4 Teste do Modelo CAPM considerando o pagamento de impostos

Com o objetivo de estimar o CAPM depois de impostos, iremos utilizar a metodologia proposta por Litzenberger e Rasmawamy (1979). A seqüência do método segue três passos para estimação dos parâmetros dos fatores, o qual é especialmente efetivo para modelos multifatoriais, pela facilidade de incluir medidas adicionais de risco.

Temos problemas conceituais e econométricos associados ao teste do CAPM:O primeiro problema conceitual é a não observabilidade *ex ante* dos retornos esperados e dos betas. O segundo problema conceitual é a não estacionariedade dos prêmios de risco e dos betas dos ativos. O terceiro problema é a falta de mercado em que possamos observar o preço para todos os ativos, conseqüentemente os teste do CAPM são sempre feitos com uma *Proxy* da carteira de mercado.

Além destes problemas conceituais associados com o teste do CAPM (suas premissas) temos três problemas econométricos que afetam os resultados, e que possivelmente enfraquecem as conclusões que resultam de sua aplicação prática nos dados.

1. Problemas de erro em variável – As regressões *cross sectional* são baseadas na premissa de que o valor do beta é observado, isto é que o modelo básico da equação que estima a beta corresponde aos verdadeiros e não observados betas. Devido a não termos os valores reais de beta, isto gera que estimadores OLS e GLS de beta sejam viesados e inconsistentes. Segundo Huang e Litzenberger (1987), existem três maneiras de resolver este problema:
    a. Agrupar os dados em carteiras para reduzir a medida do erro no beta
    b. Utilizar variáveis instrumentais
    c. Usar modelos que ajustem o estimador para que se tome em conta a variância da medida dos erros dos betas.
2. Problema de independência da regressão *cross sectional*. Na estimação do modelo *cross sectional*, através de OLS, Fama e

Macbeth implicitamente assumem que a matriz de variância e covariância dos resíduos em cada período são proporcionais a matriz diagonal. Esta escolha, quando não suportada pelos dados utilizados, resulta que o estimados é consistente, mas não é eficiente. Conseqüentemente a estatística t para estes parâmetros pode levar a conclusões falsas

3. Critica de Roll. A verdadeira carteira de mercado não é observável, e a *Proxy* utilizada não é necessariamente eficiente em média-variância. Se, for este o caso, como enfatizado por Roll(1977) e Roll e Ross (1994), mostraram que a pequena relação entre o retorno esperado e o beta é resultado da utilização de um *proxy* de carteira de mercado errada, mais que não validar a teoria. Isto acontece, porque a verdadeira carteira de mercado e eficiente em média variância, então a relação entre retorno esperado e os betas se revelam muito sensíveis quando pequenos desvios da *proxy* de mercado para a carteira de mercado verdadeira.

A especificação do modelo de equilíbrio a ser testado é

$$E\left(R_i - r_f\right) = a + b\beta_i + c(d_i - r_f) + d\left(jcp_i - r_f\right) \qquad (5.1)$$

A hipóteses são que a>0, b>0, e na falta de restrições a empréstimo de ações, c>0 e d>0.

Na obtenção das estimativas econométricas de *a,b,c* e *d*, dois problemas surgem. O primeiro é que as expectativas não são diretamente observadas. O procedimento usual é assumir que as expectativas são racionais e os parâmetros *a,b,c* e *d* são constantes ao longo do tempo. Os retornos realizados são postos do lado esquerdo da equação.

$$\tilde{R}_{it} - r_{ft} = \gamma_0 + \gamma_1\beta_{it} + \gamma_2(d_{it} - r_{ft}) + \gamma_3(jcp_{it} - r_{ft}) + \tilde{\varepsilon}_{it} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots N \\ t = 1, 2, \ldots T \end{matrix} \qquad (5.2)$$

onde $\tilde{R}_{it}$ é o retorno do ativo i no período *t*, β_{it} e d_{it} , jcp_{it} são o risco sistemático e a taxa de dividendo e taxa de juro sobre o capital próprio do ativo i no período t, respectivamente. O termo de distúrbio $\tilde{\varepsilon}_{it}$ é $\tilde{R}_{it}$ - $E[\tilde{R}_{it}]$, o desvio do retorno realizado para seu valor esperado. Os coeficientes γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 correspondem a *a, b ,c* e *d*. A variância do vetor coluna de distúrbios, $\tilde{\varepsilon} \equiv \{\tilde{\varepsilon}_{it} : i = 1,2..., N_{t,} t = 1,...T\}$, não é proporcional a matriz identidade, desde que as covariâncias contemporâneas entre os retornos dos ativos não são nulas e as variâncias dos retornos são diferentes entre os ativos. Isto significa que os estimadores de mínimos quadráticos são ineficientes, tanto para a regressão *cross section* em t, como para a regressão *cross section* e de series temporais em painel. A variância computada do estimador OLS (baseado na premissa que a variância de $\tilde{\varepsilon}$ é proporcional a matriz identidade) não é igual a verdadeira variância do estimador.

O segundo problema é que a população verdadeira de β_{it} não é observável. O problema usual é que o estimador a partir de dados passados e suas estimativas são associadas a uma medida de erro. Isto significa que o estimador OLS vai ser inconsistente e tendencioso. O método usado para resolver este problema é discutido neste capítulo.

Vamos primeiramente assumir que existem dados de taxas de retorno, betas verdadeiros e as taxas de dividendos no período i, *i=1,2,....* $N_{t,}$ ativos em cada período *t, t=1... T*. Definindo o vetor de excesso de retornos realizados como

$$\tilde{R} \equiv \{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2, ..., \tilde{R}_t, ..., \tilde{R}_T\} \tag{5.3}$$

onde

$$\tilde{R}_t \equiv \begin{bmatrix} (\tilde{R}_{1t} - r_{ft}) \\ (\tilde{R}_2 - r_{ft}) \\ \vdots \\ (\tilde{R}_{it} - r_{ft}) \\ \vdots \\ (\tilde{R}_{iT} - r_{ft}) \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

e as matrizes X de variáveis explicativas como

$X \equiv \{X_1 X_2, ..., X_t, ..., X_T\}$

onde

$$X_t = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{1t} & \left(d_{1t} - r_{ft}\right) & \left(jcp_{1t} - r_{ft}\right) \\ 1 & \beta_{2t} & \left(d_{2t} - r_{ft}\right) & \left(jcp_{2t} - r_{ft}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \beta_{N_t t} & \left(d_{N_t t} - r_{ft}\right) & \left(jcp_{N_t t} - r_{ft}\right) \end{bmatrix}$$

Pela definição do vetor de coeficientes de regressão como $\Gamma = \{\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3\}$, podemos escrever a regressão *cross section* e de série temporal em painel como

$$\tilde{R} = X\Gamma + \tilde{\varepsilon} \tag{5.5}$$

onde

$\tilde{\varepsilon} \equiv \{\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_{t,} \ldots, \tilde{\varepsilon}_T\}$

e

$\tilde{\varepsilon}_t \equiv \{\tilde{\varepsilon}_{1t} \tilde{\varepsilon}_{2t}, \ldots, \tilde{\varepsilon}_{it,} \ldots, \tilde{\varepsilon}_{N_t T}\}$

Então assumimos que

$E(\tilde{\varepsilon}) = 0$

e que

$E(\tilde{\varepsilon}_t \tilde{\varepsilon}_t') = V_t$

é uma matriz positiva definida de ordem ($N_{t,}$ x $N_{t,}$). Isto também assume que os retornos dos ativos são serialmente descorrelatados, ou seja,

$E(\tilde{\varepsilon}_{it} \tilde{\varepsilon}_{js}') = 0 \qquad para \qquad t \neq s$

isto significa que a matriz variância-covariância $V \equiv E(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}')$ é um bloco diagonal, com todos os blocos fora da diagonal sendo iguais a zero. A matriz V_t aparece ao longo da diagonal de V.

$$V_t = \begin{bmatrix} E\left(\varepsilon_1^2\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E\left(\varepsilon_2^2\right) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E\left(\varepsilon_t^2\right) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

É bem conhecido que o estimador para Γ, que é linear em $\tilde{R}$, é não tendencioso e têm uma variância mínima única, a qual é dada pelo Aitken ou estimados pelo método de mínimos quadráticos generalizados (GLS).

$$\Gamma = \left(X' V^{-1} X \right)^{-1} X' V^{-1} \tilde{R} \tag{5.7}$$

onde

$$\Gamma = \left(\begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(\varepsilon_2^2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E(\varepsilon_t^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \beta_{1t} & (d_{1t}-r_{ft}) & (j\varphi_{1t}-r_{ft}) \\ 1 & \beta_{2t} & (d_{2t}-r_{ft}) & (j\varphi_{2t}-r_{ft}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \beta_{N_t t} & (d_{N_t t}-r_{ft}) & (j\varphi_{N_t t}-r_{ft}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(\varepsilon_2^2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E(\varepsilon_t^2) \end{bmatrix} \right)^{-1} x$$
$$x \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(\varepsilon_2^2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E(\varepsilon_t^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \beta_{1t} & (d_{1t}-r_{ft}) & (j\varphi_{1t}-r_{ft}) \\ 1 & \beta_{2t} & (d_{2t}-r_{ft}) & (j\varphi_{2t}-r_{ft}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \beta_{N_t t} & (d_{N_t t}-r_{ft}) & (j\varphi_{N_t t}-r_{ft}) \end{bmatrix} \left[(\tilde{R}_{1t}-r_{ft})(\tilde{R}_{2}-r_{ft}),....,(\tilde{R}_{it}-r_{ft}),....,(\tilde{R}_{iT}-r_{ft}) \right] \tag{5.8}$$

Dada a natureza dos blocos diagonais de V, segue-se que V^{-1} é também têm blocos diagonais. As matrizes V_t^{-1}, $t=1,2,...T$, aparece ao longo da diagonal de V^{-1}, com os blocos fora da diagonal sendo iguais a zero. Assumindo que Γ é uma constante intertemporal, $\hat{\Gamma}$ pode ser estimado eficientemente por uma estimativa de T independentes estimações GLS em painel. Para Γ, mais especificamente $\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2, ..., \hat{\Gamma}_t, ..., \hat{\Gamma}_T$, obtido utilizando os dados dos períodos 1,2,...,t,...,T.

$$\hat{\Gamma}_t = \left(X_t' V_t^{-1} X_t \right)^{-1} X_t' V_t^{-1} \tilde{R}_t \qquad t = 1, 2, ..., T \tag{5.9}$$

Para os resultado apresentados no capítulo 4 cada γ_{kt}, assume-se que sua distribuição é estacionária e que a estimador de $\hat{\gamma}_k$ e sua variância são

$$\hat{\gamma}_k = \sum_{t=1}^{T} \frac{\hat{\gamma}_{kt}}{T} \tag{5.10}$$

$$\operatorname{var}(\hat{\gamma}_k) = \sum_{t=1}^{T} \frac{(\hat{\gamma}_{kt} - \hat{\gamma}_k)^2}{T(T-1)}, \qquad k = 0,1,2. \tag{5.11}$$

Uma interpretação interessante pode ser dada para cada um dos estimadores GLS. Escolhendo qualquer matriz de ordem $N_{t,} \text{ x } N_{t,}$ seja W_t^{-1}, tal que

$\left(X_t^{`}W_t^{-1}X_t\right)^{-1}$ exista. Constrói-se um estimador, usando os dados no período t como

$$\left(X_t^{`}W_t^{-1}X_t\right)^{-1}X_t^{`}W_t^{-1}\tilde{R} \tag{5.12}$$

Este estimador é linear em $\tilde{R}_t$ e não tendencioso para Γ. Este estimador é uma combinação linear dos excessos de retorno dos ativos no período t. Então temos

$$\left(X_t^{`}W_t^{-1}X_t\right)^{-1}X_t^{`}W_t^{-1}X_t = I \tag{5.13}$$

Onde I é a matriz identidade, então segue que o estimador γ_0 é o excesso de retorno realizado numa carteira de beta zero e tendo como taxa de dividendo igual a taxa de juros sem risco. Similarmente, o estimador γ_1 é o excesso de retorno realizado numa carteira que têm beta igual a um e a taxa de dividendo igual a zero; e que γ_2 é o excesso de retorno realizado numa carteira com hedge tendo beta igual a zero e taxa de dividendo igual um. Esta interpretação pode ser dada a qualquer estimador na forma da equação (5.12). Quando W_t^{-1} (ou, equivalente, os pesos da carteira discutida acima) é escolhida de forma a minimizar a variância do retorno da carteira, resultando que o estimador seja um estimador GLS. Isto acontece porque a carteira estimada em (5.12) é linear e não tendenciosa por construção, e pelo teorema de Gauss-Markov o estimador GLS é um estimador de variância mínima sobre todos os estimares lineares não tendenciosos.

Não é possível especificar elementos da matriz de variância-covariância V^{-1} a priori. O trabalho de estimar estes elementos é muito simplificado por assumir que o modelo de sharpe é a descrição correta do processo gerador de retornos. O processo que gera retornos no início do período t é suposto como se segue.

$$\tilde{R}_{it} = \alpha_{it} + \beta_{it}\tilde{R}_{mt} + \tilde{e}_{it} \qquad i = 1, 2, \ldots N_t \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}(\tilde{e}_{it}, \tilde{e}_{it}) = 0 \qquad i \neq j \\ &\operatorname{cov}(\tilde{e}_{it}, \tilde{e}_{it}) = s_{ii} \qquad i = j \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\alpha_{it} = E\left(\tilde{R}_{it} \mid R_{mt} = 0\right) \tag{5.16}$$

Com esta especificação, o elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna do V_t , é escrita como $V_t(i, j)$, é dado por

$$\begin{aligned} &V_t(i, j) = \beta_{it}\beta_{jt}\sigma_{mm}, \qquad i \neq j \\ &V_t(i, j) = \beta_{it}{}^2\sigma_{mm} + s_{ii} \qquad i = j \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots, N_t \end{aligned} \tag{5.17}$$

onde

$$\sigma_{mm} \equiv \operatorname{var}\left(\tilde{R}_{mt}\right) \tag{5.18}$$

$$V_t = \begin{bmatrix} \beta_{1t}{}^2\sigma_{mm} + s_{11} & \beta_{2t}\beta_{1t}\sigma_{mm} & \cdots & \beta_{Nt}\beta_{1t}\sigma_{mm} \\ \beta_{1t}\beta_{2t}\sigma_{mm} & \beta_{2t}{}^2\sigma_{mm} + s_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta_{Nt}\beta_{N-1t}\sigma_{mm} \\ \beta_{1t}\beta_{Nt}\sigma_{mm} & \cdots & \beta_{N-1t}\beta_{Nt}\sigma_{mm} & \beta_{Nt}{}^2\sigma_{mm} + s_{NN} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Litzenberger e Rasmawamy mostram que e sob estas condições o estimador GLS de Γ é obtido utilizando os dados no período t se reduz a

$$\hat{\Gamma}_t = \left(X_t^{`}\Omega_t^{-1}X_t\right)^{-1} X_t^{`}\Omega_t^{-1}\tilde{R}_t \tag{5.20}$$

onde Ω_t^{-1} é a matriz diagonal de ordem ($N_{t,}$ x $N_{t,}$), e que os todos os elementos na i-ésima linha e na j-ésima coluna é dados por

$$\begin{aligned} &\Omega_t(i, j) = 0 \qquad i \neq j \\ &\Omega_t(i, j) = s_{ii} \qquad i = j \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots., N_t \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\Omega_t^{-1} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_{NN} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Pode-se mostrar que este estimador é o estimados GLS para Γ. Ou seja, sob as premissas de um modelo de um único índice, o estimador minimiza risco residual do retorno de três carteiras. Que são γ_0, γ_1, γ_2 e γ_3 respectivamente. Este estimador pode ser construído como uma transformação heterocedástico em R_t e X_t. Definindo que a matriz P_t de ordem ($N_{t,}$ x $N_{t,}$), cujos elementos são dados por

$$
\begin{aligned}
&P_t(i,j) = \frac{\phi}{s_t} \equiv \frac{\phi}{\sqrt{s_{ii}}} \qquad i = j \\
&P_t(i,j) = 0 \qquad\qquad\quad i \neq j
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

$$
P_t = \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{s_{ii}}} & & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\phi}{\sqrt{s_{ii}}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\phi}{\sqrt{s_{ii}}} \end{bmatrix}
\tag{5.24}
$$

Onde ϕ é um escalar positivo. Então, $\hat{\Gamma}_t$, também pode ser encontrado através de uma regressão OLS nas variáveis transformadas,

$$R_t^* = X_t^* \Gamma + \tilde{\varepsilon}_t^* \tag{5.25}$$

onde

$$R_t^* = P\tilde{R}_t \text{ e } X_t^* = PX_t$$

$$R_t^* = \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\phi}{\sqrt{s_{22}}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\phi}{\sqrt{s_{NN}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{R}_{1t} - r_{ft}) \\ (\tilde{R}_2 - r_{ft}) \\ \vdots \\ (\tilde{R}_{it} - r_{ft}) \\ \vdots \\ (\tilde{R}_{iT} - r_{ft}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{s_{11}}}(\tilde{R}_{1t} - r_{ft}) \\ \frac{\phi}{\sqrt{s_{22}}}(\tilde{R}_2 - r_{ft}) \\ \vdots \\ \frac{\phi}{\sqrt{s_{ii}}}(\tilde{R}_{it} - r_{ft}) \\ \vdots \\ \frac{\phi}{\sqrt{s_{NN}}}(\tilde{R}_{iT} - r_{ft}) \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

$$X_t^* = \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\phi}{\sqrt{s_{22}}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\phi}{\sqrt{s_{NN}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_{1t} & \left(d_{1t} - r_{ft}\right) & \left(jcp_{1t} - r_{ft}\right) \\ 1 & \beta_{2t} & \left(d_{2t} - r_{ft}\right) & \left(jcp_{2t} - r_{ft}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \beta_{N_t t} & \left(d_{N_t t} - r_{ft}\right) & \left(jcp_{N_t t} - r_{ft}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{s_{11}}} & \frac{\phi}{\sqrt{s_{11}}}\beta_{1t} & \frac{\phi}{\sqrt{s_{11}}}\left(d_{1t} - r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{s_{11}}}\left(jcp_{1t} - r_{ft}\right) \\ \frac{\phi}{\sqrt{s_{22}}} & \frac{\phi}{\sqrt{s_{22}}}\beta_{2t} & \frac{\phi}{\sqrt{s_{22}}}\left(d_{2t} - r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{s_{22}}}\left(jcp_{2t} - r_{ft}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\phi}{\sqrt{s_{NN}}} & \frac{\phi}{\sqrt{s_{NN}}}\beta_{N_t t} & \frac{\phi}{\sqrt{s_{NN}}}\left(d_{N_t t} - r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{s_{NN}}}\left(jcp_{N_t t} - r_{ft}\right) \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Isto é equivalente a deflacionar as variáveis na i-ésima linha de $\tilde{R}_t$ por um fator proporcional ao erro padrão residual.

Um problema empírico como citado anteriormente é que na estimação da equação (5.2) é que de fato o verdadeiro β_t, não é observável e o valor estimado do beta de mercado, $\hat{\beta}_t$, calculado pelos dados históricos deve ser utilizado como *proxy*.

$$R_{i\tau} = \alpha_{it} + \beta_{it} R_{m\tau} + e_{i\tau} \qquad \tau = t - P_i, ..., t-1 \tag{5.28}$$

Onde *P* é o conjunto de informação utilizado para estimar $\hat{\beta}_t$

Dado que se assume um modelo de um índice, $\text{cov}(\tilde{\varepsilon}_{i\tau}\tilde{\varepsilon}_{j\tau}) = 0$ e que $\text{cov}(\tilde{v}_{i\tau}\tilde{v}_{j\tau}) = 0$. Se a probabilidade conjunta da distribuição entre a taxas de retorno dos ativos e a mercada é estacionária, a variância da medida do termo de risco residual $\text{var}(\tilde{\varepsilon}_{i\tau})$, para cada i. Desde que o mês t não é utilizado na regressão, $\text{cov}(\tilde{\varepsilon}_{i\tau}\tilde{v}_{j\tau}) = 0$. Note que a regressão do beta medido, $\tilde{\beta}_{it}$, sua variância é $\text{var}(\tilde{v}_{i\tau})$ e a variância do risco residual $\text{var}(\tilde{e}_{i\tau}) = s_{ii}$.

Como a verdadeira população de β_{it} não é observável, então as estimativas desta variável, $\tilde{\beta}_{it}$, são obtidas dos dados históricos. Assume-se que estimativa do beta é o verdadeiro beta mais uma medida de erro v_{it}.

$$\tilde{\beta}_{it} = \beta_{it} + \tilde{v}_{it}$$

$$\text{var}(v_{it}) = \text{var}(\beta_{it})$$

Pelo modelo de um fator, o estimador OLS da variância da amostra de $\hat{\beta}_{it}$ é

$$s_i = \text{var}(\hat{\beta}_{it}) = \frac{\text{var}(e_{i\tau})}{\sum_{\tau=t-P_i}^{t-1} (R_{m\tau} - \bar{R}_m)^2} = \frac{s_i}{\sum_{\tau=t-P_i}^{t-1} (R_{m\tau} - \bar{R}_m)^2} \tag{5.29}$$

A presença de medida de erro causa um erro de especificação na OLS e os estimadores GLS, e conseqüentemente as estimativas Γ passam a ser tendenciosos e inconsistentes.

Consistentes com estudos empíricos feitos, a premissa de que $E(\tilde{e}_{it}) = 0$ foi feito. Entretanto, isto é reconhecido que se o 'retorno de mercado' usado na equação acima não é o verdadeiro retorno de mercado, então, a estimativa de $\tilde{\beta}_{it}$ deve ser tendenciosa.

Por causa dos erros em variável, a maioria dos testes empíricos agrupou as ações em carteiras. Desde que os erros de medimos os betas para diferentes ativos, que não são perfeitamente correlatados, agrupar ativos de risco em carteira irá reduzir a eficiência, causada pela perda de informação. A eficiência do estimador OLS do coeficiente de uma única variável independente é proporcional a variação *cross section* na variável independente (beta). Para o caso de duas variáveis independentes (taxa de dividendo e beta), stehle (1976) mostrou a eficiência do estimador OLS do coeficiente de uma variável independente, utilizando o dados agrupados, é proporcional a variação *cross sectional* na variável não explicada pela variação em outras variáveis independentes. Desde que a variação do grupo na taxa de dividendo sobre o beta é eliminada, a eficiência da estimativa do coeficiente da taxa de dividendo utilizando o dados agrupados é menor que utilizando todos os dados. Por isso, não utilizamos a agrupamento de dados para erros em variável. Ao invés disto, fazemos a medida de erro no beta para chegar num estimador consistente de Γ.

Na construção do estimador GLS de $\hat{\Gamma}$ em Equação 6.2, cada variável foi deflacionada por um fator proporcional a desvio padrão residual. O fator de proporcionalidade é um escalar positivo e arbitrário. A estrutura de nosso problema, é tal que, a medida do desvio padrão de erro em $\tilde{\beta}_{it}$, $\mathfrak{s}_i = \left(\text{var}\left(\tilde{v}_{it}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$, é proporcional ao desvio padrão do risco residual, $s_i = \left(\text{var}\left(\tilde{e}_{it}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. Isto é, se a regressão do modelo de série temporal que satisfaz as premissas de OLS

Assumindo que $\mathfrak{s}_i$ é conhecido temos que a proporção é dada por

$$\phi = \frac{s_i}{\mathfrak{s}_i} \tag{5.30}$$

Na definição de P em (5.23). Então cada variável na linha de $\tilde{R}_t$ e X_t é deflacionada pelo desvio padrão da medida de erro em β_{it}. Se $\tilde{\beta}_{it}$ é utilizado no lugar de β_{it} (não observável), a medida de erro na variável independente deflacionada, $\tilde{\beta} = \dfrac{\beta_{it}}{\sigma_i}$ vai ter variância unitária.

Chamando a matriz de regressores usados $\tilde{X}_t^*$, o qual é simplesmente X_t^* com $\tilde{\beta}_{it}$ substituindo β_{it}. Então

$$\tilde{X}_t^* = \tilde{X}_t^* + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{v_{1t}}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{v_{2t}}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{v_{N_t t}}{\sigma_{N_t}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

onde $\dfrac{v_{it}}{\sigma_i} = 1$. Então o valor do estimador

$$\hat{\Gamma} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\Gamma_t}{T} \tag{5.32}$$

Onde

$$\Gamma_t = \left(\tilde{X}_t^{*\prime} \tilde{X}_t^*\right)^{-1} \tilde{X}_t^{*\prime} \tilde{R}_t^* \tag{5.33}$$

é inconsistente. Isto ocorre porque

$$\underset{N_t}{\text{plim}}\ \tilde{\Gamma}_t = \left(\sum X^*_i X^*_i + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{X^{*\prime}_i \tilde{R}_t}{N_t} \tag{5.34}$$

onde

$$\sum X^*_i X^*_i = \text{plim}\ \frac{X^*_i X^*_i}{N_t} \qquad (5.35)$$

Isto diz que para cada estimador da regressão *cross section* é tendenciosos mesmo em amostras grandes. Portanto, o estimador total, sendo a média aritmética dos estimadores *cross section*, é inconsistente.

Existem pelo menos três maneiras de corrigir este problema. A primeira feita por Litzemberger e Rasmawamy em que em vez de deflacionarmos todas as variáveis por $\sqrt{s_{ii}}$, ns deflacionamos por $\sqrt{\mathfrak{s}_{ii}}$

Considerando o seguinte estimador em cada período *cross-section*.

$$\tilde{\Gamma}_{\mathrm{t}} = \left(X^{*}{}_{i} X^{*}{}_{i} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} X^{*}{}_{i}{}' \tilde{R} \qquad (5.36)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mathrm{t}} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}} & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}{}_{1t} & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}} \\ \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\beta & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\beta_{2t} & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\beta_{N_t t} \\ \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\left(d_{1t}-r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\left(d_{2t}-r_{ft}\right) & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\left(d_{N_t t}-r_{ft}\right) \\ \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\left(jcp_{1t}-r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\left(jcp_{2t}-r_{ft}\right) & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\left(jcp_{N_t t}-r_{ft}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}} & \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\beta_{1t} & \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\left(d_{1t}-r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\left(jcp_{1t}-r_{ft}\right) \\ \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}} & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\beta_{2t} & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\left(d_{2t}-r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\left(jcp_{2t}-r_{ft}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}} & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\beta_{N_t t} & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\left(d_{N_t t}-r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\left(jcp_{N_t t}-r_{ft}\right) \end{bmatrix}_{i}^{*} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} x$$

$$x^{t} \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}} & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}{}_{1t} & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}} \\ \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\beta & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\beta_{2t} & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\beta_{N_t t} \\ \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\left(d_{1t}-r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\left(d_{2t}-r_{ft}\right) & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\left(d_{N_t t}-r_{ft}\right) \\ \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\left(jcp_{1t}-r_{ft}\right) & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\left(jcp_{2t}-r_{ft}\right) & \cdots & \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\left(jcp_{N_t t}-r_{ft}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\phi}{\sqrt{\mathfrak{s}_{11}}}\left(\tilde{R}_{1t}-r_{ft}\right) \\ \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{22}}}\left(\tilde{R}_{2}-r_{ft}\right) \\ \vdots \\ \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{it}}}\left(\tilde{R}_{1t}-r_{ft}\right) \\ \vdots \\ \frac{\phi}{\sqrt{\varsigma_{NN}}}\left(\tilde{R}_{iT}-r_{ft}\right) \end{bmatrix} \qquad (5.37)$$

então

$$\underset{N_t}{\text{plim}}\ \tilde{\Gamma}_t = \frac{X^{*}{}_i{}'\tilde{R}_t}{X^{*}{}_i X^{*}{}_i} \tag{5.38}$$

e

$$E\left(\underset{N_t}{\text{plim}}\ \tilde{\Gamma}_t\right) = \frac{X^{*}{}_i{}'E\left(\tilde{R}_t\right)}{X^{*}{}_i X^{*}{}_i} = \Gamma \tag{5.39}$$

Então cada estimador *cross section* é não tendencioso, e em grande amostras, para Γ.

A matriz de variância e covariância dos coeficientes é dada por

$$\operatorname{var}\left(\Gamma_t\right) = \left(\sigma_\varepsilon^2 + \hat{\gamma}_{1t}^2\right)\left[\left[X_t^{*'}X_t^{*} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1} X_t^{*'}X_t^{*}\left[X_t^{*'}X_t^{*} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1}\right] \tag{5.40}$$

Onde σ_ε^2 é a variância dos resíduos de modelo de regressão ponderado utilizando a estimativa dos coeficientes corrigidos.

A estimação em serie temporal de todos os coeficientes são utilizados para testar a significância do premio de risco sobre todos os períodos. Nos calculamos a estatística t para testar quando o premio de risco é diferente de 0

$$t = \frac{\hat{\Gamma}}{\sigma\left(\hat{\Gamma}\right)} \tag{5.41}$$

Para estimar o premio de risco de premio sobre todos os períodos *T* como medida de premio de risco e $\sigma\left(\hat{\Gamma}\right)$ como uma média aritmética dos coeficientes mensais estimados. Para isto, assume-se que o excesso de retorno das carteiras são descorrelatados serialmente e estacionários.

$$\hat{\Gamma} = \frac{\sum_t \hat{\Gamma}_t}{T} \qquad e \qquad \sigma\left(\hat{\Gamma}\right) = \sqrt{\frac{\sum_t \left(\hat{\Gamma}_t - \hat{\Gamma}\right)}{T(T-1)}} \tag{5.42}$$

Se relaxarmos as premissas de que a variância é constante ao longo do tempo podemos estimar $\hat{\Gamma}$ como a média ponderada dos coeficientes estimados, onde o pesos são inversamente proporcionais variância dos coeficientes das regressões em cada período t.

$$\hat{\Gamma} = \frac{\sum_t Z_t \hat{\Gamma}_t}{T} \qquad e \qquad \sigma\left(\hat{\Gamma}\right) = \sqrt{\frac{\sum_t Z_t^{\,2}\left(\hat{\Gamma}_t - \hat{\Gamma}\right)}{T(T-1)}} \tag{5.43}$$

onde,

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{t}} = \frac{var\left(\hat{\Gamma}_t\right)^{-1}}{\sum_t \left(var\left(\hat{\Gamma}_t\right)^{-1}\right)} \tag{5.44}$$