

# Capítulo IV – Plasticidade

## IV.1 – Introdução.

Pode-se dizer que a grande maioria dos componentes mecânicos é projetada para trabalhar dentro do regime elástico. Isto se deve provavelmente a dois fatores: ao se ultrapassar o limite elástico do material, ocorre um rápido aumento no valor das deformações, o qual não pode ser suportado por quase nenhum componente, uma vez que tais deformações implicariam empenamentos, desencaixes, etc. Outro fator, é que quando se têm deformações plásticas cíclicas na raiz do entalhe, a vida à fadiga do componente diminui consideravelmente. Desta forma, para trabalhar seguramente, muitos projetistas escolhem geometrias capazes de evitar a plastificação de seus componentes. No caso da medição de tensões residuais pelo método do furo-cego, conforme explicado no capítulo três, pode ocorrer plastificação mesmo para o caso em que as tensões nominais são elásticas. A restrição total à presença de tensões que causem plastificação, torna o método inaplicável justamente nos casos de maior interesse, ou seja, tensões residuais elevadas. Portanto, é importante que esta faixa de utilização seja explorada e para tanto, torna-se fundamental conhecer certas leis que regem a plasticidade. Uma revisão profunda do tópico foge ao escopo deste trabalho, assim neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos básicos relativos à plasticidade. A seguir, será apresentado o modelamento numérico de um exemplo simples, e posteriormente um exemplo clássico de placa com furo, submetida a um carregamento capaz de gerar plastificação na borda do furo.

## IV.2 – Limite de proporcionalidade, limite elástico e limite de escoamento.

Antes de começar a estudar problemas envolvendo deformação plásticas, é importante definir quando começa a plastificação de um componente. Define-se como deformação plástica àquela presente num componente mesmo depois de retirado o esforço que a gerou. Em contrapartida, a deformação elástica é aquela que desaparece quando retirado o carregamento.

Na figura 4.1 apresenta-se um diagrama tensão-deformação típico e é mais conveniente discutir as definições relativas a deformação plástica com base neste diagrama.

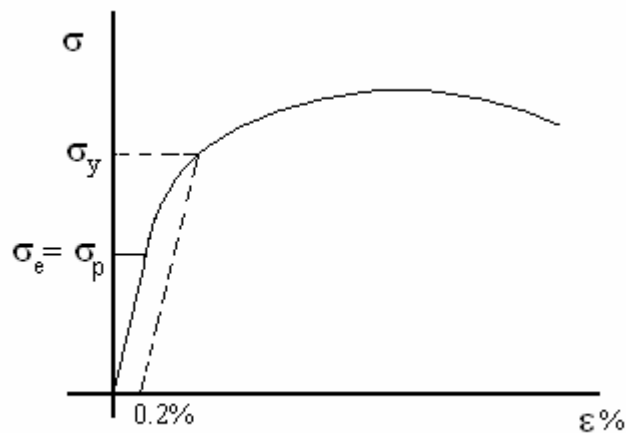


Figura 4.1 – Diagrama tensão–deformação típico.

Para a maioria dos materiais, o diagrama acima apresentado pode ser dividido em duas partes: na primeira que vai de zero até uma tensão  $\sigma_p$ , a tensão é linearmente proporcional à deformação e a partir de então esta proporcionalidade deixa de existir. Por causa disto, a tensão  $\sigma_p$  é chamada e limite de proporcionalidade e dentro da faixa  $0 - \sigma_p$  tem-se:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.1)$$

onde

$E$  – é o módulo de elasticidade do material e,

$\varepsilon$  – é a deformação na direção de  $\sigma$ .

Esta relação é a largamente conhecida lei de Hooke para estado uniaxial de tensões. Observa-se também que para a maioria dos materiais, depois de excedido o limite de proporcionalidade e descarregado o material, ocorre deformação permanente. Assim, percebe-se que o limite elástico, ou seja, a máxima tensão que pode ser aplicada sem que ocorra deformação plástica é praticamente igual ao limite de proporcionalidade, de forma que  $\sigma_p \approx \sigma_e$ . Uma importante exceção está nos polímeros, pois alguns destes apresentam elasticidade não-linear.

Os materiais dúcteis, dentre os quais se encontram o aço estrutural e outros metais, se caracterizam por apresentarem escoamento à temperatura ambiente: quando se atinge uma determinada tensão, denominada por  $\sigma_y$ , ocorre um aumento rápido da deformação, com pouco aumento de tensão. Nem sempre é fácil assinalar com precisão a tensão que indica o início do escoamento. Assim, tornou-se convenção definir esta tensão como aquela que produz um valor específico de deformação após a liberação da carga. Esta tensão é obtida traçando-se a partir de um determinado ponto da curva tensão-deformação uma linha cuja tangente é o próprio módulo de elasticidade do material. A tensão correspondente ao ponto que esta linha cruza a curva tensão deformação é  $\sigma_y$ , chamada de limite de escoamento. Em geral, a deformação escolhida para assinalar a tensão de escoamento é 0.2% de deformação plástica residual. Em muitos materiais, tem-se o limite elástico, de escoamento e de proporcionalidade muito próximos e não se incorrem em erros consideráveis ao se intercambiar os três. Outros materiais, como o alumínio, têm um comportamento um pouco diverso; a transição da parte linear para a parte curva é gradual e suave de forma que a tensão que determina o fim da parte elástica é bem distinta daquela que gera 0.2% de deformação plástica residual.

Em geral, costuma-se usar a letra “S” para designar os limites de resistência de um material, enquanto a letra grega “ $\sigma$ ” é usada para designar tensões atuantes. Assim, utilizando esta convenção, tem-se:

$$\sigma_e \Rightarrow S_e$$

$$\sigma_y \Rightarrow S_y$$

Depois de alcançado o limite elástico, os materiais podem se comportar de diferentes maneiras. Como para a maioria dos materiais é difícil descrever seu comportamento como uma única expressão matemática, costuma-se representar o este comportamento através de curvas idealizadas de tensão-deformação, algumas das quais estão mostradas na figura 4.2.

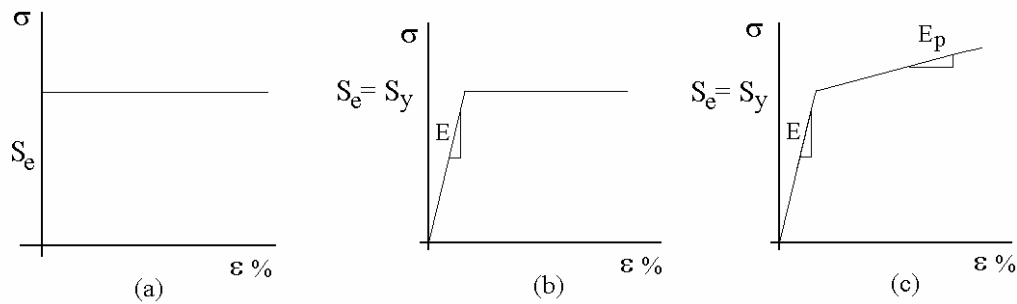


Figura 4.2 – Representação esquemática do comportamento de alguns materiais depois de atingido o limite elástico.

Um material perfeitamente-plástico, figura 4.2.a, não sofre deformação elástica e portanto, depois de aliviada a carga toda a deformação permanece no material. Um material elástico-perfeitamente plástico, figura 4.2.b, é aquele em que as deformações plásticas e elásticas estão presentes. O material 4.2.c, é similar ao 4.2.b, sendo que a força necessária para aumentar a deformação, depois de atingido a plastificação é crescente, fenômeno conhecido como “encruamento”. Na figura 4.2.c, mostra-se  $E_p$ , que é o equivalente ao módulo de elasticidade, porém, no regime plástico. A razão  $\frac{E_p}{E}$  é chamada de coeficiente de encruamento sendo aqui representada pela letra “q”.

### IV.3 – Critério de escoamento da Máxima Energia de Distorção [22].

Conforme mencionado no item IV.2, depois de atingida a tensão de escoamento ocorre um rápido aumento no valor das deformações. Poucas estruturas permaneceriam estáveis ou seguras sob tal condição, portanto escolhe-se normalmente a tensão de escoamento como tensão-limite para projeto. Se o componente a ser projetado estiver sob um estado uniaxial de tensões, então a tensão de serviço,  $\sigma$ , (penalizada por um fator de segurança) é igualada à tensão de escoamento  $S_y$ . Quando o estado de tensões é biaxial ou triaxial torna-se necessária a utilização de um critério para indicar quando ocorrerá o início do escoamento. Existem alguns critérios disponíveis na literatura, sendo que o melhor (mais exato) é o critério da máxima energia de distorção, também

conhecido como critério de von Mises. Por esse motivo ele será explicado brevemente a seguir.

O critério da máxima energia de distorção, estabelece que o escoamento ocorrerá no momento em que a energia de distorção num ponto do componente for igual à energia de distorção de um corpo de prova de tração no instante do escoamento. Assim, tem-se [22]:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = S_y^2 \quad (4.2)$$

onde

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – são as tensões principais agindo no componente e,  
 $\sigma_0$  – é tensão equivalente de von Mises.

De uma forma geral o critério de von Mises ajusta melhor pontos experimentais que outros critérios, além de ser fácil de ser aplicado. Por estes motivos, o critério de Von Mises é um dos mais populares atualmente.

#### **IV.4 – Solução Numérica de um Caso Simples Envolvendo Plasticidade.**

Antes de iniciar a análise do caso propriamente dito, serão apresentados os materiais que serão usados ao longo de todo o trabalho<sup>1</sup>. O primeiro material é elástico perfeitamente plástico, tem  $S_y = S_e = 75$  MPa, e receberá a denominação M1. O outro material, foi usado em um artigo que será estudado com mais detalhe adiante e receberá a denominação M2. Este material é um alumínio e também tem  $S_e = 75$  MPa, e a partir daí o diagrama tensão deformação do material passa por um trecho curvo até atingir  $S_y = 149$  MPa, conforme mostrado na figura 4.3. O modulo de elasticidade dos dois materiais é  $E = 68.9$  GPa.

---

<sup>1</sup> Eventualmente, para reproduzir algum artigo, pode-se usar outro material.

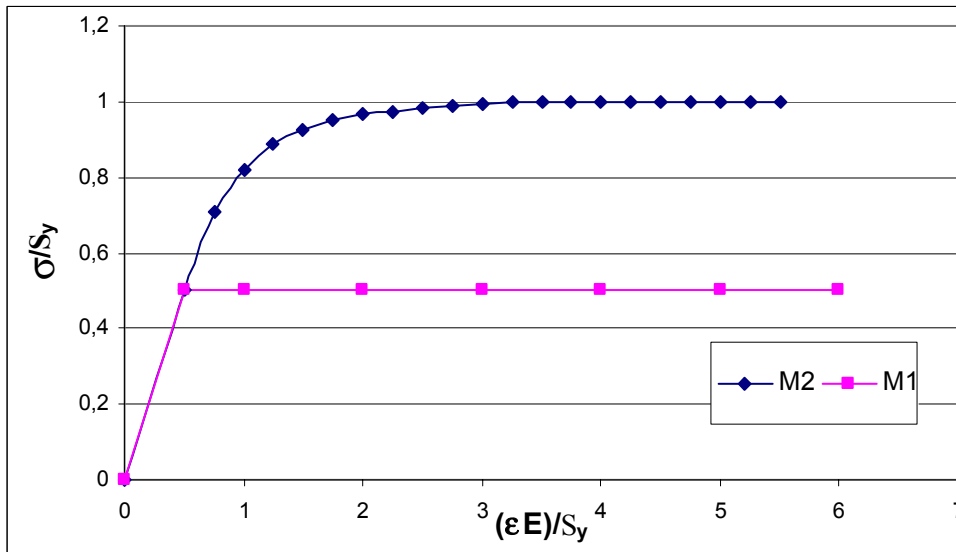


Figura 4.3 – Diagrama tensão-deformação dos materiais M1 e M2.

A fim de ganhar experiência com a análise envolvendo plasticidade do programa comercial de elementos finitos utilizado neste trabalho, foi modelado um caso bastante simples. Trata-se de uma viga em flexão, conforme mostrado na figura 4.4, a qual será submetida a forças que originam tensões além do limite de escoamento. A solução deste problema está apresentada na literatura [23]:

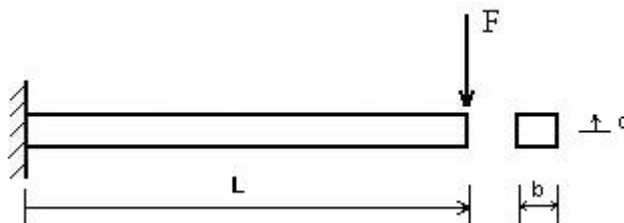


Figura 4.4 – Representação esquemática de uma viga em flexão.

A deflexão desta viga, depois do início da plastificação é:

$$\Delta = \Delta_y \left( \frac{F_y}{F} \right)^2 \left[ 5 - \left( 3 + \frac{F}{F_y} \right) \sqrt{3 - 2 \frac{F}{F_y}} \right] \quad (4.3)$$

onde:

$\Delta_y = \frac{S_y L^2}{3Ec}$  é a deflexão quando a força aplicada é a força que causa escoamento;

$S_y$  – é a tensão de escoamento do material da viga.

$L$  – é o comprimento da viga;

$E$  – é o módulo de elasticidade do material da viga e

$c$  = é a distância horizontal da linha neutra ao ponto de interesse. Neste caso, “ $c$ ” é a meia altura da viga.

$F_y$  – é a força que causa escoamento,  $F_y = \frac{2S_y bc^2}{3L}$

$F$  – é a força aplicada;

Quando a força aplicada é igual à  $F_y$ , o escoamento é atingido no engaste, pois esta é a seção crítica da viga. Como o carregamento é de flexão, os pontos críticos são os mais externos. Assim, a medida que a força aumenta, o material interno da viga vai escoando, até que se atinge um valor crítico da força, para o qual toda a seção da viga está plastificada. Neste ponto, ocorre o que se chama de colapso plástico e o valor crítico da força é:

$$F_u = \frac{S_y bc^2}{L} \quad (4.4)$$

A partir deste valor, a equação (4.3) perde a validade.

Foram realizadas algumas simulações em elementos finitos, tendo como limites,  $F_e$  e  $F_u$ , para dois materiais, M1 e M2. Os resultados encontrados para deflexão máxima foram comparados com os resultados preditos pela equação (4.3) e esta comparação está mostrada na figura 4.5.

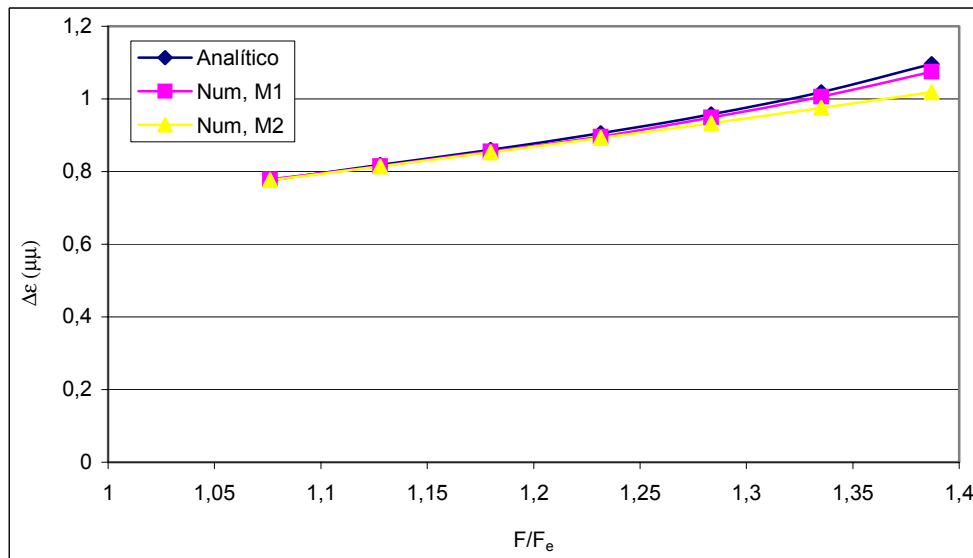


Figura 4.5 – Comparação entre as deflexões obtidas analítica e numericamente para os materiais M1 e M2.

Observa-se excelente concordância entre o material M1 e o resultado analítico, enquanto para M2 os resultados são igualmente bons até  $\frac{F}{F_y} \approx 1.28$  e mais pobres a partir daí.

Uma vez que se obtiveram ótimos resultados para este problema simples, passou-se então a problemas mais próximos do tópico de interesse deste trabalho, ou seja, placas com furos, submetidas a carregamentos que geram plastificação na borda do furo.

#### IV.5 – Revisão bibliográfica relativa à concentração de tensões em torno de furos.

Um dos primeiros trabalhos relativos ao comportamento do fator de concentração de tensões quando ocorre escoamento localizado foi publicado em 1961, por Neuber [24]. Em seu trabalho, Neuber utilizou um eixo prismático simetricamente entalhado em V, cujo carregamento era torção. Foi utilizada uma lei de deformação não-linear para descrever o material, de tal forma, que sob baixos carregamentos, o material obedeceria a lei de Hooke. Sob estas condições,



foi proposta uma relação entre os fatores de concentração de tensão e de deformação após o limite elástico ser atingido. Esta relação é:

$$(K_{\sigma}K_{\epsilon})^{1/2} = K_t \quad (4.5)$$

onde

$K_{\sigma}$  é o fator de concentração de tensão,  $K_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$

$K_{\epsilon}$  é o fator de concentração de deformação,  $K_{\epsilon} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\text{nom}}}$

$K_t$  é o fator de concentração de tensão (ou de deformação) no regime elástico.

Assim:

$$K_t^2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \times \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\text{nom}}} \quad (4.6)$$

Desta forma, a regra de Neuber estabelece que “*a média geométrica do produto entre os valores do fator de concentração de tensão e deformação é igual ao fator de concentração elástico*”.

Ao final de seu trabalho, Neuber afirma que regra “*pode ser generalizada com boa aproximação para estado de tensões bi ou triaxiais arbitrários através de uma das bem conhecidas teorias de falha*”. No entanto, não é demonstrado em seu trabalho o quão bons são os resultados para outros carregamentos.

Como este trabalho trata de plastificação ao redor de entalhes, a regra de Neuber será verificada no exemplo que trata deste caso, o qual será apresentado no final deste capítulo. É importante destacar, que a geometria do entalhe e o carregamento do presente trabalho são totalmente diversos daqueles analisados por Neuber.

Durelli em 1963 estudou a distribuição de tensões e deformações depois de atingido o escoamento, numa placa contendo um furo circular submetida a carregamento uniaxial, utilizando a interferometria de Moiré. O material utilizado por ele foi alumínio tendo limite de escoamento  $S_y = 149.5$  MPa e módulo de elasticidade  $E = 68.9$  GPa, o qual já foi previamente mostrado na figura 4.4.

Na figura 4.6 apresenta-se esquematicamente a placa com um furo tracionada uniaxialmente. As dimensões utilizadas por Durelli foram:

$$L = 609.6 \text{ mm}$$

$$b = 203.2 \text{ mm}$$

$$r = 1.59 \text{ mm}$$

$$t = 3.13 \text{ mm}$$

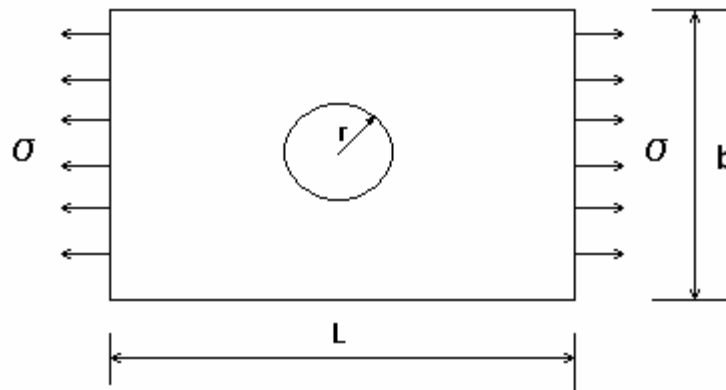


Figura 4.6 – Representação esquemática<sup>2</sup> da placa finita com furo carregada uniaxialmente.

Foram construídos em elementos finitos modelos similares aos de Durelli e então feitas comparações entre os resultados obtidos numericamente neste trabalho e os resultados experimentais daquele artigo. Como a placa utilizada era bastante fina, foi realizada uma análise numérica bidimensional. O elemento utilizado foi o *Plane 83*, mostrado no capítulo 3. Pode-se definir o “nível de plastificação”,  $\pi$  como:

$$\pi = \frac{\sigma_o}{S_y} \quad (4.7)$$

onde

$\sigma_o$  é a tensão aplicada equivalente<sup>3</sup>

$S_y$  é a tensão de escoamento do material.

<sup>2</sup> O furo está exageradamente grande para ajudar a visualização.

<sup>3</sup> no caso em que há mais de uma tensão sendo aplicada.

O carregamento utilizado por Durelli variava de  $\pi = 0.3$  até  $\pi = 0.82$ , o qual foi repetido numericamente. Para realizar as análises numéricas foi utilizada uma ferramenta do programa *Ansys*, chamada “passos e sub-passos” (*step and substep*), a qual consiste em dividir o carregamento total em vários passos e subdividir cada um destes passos em sub-passos. A escolha do número de sub-passos depende basicamente do nível de plastificação, de forma que quanto maior este nível, maior o número de sub-passos.

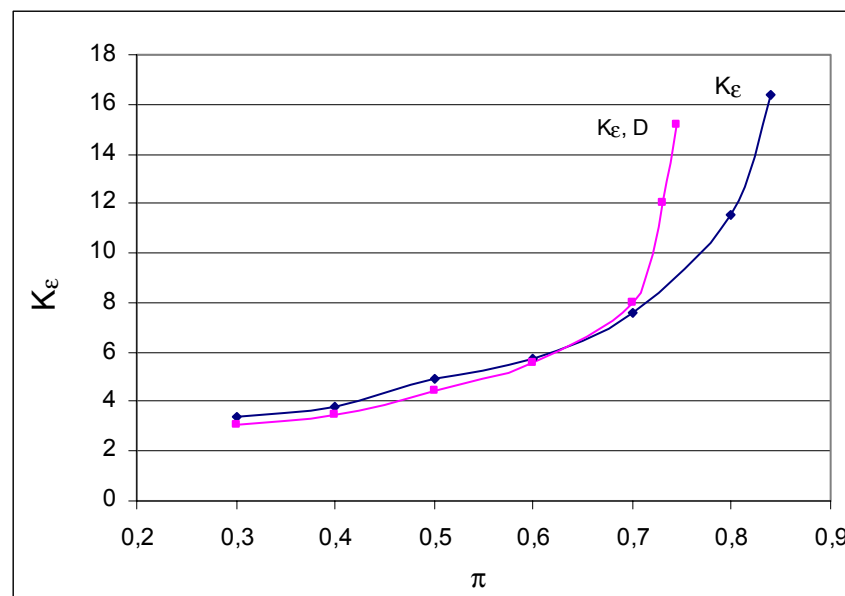


Figura 4.7 – Fator de concentração de deformação ao longo do eixo transversal de uma placa finita carregada uniaxialmente. A parte tracejada do gráfico de Durelli representa uma extrapolação. Para diferenciar os valores obtidos neste trabalho dos valores de Durelli, estes últimos estão seguidos pela letra **D**.

Nas figuras 4.7 e 4.8, estão mostrados os valores de  $K_\epsilon$  e  $K_\sigma$  obtidos numericamente neste trabalho e experimentalmente por Durelli, a medida que  $\pi$  aumenta. No artigo de Durelli fica claro que depois de  $\pi = 0.7$  ocorre um forte e rápido aumento no valor de  $K_\epsilon$ . No modelo numérico este aumento foi percebido, mas não foi possível alcançar valores de deformação tão altos quantos os obtidos por Durelli, mesmo aumentando-se bastante o número de sub-passos. Assim, decidiu-se aplicar ao modelo numérico, valores um pouco mais altos de  $\lambda$  para verificar se este modelo apresentava também um salto no fator de concentração de deformações. Foram então, realizadas análises com  $\pi = 0.80, 0.82$  e  $0.84$ . Foi

possível observar que depois de  $\pi = 0.80$  o fator de concentração de deformações aumenta de forma mais pronunciada, sem no entanto, acompanhar os dados experimentais. Porém, observou-se que o modelo numérico requer muitos subpassos para convergir, depois de  $\pi = 0.80$ . Assim, é bastante provável que a partir de 0.82 os resultados experimentais também apresentem problemas, devido as grandes deformações presentes.

Na figura 4.7, observa-se considerável diferença entre os resultados numéricos deste trabalho e os experimentais de Durelli para o fator de concentração de tensões. Para entender esta diferença, é preciso voltar à figura 4.4. Naquela figura percebe-se que até  $\frac{\sigma}{S_y} = 0.5$  o diagrama é uma linha reta, portanto pode-se considerar que esta tensão corresponde ao limite elástico do material. Assim, a partir deste valor começará a haver divergência entre os valores de  $K_t$  linear-elástico e o  $K_t$  real, sendo que o primeiro começará a diminuir. Mas, em seu artigo Durelli afirma que o limite de escoamento ocorre em  $\frac{\sigma}{S_y} = 1.0$ . De fato, esta é a tensão na qual o diagrama tensão deformação do material se estabiliza, mas antes desta tensão já ocorrem deformações plásticas. Assim, pode-se especular que até  $\pi = 0.3$ , ou seja, até ter uma tensão nominal que provocasse na borda do furo, uma tensão igual à de escoamento, Durelli tenha considerado que o coeficiente de concentração de tensões fosse o próprio  $K_t$  linear-elástico, que para esta geometria vale 3.08. Por esta razão, em seu diagrama é uma linha reta até  $\pi = 0.3$ . Por outro lado, nas simulações realizadas no presente trabalho, considerou-se como limite elástico  $\pi = 0.5$  e por conseguinte, tensões da ordem de  $\frac{1}{3}$  deste valor já provocam plastificação e conseqüentemente o fator de concentração de tensões terá valores diferentes do valor elástico.

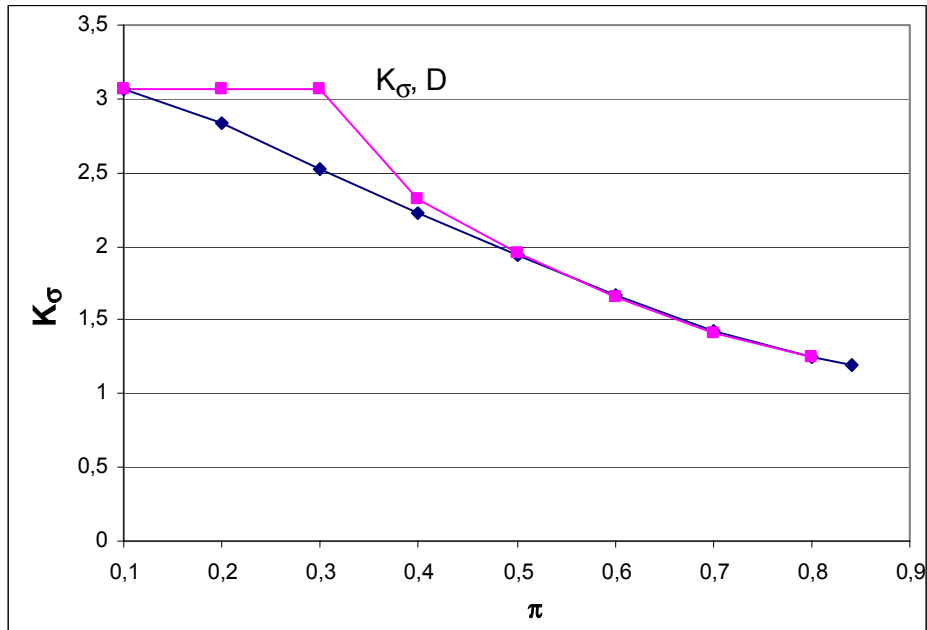


Figura 4.8 – Fator de concentração de tensão ao longo do eixo transversal de uma placa finita carregada uniaxialmente.

Na figura 4.9 estão mostradas as deformações principais ao longo do eixo transversal do modelo, representadas na forma  $\frac{E\varepsilon}{S_y}$ . No eixo das abscissas tem-se  $w/r$ , sendo  $w$  a largura da placa. Assim, a borda do furo corresponde a  $\frac{b_e}{r} = 1$  e por conseguinte aos máximos valores de  $\frac{E\varepsilon}{S_y}$ .

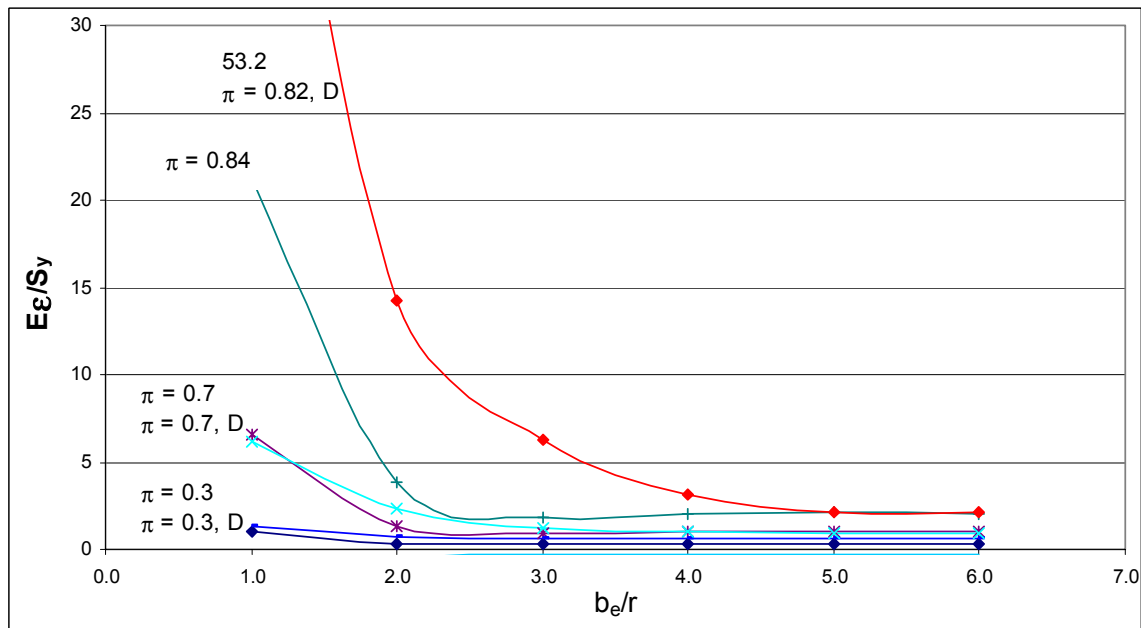


Figura 4.9 – Deformações principais no eixo transversal para diferentes graus de plastificação.

Pode-se observar uma concordância excelente até  $\pi = 0.7$ . A partir de então, o modelo numérico não consegue acompanhar os altos níveis de deformação atingidos pelo modelo experimental. Nota-se que para  $\pi = 0.82$ , chega-se a valores de  $\frac{E\varepsilon}{S_y}$  da ordem de 50, enquanto para o modelo numérico, mesmo para  $\pi = 0.84$ , o valor máximo obtido foi da ordem de 20. Se for calculada a deformação correspondente a  $\frac{E\varepsilon}{S_y} = 50$ , chega-se a  $\varepsilon = 10\%$ , que é um valor bastante alto para deformações. Ainda é possível observar que os valores máximos de deformação caem rapidamente à medida que a distância ao furo aumenta. Esta é uma conclusão importante no que diz respeito à medição de tensões residuais pelo método do furo, quando ocorre plastificação na borda do furo; mesmo que ocorram deformações altas na borda do furo, o extensômetro não estará sujeito a estas deformações tão críticas, pois, o valor delas cai rapidamente.

Finalmente, a partir dos valores de tensão e deformação máximas obtidas pelo programa de elementos finitos, aplicou-se a regra de Neuber e os resultados estão apresentados abaixo.

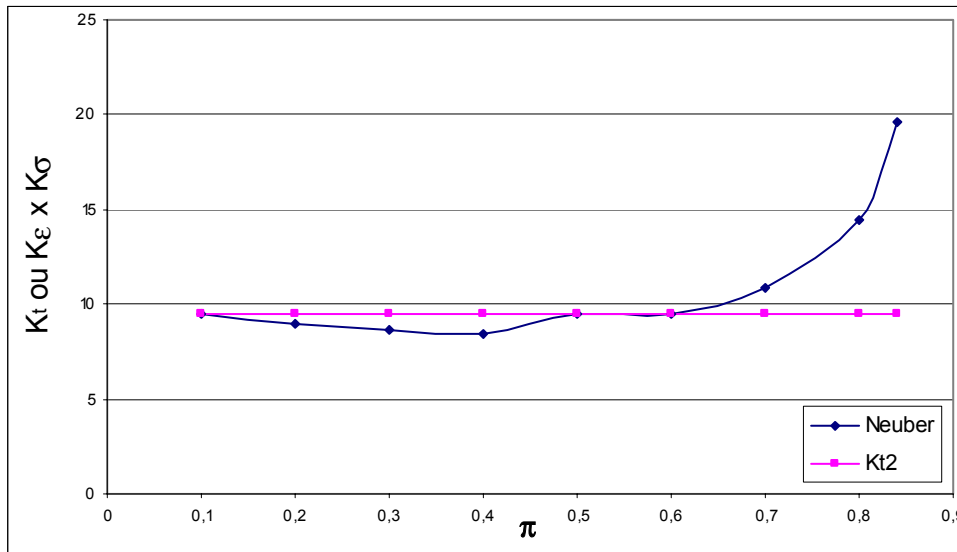


Figura 4.10 – Comparação entre os valores indicados pela regra de Neuber e aqueles calculados por  $K_t^2$

Pela figura 4.10, conclui-se que até  $\pi = 0,7$  a comparação é bastante razoável e a partir daí, ocorre um desvio considerável entre as duas curvas. Novamente, é importante esclarecer, que o limite elástico do material está em torno de  $\lambda = 0,5$  e, portanto a partir de então, mesmo as tensões nominais estão além do limite elástico. Por conseguinte,  $\lambda$ s maiores que 0,7 indicam a presença de tensões nominais bastante maiores que a elástica, o que explica o desvio considerável da regra de Neuber para valores maiores que este. Além disso, conforme citado no início do capítulo, o problema atual, placa com furo, submetida a carregamento uniaxial é bastante diferente do problema estudado por Neuber, o qual era uma barra prismática com entalhes em V simétricos, submetida à torção. É possível que por causa desta diferença entre os carregamentos, os gráficos não sejam coincidentes.

Neste capítulo foram estudados alguns conceitos de plasticidade e foi apresentado e repetido um artigo referente a plastificação em torno de furos. No próximo capítulo será estudado mais especificamente o efeito que deformações plásticas localizadas causam na medição de tensões residuais pela técnica do furo-cego.