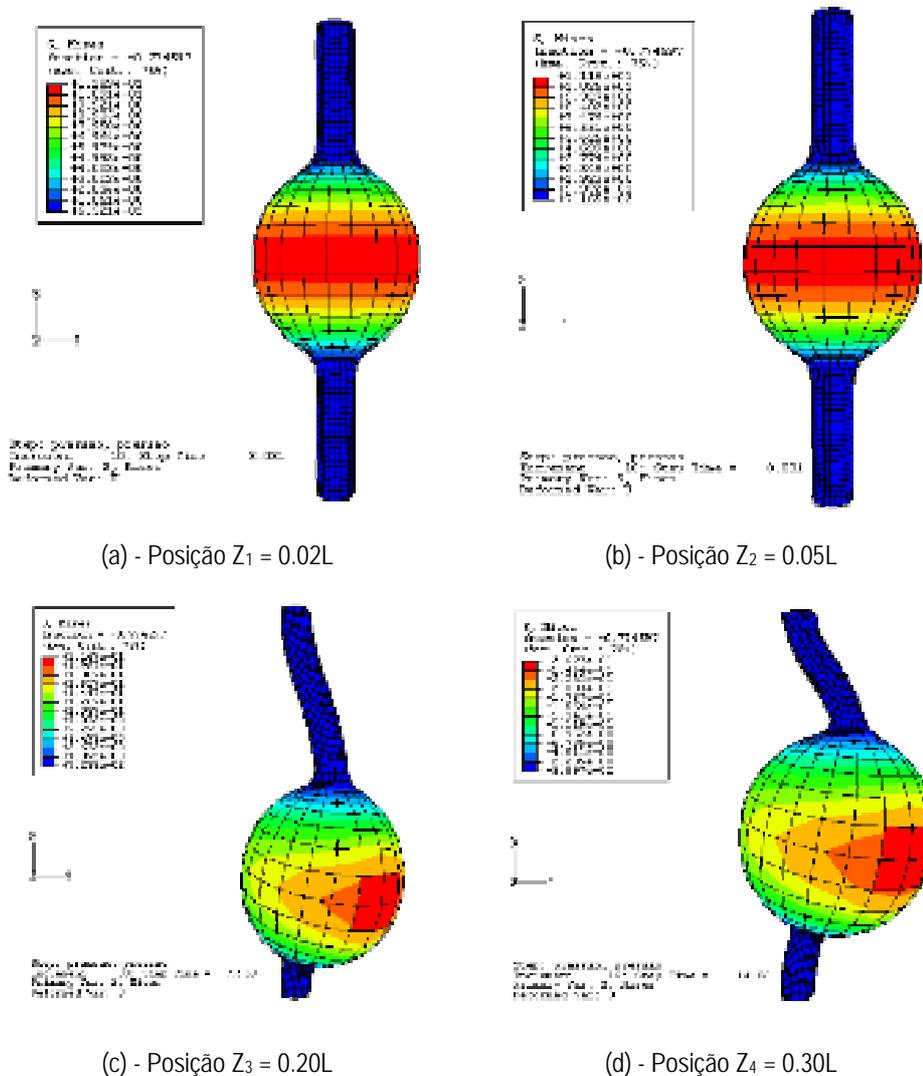


Figura 6.56 – Configurações deformadas de cascas com imperfeições locais de dimensões  $0.025L \times 0.025L \times 0.85H$  para as posições  $Z_1$  a  $Z_4$ .

Através do gráfico apresentado na Figura 6.57 pode-se observar que, para esta espessura de imperfeição, ocorre um pequeno acréscimo na pressão crítica, em relação à casca perfeita, quando a imperfeição se localiza nas posições  $Z_2$  e  $Z_4$  e decréscimo para as demais posições.

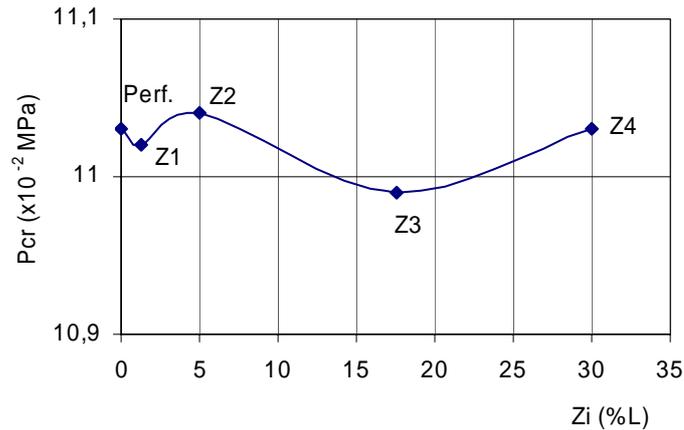


Figura 6.57 - Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição localizada, medida em porcentagem do comprimento da casca em relação ao apoio inferior, para uma casca com  $H_{imp} = 0.85H$

Na Figura 6.58-(b) observa-se novamente, através da análise das curvas pressão-deslocamento radial máximo, a pequena variação da pressão crítica para uma casca com espessura de imperfeição de  $0.75H$ .

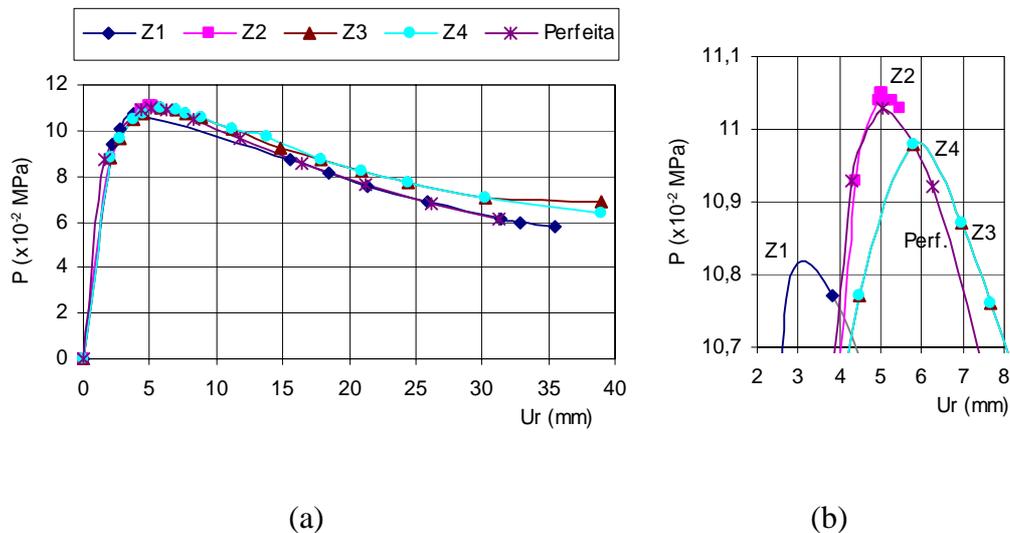


Figura 6.58 - Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição localizada de dimensões  $0.025L \times 0.025L \times 0.75H$  nas posições  $Z_1$  a  $Z_4$ (a) e detalhe da região de carga máxima (b).

Como observado no caso anterior, para a espessura da imperfeição de  $H_{imp} = 0.75H$ , nas posições  $Z_1$  e  $Z_2$  o bulbo de deformação se forma na região central da casca, Figuras 6.59-(a,b), sendo que para as outras posições o bulbo se forma no local onde se encontra a imperfeição, Figuras 6.59-(c,d). Novamente, é notada a perda de simetria da casca deformada para estas posições da imperfeição.

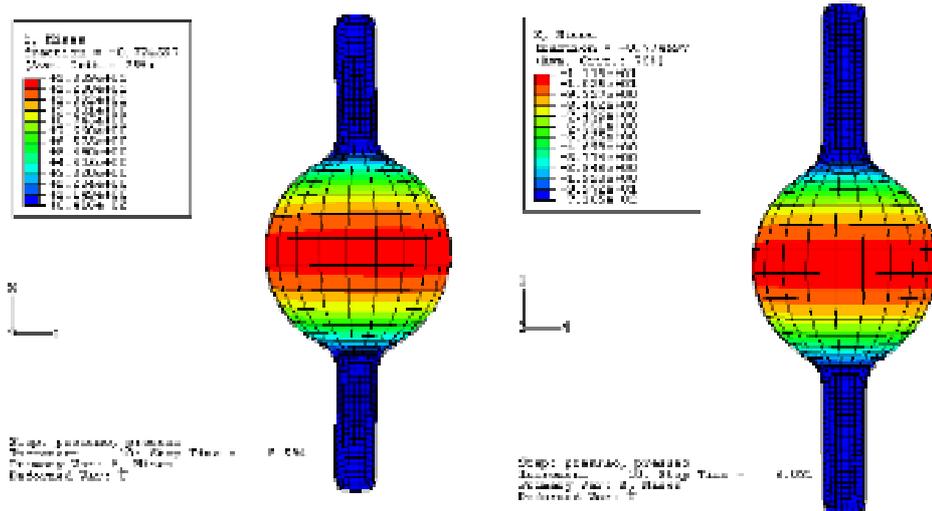
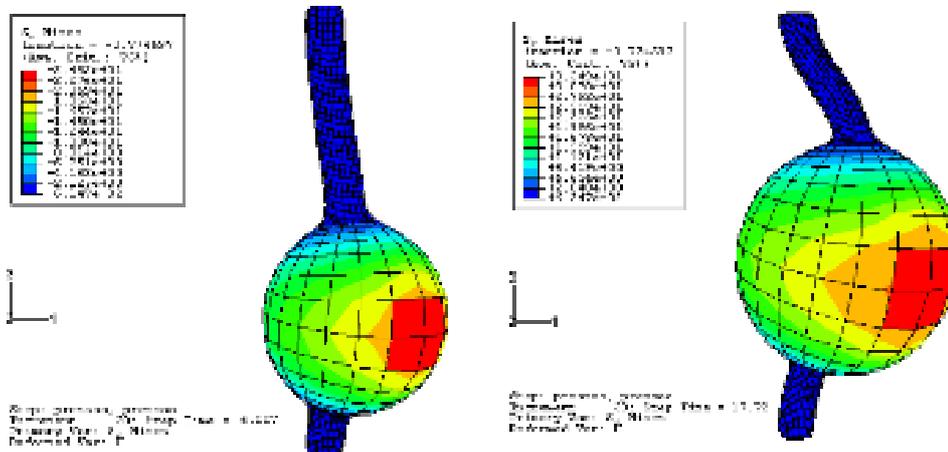
(a) - Posição  $Z_1 = 0.02L$ (b) - Posição  $Z_2 = 0.05L$ (c) - Posição  $Z_3 = 0.20L$ (d) - Posição  $Z_4 = 0.30L$ 

Figura 6.59 - Configurações deformadas de cascas com imperfeições locais de dimensões  $0.025L \times 0.025L \times 0.75H$  para as posições  $Z_1$  a  $Z_4$

Para a espessura de imperfeição de  $0.75H$ , para a posição de imperfeição  $Z_2$ , ocorre um pequeno acréscimo da pressão crítica em relação à casca perfeita. Entretanto, para as demais posições, a pressão crítica sofre um pequeno decréscimo, sendo que, para a posição  $Z_1$ , este decréscimo de pressão é bem mais significativo, como pode ser observado na Figura 6.60.

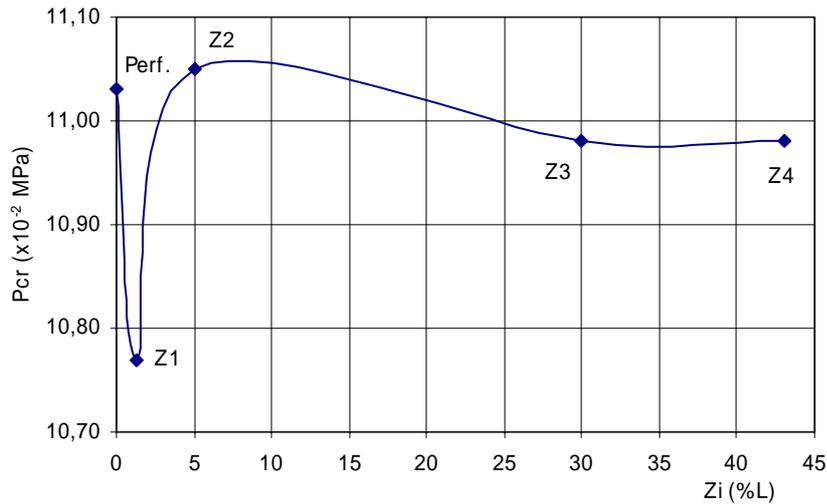


Figura 6.60 -Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição localizada, medida em porcentagem do comprimento da casca em relação ao apoio inferior, de dimensões  $0.025L \times 0.025L \times 0.75H$

Para a espessura da imperfeição de  $0.55H$ , novamente observa-se uma variação muito pequena da pressão crítica em relação à casca perfeita (Figura 6.61).

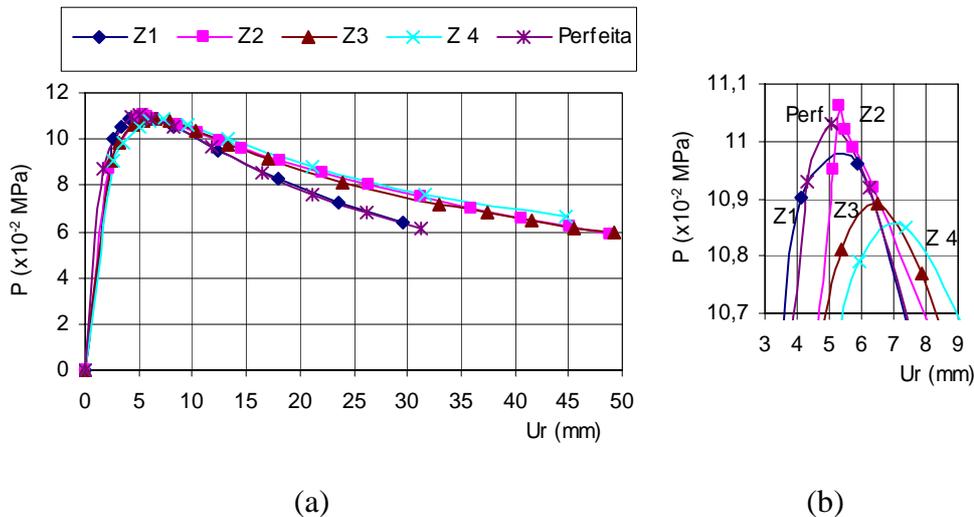


Figura 6.61 - Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição localizada de dimensões  $0.025 \times 0.025L \times 0.55H$  nas posições  $Z_1$  a  $Z_4$  (a) e detalhe da região da carga crítica (b).

Neste caso a formação do bulbo de deformação ocorre na região central da casca somente para a posição  $Z_1$ , sendo que para as demais posições o bulbo de deformação se forma no local onde se encontra a imperfeição (Figura 6.62).

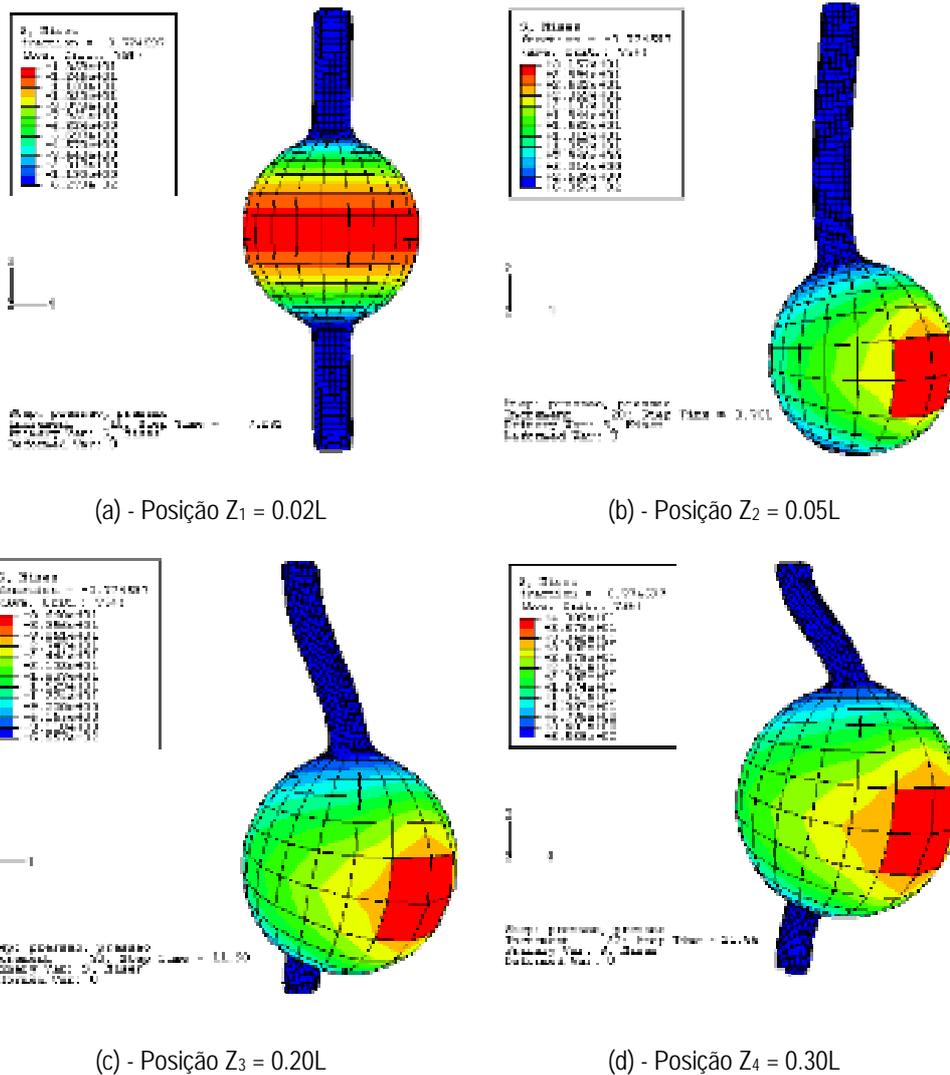


Figura 6.62 – Configurações deformadas obtidas através do programa ABAQUS para cascas com imperfeições localizadas de dimensões  $0.025L \times 0.025L \times 0.55H$  nas posições  $Z_1$  a  $Z_4$ .

Para a espessura de imperfeição de  $0.55H$ , para a posição de imperfeição  $Z_2$ , ocorre um pequeno acréscimo na pressão crítica em relação à casca perfeita. Entretanto, para as demais posições, a pressão crítica sofre um decréscimo gradativo com a posição e um pouco mais acentuado que os casos anteriores Figura 6.63.

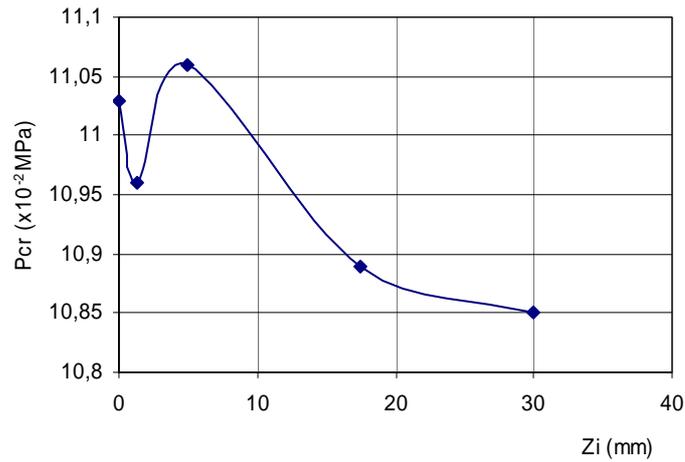


Figura 6.63 - Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição localizada medida em porcentagem do comprimento da casca em relação ao apoio inferior para uma casca com imperfeição de dimensões  $0.025L \times 0.025L \times 0.55H$

### 6.2.3.2. Estudo do efeito de múltiplas imperfeições localizadas

Como no caso anterior são introduzidas na casca imperfeições localizadas. São consideradas duas imperfeições em regiões quadradas equidistantes dos apoios da casca e que formam entre si ângulos,  $\theta_{imp}$ , que variam de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  como ilustra a Figura 6.64.

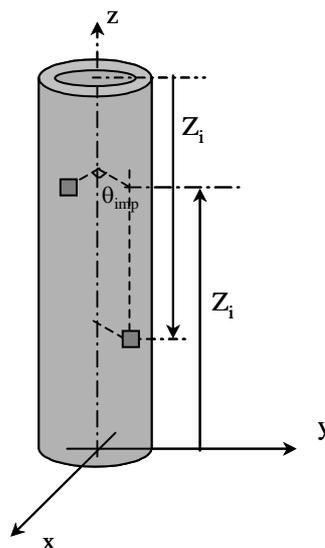


Figura 6.64 – Figura ilustrativa da posição de duas imperfeições locais

As cascas analisadas possuem espessuras de  $3\text{mm}$ , comprimento de  $400\text{mm}$  e diâmetro de  $11\text{mm}$  ( $\frac{t}{R} = 0.55$  e  $\frac{L}{R} = 72.7$ ), e estão submetidas a esforços de tração e pressão interna uniforme. São analisadas cascas com espessura de imperfeições de  $H_{\text{imp}} = 0.55H$  e  $0.75H$ , equidistantes dos apoios na posição  $Z_2$  como apresentado na Tabela 6.5.

Uma análise de convergência é realizada, uma vez que as configurações da cascas são diferentes das análises anteriores.

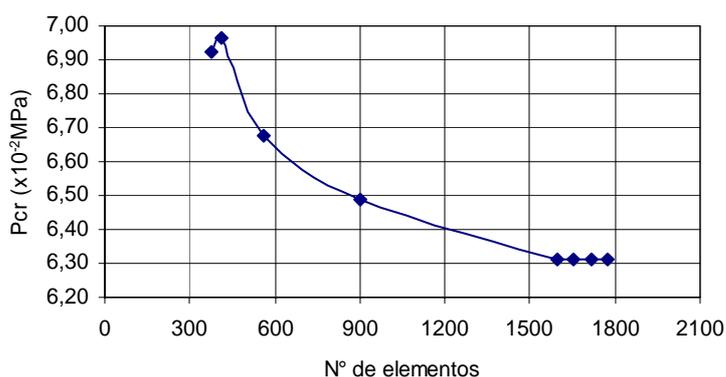


Figura 6.65 – Convergência da carga crítica com o número de elementos para uma casca com múltiplas imperfeições locais com espessura de imperfeição de  $H_{\text{imp}}=0.75H$ .

A Figura 6.65 mostra que, para números de elementos superiores a 1500, já se tem uma boa convergência da solução. Na Tabela 6.8 são apresentados os resultados obtidos para malhas com diferentes números de elementos.

$\left(\frac{L_{\text{ele}}}{L}\right) \times 100\%$	1.62	1.50	1.25	1.00	0.75	0.70	0.65	0.60
Nº Nós	372	402	567	909	1608	1668	1728	1788
Nº Elementos	378	408	560	900	1596	1656	1716	1776
$P_{cr} \times 10^{-2} \text{ MPa}$	16.93	16.96	16.68	16.49	16.31	16.31	16.31	16.31

Tabela 6.8 – Convergência da carga crítica com o número de elementos da malha para uma casca perfeita

Pelas condições de convergência observadas na Tabela 6.8 foi considerada uma malha de 1688 nós e 1656 elementos do tipo S4R.

A Figura 6.66 mostra os modos de deformação obtidos para o caso em que as imperfeições fazem entre si um ângulo relativo de 0 graus. As imperfeições possuem espessuras de  $H_{\text{imp}} = 0.55$  e  $0.75H$ , posicionadas a uma distância de  $0.15L$  dos apoios.

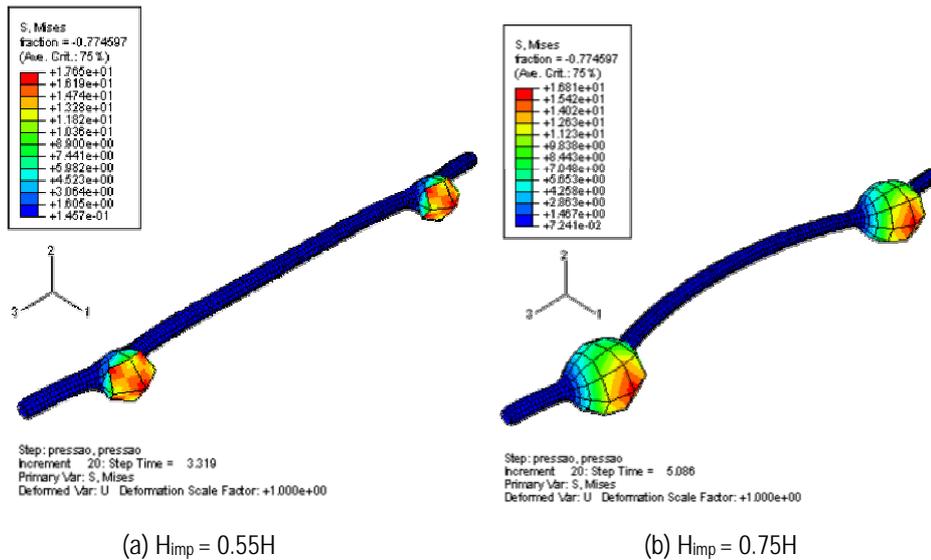
(a)  $H_{imp} = 0.55H$ (b)  $H_{imp} = 0.75H$ 

Figura 6.66 - Configurações deformadas de cascas com duas imperfeições locais equidistantes do apoio de  $0.15L$ , posição  $Z_2$

Observa-se na figura 6.66-(a) que para a espessura de imperfeição de  $0.55H$  a casca não sofre uma instabilidade global, sendo as instabilidades concentradas nas regiões onde existem imperfeições, entretanto, na Figura 6.66-(b), para uma espessura de imperfeição de  $0.75H$ , além de ocorrer uma instabilidade local a casca apresenta uma flambagem global.

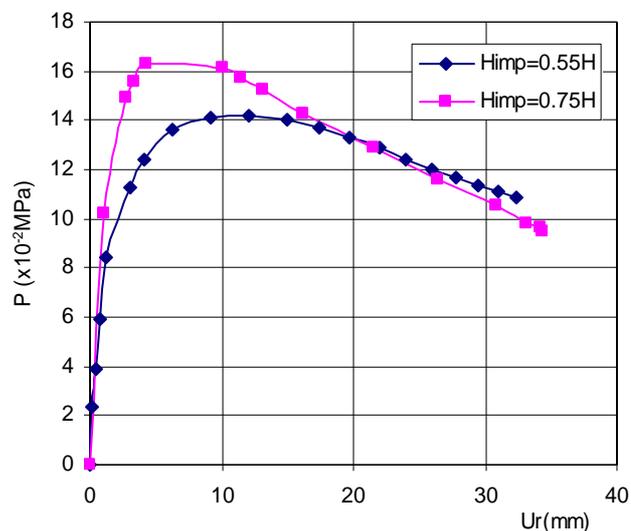


Figura 6.67 - Curva carga-deformação para cascas com duas imperfeições locais que fazem entre si um ângulo de  $0^\circ$  graus, situadas a  $0.15L$  de distância dos apoios com espessuras de imperfeição de  $0.55$  e  $0.75H$ .

Na Figura 6.67 observa-se uma pequena variação na carga crítica da casca, ou seja, quanto menor a espessura da imperfeição menor é a carga crítica.

Para imperfeições simétricas situadas a  $0.30L$  de distância dos apoios são obtidas as configurações apresentadas na Figura 6.68.

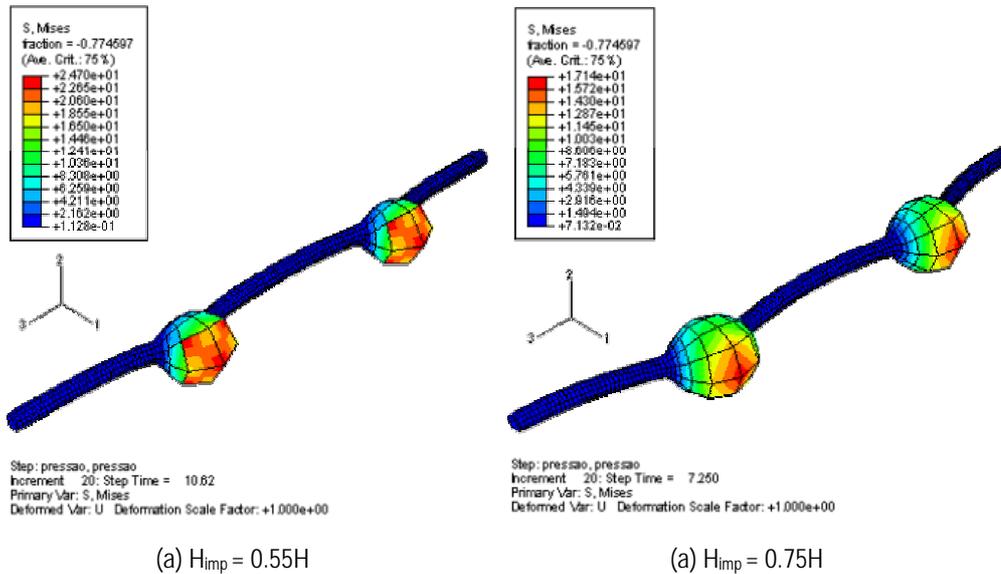


Figura 6.68 - Configurações deformadas de cascas com duas imperfeições locais equidistantes do apoio de  $0.30L$ , posição  $Z_4$

Pela Figura 6.69, observa-se que, para esta posição das imperfeições, o comportamento da casca é o mesmo apresentado na posição analisada anteriormente com níveis de pressão críticas bem próximos.

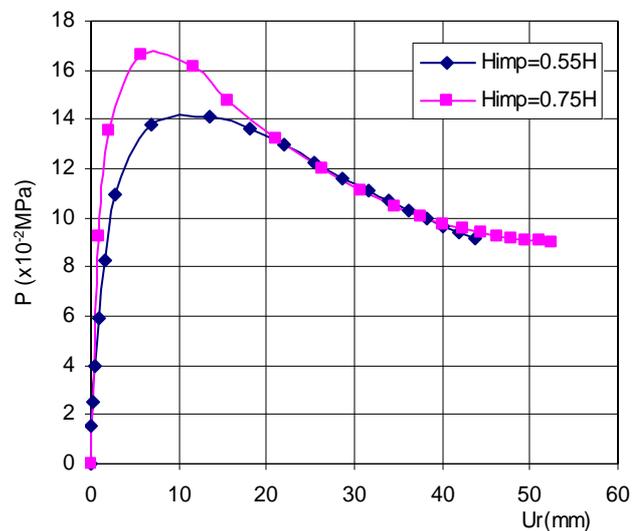
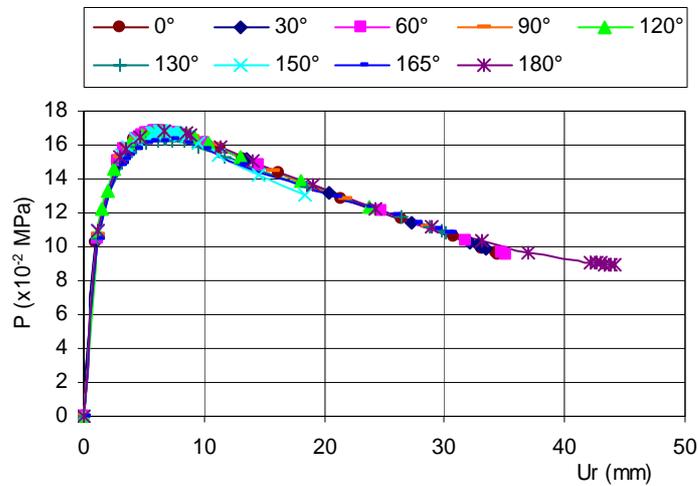


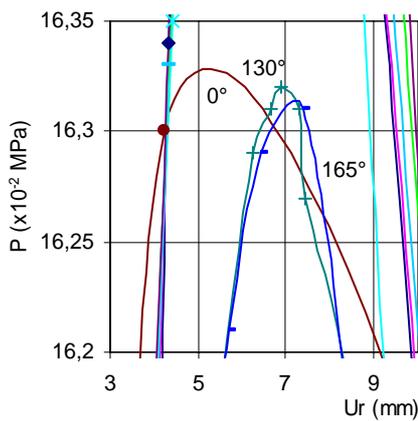
Figura 6.69 - Curva carga-deformação para cascas com imperfeições localizadas que fazem entre si um ângulo de  $0$  graus, situadas a  $0.30L$  de distância dos apoios, com espessuras de imperfeição de  $0.55H$  e  $0.75H$ .

A seguir, uma das imperfeições é então girada em relação à outra com ângulos que variam de  $30^\circ$  a  $180^\circ$  graus. Observa-se através da Figura 6.70-(b)

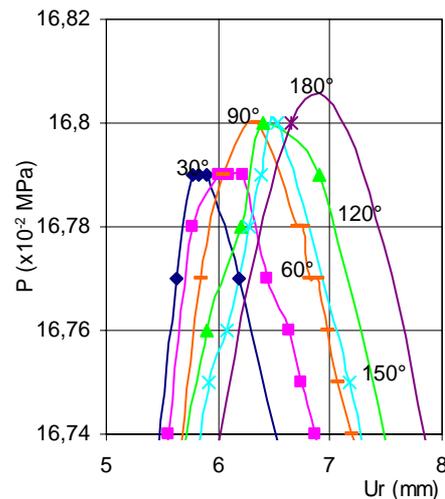
uma pequena variação na carga crítica para ângulos de 30°, 60°, 90°, 120°, 150° e 180° e uma variação um pouco mais significativa para os ângulos de 0°, 130° e 165°, Figura 6.70-(c).



(a)



(b)



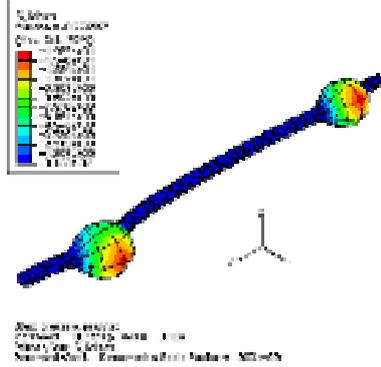
(c)

Figura 6.70 - Curvas Pressão-Deslocamento radial máximo para ângulos de imperfeição variando de 0° a 180° (a) e detalhes da região próxima a carga crítica (b, c).

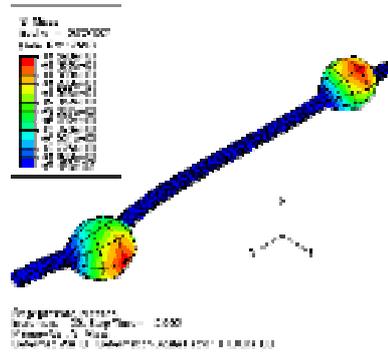
As configurações obtidas para imperfeições com espessura de 0.75H, localizadas na posição  $Z_2$ , em ângulos que variam de 0 a 180° são apresentadas na Figura 6.71.

Um fato interessante a ser observado é a variação no modo de deformação para os ângulos de imperfeição em torno de 150°. Para ângulos de imperfeição de 130°, 150° e 165°, Figuras 6.71.(e-g), observa-se que o bulbo de deformação concentra-se em uma das posições onde inicialmente havia uma imperfeição, ao

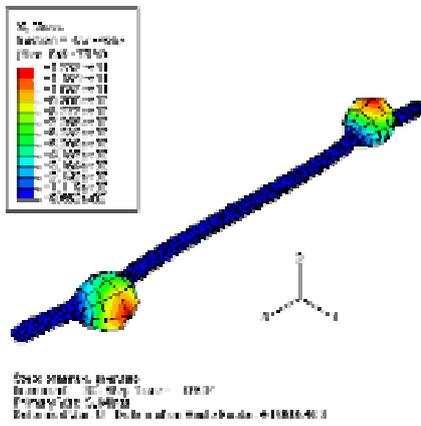
invés de se formar, como para os demais ângulos, nas duas posições de imperfeição.



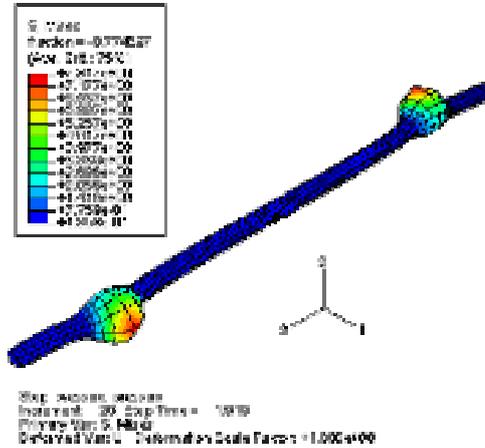
(a) -  $\theta_{imp} = 30^\circ$



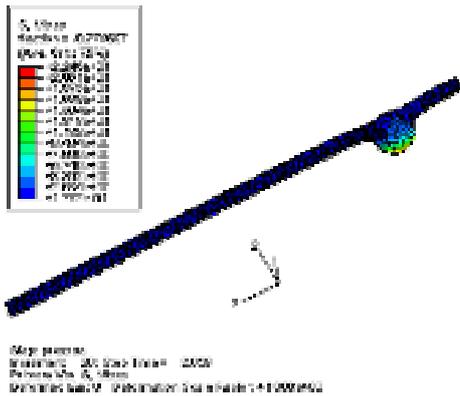
(a) -  $\theta_{imp} = 60^\circ$



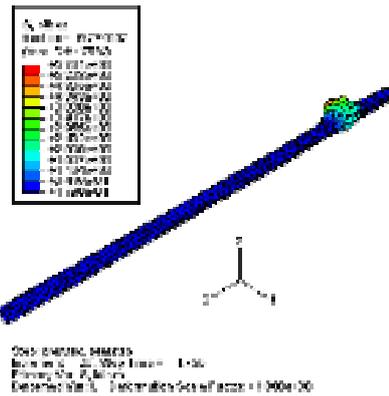
(a) -  $\theta_{imp} = 90^\circ$



(a) -  $\theta_{imp} = 120^\circ$



(a) -  $\theta_{imp} = 130^\circ$



(a) -  $\theta_{imp} = 150^\circ$

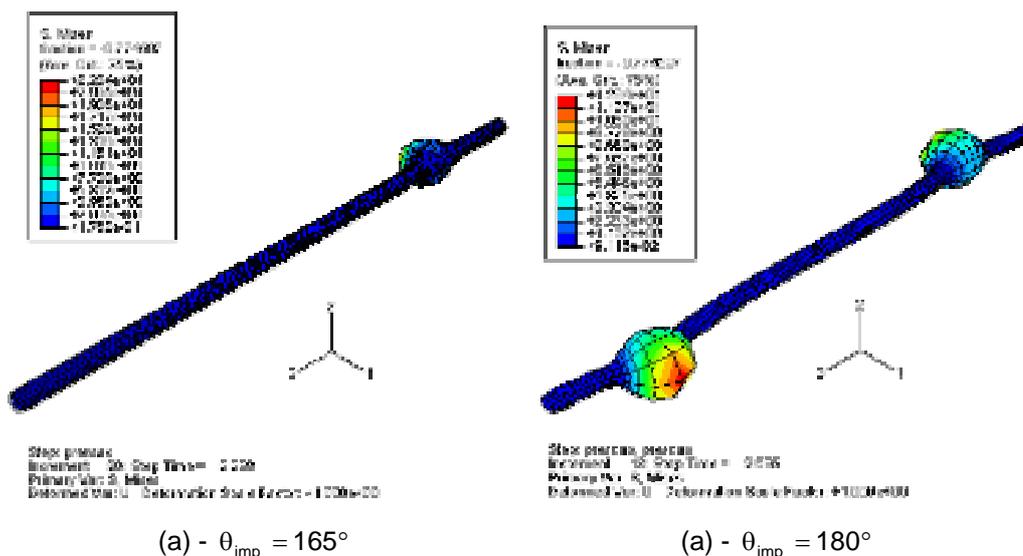


Figura 6.71 - Configurações deformadas para duas imperfeições localizadas com ângulos entre si variando de 0 a  $180^\circ$ .

#### 6.2.4. Influência da curvatura inicial

Como uma forma de se estudar o efeito de imperfeições globais, decidiu-se estudar o efeito da curvatura inicial em cascas hiperelásticas. É realizado um estudo considerando que a casca possua curvaturas iniciais positivas ou negativas como mostra a Figura 6.72-(a-c). As curvaturas positivas e negativas foram geradas através do programa ABAQUS utilizando-se o comando chamado spline para gerar uma curva através de três pontos, sendo dois pontos as extremidades da geratriz do cilindro cujas coordenadas são:  $(R, L/2)$  e  $(R, -L/2)$ , o terceiro ponto estando localizado no centro da geratriz cujas coordenadas são:  $(R \pm \Delta R, 0)$  sendo os  $\Delta R$  adotados iguais a  $0.5, 1.0, 1.5 \text{ mm}$

Inicialmente é analisado o comportamento de três cascas de espessuras distintas para dois raios de curvatura inicial positiva. Posteriormente são considerados também dois raios de curvatura negativos para as mesmas cascas citadas.

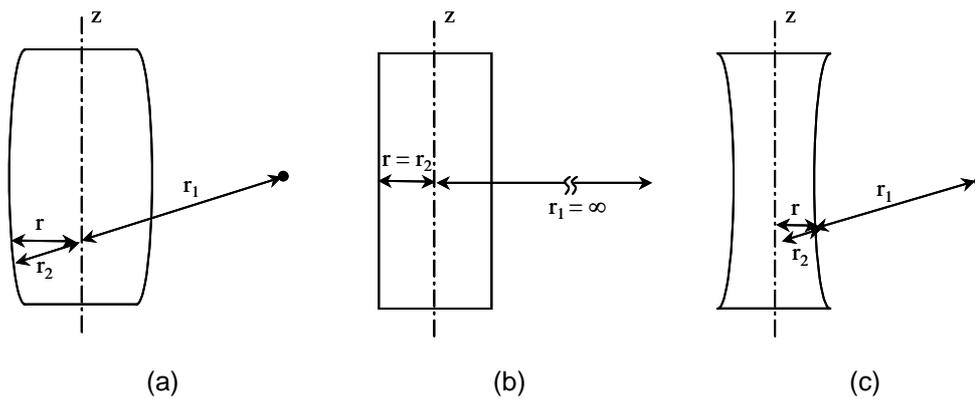


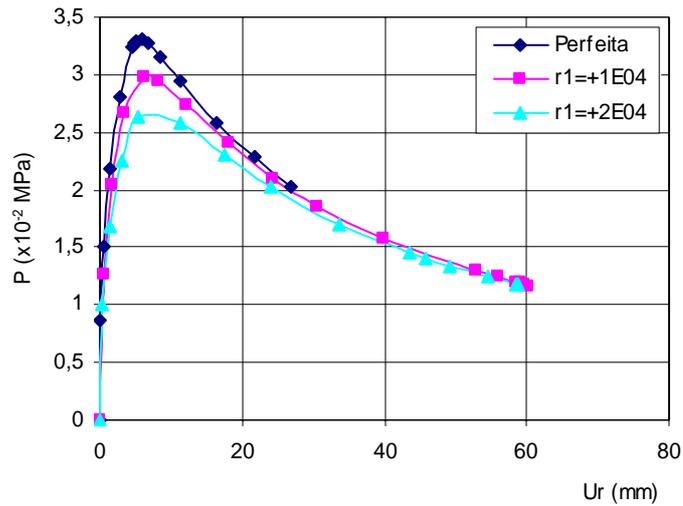
Figura 6.72 – Representação gráfica das curvaturas iniciais: (a) positivas (b) nula e (c) negativas e seus respectivos raios principais de curvatura.

#### 6.2.4.1. Influência da curvatura inicial positiva

Um estudo numérico do comportamento de cascas com raios de curvatura inicial positivos de  $r_1 = +0.5, +1.0$  e  $+2.0 \times 10^4 \text{ mm}$  é realizado considerando cascas com espessuras indeformadas de  $H = 1.0, 2.0,$  e  $3.0 \text{ mm}$ . A casca cilíndrica de referência (sem imperfeição) possui raio de  $R = 9.0 \text{ mm}$  e comprimento indeformado de  $L = 300 \text{ mm}$  e está submetida a uma tração correspondente a um  $\Delta L/L = 0.16$  de deslocamento longitudinal.

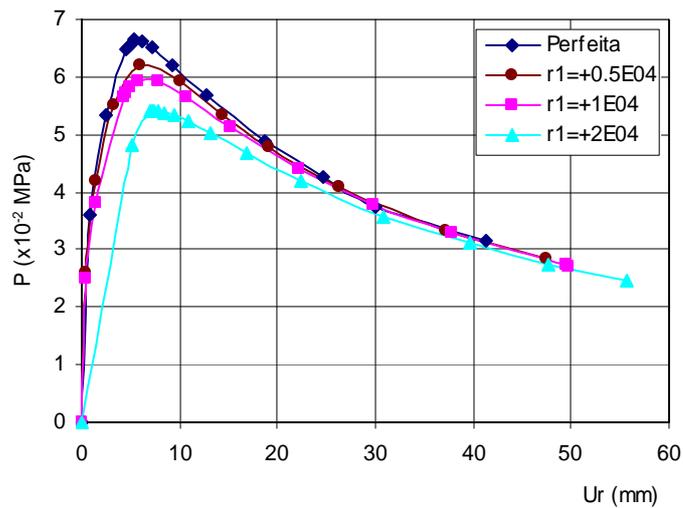
As Figuras 6.73 a 6.75 mostram a variação da pressão interna com o deslocamento radial máximo para cascas com espessuras iniciais de, respectivamente, 1.0, 2.0 e 3.0 mm e com raios de curvatura iniciais positivos de 0.5, 1.0 e  $2.0 \times 10^4 \text{ mm}$ .

Pode-se observar uma considerável diminuição da carga crítica da casca com o aumento da curvatura inicial para todas as espessuras analisadas.



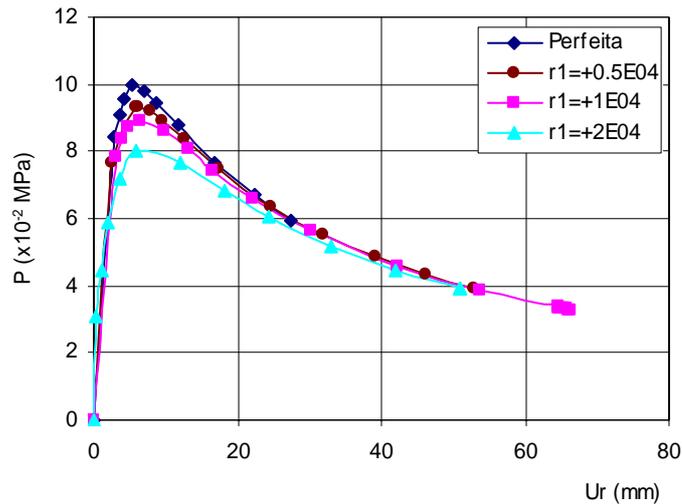
H = 1.0 mm

Figura 6.73 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de  $H = 1.0$  mm e curvaturas iniciais positivas  $r_1 = 1$  e  $2 \times 10^4$  mm .



H = 2.0 mm

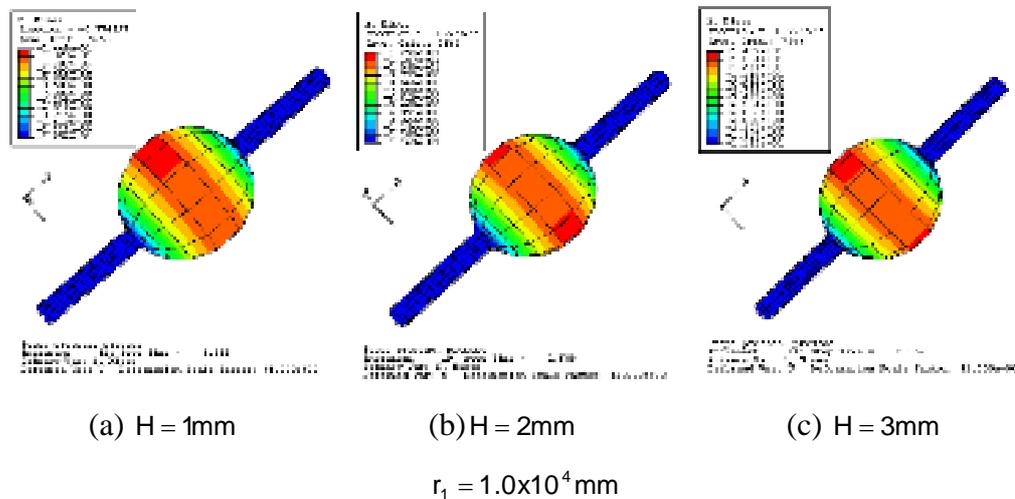
Figura 6.74 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de  $H = 2.0$  mm e curvaturas iniciais positivas  $r_1 = 0.5, 1.0$  e  $2.0 \times 10^4$  mm .



$H = 3.0 \text{ mm}$

Figura 6.75 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de  $H = 3.0 \text{ mm}$  e curvaturas iniciais positivas  $r_1 = 0.5, 1.0$  e  $2.0 \times 10^4 \text{ mm}$ .

Nota-se que o modo de deformação é o mesmo encontrado para a casca perfeita, como pode ser visualizado na Figura 6.76



(a)  $H = 1\text{mm}$

(b)  $H = 2\text{mm}$

(c)  $H = 3\text{mm}$

$r_1 = 1.0 \times 10^4 \text{ mm}$

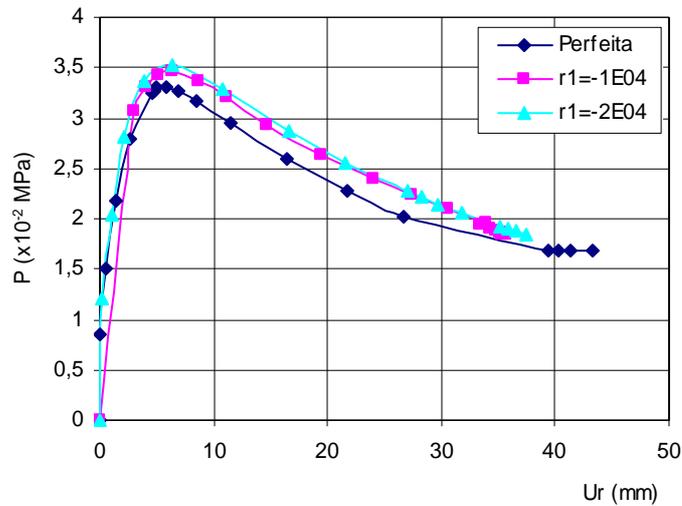
Figura 6.76 - Modos de deformação para cascas com curvatura inicial positiva de  $r_1 = 1.0 \times 10^4 \text{ mm}$  e espessuras de 1.0, 2.0 e 3.0mm respectivamente

#### 6.2.4.2.

#### Influência da curvatura inicial negativa

O mesmo estudo realizado para as geometrias de cascas citadas no item anterior é aqui apresentado, considerando-se que as cascas possuam curvaturas iniciais circulares negativas  $r_1 = -0.5, -1.0$  e  $-2.0 \times 10^4 \text{ mm}$ .

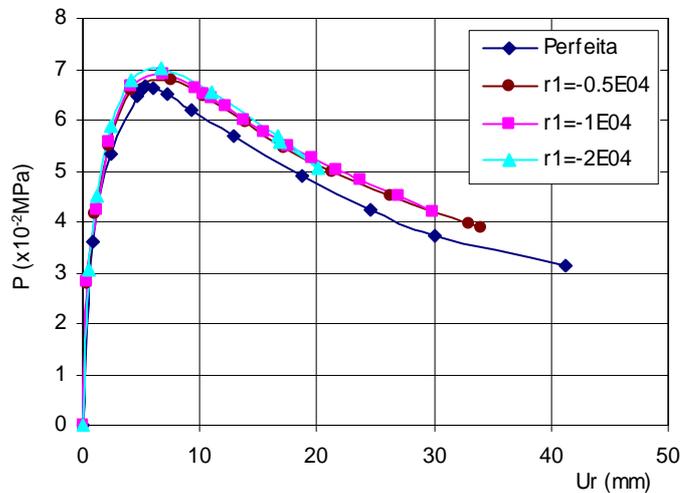
As Figuras 6.77 a 6.79 mostram a variação da pressão interna com o deslocamento radial máximo para as cascas em estudo.



H = 1.0 mm

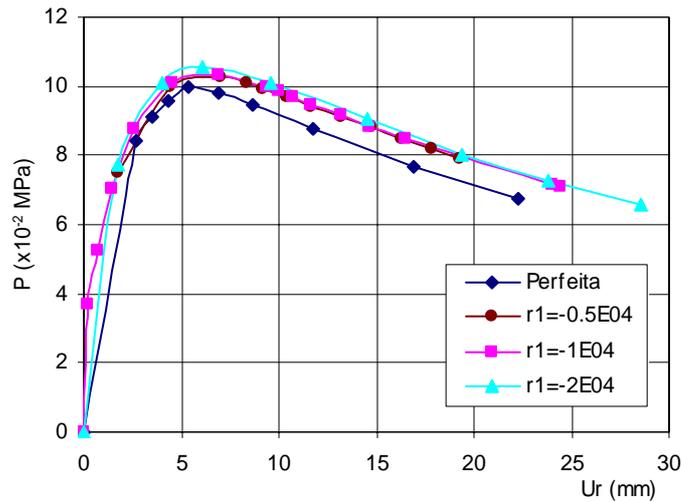
Figura 6.77 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de  $H = 1.0$  mm e curvaturas iniciais negativas  $r_1 = 1$  e  $2 \times 10^4$  mm.

Nota-se, neste caso, que ao contrário do exposto no item anterior ocorre um aumento na carga crítica a medida que se aumenta o raio de curvatura da casca.



H = 2.0 mm

Figura 6.78 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de  $H = 2.0$  mm e curvaturas iniciais negativas  $r_1 = 0.5$ ,  $1.0$  e  $2.0 \times 10^4$  mm.



H = 3.0 mm

Figura 6.79 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de H = 3.0 mm e curvaturas iniciais negativas  $r_1 = 0.5, 1.0$  e  $2.0 \times 10^4$  mm .

É interessante ressaltar a mudança significativa no modo de deformação devido a presença destas pequenas curvaturas iniciais negativas (Figura 6.80).

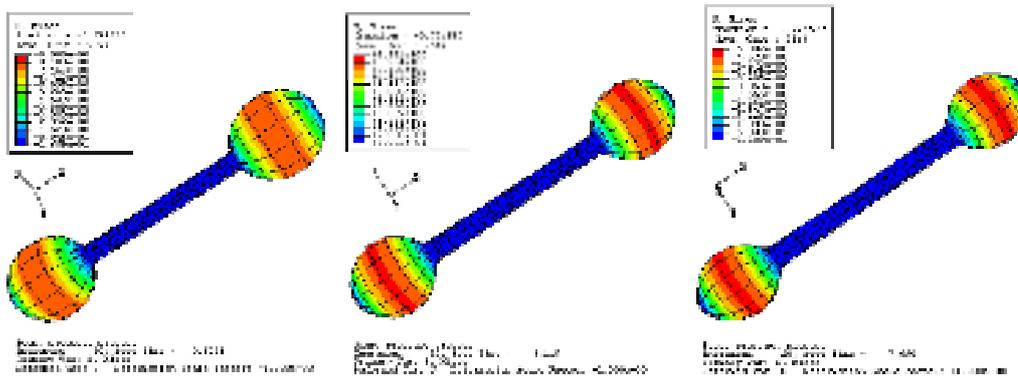


Figura 6.80 - Modos de deformação para cascas com curvatura inicial negativa de 1mm e espessura de 1.0, 2.0 e 3.0 mm respectivamente

A Figura 6.81 mostra a variação da pressão crítica da casca com o raio de curvatura  $r_1$ . Nota-se que o crescimento da pressão crítica da casca é, em módulo, inversamente proporcional ao raio de curvatura positiva e diretamente proporcional ao raio de curvatura negativa.

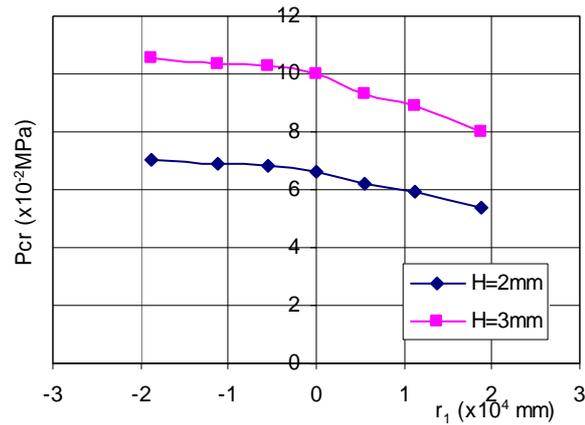


Figura 6.81 - Variação da pressão crítica interna da casca com o raio de curvatura  $r_1$  para cascas com espessuras indeformadas de 2.0 e 3.0 mm.

### 6.2.5.

#### **Análise experimental para a avaliação do acréscimo de pressão interna após a pressão crítica – comportamento pós-crítico avançado.**

Observa-se através dos resultados experimentais apresentados na Figura 6.82 que a casca cilíndrica, após a perda de estabilidade, apresenta um súbito decréscimo da pressão que atinge um nível bem inferior ao da pressão crítica, Figura 6.82-(c). Após assumir esta nova configuração, se continuar a injeção de ar, a pressão interna cai progressivamente até atingir um nível mínimo no qual permanecer praticamente constante, Figura 6.82-(e). Esta diminuição de pressão é seguida também de um constante acréscimo de deformação, mas somente na região onde se formou o bulbo, Figuras 6.82-(e-l). As partes próximas ao bulbo permanecem praticamente indeformadas e parecem funcionar como uma nova restrição de apoio devido a estas regiões possuírem uma rigidez bem maior que a da região onde se formou o bulbo. Assim a casca cilíndrica parece se comportar como uma casca fina na região onde há concentração de esforços, ou seja, na região onde se formou o bulbo.

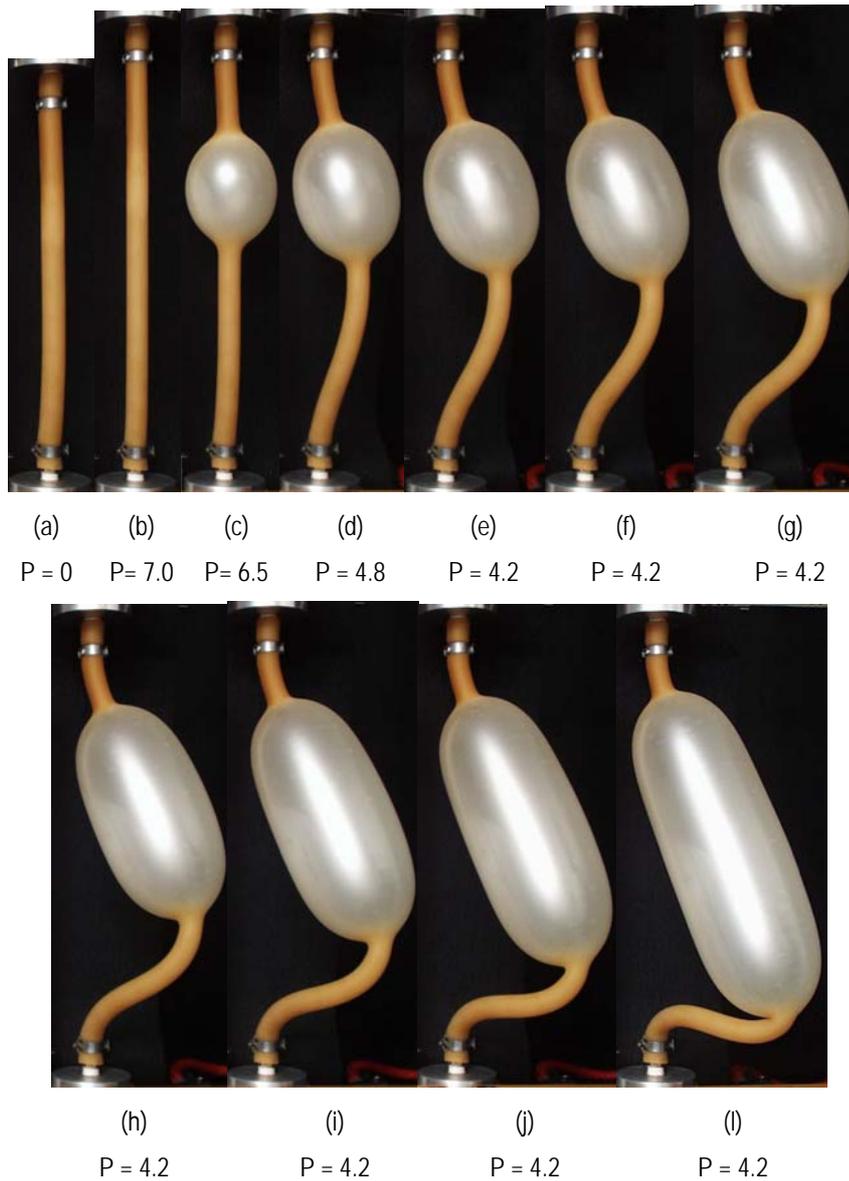


Figura 6.82 – Fotos de ensaio de tração e pressão interna em uma casca cilíndrica B210 ( $H/R = 2.63$ ,  $L/R = 34$ ) para acréscimo de pressão interna após atingir a pressão crítica. Pressões internas expressas em ( $\times 10^{-2}$  MPa)