

5

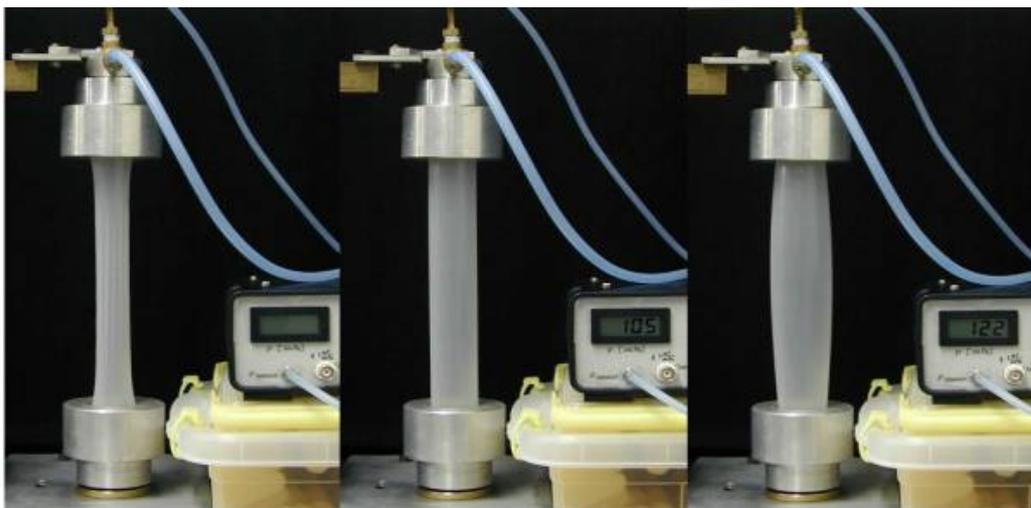
Análise experimental e numérica de membranas cilíndricas hiperelásticas

5.1.

Análise experimental para aferição da formulação apresentada: Ensaio de tração e pressão interna uniforme em membranas cilíndricas

A membrana cilíndrica analisada é constituída por um material homogêneo, isotrópico e incompressível (preservativo de borracha da marca Microtex), possui raio médio indeformado de 16.55 mm e espessura média de 0.086 mm , valores medidos pelo Instituto de Metrologia da PUC – Rio (ITUC) e comprimento indeformado de 102 mm , ou seja, $R/H = 193$, $L/R = 6.16$.

As Figuras 5.1 e 5.2 apresentam uma série de fotos de um ensaio realizado em laboratório para uma membrana cilíndrica inicialmente tracionada e submetida a vários níveis de pressão interna. O visor do aparelho de medição, que é visto na Figura 5.1, mostra o nível de pressão a qual a membrana está submetida. A Figura 5.1.a mostra a membrana submetida apenas a uma força de tração ou deslocamento axial imposto correspondente a um $\Delta L/L = 1$.



(a)

(b)

(c)

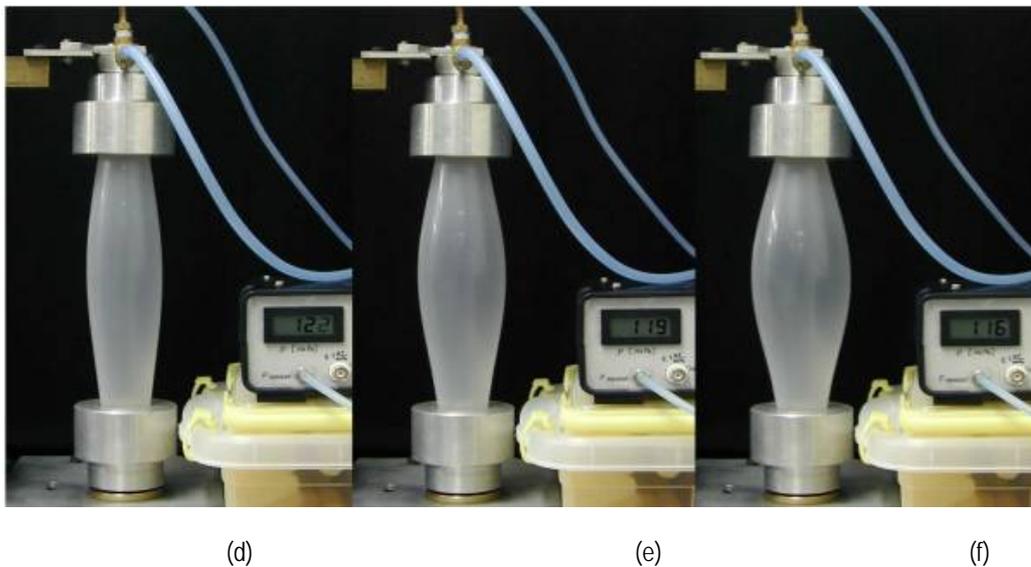


Figura 5.1 - Análise experimental de uma membrana sob carga axial e pressão

Pode-se verificar claramente através da Figura 5.1 que, à medida que o ar é injetado na membrana, o volume da mesma cresce e, ao mesmo tempo, cresce o nível de pressão interna. Entretanto, a partir de uma dada configuração crítica, o volume continua a crescer, mas há um decréscimo gradativo da pressão interna. Isto pode ser observado claramente comparando-se as Figuras 5.1(e) e 5.1(f) com a Figura 5.1(d). Essa mudança de comportamento ocorre para um pico de pressão crítica de $12.2 \times 10^{-4} \text{ MPa}$. Assim, tem-se uma região na qual, para um mesmo nível de pressão, encontra-se mais de uma configuração de equilíbrio estável correspondendo a diferentes volumes.

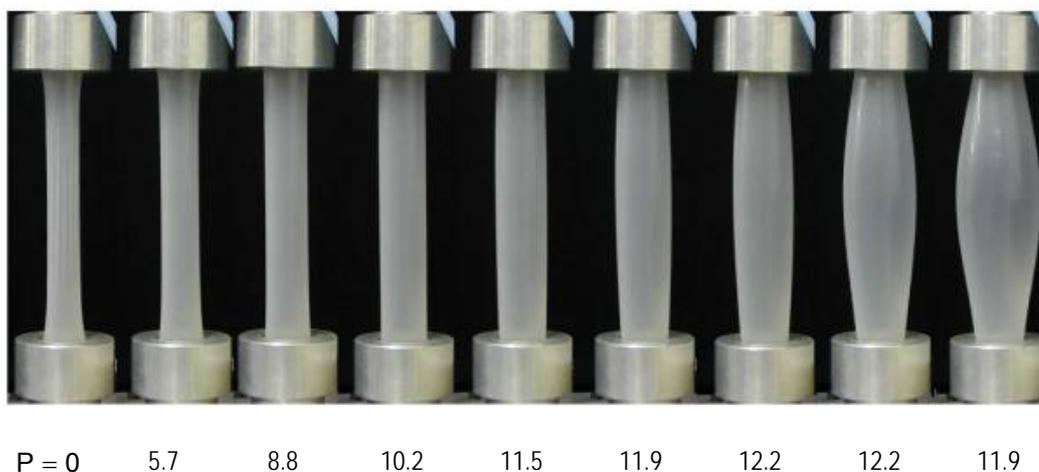


Figura 5.2 - Variação da deformada da membrana considerando uma tração constante com o aumento da pressão interna ($\times 10^{-4} \text{ MPa}$)

Na Figura 5.2 mostra-se a variação da deformada da membrana como função da pressão ao longo do processo de injeção de ar na membrana.

O volume interno da membrana foi calculado usando-se o programa Maple e a deformada da membrana obtida experimentalmente. De posse de um conjunto de pontos do contorno da membrana, obteve-se por interpolação uma função polinomial. A curva assim obtida é tomada como a geratriz da membrana deformada e o volume é então calculado utilizando-se o conceito de integral volume de revolução. Assim é possível visualizar graficamente através da Figura 5.3 a variação da pressão com o volume contido pela membrana. Mostra-se neste caso, tanto os dados obtidos durante a fase de carregamento quanto a fase de descarregamento.

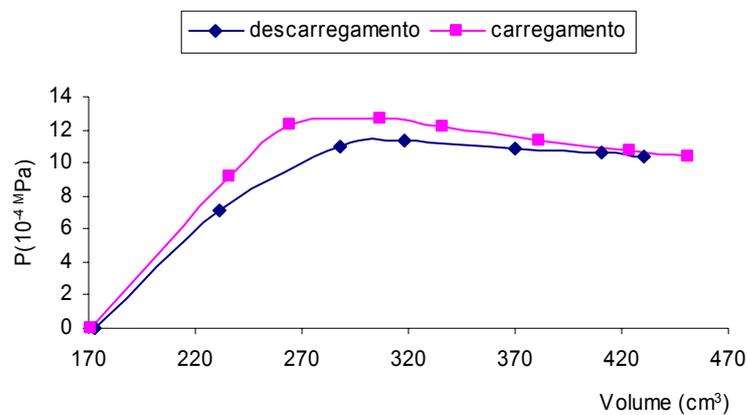


Figura 5.3 – Variação do volume da membrana com a pressão interna da membrana.

A Figura 5.3 mostra que o volume da membrana cresce até a pressão assumir um valor crítico. Após este valor crítico, a pressão dentro da membrana, começa a decrescer até atingir um valor mínimo. Isto ocorre porque a partir de um certo ponto o volume da membrana passa a crescer mais rapidamente que o volume de ar injetado, diminuindo conseqüentemente a pressão.

5.2.

Análise numérica de uma membrana cilíndrica tracionada submetida a pressões internas uniformes.

Após se identificar o comportamento da membrana em um ensaio típico, os resultados experimentais obtidos são usados para comparação e calibração do modelo numérico utilizando-se o algoritmo de Runge-Kutta e o programa ABAQUS.

Para a análise por elementos finitos, foi realizado um estudo de convergência da malha a ser utilizada, bem como a escolha do tipo de elemento que melhor represente a análise.

Considerando-se elementos não-simétricos de membrana do tipo M3D4 disponíveis na biblioteca do programa ABAQUS, diversas análises foram realizadas e os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.1. A convergência da carga crítica é analisada variando-se o comprimento do elemento utilizado, assim, é possível obter relações comprimento do elemento-comprimento da

membrana $\left(\frac{L_{ele}}{L}\right)$ e comprimento do elemento-raio da membrana $\left(\frac{L_{ele}}{R}\right)$ para as quais a carga crítica converge.

$\frac{L_{ele}}{R} \times 100\%$	36	30	28	27	26	21
$\frac{L_{ele}}{L} \times 100\%$	6	5	4.7	4.5	4.3	3.5
Nº Elementos	289	420	484	552	576	841
Nº Nós	306	441	506	576	600	870
Pcr	11.11	11.05	11.04	11.03	11.03	11.03

Tabela 5.1 – Resultados obtidos para análise com elementos de casca e membrana.

Na Figura 5.4 é mostrada a variação da carga crítica em função do número de elementos usados no processo de discretização da membrana. Nota-se uma boa convergência da carga crítica para malhas com número de elementos superior a 484, ou seja, para uma relação comprimento do elemento-comprimento da casca inferior a 4.7% e para uma relação comprimento do elemento-raio da membrana inferior a 28%.

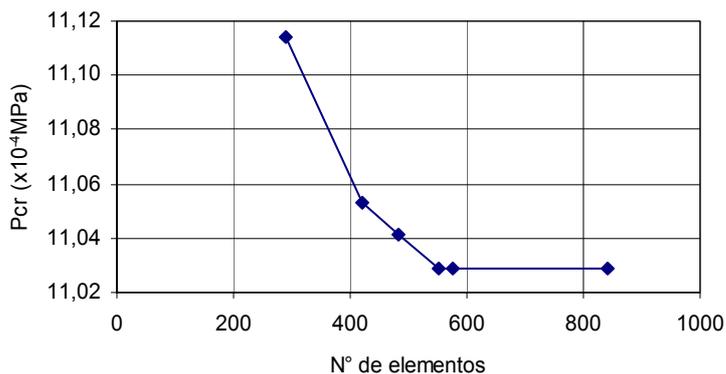


Figura 5.4 – Análise de convergência da carga crítica usando-se elementos de membrana M3D4

Na Tabela 5.2 os resultados obtidos com o elemento M3D4 são comparados com os resultados obtidos usando-se elementos de casca do tipo S4R e o mesmo número de elementos para diferentes configurações iniciais da membrana. Verifica-se que ambos os elementos levam aos mesmos resultados. Analisando-se os dados da Tabela 5.1, nota-se que o melhor tipo de elemento é o elemento de membrana, pois neste caso obtém-se um menor número de iterações e também por levar menos tempo para se concluir a análise.

Configuração da membrana	Tipo elemento	Nº Incremento	Nº Iteração/ Tempo(min)	Nº Elementos	P _{cr} x10 ⁻⁴ MPa
(R = 12, H = 0.086, L = 102)	S4R	3	3 / 54 min	552	14.71
	M3D4	3	2 / 34 min	552	14.72
(R = 14, H = 0.086, L = 102)	S4R	4	3 / 73 min	1092	12.76
	M3D4	4	2 / 57 min	1092	12.75
(R = 16, H = 0.086, L = 102)	S4R	4	3 / 85 min	1728	11,32
	M3D4	4	2 / 63 min	1728	11.31

Tabela 5.2 – Análise da membrana por elementos finitos usando-se elementos de membrana tipo M3D4 e elementos de casca tipo S4R.

Com base no estudo de convergência, toda a análise numérica feita a seguir utiliza elementos de membrana do tipo M3D4 e o método de Riks Modificado para geração dos caminhos de equilíbrio. Para comparação com os resultados experimentais, foi gerada uma malha contendo 841 elementos e 870 nós. A membrana analisada possui espessura de 0.086mm, comprimento inicial de

102mm e raio de 16.55mm, medidas referentes ao estado indeformado, ou seja, $R/H = 193$ e $L/R = 6.16$.

Na Figura 5.5 são comparadas as deformadas obtidas através da análise experimental (cor azul) para três níveis de pressão interna com os resultados obtidos pela integração numérica das equações de equilíbrio usando-se o método de Runge-Kutta (cor verde) e os resultados fornecidos pelo ABAQUS (cor preta).

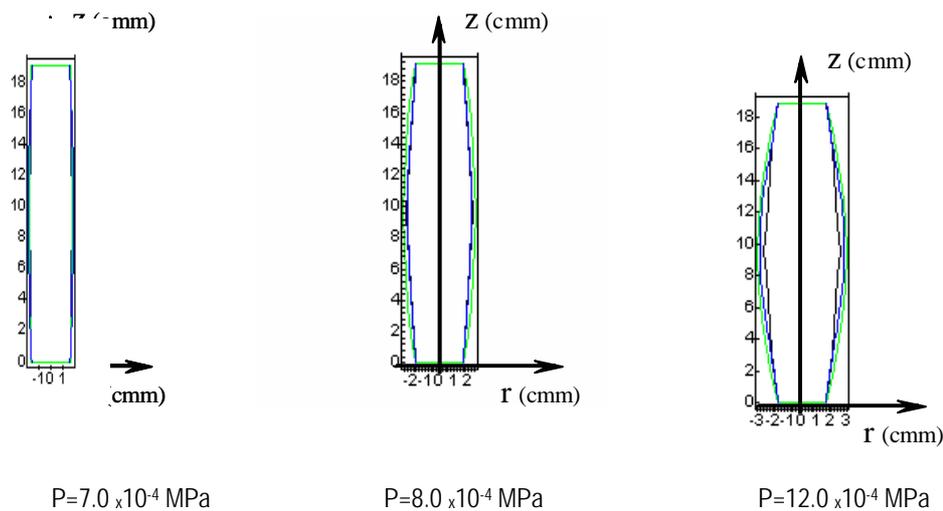


Figura 5.5 - Deformadas da membrana obtidas numérica e experimentalmente para três níveis de pressão interna e tração correspondente a um deslocamento longitudinal de $\Delta L/L = 1$

A Figura 5.6 mostra as deformadas, geradas através do programa ABAQUS, para uma tração fixa referente a um $\Delta L/L = 1$ e dois níveis de pressão interna ($P = 0$ e $P = P_{cr} = 11.8 \times 10^{-4} \text{ MPa}$). A graduação de cores representa a variação da deformação segundo o eixo X ($U1$) ao longo do comprimento da membrana deformada.

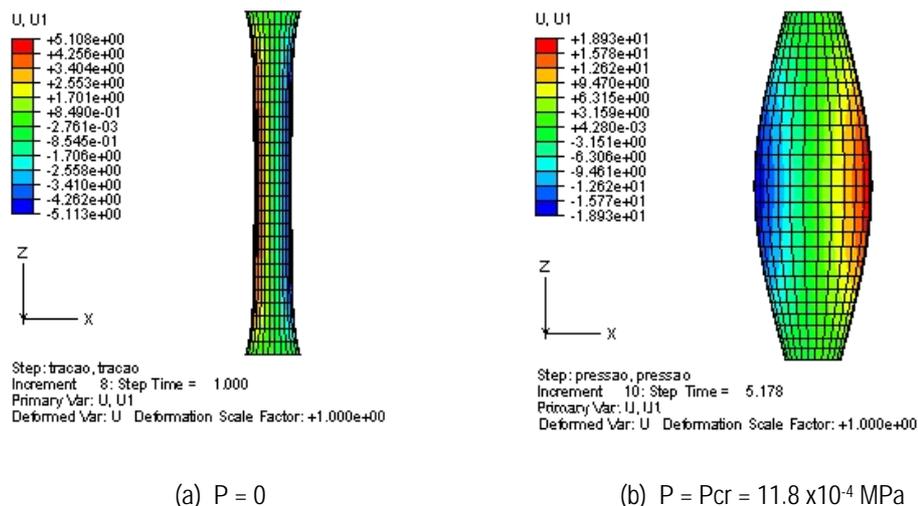


Figura 5.6 - Deformadas da membrana geradas numericamente pelo ABAQUS, para pressão nula (a) e para o nível máximo de pressão obtido (b)

Verifica-se que os resultados obtidos nas análises numéricas através do método de Runge-Kutta e através do método dos elementos finitos mostraram-se bastante próximos aos que se obteve experimentalmente; por exemplo, as pressões críticas obtidas numericamente correspondem, respectivamente, a 98 e 97% da pressão crítica obtida experimentalmente. Este estudo confirma a boa qualidade da modelagem da estrutura e do material e permite o desenvolvimento de uma análise paramétrica detalhada do comportamento da membrana, análise esta apresentada a seguir.

5.2.1.

Análise numérica de membranas cilíndricas com variação dos parâmetros comprimento (L), espessura (H) e raio (R) da membrana.

Análises numéricas foram realizadas utilizando-se o programa de elementos finitos ABAQUS para a avaliar o comportamento da membrana cilíndrica com a variação dos parâmetros L , R e H .

Na análise é utilizado o algoritmo de Riks para a determinação do caminho pós-crítico e elementos de membrana do tipo M3D4, ou seja, elementos quadriláteros lineares com integração reduzida.

5.2.1.1.

Influência da espessura no comportamento não-linear de membranas cilíndricas

Para a mesma configuração de membrana utilizada na análise experimental anterior, ou seja membrana cilíndrica com comprimento de 102 mm e raio de 16,55 mm, é feita uma análise do comportamento da membrana e da variação da carga crítica variando-se a espessura da membrana de 0.016 a 0.33 mm, ou seja, $50 \leq R/H \leq 1000$ e $L/R = 6.16$. A membrana é submetida a uma tração correspondente a um deslocamento longitudinal de $\Delta L/L = 1$ e a pressões internas uniformes variáveis.

A Figura 5.7 mostra a variação da pressão interna da membrana com o deslocamento radial para as diversas espessuras analisadas.

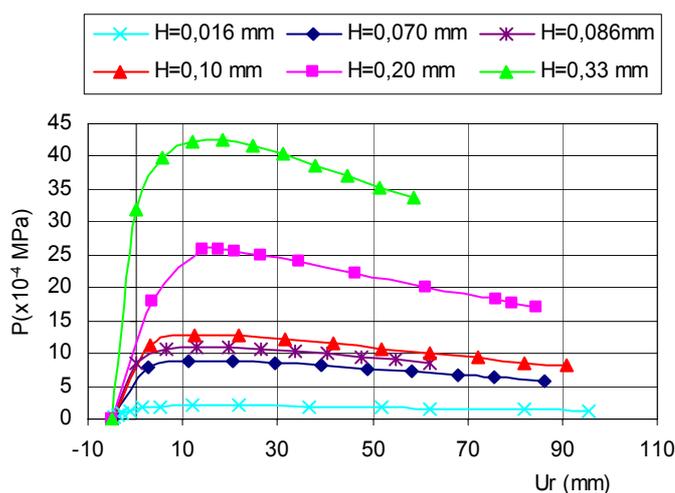


Figura 5.7 – Curvas carga-deslocamento radial máximo para espessuras variando entre $50 \leq R/H \leq 1000$ e $L/R = 6.16$.

Nota-se que a pressão crítica da membrana cresce com o aumento da espessura e que essa variação é praticamente linear, como mostra a Figura 5.8. Em todos os casos verifica-se que a pressão interna cresce inicialmente a medida que o volume cresce e que, ao mesmo tempo, a rigidez efetiva da estrutura decresce até atingir um ponto limite, a partir do qual a pressão interna passa a decrescer com o aumento de volume, em concordância com os resultados experimentais.

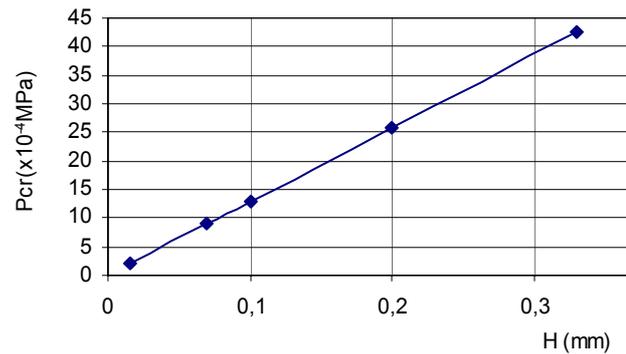


Figura 5.8 – Variação da pressão crítica com a espessura da membrana cilíndrica variando entre $50 \leq \frac{R}{H} \leq 1000$ e $\frac{L}{R} = 6.16$

Na Figura 5.9 são apresentadas as configurações críticas obtidas numericamente para algumas das espessuras citadas. Nesta figura as cores estão relacionadas com a tensão radial. Nota-se que, quanto menor é a espessura, maior é a variação do raio deformado e das tensões ao longo da altura da membrana.

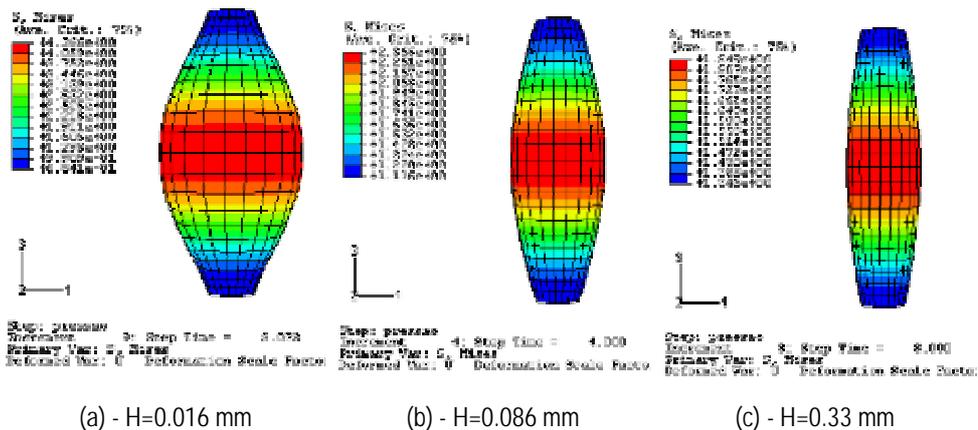


Figura 5.9 – Configurações deformadas obtidas através de análise numérica, para uma carga igual a pressão crítica e diferentes valores de espessura, H.

5.2.1.2.

Influência do raio no comportamento não-linear de membranas cilíndricas

Para a mesma configuração de membrana utilizada na análise anterior, ou seja membrana cilíndrica com espessura de $0,086\text{mm}$ e comprimento de 102mm , é feita, agora, uma análise do comportamento da membrana e da variação da carga crítica com raios variando de 12 a 19 mm, ou seja, $50 \leq \frac{R}{H} \leq 1000$ e $\frac{L}{H} = 1186$.

A membrana é, também, submetida a uma tração correspondente a um deslocamento longitudinal de $\Delta L/L = 1$ e a pressão interna uniforme.

A Figura 5.10 mostra a variação da pressão interna da membrana com o deslocamento radial para os diversos valores do raio da membrana. Em todos os casos, o comportamento inicial é praticamente linear, aparecendo os efeitos não lineares na região próxima a carga crítica. Nota-se que quando o raio cresce a rigidez inicial da membrana decresce de forma acentuada, diminuindo também o valor da pressão crítica, como mostra a Figura 5.11. De modo inverso ao comportamento apresentado no caso de variação da espessura, esse decréscimo de pressão apresenta uma variação não-linear.

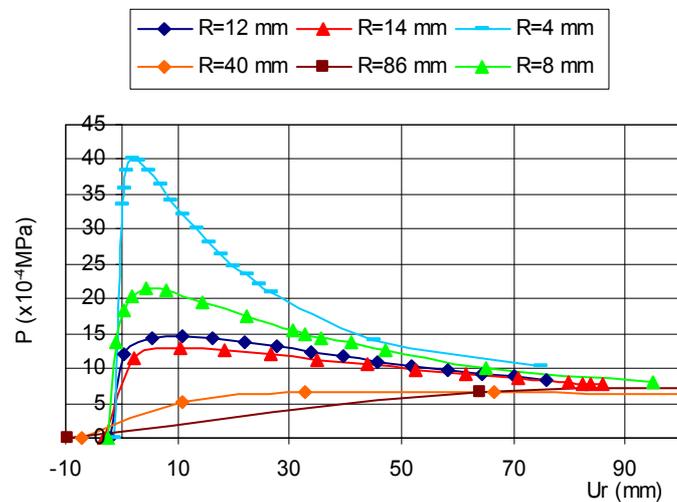


Figura 5.10 – Influência do raio da membrana na relação pressão-deslocamento radial máximo. $50 \leq R/H \leq 1000$ e $L/H = 1186$.

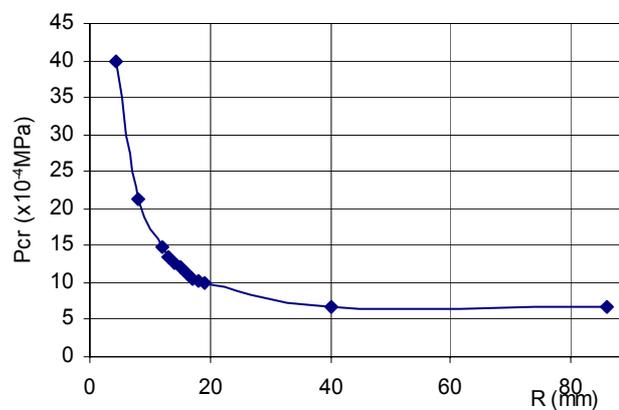


Figura 5.11 – Variação da pressão crítica com o raio da membrana cilíndrica com $50 \leq R/H \leq 1000$ e $L/H = 1186$.

5.2.1.3.

Análise da influência da variação do comprimento inicial no comportamento não-linear de membranas cilíndricas

Para a mesma configuração de membrana utilizada nas análises anteriores, ou seja, membrana cilíndrica com espessura de 0.086mm e raio de 16.55 mm, é feita, agora, uma análise da influência da variação do comprimento inicial da membrana, L , em seu comportamento não-linear e na variação da carga crítica. O comprimento inicial varia de 3 a 300 mm, ou seja, $0.2 \leq L/R \leq 18$ e $R/H = 193$. A membrana é, também, submetida a uma tração correspondente a um deslocamento longitudinal de $\Delta L/L = 1$ e a pressão interna uniforme de magnitude variável.

A Figura 5.13 mostra a variação da pressão interna da membrana com o deslocamento radial para os diversos comprimentos analisados.

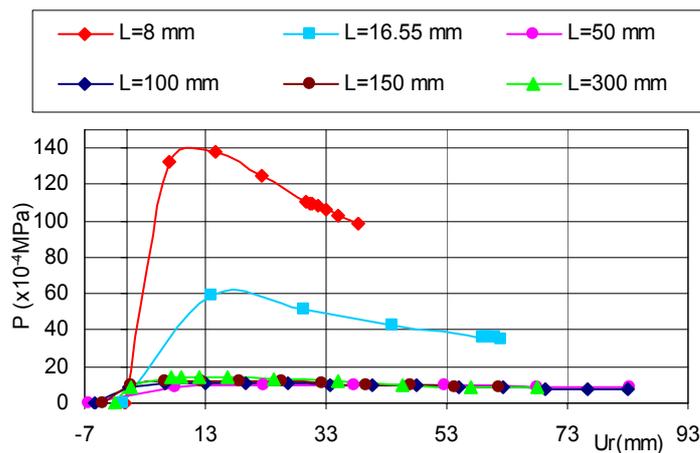


Figura 5.13 – Curvas pressão-deslocamento radial máximo para comprimentos analisados variando entre $0.5 \leq L/R \leq 18$ e $R/H = 193$

Nota-se que a pressão crítica é inversamente proporcional ao comprimento da membrana cilíndrica, uma vez que quanto maior o comprimento da membrana menor se torna a pressão crítica. Na Figura 5.14, pode-se observar que esta variação, assim como para o caso do raio, é também não-linear. Nota-se, entretanto, que a partir de um certo valor ($R \approx 50$, neste exemplo) o comprimento inicial deixa de ter influência no comportamento não-linear e na capacidade de carga da membrana. Na Figura 5.15 são apresentadas algumas configurações críticas obtidas numericamente para valores selecionados do comprimento L .

Pode-se observar que, a partir de um certo comprimento, as deformações se concentram na parte central da membrana, sendo que as regiões próximas aos apoios não são praticamente afetadas pela pressão interna, isto explica porque a partir de um certo comprimento crítico o valor de L deixa de ter influência na resposta da membrana.

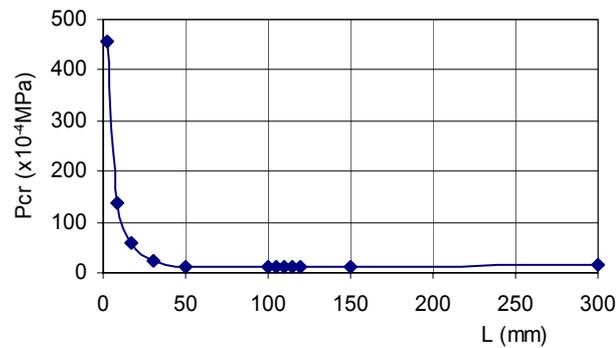


Figura 5.14 – Variação da pressão crítica com o comprimento da membrana cilíndrica

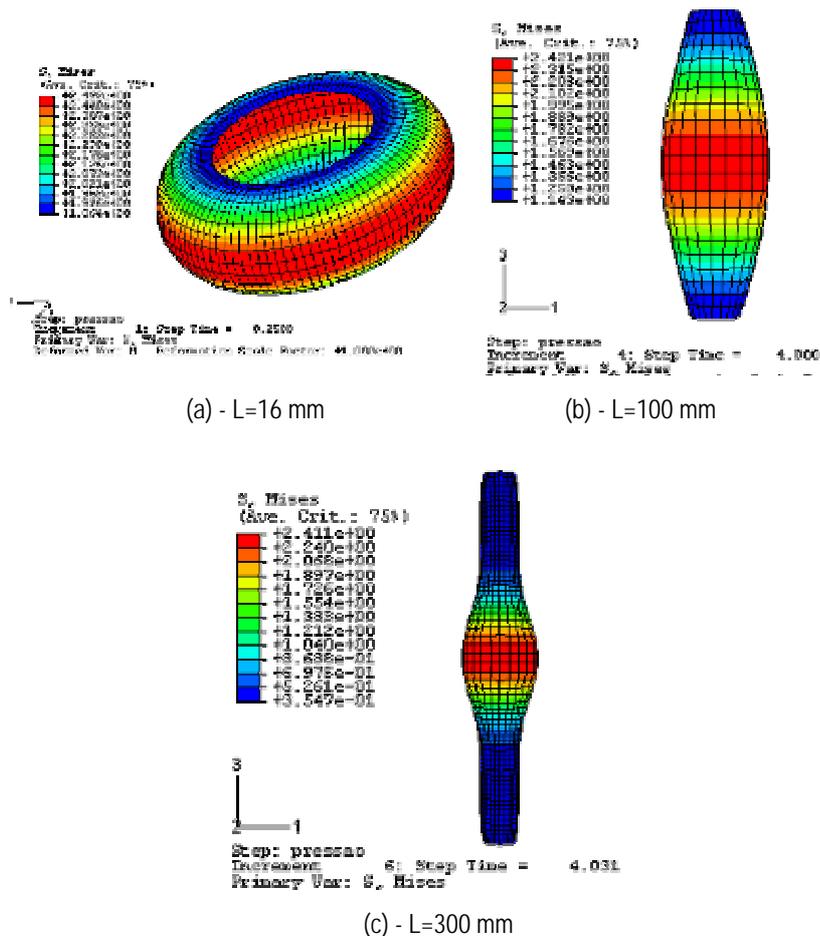


Figura 5.15 – Configurações deformadas obtidas numericamente para três comprimentos de membrana

5.2.2. Análise numérica da influência do nível de tração inicial

Utilizando-se a configuração de membrana analisada nos ensaios experimentais, faz-se a seguir uma análise do comportamento da membrana em função do nível de tração. Para isto toma-se um deslocamento imposto de $\Delta L/L = 0.2, 0.4, 0.6, 1.0, 1.5$ e 2.0 . Os resultados são apresentados na Figura 5.16.

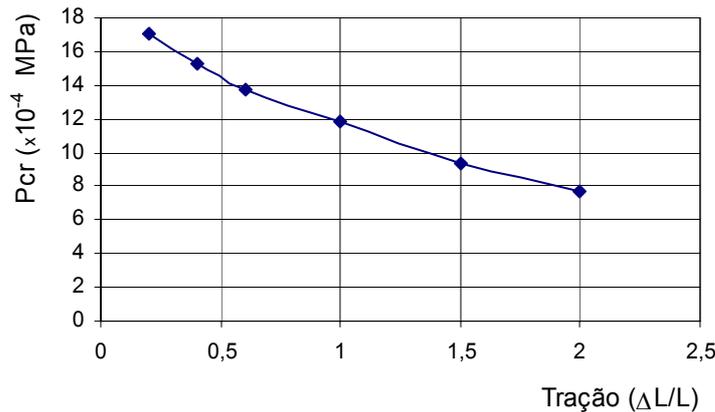


Figura 5.16 – Variação da carga pressão crítica com o nível de tração inicial.

Observa-se que a pressão crítica é inversamente proporcional ao nível de tração aplicada, ou seja, quanto maior o nível de tração, menor é a pressão máxima que pode suportar a membrana. Acredita-se que este decréscimo na capacidade de carga da membrana seja devido à diminuição da espessura da membrana a medida que cresce a tração inicial.

Nas Figuras 5.17 a 5.20 são apresentadas as configurações inicial (pressão nula) e crítica para vários níveis de tração inicial.

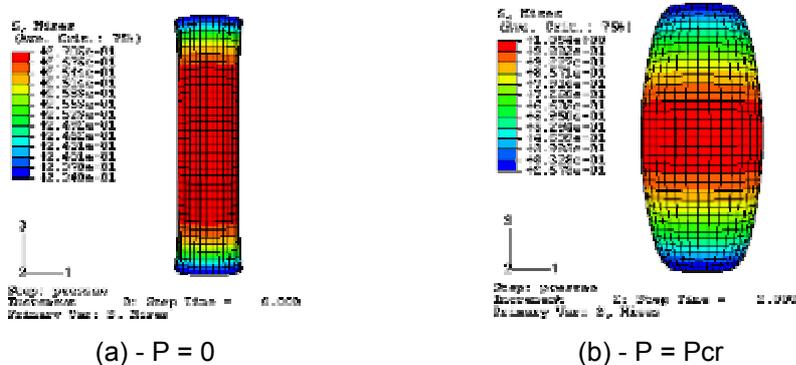


Figura 5.17 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\Delta L/L = 0.2$

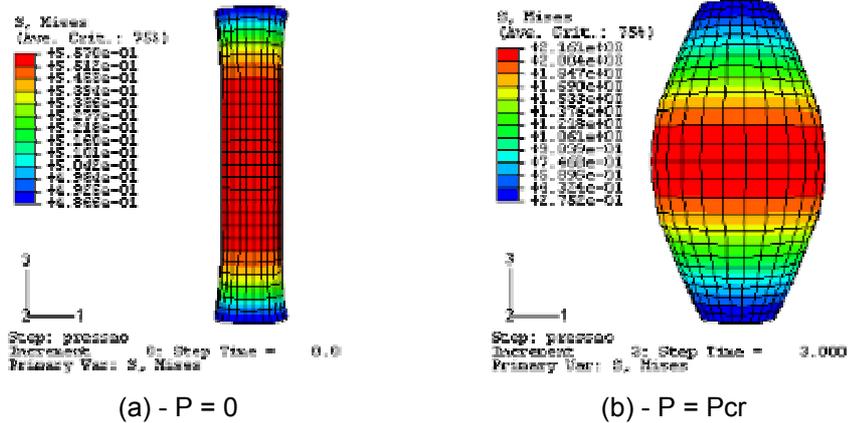


Figura 5.18 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\Delta L/L = 0.4$

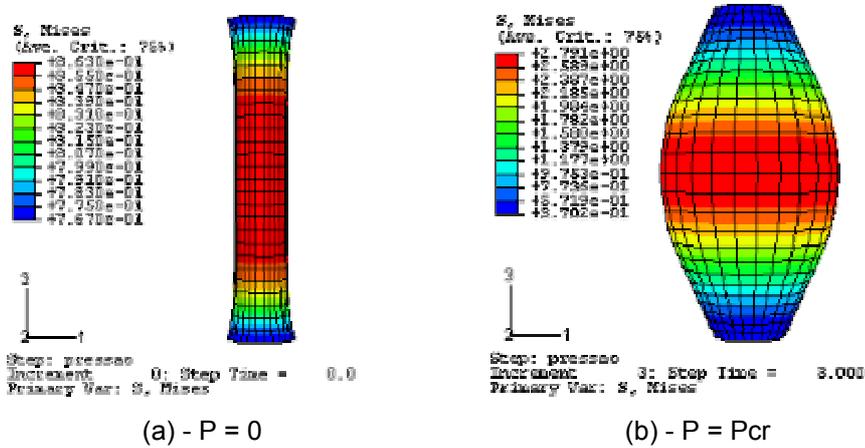


Figura 5.19 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\Delta L/L = 0.6$

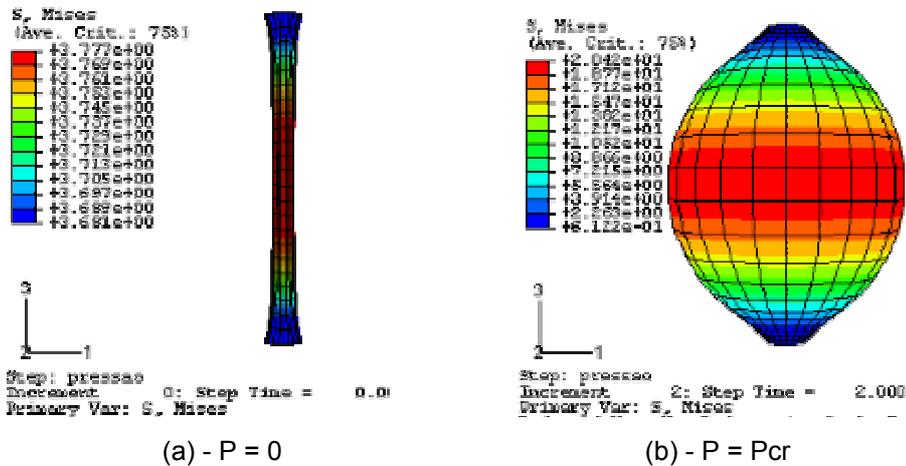


Figura 5.20 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\Delta L/L = 2.0$

5.2.3.

Análise numérica da influência de imperfeições iniciais

Membranas como as aqui analisadas, em virtude dos processos de fabricação, podem apresentar pequenas imperfeições locais geradas pelo aumento ou diminuição da espessura em um determinado trecho. Para se analisar o efeito destas imperfeições no comportamento da membrana, optou-se por estudar duas classes distintas de imperfeição: (1) imperfeições locais axissimétricas e (2) imperfeições locais não simétricas. Neste item são analisadas membranas cilíndricas com imperfeições iniciais em forma de anel ao longo do comprimento da membrana e também imperfeições locais em uma região quadrada localizada ao longo da membrana. Embora na prática as imperfeições não tenham uma distribuição bem definida, este estudo paramétrico permitirá avaliar como imperfeições podem afetar de uma forma global o comportamento da membrana.

5.2.3.1.

Influência de imperfeições iniciais locais axissimétricas

São introduzidas na membrana imperfeições locais em forma de anel através da diminuição da espessura de elementos finitos que circundam a membrana. São analisadas diversas localizações do anel de imperfeição ao longo do comprimento da membrana cilíndrica, assim como diversas espessuras de imperfeição.

São analisadas membranas cilíndricas com comprimento indeformado de 102 mm, espessura indeformada de 0.086 mm e raio indeformado de 16.55mm, ou seja, $H/R = 0.005$ e $L/R = 6.16$. A membrana está submetida a uma tração axial correspondente a um deslocamento axial imposto de $\Delta L/L = 1$. São introduzidas imperfeições com espessuras que variam de 60% a 98% da espessura indeformada da membrana com passo de 5% de H, localizadas a uma distância do apoio superior de 5 a 45% do comprimento indeformado, L.

Posição	Distancia do apoio (%L)
Z_1	5
Z_2	15
Z_3	25
Z_4	35
Z_5	45

Tabela 5.3 – Posições das imperfeições iniciais em forma de anel

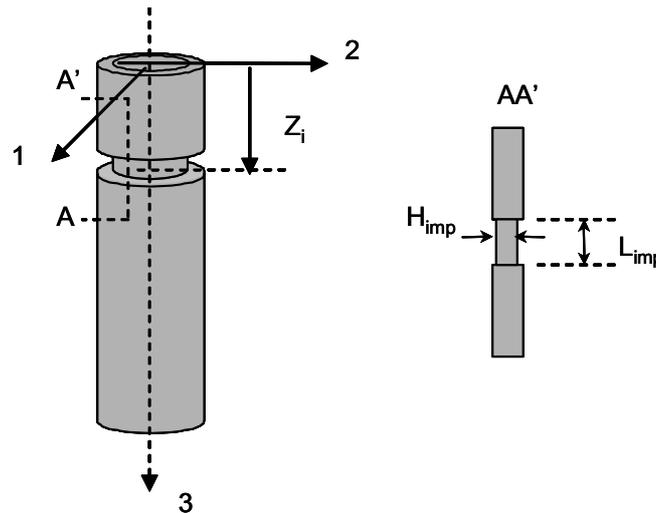


Figura 5.21 – Representação gráfica de uma imperfeição axissimétrica

A Figura 5.22 mostra a variação da carga crítica da membrana cilíndrica com a posição da imperfeição para diversas espessuras de imperfeição. Nota-se que, de um modo geral, quanto mais distante do apoio se localiza a imperfeição menor é a carga crítica. Pode-se também verificar que quanto menor é a espessura da região da imperfeição maior será a taxa de decréscimo da carga crítica, ou seja, a pressão crítica decresce mais rapidamente para espessuras de imperfeição menores. Entretanto nota-se que para a imperfeição localizada junto ao apoio o comportamento é exatamente o inverso. Isto está relacionado com a influência da rigidez do apoio na carga crítica. Quando a imperfeição se localiza junto ao apoio há uma menor variação das tensões e deformações ao longo da casca, isto é, o apoio se aproxima de um diafragma.

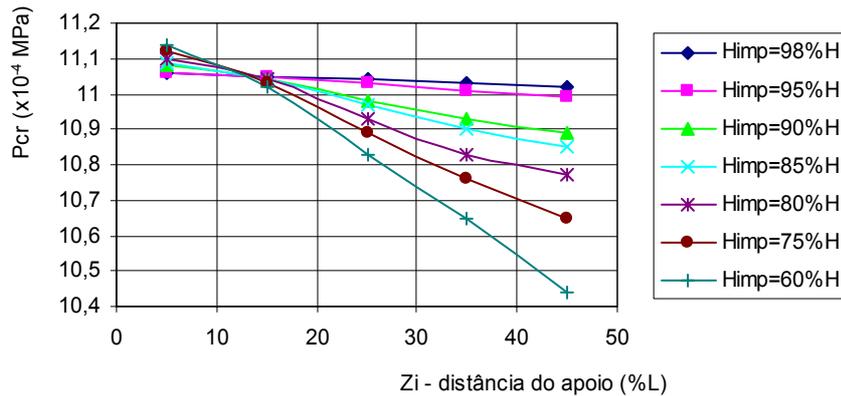


Figura 5.22 – Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição para diferentes espessuras de imperfeição. $60\%H \leq H_{imp} \leq 98\%H$. $H/R = 0.005$ e $L/R = 6.16$

A Figura 5.23 ilustra as deformadas da membrana obtidas numericamente para uma espessura de imperfeição de $80\%H$ para as posições Z_1 , Z_2 e Z_4 . Esta figura também permite observar que, além da variação da pressão crítica da membrana cilíndrica, ocorre também uma mudança em seu modo de deformação. Para a espessura de imperfeição considerada, a região da membrana onde ocorre a maior deformação radial é a parte central da membrana para as posições Z_1 e Z_2 , assim como ocorre para a membrana perfeita. No entanto, para as demais posições, a região de maior deformação é aquela próxima ao local da imperfeição como pode ser observado na Figura 5.23(c). A gradação de cores representa a variação da tensão ao longo do comprimento da casca, sendo a região avermelhada a região com maior nível de tensão e a região azulada submetida ao menor nível de tensão.

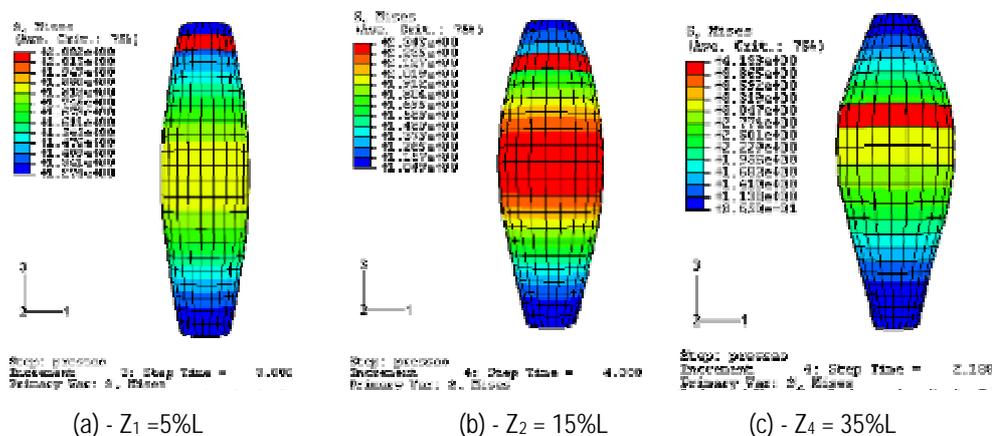


Figura 5.23 – Configurações deformadas para membranas com imperfeição inicial em forma de anel com espessuras de imperfeição de $80\%H$

A Figura 5.24 apresenta a variação da pressão crítica com a espessura da imperfeição para diversas posições da imperfeição. Nota-se que, para a posição de imperfeição Z_1 , a pressão crítica cresce com o aumento da espessura da região da imperfeição local, o contrário do que ocorre com as demais posições. Observa-se que a medida que decresce a espessura da região da imperfeição local, quanto mais distante do apoio está a imperfeição, maior é o decréscimo da pressão crítica.

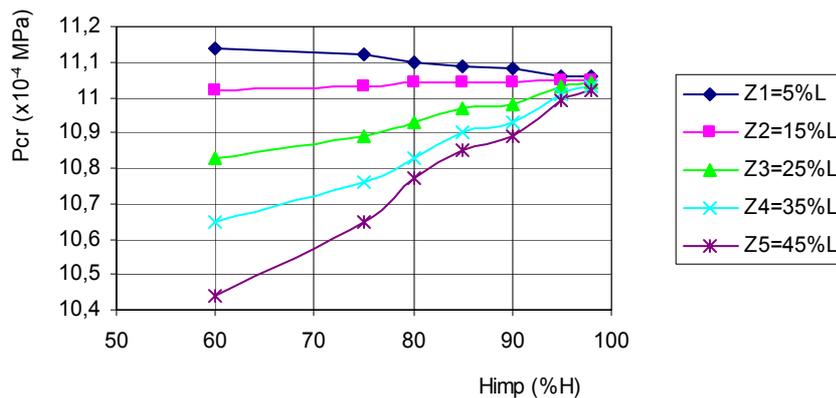


Figura 5.24 – Variação da pressão crítica com a espessura da imperfeição para diversas posições da imperfeição

A Figura 5.25 mostra as configurações deformadas de uma membrana com uma imperfeição situada na posição Z_4 e espessuras de 98, 85 e 60% H . Para espessura de imperfeição maiores que 90% H , o modo de deformação é similar ao da membrana perfeita, entretanto, para espessuras de imperfeição menores que esta, a região de maior deformação radial é aquela próxima ao local onde se situa a imperfeição.

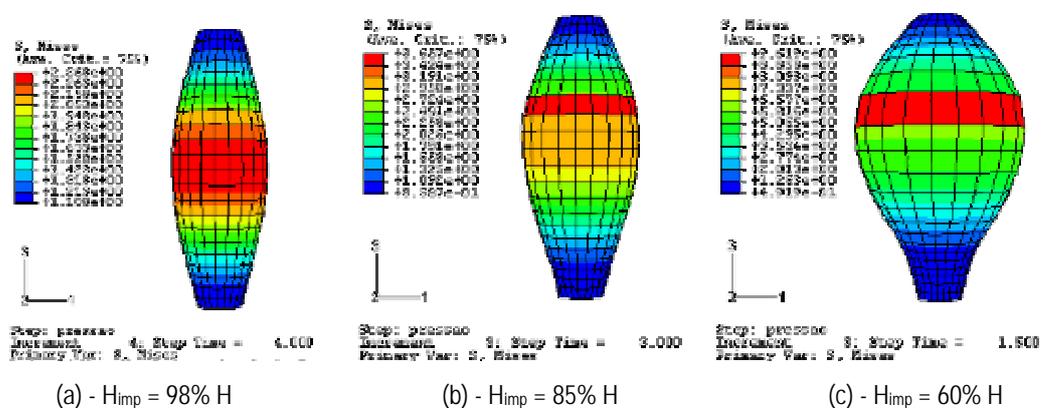


Figura 5.25 – Configurações deformadas para diversas espessuras de imperfeição situadas na posição Z_4

5.2.3.2.

Influência das imperfeições iniciais em uma região quadrada

São introduzidas na membrana imperfeições locais em uma região quadrada, localizada ao longo da membrana, através da diminuição da espessura dos elementos finitos que formam esta região. São analisados casos para diversas espessuras e duas localizações das imperfeições ao longo do comprimento da membrana cilíndrica, assim como realizado para as imperfeições em forma de anel.

A mesma configuração de membrana analisada no item anterior é admitida. São introduzidas imperfeições com espessuras que variam de 60 a 98% H da espessura indeformada da membrana, localizadas nas posições Z_2 e Z_4 citadas na análise anterior.

A Figura 5.26 mostra a variação da carga crítica da membrana cilíndrica com a posição da imperfeição para diversas espessuras de imperfeição. Nota-se que quanto mais distante do apoio se localiza a imperfeição menor é a carga crítica. Pode-se também verificar que, quanto menor é a espessura da membrana na região da imperfeição, maior será a taxa de decréscimo da carga crítica, ou seja, a pressão crítica decresce mais rapidamente para espessuras de imperfeição menores.

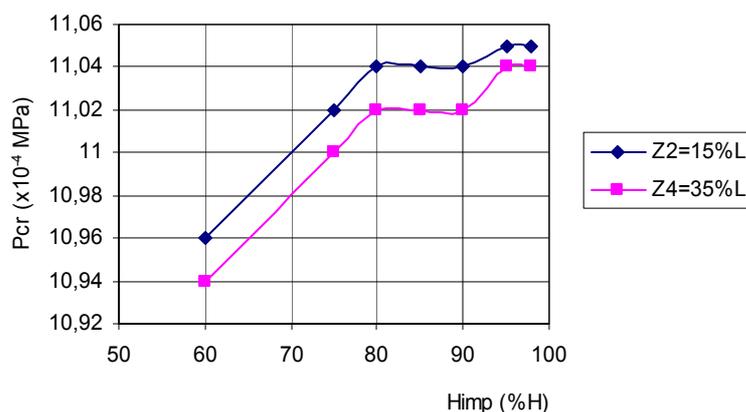


Figura 5.26 – Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição para duas posições distintas: Z_2 e Z_4

Para imperfeições localizadas na posição Z_2 , para todas as espessuras de imperfeições admitidas não houve mudança no modo de deformação da

membrana cilíndrica como pode ser observado na Figura 5.27. Entretanto, para imperfeições localizadas na posição Z_4 , para um decréscimo na espessura acima de 10%H ocorre uma mudança do modo de deformação da membrana com perda de simetria, como pode ser observado nas Figuras 5.23(c) e (d).

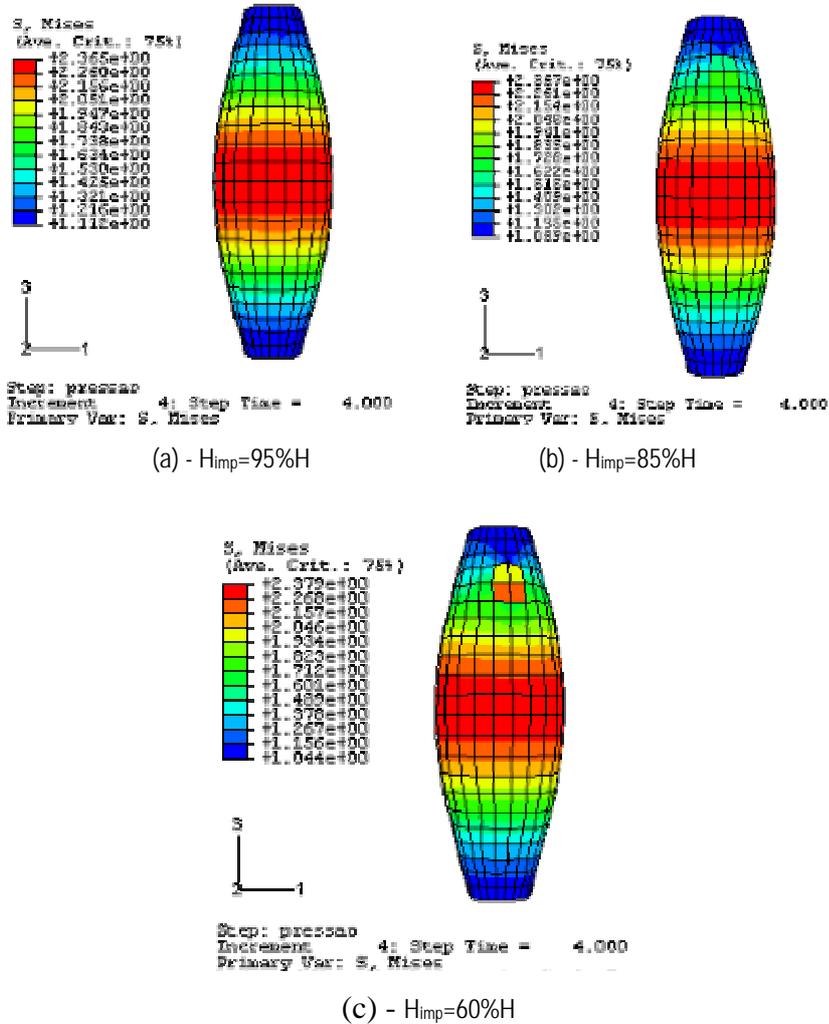


Figura 5.27 – Configurações deformadas para membranas com imperfeição local com diferentes espessuras, localizadas na posição Z_2

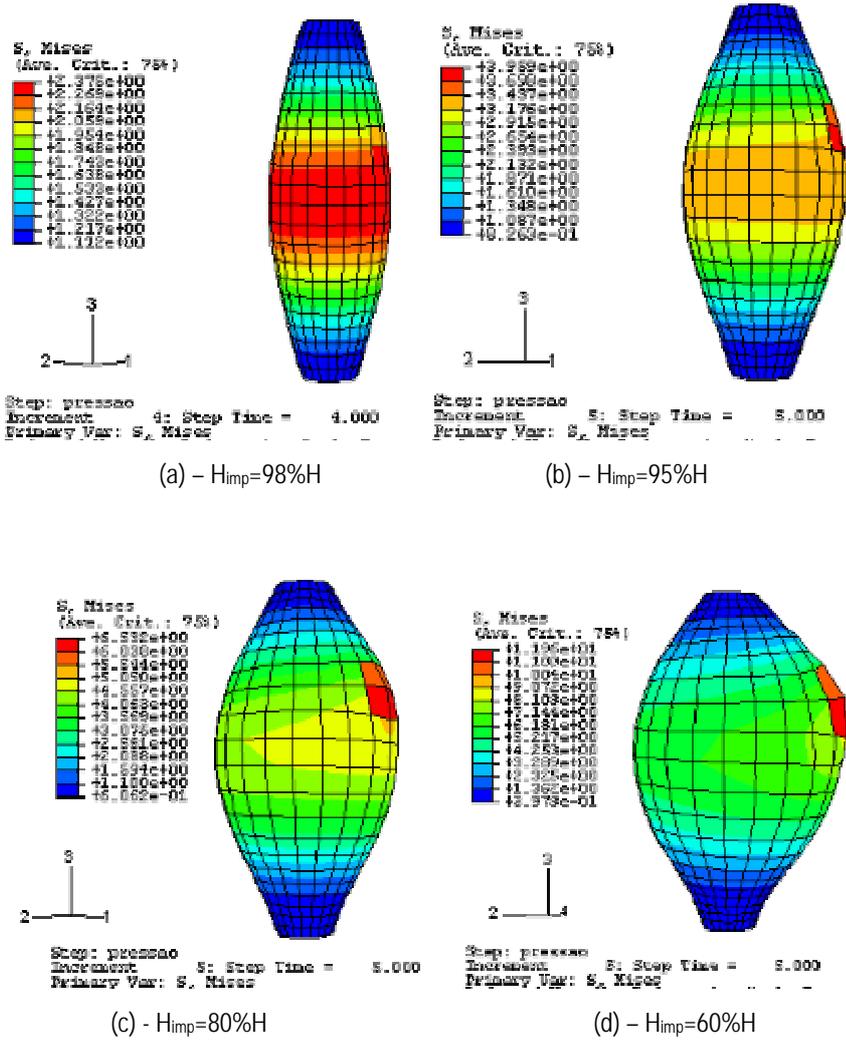


Figura 5.28 – Modos de deformação para membranas cilíndricas com imperfeição localizada na posição Z_4 , para diversas espessuras de imperfeição.