

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Stefane Rodrigues Xavier Lopes

Comportamento Não-Linear e Instabilidade de Membranas e Cascas Hiperelásticas

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Área de concentração: Estruturas.

Orientadores: Paulo Batista Gonçalves
Djenane Pamplona

Rio de Janeiro, setembro de 2003

Stefane Rodrigues Xavier Lopes

Comportamento Não-Linear e Instabilidade de Membranas e Cascas Hiperelásticas

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Djenane Pamplona

Co-Orientador

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Krosrow Ghavami

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Ronaldo C. Battista

COOPE /Universidade Federal do Rio de Janeiro

Estevam B. de Las Casas

Universidade Federal de Minas Gerais

Raul Rosas Silva

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Luiz Bevilacqua

Laboratório Nacional de Computação Científica

Ney Augusto Dumont

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro , 12 de setembro de 2003

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Stefane Rodrigues Xavier Lopes

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, em 1996. Durante a graduação atuou na área de estruturas metálicas. Desenvolveu trabalhos de iniciação científica entre 1994 e 1995. Concluiu o curso de Mestrado em Engenharia Civil, área de concentração em Estruturas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1999.

Ficha Catalográfica

Lopes, Stefane Rodrigues Xavier

Comportamento não-linear e instabilidade de membranas e cascas hiperelásticas / Stefane Rodrigues Xavier Lopes; orientadores: Paulo Batista Gonçalves, Djenane Pamplona. – Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2003.

180 f. : il. ; 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Membranas. 3. Cascas hiperelásticas. 4. Instabilidade. 5. Métodos numéricos. 6. Análise experimental. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pamplona, Djenane. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

À minha família, Alexandre, Ana Carolina e Alexandre Júnior, minha razão de vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me fazer sentir Sua presença em todos os momentos de minha vida.

Aos meus maravilhosos orientadores Paulo e Djenane pela força e compreensão a mim transmitidas durante estes quatro anos de trabalho. Espero sinceramente poder seguir meu caminho estando sempre perto de vocês.

Ao meu marido Alexandre, pelo enorme incentivo e capacidade de compreensão o que me fizeram persistir neste caminho mesmo nos momentos mais complexos. Agradeço também ao amor e carinho que a mim nunca faltaram.

Aos meus filhos pela alegria e imensos sorrisos nos fins de tarde ao chegar do trabalho. Melhor recompensa, acredito, não haja.

Aos meus colegas Cristina Alvim e Cláudio Ribeiro pela amizade, confiança, companheirismo e compreensão. Vocês são para mim, amigos muito especiais.

Aos funcionários do DEC pelo apoio técnico prestado com muita eficiência.

Resumo

Lopes, Stefane Rodrigues Xavier; Gonçalves, Paulo Batista; Pamplona, Djenane. **Comportamento Não-Linear e Instabilidade de Membranas e Cascas Hiperelásticas**. Rio de Janeiro, 2003. 180p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta tese tem como objetivo analisar o comportamento estático não-linear e possíveis instabilidades de membranas e cascas hiperelásticas. Uma análise experimental detalhada de membranas e cascas com diferentes geometrias e submetidas à tração axial e pressão interna uniforme é realizada. Um aparato foi desenvolvido para possibilitar a tração da estrutura enquanto a mesma era preenchida por ar. As cascas e membranas utilizadas na análise experimental são compostas por elastômero isotrópico, homogêneo e hiperelástico, o qual é modelado como um material Neo-Hookeano incompressível, descrito por uma única constante elástica, ou por material do tipo Mooney-Rivlin ou Ogden, descritos por duas constantes elásticas. Estas constantes são obtidas pela comparação de resultados experimentais e numéricos para a estrutura sob tração axial uniforme. A estrutura foi discretizada utilizando-se elementos finitos de casca ou membrana mais apropriados e as equações de equilíbrio não-lineares resultantes resolvidas usando-se o programa de elementos finitos ABAQUS. Quando a estrutura tracionada é preenchida com ar observa-se que a pressão inicialmente cresce juntamente com o volume interno até um certo valor crítico. Após atingir este valor crítico um bulbo de deformação é formado subitamente num local ao longo do comprimento da estrutura e a pressão interna decresce subitamente, entretanto o volume interno da estrutura continua a crescer. Os resultados experimentais aproximam-se de maneira satisfatória aos resultados numéricos. Uma análise paramétrica detalhada é desenvolvida para estudar a influencia da tração inicial bem como dos parâmetros geométricos no comportamento não-linear e na capacidade de carga da estrutura. A influencia de diferentes tipos de imperfeições locais também é detalhadamente analisada.

Palavras-chave

Membranas; Cascas Hiperelásticas; Grandes Deformações; Instabilidade; Métodos Numéricos; Análise Experimental

Abstract

Lopes, Stefane Rodrigues Xavier; Gonçalves, Paulo Batista; Pamplona, Djenane. **Non-Linear Behavior and Instability of Hyperelastic Membranes and Shells**. Rio de Janeiro, 2003. 180p. DSc. Dissertation - Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This thesis investigates the large deformations of hyperelastic membranes and shells. The static nonlinear behavior and possible instabilities of the membrane are both analyzed. A detailed experimental analysis was carried out involving cylindrical membranes and shells with different geometries and initial axial forces and the influence of the axial force and the internal pressure were investigated. An apparatus was developed to support vertically the extended structure while it is filled with air. The membranes and shells used in the experiments are composed of an isotropic, homogeneous and hyperelastic rubber, which is modeled as a Neo-Hookean incompressible material, described by a single elastic constant, or a Mooney-Rivlin or Ogden material, described by two elastic constants. These constants were obtained by comparing the experimental and numerical solutions for the structure under traction. The structure was discretized using appropriate membrane or shell finite elements and the resulting nonlinear equilibrium equations solved using the FE software ABAQUS. When the extended structure was filled with air, it was observed that the pressure increased initially as the volume increased until a certain critical value was reached, after which a bubble was suddenly formed along the structure and the internal pressure decreased markedly with increasing volume. The experimental results are, as shown in the thesis, in satisfactory agreement with the theory. A detailed parametric analysis was also carried out to study the influence of the initial traction and geometric parameters on the non-linear behavior and load carrying capacity of the structure. The influence of different types of local imperfections was also studied in detail.

Keywords

Membrane; Hyperelastic Shell; Large Deformations; Instabilities; Finite Element Method; Experimental Analysis

Lista de figuras

Figura 2.1 - Configurações indeformada e deformada da membrana	20
Figura 2.2- Coordenadas e possíveis carregamentos da membrana onde:	41
Figura 2.3 - Configurações indeformada e deformada da membrana cilíndrica	46
Figura 2.4 - Coordenadas para uma membrana de forma cilíndrica	49
Figura 3.1 - Representação esquemática de um ensaio de tração uniforme	52
Figura 3.2 - Curva carga-deslocamento genérica para problemas de instabilidade	65
Figura 3.3 - Determinação do incremento no algoritmo de Riks Modificado	66
Figura 3.4 - Descrição do tipo de elemento de membrana usada pelo ABAQUS	68
Figura 3.5 - Representação gráfica dos elementos de membrana	69
Figura 3.6 - Descrição de um elemento de casca disponível no ABAQUS70	
Figura 3.7 – Representação gráfica dos elementos de casca	70
Figura 4.1 - Modelo de Maxwell para materiais viscoelásticos	75
Figura 4.2 - Modelo de Kelvin para materiais viscoelástico	76
Figura 4.3 - Ensaio de Fluência	76
Figura 4.4 - Ensaio de relaxação	77
Figura 4.5 – Resultados dos ensaios realizados para uma força de tração de 3N.	78
Figura 4.6 – Resultados dos ensaios realizados para uma força de tração de 5N	78
Figura 4.7 – Resultados dos ensaios realizados para uma força de tração de 10N	78
Figura 4.8 - Aparato utilizado nos ensaios de membranas cilíndricas sob tração e pressão	79
Figura 4.9 - Fotos de um típico ensaio de membrana cilíndrica sob	

tração	80
Figura 4.10 - Seqüência de deformadas ilustrando um ensaio de tração em membrana cilíndrica	81
Figura 4.11 – Resultados experimentais: relação carga axial versus deformação longitudinal para uma membrana tracionada	81
Figura 4.12 - Deformadas obtidas numericamente e experimentalmente para uma membrana tracionada	83
Figura 4.13 - Curvas carga-deformação obtidas numérica e experimentalmente para uma membrana tracionada	85
Figura 4.14 – Foto ilustrativa do pórtico e do aparelho de medição de pressão utilizados nos ensaios de membranas	86
Figura 4.15 – Foto ilustrativa do aparato utilizado nos ensaios de cascas cilíndricas espessas sob tração e pressão	87
Figura 4.16 - Seqüência de deformadas ilustrando um ensaio de tração em uma casca cilíndrica	87
Figura 4.17 - Resultados experimentais: relação carga axial versus deformação longitudinal específica para uma casca tracionada	88
Figura 4.18 - Curvas carga-deformação obtidas numérica e experimentalmente para uma casca tracionada	89
Figura 5.1 - Análise experimental de uma membrana sob carga axial e pressão	92
Figura 5.2 - Variação da deformada da membrana considerando uma tração constante com o aumento da pressão interna ($\times 10^{-4}$ MPa)	92
Figura 5.3 – Variação do volume da membrana com a pressão interna da membrana.	93
Figura 5.4 – Análise de convergência da carga crítica usando-se elementos de membrana M3D4	95
Figura 5.5 - Deformadas da membrana obtidas numérica e experimentalmente para três níveis de pressão interna e tração correspondente a um deslocamento longitudinal de $\frac{\Delta L}{L} = 1$	96
Figura 5.6 - Deformadas da membrana geradas numericamente pelo ABAQUS, para pressão nula e para o nível máximo de pressão obtido	97
Figura 5.7 – Curvas carga-deslocamento radial máximo para espessuras	

variando entre $50 \leq \frac{H}{R} \leq 1000$ e $\frac{L}{R} = 6.16$. 98

Figura 5.8 – Variação da pressão crítica com a espessura da membrana cilíndrica variando entre $50 \leq \frac{R}{H} \leq 1000$ e $\frac{L}{R} = 6.16$ 99

Figura 5.9 – Configurações deformadas obtidas através de análise numérica, para uma carga igual a pressão crítica e diferentes valores de espessura, H. 99

Figura 5.10 – Influência do raio da membrana na relação pressão-deslocamento radial máximo. $50 \leq \frac{R}{H} \leq 1000$ e $\frac{L}{H} = 1186$. 100

Figura 5.11 – Variação da pressão crítica com o raio da membrana cilíndrica com $50 \leq \frac{R}{H} \leq 1000$ e $\frac{L}{H} = 1186$. 100

Figura 5.12 – Configurações críticas obtidas numericamente para membranas cilíndricas com raios equivalentes a $\frac{R}{H} = 50, 200$ e 1000 101

Figura 5.13 – Curvas pressão-deslocamento radial máximo para comprimentos analisados variando entre $0.5 \leq \frac{L}{R} \leq 18$ e $\frac{R}{H} = 193$ 102

Figura 5.14 – Variação da pressão crítica com o comprimento da membrana cilíndrica 103

Figura 5.15 – Configurações deformadas obtidas numericamente para três comprimentos de membrana 103

Figura 5.16 – Variação da carga pressão crítica com o nível de tração inicial. 104

Figura 5.17 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\frac{\Delta L}{L} = 0.2$ 104

Figura 5.18 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\frac{\Delta L}{L} = 0.4$ 105

Figura 5.19 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\frac{\Delta L}{L} = 0.6$ 105

Figura 5.20 - Configurações deformadas para membranas com tração correspondente a $\frac{\Delta L}{L} = 2.0$ 105

Figura 5.21 – Representação gráfica de uma imperfeição axissimétrica 107

Figura 5.22 – Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição para diferentes espessuras de imperfeição. $60\%H \leq H_{imp} \leq 98\%H$.

$H/R = 0.005$ e $L/R = 6.16$ 108

Figura 5.23 – Configurações deformadas para membranas com imperfeição inicial em forma de anel com espessuras de imperfeição de $80\%H$ 108

Figura 5.24 – Variação da pressão crítica com a espessura da imperfeição para diversas posições da imperfeição 109

Figura 5.25 – Configurações deformadas para diversas espessuras de imperfeição situadas na posição Z_4 109

Figura 5.26 – Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição para duas posições distintas: Z_2 e Z_4 110

Figura 5.27 – Configurações deformadas para membranas com imperfeição local com diferentes espessuras, localizadas na posição Z_2 111

Figura 5.28 – Modos de deformação para membranas cilíndricas com imperfeição localizada na posição Z_4 , para diversas espessuras de imperfeição. 112

Figura 6.1 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna inicialmente sem tração para a borracha B210 ($R_H = 2.63$, $L/R = 34$). P , pressão em ($\times 10^{-2} MPa$). Configuração inicial (a); configuração crítica (c). 113

Figura 6.2 – Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna com tração equivalente a $\Delta L/L = 0.16$ para a borracha B210 ($R_H = 2.63$, $L/R = 34$). P , pressão em ($\times 10^{-2} MPa$). Configuração inicial (a); configuração crítica (c). 115

Figura 6.3 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna com tração equivalente a $\Delta L/L = 0.32$ para a borracha B210 ($R_H = 2.63$, $L/R = 34$). P , pressão em ($\times 10^{-2} MPa$). Configuração inicial (a); configuração crítica (c). 115

Figura 6.4 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna com tração equivalente a $\Delta L/L = 0.47$ para a borracha B210 ($R_H = 2.63$, $L/R = 34$). P , pressão em ($\times 10^{-2} MPa$). Configuração

inicial (a); configuração crítica (c). 116

Figura 6.5 – Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna inicialmente sem tração para o corpo de prova B200

($R/H = 2.0$, $L/R = 34$). P , pressão em ($\times 10^{-2}$ MPa). Configuração inicial (a); configuração crítica (d) 117

Figura 6.6 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova

B200 ($R/H = 2.0$, $L/R = 34$). P , pressão em ($\times 10^{-2}$ MPa) 118

Figura 6.7 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B204

($R/H = 2.0$, $L/R = 55$). P , pressão em ($\times 10^{-2}$ MPa). 119

Figura 6.8 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B205

($R/H = 2.78$, $L/R = 52.3$). P , pressão em ($\times 10^{-2}$ MPa) 119

Figura 6.9 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B207

($R/H = 2.22$, $L/R = 45.7$). P , pressão em ($\times 10^{-2}$ MPa) 120

Figura 6.10 - Ensaio de uma casca cilíndrica hiperelástica sob pressão interna para vários níveis de tração para o corpo de prova B209

($R/H = 4.0$, $L/R = 38$). P , pressão em ($\times 10^{-2}$ MPa) 120

Figura 6.11 – Variação da pressão crítica com o nível de tração para as cascas analisadas experimentalmente 121

Figura 6.12 – Variação da pressão crítica com a relação R/H para três níveis de tração analisados 121

Figura 6.13 - Variação da pressão crítica com a relação L/R para três níveis de tração analisados 121

Figura 6.14 – Análise de convergência da carga crítica com o número de elementos da malha para a casca perfeita 122

Figura 6.15 - Deformadas da casca B210 ($R/H = 2.63$, $L/R = 34$) geradas numericamente através do programa ABAQUS, para os três níveis de pressão e configuração obtida somente para esforço de tração (a). 123

Figura 6.16 - Curvas carga-deslocamento radial máximo para cascas de

espessuras variando entre $1 \leq H \leq 3.5\text{mm}$, ou seja, $9.33 \leq R/H \leq 33.4$ e $L/R = 34$ constante.	125
Figura 6.17 - Variação da pressão crítica com a espessura das cascas para três valores distintos do raio R.	125
Figura 6.18- (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo para uma casca com raio variando entre $3\text{mm} \leq R \leq 10\text{mm}$, ou seja, $1.5 \leq R/H \leq 5.0$ e (b) comparação entre a análise numérica e experimental para a casca B207	127
Figura 6.19 - Variação da carga crítica com o raio indeformado, R.	127
Figura 6.20 – Configuração de formada obtida numericamente, através do programa ABAQUS, para cascas com raios indeformados de $R = 3, 30$ e 5mm	128
Figura 6.21 – Variação do deslocamento radial, quando a pressão atinge níveis críticos U_{Rcr} , com os raios analisados.	128
Figura 6.22 – Curva pressão-deslocamento radial máximo para cascas de comprimentos que variam de $100 \leq L \leq 1000\text{mm}$	129
Figura 6.23 – Modo de deformação obtido numericamente, através do programa ABAQUS, para cascas com comprimentos indeformados de $L = 50, 1000$ e 500mm	130
Figura 6.25 – Representação gráfica das posições de imperfeições locais axissimétricas em forma de anel	132
Figura 6.26 – Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para casca perfeita B210 ($R/H = 2.63$, $L/R = 22$). Configuração inicial (a); configuração crítica (b).	133
Figura 6.27 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para a casca B210 ($R/H = 2.63$, $L/R = 22$) com imperfeição inicial nas posições $Z_1 = 0.02L$ (a,b) e $Z_2 = 0.05L$ (c,d) . Configuração inicial (a,c); configuração crítica (b,d).	134
Figura 6.28 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para a casca B210 ($R/H = 2.63$ $L/R = 22$) com imperfeição inicial nas posições $Z_3 = 0.20L$ (a,b), $Z_4 = 0.30L$ (c,d) e $Z_5 = 0.45L$ (e,f). Configuração inicial (a,c,e); configuração crítica (b,d,f).	135

- Figura 6.29 – Variação da carga crítica experimental com as posições da imperfeição. ($0.02 \leq Z_i \leq 0.45L$). 135
- Figura 6.30 – Representação gráfica de uma imperfeição axissimétrica com redução (a) e acréscimo (b) na espessura da casca 136
- Figura 6.31 – Curva de convergência da carga crítica com o número de elementos para cascas com imperfeição em forma de anel. 137
- Figura 6.32 – Posições dos anéis de imperfeição representadas na cor vermelha e evidenciadas através do programa ABAQUS após a aplicação da tração 138
- Figura 6.33 – (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo de uma casca com imperfeição em forma de anel localizada em diversas posições ao longo do comprimento da casca B210 ($\frac{H}{R} = 0.38$, $\frac{L}{R} = 22$) (b) e detalhe da região de pressões máximas atingidas. 138
- Figura 6.35 – (a) Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição em função da distancia, em porcentagem do comprimento da casca, em relação ao apoio inferior da casca para diversas espessuras de imperfeição (b) e detalhe das cargas críticas obtidas para a posição Z_1 . 140
- Figura 6.36 – (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição em forma de anel na posição Z_5 com comprimento de $L_{imp} = 0.0250L$ e espessuras variáveis (b) e detalhe da região de pressão máxima. 141
- Figura 6.37 – Variação da pressão crítica em função da espessura da casca na região da imperfeição para comprimentos de imperfeição de $0.0125L$ e $0.0250 L$. 141
- Figura 6.38 – Deformadas obtidas numericamente, através do programa ABAQUS, para $H_{imp} = 0.85H$ para os dois comprimentos de imperfeição analisados. U_1 corresponde à deformação na direção 1. 141
- Figura 6.39 – Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição em forma de anel com altura da imperfeição variável ($0.0125 \leq L_{imp} \leq 0.05L$) 142
- Figura 6.40 – Variação da carga crítica com o aumento do comprimento do anel de imperfeição para as posições Z_2 e Z_5 . 143
- Figura 6.41 - Deformadas obtidas para uma casca com imperfeição

localizado na posição Z_2 para comprimentos de imperfeições variando de $0.0125L \leq L_{imp} \leq 0.05L$. 144

Figura 6.42 - Posições dos anéis de imperfeição, representadas na cor azul, evidenciadas através da saída do programa ABAQUS após a aplicação da tração 144

Figura 6.43 – (a) Curva pressão-deslocamento radial máximo de uma casca com imperfeição em forma de anel localizada em diversas posições ao longo do comprimento da casca B210 ($R_H = 2.63$, $L_R = 22$) (b) e detalhe da região da pressões críticas 145

Figura 6.45 - Deformadas de uma casca cilíndrica com espessura de imperfeição de $H_{imp} = 1.60 H$ obtidas através do programa ABAQUS para as posições Z_1 a Z_5 respectivamente 147

Figura 6.46 - Variação da carga crítica com a posição da imperfeição para diversas espessuras de imperfeição 148

Figura 6.47 – Curva pressão-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição em forma de anel com altura de $L_{imp} = 0.025L$ e espessuras variáveis na posição Z_4 (a) e detalhe da região de pressão máxima (b). 148

Figura 6.48 - Deformadas obtidas através do programa ABAQUS para as espessuras de imperfeição analisadas. 149

Figura 6.49 – Variação da carga crítica com a espessura da imperfeição para diversas posições da imperfeição 150

Figura 6.50 – Variação da carga crítica com o comprimento do anel de imperfeição para as posições Z_1 a Z_5 . 151

Figura 6.51 - Representação gráfica da imperfeição local em uma região quadrada da casca 152

Figura 6.52 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para cascas com imperfeição inicial em uma região quadrada nas posições Z_1 (a,b) e Z_2 (c,d). ($R_H = 2.63$) e ($L_R = 22$). Configuração inicial (a,e); configuração crítica (b,d). 152

Figura 6.53 - Fotos do ensaio experimental de tração e pressão interna para cascas com imperfeição inicial em uma região quadrada nas

- posições Z_3 (a,b) e Z_4 (c,d). ($R_H = 2.63$) e ($L_R = 22$). Configuração inicial (a,e); configuração crítica (b,d). 153
- Figura 6.54 – Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição obtida experimentalmente 153
- Figura 6.55 – Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição localizada de dimensões $0.025 \times 0.025L \times 0.85H$ nas posições Z_1 a Z_4 (a) e detalhe da região próxima a carga crítica (b). 154
- Figura 6.56 – Configurações deformadas de cascas com imperfeições locais de dimensões $0.025L \times 0.025L \times 0.85H$ para as posições Z_1 a Z_4 . 155
- Figura 6.57 - Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição localizada, medida em porcentagem do comprimento da casca em relação ao apoio inferior, para uma casca com $H_{imp} = 0.85H$ 156
- Figura 6.58 - Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição localizada de dimensões $0.025L \times 0.025L \times 0.75H$ nas posições Z_1 a Z_4 (a) e detalhe da região de carga máxima (b). 156
- Figura 6.59 - Configurações deformadas de cascas com imperfeições locais de dimensões $0.025L \times 0.025L \times 0.75H$ para as posições Z_1 a Z_4 . 157
- Figura 6.60 -Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição localizada, medida em porcentagem do comprimento da casca em relação ao apoio inferior, de dimensões $0.025L \times 0.025L \times 0.75H$ 158
- Figura 6.61 - Curva carga-deslocamento radial máximo para uma casca com imperfeição localizada de dimensões $0.025 \times 0.025L \times 0.55H$ na posições Z_1 a Z_4 (a) e detalhe da região da carga crítica (b). 158
- Figura 6.62 – Configurações deformadas obtidas através do programa ABAQUS para cascas com imperfeições localizadas de dimensões $0.025L \times 0.025L \times 0.55H$ nas posições Z_1 a Z_4 . 159
- Figura 6.63 - Variação da pressão crítica com a posição da imperfeição localizada medida em porcentagem do comprimento da casca em relação ao apoio inferior para uma casca com imperfeição de dimensões $0.025L \times 0.025L \times 0.55H$ 160
- Figura 6.64 – Figura ilustrativa da posição de duas imperfeições locais 160
- Figura 6.65 – Convergência da carga crítica com o número de elementos para uma casca com múltiplas imperfeições locais com espessura de

imperfeição de $H_{imp}=0.75H$. 161

Figura 6.66 - Configurações deformadas de cascas com duas
imperfeições locais eqüidistantes do apoio de $0.15L$, posição Z_2 161

Figura 6.67 - Curva carga-deformação para cascas com duas
imperfeições locais que fazem entre si um ângulo de 0° graus, situadas a
 $0.15L$ de distância dos apoios com espessuras de imperfeição de 0.55 e
 $0.75H$. 162

Figura 6.68 - Configurações deformadas de cascas com duas
imperfeições locais eqüidistantes do apoio de $0.30L$, posição Z_4 163

Figura 6.69 - Curva carga-deformação para cascas com imperfeições
localizadas que fazem entre si um ângulo de 0 graus, situadas a $0.30L$ de
distância dos apoios, com espessuras de imperfeição de $0.55H$ e
 $0.75H$. 163

Figura 6.70 - Curvas Pressão-Deslocamento radial máximo para ângulos
de imperfeição variando de 0° a 180° (a) e detalhes da região próxima a
carga crítica (b, c). 164

Figura 6.71 - Configurações deformadas para duas imperfeições
localizadas com ângulos entre si variando de 0 a 180° . 166

Figura 6.72 – Representação gráfica das curvaturas iniciais: (a) positivas
(b) nula e (c) negativas e seus respectivos raios principais de curvatura. 167

Figura 6.73 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma
casca com espessura de $H=1.0\text{ mm}$ e curvaturas iniciais positivas
 $r_1 = 1 \text{ e } 2 \times 10^4 \text{ mm}$. 168

Figura 6.74 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma
casca com espessura de $H=2.0\text{ mm}$ e curvaturas iniciais positivas
 $r_1 = 0.5, 1.0 \text{ e } 2.0 \times 10^4 \text{ mm}$. 168

Figura 6.75 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma
casca com espessura de $H=3.0\text{ mm}$ e curvaturas iniciais positivas
 $r_1 = 0.5, 1.0 \text{ e } 2.0 \times 10^4 \text{ mm}$. 169

Figura 6.76 - Modos de deformação para cascas com curvatura inicial
positiva de $r_1 = 1.0 \times 10^4 \text{ mm}$ e espessuras de $1.0, 2.0$ e 3.0 mm
respectivamente 169

Figura 6.77 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de $H = 1.0 \text{ mm}$ e curvaturas iniciais negativas

$r_1 = 1 \text{ e } 2 \times 10^4 \text{ mm}$. 170

Figura 6.78 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de $H = 2.0 \text{ mm}$ e curvaturas iniciais negativas

$r_1 = 0.5, 1.0 \text{ e } 2.0 \times 10^4 \text{ mm}$. $H = 3.0 \text{ mm}$ 170

Figura 6.79 - Curva pressão interna-deformação radial máxima para uma casca com espessura de $H = 3.0 \text{ mm}$ e curvaturas iniciais negativas

$r_1 = 0.5, 1.0 \text{ e } 2.0 \times 10^4 \text{ mm}$. 171

Figura 6.80 - Modos de deformação para cascas com curvatura inicial negativa de 1 mm e espessura de $1.0, 2.0 \text{ e } 3.0 \text{ mm}$ respectivamente 171

Figura 6.81 - Variação da pressão crítica interna da casca com o raio de curvatura r_1 para cascas com espessuras indeformadas de $2.0 \text{ e } 3.0 \text{ mm}$. 172

Figura 6.82 – Fotos de ensaio de tração e pressão interna em uma casca cilíndrica B210 ($H/R = 2.63$, $L/R = 34$) para acréscimo de pressão interna após atingir a pressão crítica. Pressões internas expressas em ($\times 10^{-2} \text{ MPa}$) 173

Lista de Símbolos

Caracteres Latinos:

(R, θ, Z)	sistema de coordenadas curvilíneo
(x^1, x^2, x^3)	sistema de coordenadas retilíneo referentes ao estado indeformado
Z	coordenada longitudinal da membrana indeformada
r	raio da membrana (casca) em seu estado deformado
l	comprimento da membrana (casca) em seu estado deformado
h	espessura da membrana (casca) em seu estado deformado
R	raio da membrana (casca) em seu estado indeformado
L	Comprimento da membrana (casca) em seu estado indeformado
H	espessura da membrana (casca) em seu estado indeformado
S	coordenada meridional da membrana em seu estado indeformado
P	pressão uniforme
H_{imp}	espessura da imperfeição
L_{imp}	comprimento da imperfeição
Z_i	posição da imperfeição
r_1, r_2	raios de curvatura
(y^1, y^2, y^3)	sistema de coordenadas retilíneo referentes ao estado deformado
$A^{\alpha\beta}$	componente covariante do tensor métrico para membrana indeformada
$A_{\alpha\beta}$	componente contravariante do tensor métrico para membrana indeformada
$\mathbf{A}^{\alpha\beta}$	tensor métrico covariante para membrana indeformada
$\mathbf{A}_{\alpha\beta}$	tensor métrico contravariante para membrana indeformada
A	determinante dos tensores métricos para membrana deformada

$A^{\alpha\beta}$	componente covariante do tensor métrico para membrana deformada
$A_{\alpha\beta}$	componente contravariante do tensor métrico para membrana deformada
$\mathbf{A}^{\alpha\beta}$	tensor métrico covariante para membrana deformada
$\mathbf{A}_{\alpha\beta}$	tensor métrico contravariante para membrana deformada
A	determinante dos tensores métricos para membrana deformada
l_i	invariantes de deformação
sb	coordenada do extremo inferior da membrana deformada
Sb	coordenada do extremo inferior da membrana indeformada
st	coordenada do topo da membrana deformada
St	coordenada do topo da membrana indeformada
sl	coordenada da altura de líquido na membrana deformada
Sl	coordenada da altura de líquido na membrana indeformada
m	momento distribuído ao longo do bordo superior da membrana
f	força distribuída ao longo do bordo superior da membrana
M	momento total aplicado na membrana
F	força total aplicada na membrana
P	pressão uniforme
p_i	pressão hidrostática interna
p_e	pressão hidrostática externa
E	energia elástica de deformação
w	função energia de deformação
V	volume da membrana em seu estado indeformado
H	funções Heaviside
Zb	coordenada do bordo inferior da membrana cilíndrica indeformada
zb	coordenada do bordo inferior da membrana cilíndrica deformada
Zt	coordenada do topo da membrana cilíndrica indeformada
zt	coordenada do topo da membrana cilíndrica deformada

Z_I	coordenada da altura de líquido na membrana cilíndrica indeformada
z_I	coordenada da altura de líquido na membrana cilíndrica deformada
C_1	constante do material da membrana
T_i	trações na superfície da membrana
K_i	curvatura
CCI	vetor de condições de contorno na extremidade superior da membrana
CCF	vetor de condições de contorno na extremidade inferior da membrana
VI	vetor de condições iniciais
δVI	vetor de correções das condições iniciais
J	matriz jacobiana

Caracteres gregos:

λ_1	extensão principal na direção circunferencial da membrana
λ_2	extensão principal na direção meridional da membrana
λ_3	extensão na direção normal à superfície média da membrana
β	variação angular de θ após a torção
β_t	maior ângulo de giro
Π	energia potencial
ρ_i	massa específica do líquido presente no interior da membrana
ρ_e	massa específica do líquido que envolve externamente a membrana
σ_{ii}	tensões principais em suas respectivas direções
ΔL	deformação longitudinal

Lista de tabelas

Tabela 3.1 - Equações de equilíbrio e condições de contorno para uma membrana tracionada	53
Tabela 3.2 - Tipos de elementos de membranas disponíveis no ABAQUS	65
Tabela 3.3 - Tipos de elementos de cascas disponíveis no ABAQUS	67
Tabela 4.1 - Valores de C_1 obtidos para um material Neo Hookeano	80
Tabela 4.2 – Valores de C_1 obtidos para um material de Mooney com $C_2 = c_1/7$	80
Tabela 4.3 - Constantes elásticas para o material das membranas	82
Tabela 4.4 - Constantes elásticas para o material da casca em MPa	86
Tabela 4.5 – Dimensões das amostras de cascas (tubos) utilizados na análise experimental	87
Tabela 5.1 – Resultados obtidos para análise com elementos de casca e membrana.	91
Tabela 5.2 – Análise da membrana por elementos finitos usando-se elementos de membrana tipo M3D4 e elementos de casca tipo S4R.	92
Tabela 5.3 – Posições das imperfeições iniciais em forma de anel	104
Tabela 6.1 – Convergência da carga crítica com o número de elementos da malha para uma casca perfeita	119
Tabela 6.2 - Variação das espessuras das cascas hiperelásticas e relações R/H e L/H analisadas	121
Tabela 6.3 - Variação das espessuras analisadas e relações R/L e L/H	123
Tabela 6.4 – Variação das espessuras analisadas e relações L/H e L/R	126
Tabela 6.5 – Posições das imperfeições e suas respectivas distâncias em relação ao apoio inferior da casca medidas em porcentagem do comprimento da casca (%L)	130
Tabela 6.6 – Análise de convergência para uma membrana com	

imperfeição em forma de anel	133
Tabela 6.7 – Posições das imperfeições e suas respectivas distâncias em relação ao apoio inferior da casca expressas em porcentagem do comprimento inicial da casca (%L)	135
Tabela 6.8 – Convergência da carga crítica com o número de elementos da malha para uma casca perfeita	158

Sumário

1 Introdução	29
1.1. Objetivo da Tese	31
1.2. Organização do Texto	32
2 Formulação	34
2.1. Modelagem matemática para uma membrana axissimétrica	34
2.1.1. Relações Geométricas	34
2.1.2. Sistemas de coordenadas para membranas axissimétricas	37
2.1.3. Componentes dos tensores métricos da membrana	38
2.1.4. Invariantes de deformação	39
2.2. Obtenção das equações de equilíbrio através do Princípio da Energia Potencial Estacionária.	40
2.2.1. Energia potencial total: Π	41
2.2.2. Energia elástica de deformação: E	41
2.2.3. Trabalho das forças externas	42
2.2.3.1. Trabalho realizado por uma pressão uniforme interna:	42
2.2.3.2. Trabalhos realizados pelo momento torsor e força trativa	43
2.2.3.3. Trabalho realizado pelas pressões hidrostáticas interna e externa.	43
2.3. Variação da energia potencial total para obtenção das equações governantes	44
2.3.1. Equações diferenciais	44
2.3.2. Condições de contorno	44
2.4. Modelagem matemática para uma membrana cilíndrica	45
2.4.1. Sistemas de Coordenadas	45
2.4.2. Componentes dos tensores métricos	46
2.4.3. Invariantes de Deformação	47
2.4.4. Obtenção das equações de equilíbrio através do princípio da energia potencial estacionária	48

2.4.4.1. Energia interna de deformação: E	48
2.4.4.2. Trabalho das forças externas	48
2.4.4.3. Trabalho realizado por uma pressão interna uniforme:	49
2.4.4.4. Trabalho realizado pela força trativa	49
2.4.5. Variação da energia potencial total para obtenção das equações de equilíbrio e condições de contorno	49
2.4.6. Equações diferenciais	50
2.4.7. Condições de contorno	50
 3 Análise numérica	 51
3.1. Análise Numérica para Membranas	51
3.1.1. Geometria	51
3.1.2. Equações de equilíbrio	53
3.2. Solução do problema de valor de contorno	56
3.3. Obtenção das configurações deformadas	58
3.4. Solução através do programa ABAQUS	62
3.4.1. Tipos de análise	63
3.4.2. Método de Riks Modificado	65
3.4.3. Tipos de elementos	67
 4 Análise experimental	 70
4.1. Relações constitutivas dos materiais	70
4.1.1. Materiais elásticos	71
4.1.1.1. Material elástico linear	71
4.1.1.2. Material hipoeelástico	71
4.1.1.3. Material hiperelástico	71
4.1.1.4. Material Viscoelástico	74
4.2. Caracterização dos materiais utilizados	76
4.3. Análise experimental de membrana: ensaio de tração para obtenção das constantes elásticas do material.	78
4.4. Cálculo das constantes da membrana utilizando o algoritmo de Runge-Kutta	81
4.5. Obtenção das constantes elástica da membrana através do programa ABAQUS	83

4.6. Análise experimental para aferição da formulação apresentada no capítulo 2: Ensaio de tração e pressão interna uniforme em membranas	84
4.7. Análise experimental de cascas cilíndricas: ensaio de tração para obtenção das constantes elásticas do material.	85
4.7.1. Obtenção das constantes elástica da casca através de dados de ensaios de tração através do programa ABAQUS	87
4.8. Análise experimental de cascas cilíndricas: ensaio de tração e pressão interna uniformes	88
5 Análise experimental e numérica de membranas cilíndricas hiperelásticas	90
5.1. Análise experimental para aferição da formulação apresentada: Ensaio de tração e pressão interna uniforme em membranas cilíndricas	90
5.2. Análise numérica de uma membrana cilíndrica tracionada submetida a pressões internas uniformes.	93
5.2.1. Análise numérica de membranas cilíndricas com variação dos parâmetros comprimento (L), espessura (H) e raio (R) da membrana.	96
5.2.1.1. Influência da espessura no comportamento não-linear de membranas cilíndricas	97
5.2.1.2. Influência do raio no comportamento não-linear de membranas cilíndricas	98
5.2.1.3. Análise da influência da variação do comprimento inicial no comportamento não-linear de membranas cilíndricas	101
5.2.2. Análise numérica da influência do nível de tração inicial	103
5.2.3. Análise numérica da influência de imperfeições iniciais	105
5.2.3.1. Influência de imperfeições iniciais locais axissimétricas	105
5.2.3.2. Influência das imperfeições iniciais em uma região quadrada	109
6 Análise de cascas cilíndricas hiperelásticas	112
6.1. Cascas cilíndricas perfeitas	112
6.1.1. Análise experimental de cascas cilíndricas: ensaio de tração e pressão interna uniformes	112
6.1.2. Estudo dos efeitos da tração inicial	113
6.1.3. Análise numérica de cascas cilíndricas tracionadas submetidas a	

pressões internas uniformes.	121
6.1.4. Análise paramétrica de cascas cilíndricas tracionadas e sob pressão interna	123
6.1.4.1. Influência da variação da espessura indeformada	123
6.1.4.2. Influência da variação do raio indeformado	125
6.1.4.3. Influência da variação do comprimento indeformado	128
6.2. Cascas hiperelástica com imperfeições iniciais	130
6.2.1. Estudo de imperfeições locais – diminuição da espessura da casca	131
6.2.2. Análise numérica de imperfeição local axissimétrica em forma de anel ao longo do comprimento da casca	135
6.2.2.1. Efeito da variação da posição da imperfeição local ao longo do comprimento da casca, Z_i Caso 1: diminuição na espessura da casca.	136
6.2.2.2. Efeito da variação da espessura do anel de imperfeição, H_{imp} Caso 1: diminuição na espessura da casca.	139
6.2.2.3. Efeito da variação do comprimento da imperfeição, L_{imp} Caso 1: diminuição na espessura da casca.	141
6.2.2.4. Efeito da variação da posição da imperfeição ao longo do comprimento da casca, Z_i Caso 2: acréscimo na espessura da casca.	143
6.2.2.5. Efeito da variação da espessura da imperfeição, H_{imp} Caso 2: acréscimo na espessura da casca.	147
6.2.2.6. Efeito da variação do comprimento do anel de imperfeição, L_{imp} Caso 2: acréscimo na espessura da casca.	149
6.2.3. Imperfeição local em uma região quadrada – diminuição da espessura da casca	150
6.2.3.1. Estudo do efeito de imperfeições localizadas	153
6.2.3.2. Estudo do efeito de múltiplas imperfeições localizadas	159
6.2.4. Influência da curvatura inicial	165
6.2.4.1. Influência da curvatura inicial positiva	166
6.2.4.2. Influência da curvatura inicial negativa	168
6.2.5. Análise experimental para a avaliação do acréscimo de pressão interna após a pressão crítica – comportamento pós-crítico avançado.	171

7 Conclusões	173
7.1. Sugestões	176
8 Referências bibliográficas	177