3
Modelagem Estatística Clássica
Modelos de Duas Equações κ-ε

No último capítulo, constatou-se que, ao se realizar a média de Reynolds nas equações de Navier-Stokes, componentes do tensor de tensão de Reynolds ($\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$) são introduzidos nas equações de transporte de quantidade de movimento com média de Reynolds (eq. A.2). Estas novas incógnitas necessitam ser modeladas, a fim de fechar o sistema de equações. Verificou-se, ainda, que basicamente duas abordagens são utilizadas, para modelar as tensões de Reynolds: a hipótese de Boussinesq, conhecida como modelos de viscosidade turbulenta; e a modelagem da equação de transporte do tensor de Reynolds. Ambas as metodologias foram discutidas no capítulo passado e as técnicas utilizadas na modelagem das equações de transporte exatas constam do Apêndice A.

Na metodologia dos modelos de viscosidade turbulenta, o tensor de tensão de Reynolds (τ_{ij}) é modelado ao se assumir um alinhamento entre o tensor de Reynolds e o tensor de deformação média , via viscosidade turbulenta (μ_t). Esta é a hipótese de Boussinesq.

Sendo as tensões turbulentas resolvidas em analogia as tensões viscosas, a viscosidade turbulenta também é modelada, fazendo analogia com a viscosidade molecular, como $\mu_t \sim \rho\ U\,L$, onde U é a escala de velocidade e L a escala de comprimento do escoamento turbulento.

Nos modelos de viscosidade turbulenta de duas equações emprega-se duas quantidades turbulentas, obtidas da solução de duas equações diferenciais de transporte, para se levantar as escalas de velocidade e comprimento. A energia cinética turbulenta (κ) é normalmente usada para se obter a escala de velocidade, $U \sim \sqrt{\kappa}$, enquanto o comprimento de escala é modelado por κ e uma quantidade turbulenta adicional.

Desde que a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta (ε) aparece naturalmente na equação exata da energia cinética turbulenta (eq. A.9), esta é a escolha mais óbvia para segunda quantidade turbulenta, sendo a escala de comprimento definida como $L \sim \kappa^{3/2}/\varepsilon$. Esta forma de definir a viscosidade turbulenta ($\upsilon_t = C_\mu \kappa^2/\varepsilon$, onde C_μ é um coeficiente empírico) deu origem ao modelo de duas equações mais largamente usado em cálculos de engenharia.

O modelo κ-ε foi originalmente proposto no início dos anos setenta, para alto números de Reynolds (Hanjalic & Launder, 1972; Launder & Spalding, 1974). Quando usado em conjunto com funções de parede, o modelo original é numericamente bem comportado e tem sido aplicado a uma variedade de problemas de engenharia com razoável sucesso. Contudo, muitos escoamentos de importância tecnológica necessitam ser integrados até a região da parede, particularmente problemas onde o transporte de propriedades nesta região é importante e onde há separação do escoamento.

Visando tornar os modelos κ-ε computacionalmente eficientes, precisos e universais, modelos para correções na região da parede ainda encontram-se em desenvolvimento. Atribui-se à modelagem da equação da taxa de dissipação a responsabilidade pela maior parte das dificuldades do modelo na região da parede. Sabe-se que a taxa de dissipação tem um valor finito na parede, sendo, portanto, difícil de especificá-lo na fronteira. A falta da condição de contorno natural para ε tem levado a utilização de condições de contorno assintoticamente incorretas. Por outro lado, o balanço de termos da equação de ε modelada, na região da parede, depende de correlações da alta ordem, introduzindo sérias dificuldades. (Speziale et al., 1992). Estas dificuldades podem ser fonte de imprecisões e dificuldades numéricas. Até um passado recente, não era possível a determinação exata das funções introduzidas como correção na equação de transporte modelada da taxa de dissipação, devido a dificuldade de se medir precisamente a taxa de dissipação na região da parede. No entanto, este problema começou a ser resolvido com o aparecimento dos primeiros resultados da simulação numérica direta.

Outra deficiência do modelo κ-ε refere-se a modelagem dos termos de transporte turbulento e de difusão turbulenta da equação da energia cinética turbulenta (Speziale et al.,1992; Chen et al., 1998). O comportamento assintótico do termo modelado não reproduz o comportamento do termo exato. Chen et al. (1998) afirmam que este termo tem grande importância no balanço junto a parede em escoamentos com recirculação.

Os recentes resultados da simulação numérica direta fizeram renascer o interesse pela modelagem das equações de κ e ε, na região da parede (Mansour et al., 1988; Rodi & Maunsour, 1993; Chen et al., 1998). O comportamento da taxa de dissipação e dos vários termos estão agora disponíveis, possibilitando um melhor ajuste das correções.

É também conhecida a incapacidade do modelo κ-ε linear predizer escoamentos secundários em dutos não circulares ou com quinas (Mompean et al., 1996). Speziale (1987) desenvolveu um modelo κ-ε não linear, baseando-se na similaridade entre o escoamento turbulento médio de um fluido Newtoniano e o escoamento laminar do fluido viscoelástico de Rivlin-Ericksen (Mompean et al., 1996). O modelo não linear produz melhores resultados que o modelo κ-ε linear, onde as tensões de Reynolds normais tem importante papel, como no caso dos dutos não circulares (Mompean et al., 1996).

Por outro lado, a teoria do grupo de renormalização foi aplicada as equações de Navier-Stokes, da energia cinética turbulenta e da taxa de dissipação, dando origem as variantes linear, não linear e de baixo número de Reynolds do modelo κ-ε renormalizado (RNG). Uma importante característica destes modelos é o fato das constantes numéricas serem obtidas diretamente da teoria do grupo de renormalização, em contraste com as do modelo κ-ε padrão que foram ajustadas empiricamente para escoamentos turbulentos simples (Yakhot & Orszag, 1986; Yakhot et al., 1992; Orszag et al. 1993).

Deste modo, este capítulo propõe-se a estudar os modelos κ-ε e suas variantes de baixo número de Reynolds e não linear. Serão discutidas brevemente as suas virtudes e limitações, além de serem apresentadas as equações de governo. O capítulo se encerra com a discussão dos modelos κ-ε renormalizados (RNG). Cabe destacar que todo estudo da capacidade de predição e comportamento numérico destes modelos, em escoamentos complexos, faz parte do Capítulo 6.

3.1. Modelo κ-ε para Altos Números de Reynolds

A forma de alto número de Reynolds do modelo κ-ε, quando utilizada juntamente com funções de parede, tem provado ser uma poderosa ferramenta de predição de escoamentos turbulentos. Inúmeros engenheiros, em todo mundo, motivados pela relativa capacidade de predição, simplicidade e robustez computacional, têm empregado este modelo na predição de escoamentos turbulentos de interesse prático, tornando-o o mais popular modelo de turbulência, apesar de suas bem conhecidas limitações.

O acoplamento modelo e função de parede tem a grande vantagem da economia computacional e se justifica nos problemas onde as informações próximas a parede são irrelevantes.

Os modelos κ-ε de alto número de Reynolds são baseados no conceito de viscosidade turbulenta, hipótese de Boussinesq (1877), no qual as tensões turbulentas são proporcionais a taxa de deformação do escoamento médio (Hinze, 1975):

$$-\overline{u_i' u_j'} = \upsilon_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\upsilon_t \left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} - \frac{2}{3} \kappa\, \delta_{ij} \tag{3.1}$$

onde o último termo, que pode ser interpretado como pressão dinâmica dos turbilhões, é incorporado para representar efeitos de tensão normal associados a flutuações da pressão. $\overline{u_i}$ é o componente i da velocidade média, e a viscosidade turbulenta υ_t é definida em função da energia cinética turbulenta κ e sua taxa de dissipação ε de acordo com a expressão:

$$\upsilon_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu \ \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.2}$$

sendo C_μ uma constante empírica.

As equações diferenciais de transporte exatas de κ e ε são obtidas a partir de manipulações das equações de Navier-Stokes e constam do Apêndice A. Após a modelagem das equações exatas, o modelo realiza o fechamento do problema através do seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j}\, \kappa \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\upsilon_t}{\sigma_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + P_\kappa - \varepsilon \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\upsilon_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + \left[C_1 P_\kappa - C_2\,\varepsilon\right]\frac{\varepsilon}{\kappa} \qquad (3.4)$$

sendo o termo de produção de energia cinética P_κ igual a

$$P_\kappa = -\,\overline{u_i' u_j'}\,\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \qquad (3.5)$$

Para fluidos incompressíveis, temos

$$P_\kappa = \upsilon_t\,(2\,S_{ij}\,S_{ij}) \qquad (3.6)$$

onde S_{ij} é o tensor taxa de deformação

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) \qquad (3.7)$$

O modelo contém cinco constantes empíricas, determinadas por comparação com dados experimentais de escoamentos turbulentos simples. Os valores, que foram estabelecidos por Hanjalic & Launder (1972) e Launder & Spalding (1974) (Hanjalic, 1994; Deschamps, 1998), são: C_1=1,44; C_2=1,92; σ_κ=1,0; σ_ε =1,3 e C_μ=0,09.

Cabe destacar que, enquanto na equação da energia cinética turbulenta exata somente os termos de transporte turbulento e de difusão de pressão necessitam ser modelados, a equação da taxa de dissipação requer uma modelagem muito mais drástica. Isto faz com que muitas das dificuldades do modelo sejam atribuídas a essa equação. Contudo, é bem conhecido que a hipótese de uma relação linear entre a tensão de Reynolds e a taxa de deformação média, própria dos modelos de viscosidade turbulenta, impõe severas limitações aos modelos dessa classe. O caráter escalar da viscosidade turbulenta é outra fonte de inconsistência.

Por exemplo, a incapacidade do modelo prever adequadamente escoamentos na presença de curvaturas das linhas de corrente, constantemente apontada como deficiência do modelo, é fruto da relação linear entre o tensor de tensão de Reynolds e o tensor de deformação média. A função corrente do escoamento médio ψ, onde $\bar{u}=-\partial\psi/\partial y$ e $\bar{v}=\partial\psi/\partial x$, é a solução da seguinte equação de transporte (Thangan & Speziale, 1992):

$$\bar{u}\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial y}=\upsilon\,\nabla^4\psi-\frac{\partial^2(\tau_{yy}-\tau_{xx})}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y^2} \tag{3.8}$$

Verifica-se prontamente que a diferença de tensão normal (τ_{yy} -τ_{xx}) contribui de modo direto para o cálculo da função corrente e, consequentemente, para o campo de velocidade média. Este é o caso para qualquer escoamento com linha de corrente com curvatura, desde que as tensões normais possam ser transformadas como:

$$\frac{\partial^2(\tau_{nn}-\tau_{ss})}{\partial n\,\partial s} \tag{3.9}$$

onde n e s são, respectivamente, as direções normal e tangencial à linha de corrente.

Quanto ao modelo propriamente dito, pode-se dizer que o fato da viscosidade turbulenta ser definida exclusivamente por escalas características do movimento turbulento, através das quantidades κ e ε, é uma fonte de inconsistência. A viscosidade turbulenta liga o tensor de Reynolds, uma quantidade turbulenta, ao tensor taxa de deformação média, uma quantidade própria do movimento médio. É razoável, portanto, esperar que a viscosidade turbulenta dependa não somente das quantidades turbulentas, mas também das escalas características do movimento médio. Portanto, outra deficiência, consiste no fato de se utilizar somente uma escala de comprimento para caracterizar todas as interações turbulentas do escoamento.

A utilização da taxa de dissipação como quantidade turbulenta geradora da escala de comprimento característica do movimento turbulento, se dá através da relação L~$\kappa^{3/2}/\varepsilon$. Todavia, esta relação é obtida sob a hipótese de equilíbrio local da turbulência e da validade da lei logarítmica. Consequentemente, é natural que o modelo tenha dificuldades em escoamentos onde estas condições não se repetem, como, por exemplo, escoamentos com gradientes de pressão adverso e separações.

A falta de uma condição de contorno natural para ε e a modelagem do comportamento das correlações de alta ordem na região próxima a parede são limitações da equação da taxa de dissipação apontadas na literatura (Speziale et al., 1992: Bradshaw, 1997; Bredberg et al., 2002). Apesar da forma simplificada da equação modelada da taxa de dissipação, esta tem permitido ao modelo obter razoável sucesso em largo espectro de escoamentos turbulentos.

As deficiências apontadas são bastantes sérias, indicando que o modelo deve ser utilizado com cautela na previsão de escoamentos complexos, especialmente em situações onde não existam dados confiáveis. Estes cuidados são importantes, pois a possibilidade de reproduzir computacionalmente escoamentos turbulentos com um único conjunto de equações modeladas e coeficientes empíricos é tentadora e fascinante para os engenheiros em todo o mundo.

3.2. Modelo κ-ε para Baixos Números de Reynolds

Como foi visto no item anterior, o modelo κ-ε linear foi originalmente desenvolvido para altos números de Reynolds por Hanjalic & Launder (1972) e Launder & Spalding (1974) (Hanjalic, 1994; Deschamps, 1998) e tradicionalmente é utilizado em conjunto com funções de parede, quando aplicado a escoamentos limitados por superfícies sólidas. Essa combinação modelo e função de parede exige que o ponto nodal próximo a superfície sólida esteja na região da subcamada logarítmica, limitando o refinamento da malha e não resolvendo a subcamada viscosa. Além disso, funções de parede universais não existem em escoamentos complexos e muitas aplicações tecnológicas importantes exigem a integração dos modelos de turbulência até a parede.

Deve-se notar que os efeitos da proximidade da fronteira sólida são diferentes dos efeitos de baixo número de Reynolds. Embora, na região próxima a parede, o número de Reynolds local seja baixo, há ainda um efeito adicional de amortecimento seletivo, próprio da superfície sólida. Nos escoamentos de altos números de Reynolds, os efeitos da viscosidade estão restritos a delgada subcamada viscosa. Entretanto, se o número de Reynolds torna-se suficientemente baixo, os efeitos viscosos afetam todas interações turbulentas, causando um afastamento da isotropia local e aumentando a influência da deformação média sobre as menores escalas turbulentas. Este efeito está presente em escoamentos limitados ou não por superfícies sólidas.

Em contraste, a parede torna aproximadamente planas as estruturas turbulentas, impondo um amortecimento seletivo principalmente ao componente de velocidade normal à parede. A turbulência nas proximidades da superfície sólida aproxima-se de um "estado plano".

A simulação da subcamada viscosa, de um modo geral, requer, na estrutura do modelo κ-ε linear, que sejam realizadas duas modificações. A inclusão de uma função de amortecimento, f_μ , na definição da viscosidade turbulenta e modificações nos termos de produção e destruição da equação da taxa de dissipação. A função f_μ visa reproduzir tanto o amortecimento viscoso como o amortecimento preferencial das flutuações de velocidade normal à parede sólida, enquanto as modificações da equação de ε devem garantir o correto comportamento assintótico da taxa de dissipação na região da parede (Apsley & Leschziner, 1998).

Alguns modelos se propõem ainda a corrigir certas deficiências do modelo κ-ε tradicional, incorporando empiricamente termos extras à equação da taxa da dissipação ou à própria função de amortecimento f_μ. O modelo proposto por Ahn et al. (1997) pretende, através da especificação da função f_μ , considerar os efeitos do afastamento da condição de equilíbrio da turbulência, longe da parede, enquanto o modelo de Zhang et al. (1996) quer considerar, através da mesma função, o efeito da rugosidade da parede. Já o modelo de Yang & Shih (1993) inclui, na equação de ε, um termo fonte secundário, a fim de considerar o efeito médio da não homogeneidade do campo médio.

Há também modelos que resolvem uma equação para a taxa de dissipação modificada (Launder & Sharma, 1974; Chien, 1982). A proposta de usar uma dissipação modificada foi realizada inicialmente por Jones & Launder (1972), tendo em vista eliminar a singularidade da equação de ε na parede. A dissipação modificada, a qual normalmente é definida como $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon-\chi$, é estabelecida de tal modo que a condição de contorno nula seja especificada na parede para $\tilde{\varepsilon}$ (Patel et al., 1985; Yang & Shih, 1993). Neste caso, χ deve ter um valor não nulo na parede, a fim de conservar o balanço da equação de κ. Outro compromisso do termo χ é fazer com que a taxa de dissipação modificada, na região de escoamento completamente turbulento, tenda para a taxa de dissipação usada no modelo κ-ε de alto Reynolds.

De um modo genérico, as equações de governo dos vários modelos κ-ε para baixo número de Reynolds podem ser estabelecidas como:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\kappa\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon+\frac{\upsilon_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right]+P_\kappa-\varepsilon+\chi \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon+\frac{\upsilon_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]+ \tag{3.11}$$
$$+\left[C_1\,f_1\,\frac{1}{T_t}P_\kappa-C_2\,f_2\,\frac{E}{T_t}\right]\frac{\varepsilon}{\kappa}+\xi$$

sendo a produção da energia cinética turbulenta P_κ, a tensão de Reynolds, o tensor deformação S_{ij} e a viscosidade turbulenta υ_t dados por

$$P_\kappa=-\,\overline{u_i'\,u_j'}\,\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \tag{3.12}$$

$$-\overline{u_i'u_j'}=\upsilon_t\;2\,S_{ij}-\frac{2}{3}\upsilon_t\left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}-\frac{2}{3}\kappa\,\delta_{ij} \tag{3.13}$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) \tag{3.14}$$

$$\upsilon_t=C_\mu f_\mu\,\kappa\,T_t \tag{3.15}$$

onde T_t é a escala de tempo da turbulência, E é uma taxa de dissipação modificada, χ e ξ são funções de correção das respectivas equações de κ e ε, para a região próxima a parede, e f_1 e f_2 são funções de amortecimento. C_1, C_2, σ_κ, σ_ε são coeficientes dos modelos. É a especificação de todos estes parâmetros e funções que estabelecerá os diferentes modelos de baixo Reynolds.

Desde que Jones & Launder propuseram o primeiro modelo de baixo número de Reynolds, em 1972, uma vasta gama destes modelos tem sido apresentada na literatura. Dentro deste grande espectro de opções, selecionou-se, para serem estudados neste trabalho, os modelos de Launder & Sharma (1974); modelo de Sakar (Sakar & So, 1997); modelo de Myong & Kasagi modificado (Chen et al., 1998); modelo de Yang & Shih (1993); e o modelo Lam-Bewmhorst (Patel et al.,1985; Rodi & Mansour, 1993). Estes modelos serão, respectivamente, referenciados por LS, SA, MKM, YS e LB.

Para adotar um valor nulo da taxa de dissipação na parede, Launder & Sharma essencialmente não resolvem a eq. (3.11), para a dissipação verdadeira ε. A variável efetivamente resolvida no modelo LS é a pseudo dissipação $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\upsilon\,(\partial\sqrt{\kappa}/\partial x_j)^2$.

Os diferentes parâmetros e funções de cada modelo estão resumidos nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3. Na primeira tabela foram transcritas as funções de correção para a parede e a escala de tempo de turbulência. Já a Tabela 3.2 relaciona as funções de amortecimento, enquanto a terceira tabela define todas as constantes dos modelos. Os números de Reynolds que aparecem nestas tabelas são definidos como

$$Re_t=\kappa^2/(\upsilon\,\varepsilon) \tag{3.16}$$

$$Re_y=y\sqrt{\kappa}\,/\,\upsilon \tag{3.17}$$

$$Re_d=(\varepsilon\,\upsilon)^{1/4}y/\upsilon. \tag{3.18}$$

Na Tabela 3.1, ε^*, utilizado pelo modelo SA em ξ, é dado por $\varepsilon^*=\varepsilon - 2\upsilon\,\kappa\,/y^2$.

Anteriormente verificou-se que a função de amortecimento f_μ visa reproduzir os efeitos da viscosidade e da proximidade da parede. Baseando-se na observação de que estes efeitos são distintos, Hanjalic (1994) propõe que a função de amortecimento da viscosidade turbulenta (f_μ) considere isoladamente cada efeito. Contudo, como afirma Patel et al. (1985), é muito difícil modelar cada efeito separadamente, em especial a proximidade da parede. Alguns modelos, que se propõem a fazer esta distinção, utilizam a coordenada de parede (y^+)

$$y^+ = u_\tau \; y/\upsilon \qquad ; \qquad u_\tau = \sqrt{\tau/\rho} \tag{3.19}$$

na função de amortecimento f_μ, para considerar o efeito da proximidade da superfície sólida (Speziale et al., 1992; Myong & Kasagi, 1990). Entretanto, a definição de y^+ envolve a distância a parede y e a velocidade de atrito u_τ, tornando

Modelo	T_t	χ	E	ξ
LS	κ/ε	$-2\upsilon(\partial\sqrt{\kappa}/\partial x_j)^2$	$\tilde{\varepsilon}$	$2\upsilon_t\upsilon[\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k})]^2$
SA	κ/ε	0,0	$\tilde{\varepsilon}$	$\exp[-(Re_t/40)^2]*[-0,57(\varepsilon\ E)/\kappa$ $+0,5(\varepsilon^*)^2/\kappa - 2,25\,\varepsilon/\kappa\ P_\kappa]$
YS	$(\kappa/\varepsilon)+(\nu/\varepsilon)^{1/2}$	0,0	ε	$2\upsilon_t\upsilon[\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k})]^2$
MKM	κ/ε	0,0	ε	0,0
LB	κ/ε	0,0	ε	0,0

Tabela 3.1 - Funções de correção para parede dos modelos selecionados

Modelo	f_μ	f_1	f_2
LS	$\exp[-3,4/(1,0+Re_t/50)^2]$	1,00	1,00 - 0,3exp($-Re_t^2$)
SA	$(1+3/Re_t^{3/4})[1+80\exp(-Re_d)]$ $[1-\exp((-Re_d/43-Re_d^2/330)]^2$	1,00	1,00
YS	$[1-\exp(-1,5\times10^{-3}Re_y$ $-5\times10^{-7}Re_y^3-10^{-10}Re_y^5)]^{1/2}$	1,00	1,00
MKM	$(1+3,45/\sqrt{Re_t})$ $[1-\exp(-1,85\text{x}10^{-3}Re_y-1,05\text{x}10^{-4}Re_y^2)]^{1/2}$	1,00	1,00
LB	$[1-\exp(-0,0165\,Re_y)]^2[1,0+(20,5/Re_t)]$	1,00+ $+(0,05/f_\mu)^3$	1,00- exp($-Re_t^2$)

Tabela 3.2 - Funções de amortecimento dos modelos selecionados

difícil a especificação desta coordenada adimensional ou mesmo invalidando a sua definição em escoamentos complexos. Nos escoamentos com separação, ao redor do ponto de recolamento, a velocidade de atrito (u_τ) torna-se nula, invalidando a definição de y^+, enquanto y é difícil de ser definido na região próxima às quinas, por exemplo. Pode-se também dizer que o uso de y na função de amortecimento torna o modelo não invariante quanto a estrutura de referência, embora alguns autores digam que esta seja uma deficiência teórica facilmente superada (Yang & Shih, 1993).

Há modelos que se propõe a resolver este problema, porém simplesmente substituem o uso de y^+ por $Re_y=(y\sqrt{\kappa}/\upsilon)$, eliminando somente parte do problema (Chen et al., 1998). Este procedimento normalmente é justificado, ao ser afirmado que, na região de quina, κ é muito pequeno e a definição exata de y torna-se irrelevante para a resolução do problema (Yang & Shih, 1993). Das Tabelas 3.1 e 3.2, verifica-se que todos os modelos escolhidos satisfazem a restrição de não empregar funções de amortecimento com y^+, mas somente o modelo de Launder & Sharma (1974) não faz uso da distância a parede (y).

Outra exigência imposta aos modelos de baixo Reynolds é que reproduzam o modelo de alto Reynolds na região afastada da parede. Esta imposição torna-se evidente, se for considerado que o modelo de alto Reynolds foi calibrado para reproduzir escoamentos simples na região afastada da parede. Assim as funções f_μ, f_1 e f_2 deveriam tender para um na região afastada da parede e as constantes não deveriam ser diferentes daquelas adotadas no modelo de alto Reynolds. A definição de constantes diferentes daquelas originalmente proposta pode fazer com que o modelo tenha dificuldades na região afastada da parede em escoamentos simples. A análise da Tabela 3.3 mostra que este é o caso do modelo

Modelo	**LS**	**SA**	**YS**	**MKM**	**LB**
σ_κ	1,00	1,00	1,00	1,40	1,00
σ_ε	1,30	1,45	1,30	1,30	1,30
C_1	1,44	1,50	1,44	1,40	1,44
C_2	1,92	1,83	1,92	1,80	1,92
C_μ	0,090	0,096	0,090	0,090	0,090

Tabela 3.3 - Constantes dos modelos selecionados

SA (Sakar & So, 1997) e do modelo MKM (Chen et al., 1998).

Muita atenção hoje é dada ao comportamento limite na parede das tensões de turbulência e dos termos das equações de transporte de energia cinética e de sua taxa de dissipação (Mansour et al., 1988; Lai & So, 1990; Rodi & Mansour, 1993; Yang & Shih, 1993; Chen et al. 1998; Bredberg et al. 2002). A satisfação das formas limites é vista como um importante critério de avaliação dos modelos que se propõem a resolver a região da parede. A consistência assintótica dos modelos é verificada pelo comportamento limite na parede de cada termo da equação modelada em relação ao respectivo termo da equação exata.

A equação exata da energia cinética turbulenta é, para estudo do comportamento limite dos termos, comumente escrita como:

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\upsilon \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right) + \left(-\overline{u_i' u_j'}\, \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right) + \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j' u_i' u_i'}\right) + \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i' p'}\right) - \varepsilon \tag{3.20}$$

ou simbolicamente $C_k = D_\mu + P_k + T_k + \pi_k - \varepsilon$, onde C_k é o termo de variação, D_μ a difusão viscosa, P_k a produção, T_k o transporte turbulento e π_k a difusão de pressão ou o gradiente de pressão.

Assumindo-se as expansões de u_i', na região da parede, como (Lai & So, 1990):

$$u' = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots\ ;\quad v' = b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots\ ;\quad w' = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + .. \tag{3.21}$$

onde a coordenada y é suposta ser normal a parede e os coeficientes a_i, b_i e c_i são funções de x, z, e do tempo, mas não de y, pode-se obter o comportamento assintótico de κ e ε:

$$\kappa = \frac{1}{2}\left(\overline{a_1 a_1} + \overline{c_1 c_1}\right) y^2 + \left(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}\right) y^3 + O(y^4) \tag{3.22}$$

$$\varepsilon = \upsilon\left(\overline{a_1 a_1} + \overline{c_1 c_1}\right) + 4\upsilon\left(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}\right) y + O(y^2) \tag{3.23}$$

Os dados acima mostram também que $\overline{u} \approx y$ e $\overline{v} \approx y^2$. Portanto o comportamento limite dos vários termos, a exceção de π_k, pode agora ser avaliado, inferindo-se o comportamento de π_k ($\pi_k = C_k - D_\mu - P_k - T_k + \varepsilon$). A expansão acima permite mostrar que C_k, P_k e T_k tendem para zero na parede pelo menos como y^3 e D_μ e ε comportam-se como y^0. Como:

$$D_\mu)_w = [\frac{\partial}{\partial y}(\upsilon \frac{\partial \kappa}{\partial y})]_w = \upsilon\,(\overline{a_1 a_1} + \overline{c_1 c_1}) + 6\upsilon\,(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2})y + O(y^2) \tag{3.24}$$

a equação só estará balanceada no limite da parede, quando

$$\pi_\kappa = 2\upsilon\,(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2})y + O(y^2) \tag{3.25}$$

Consequentemente, o modelo de baixo número de Reynolds não pode desprezar o termo de gradiente de pressão no limite da parede. De um modo geral, a equação modelada da energia cinética turbulenta, eq. (3.10), é semelhante para todos os modelos de baixo Reynolds. Nesta equação, o termo de variação (C_k) e o de produção (P_k) continuam tendendo para zero na parede como y^3. Porém os termos π_k e T_k são modelados conjuntamente ($D_K = \pi_k + T_k$), como uma difusão turbulenta, por uma hipótese de transporte via gradiente, a qual comporta-se como y^3. Deste modo, supondo-se que o comportamento de ε seja exato e uma vez que D_μ é exato, verifica-se que a equação de κ não está balanceada no limite da parede. Há necessidade de se introduzir um termo de correção, para a referida região, que comporte-se, no limite da parede, como π_k na eq. (3.25).

É interessante notar que, na forma limite do termo π_k, aparece explicitamente a viscosidade molecular, enquanto esta não se faz presente na equação de Poisson para a flutuação de pressão. Este fato é invocado por alguns modelos como justificativa para negligenciar o supra citado termo ou não introduzir a viscosidade nos modelos que visam reproduzir o termo π_k na região da parede (Chen et al., 1998). Contudo, a presença dos componentes do tensor de tensão de Reynolds na equação de Poisson faz com que a viscosidade esteja implicitamente influenciando as flutuações de pressão. É portanto natural e perfeitamente justificável a presença da viscosidade na forma limite do termo do gradiente de pressão, devendo consequentemente estar presente nos modelos do referido termo.

Os resultados da simulação direta dos escoamentos turbulentos em canal, realizado por Kim et al. (1987), por exemplo, confirmam de fato que a difusão de pressão é negligenciável face aos valores individuais da dissipação e da difusão viscosa, como freqüentemente assumido (Hanjalic, 1994). Contudo, verificou-se que, na região da parede (y^+<20), existe uma acentuada diferença entre os dados da simulação direta e os resultados do modelo de transporte por gradiente, adotado para $\pi_k + T_k$ (Mansour et al., 1988). Já Le et at. (1997) realizaram a simulação direta do escoamento turbulento em degrau ("*backstep*"). Os resultados, para a região do canal antes do degrau, também mostram um gradiente de pressão desprezível, face os níveis da dissipação e da difusão viscosa, enquanto na região de recirculação π_k torna-se significativo em comparação aos mesmos termos. O desbalanceamento da dissipação e da difusão viscosa é significante na região de separação dos escoamentos turbulentos complexos, fazendo crescer a importância da modelagem do termo do gradiente de pressão nesses escoamentos.

Deste modo, pode-se verificar prontamente que o procedimento usual de agrupar os termos do gradiente de pressão e de transporte turbulento, modelando-os com a simples hipótese de transporte por gradiente, não reproduz corretamente o comportamento de π_k, na região próxima a parede. Os resultados das simulações numéricas diretas tem mostrado que este modelo é eficiente no núcleo turbulento, mas também revelam que, nas regiões de recirculação, o gradiente de pressão torna-se importante no balanço da equação da energia cinética turbulenta e o modelo torna-se ineficiente. O aumento nas flutuações de pressão, na região da recirculação, é devido ao movimento das estruturas de vórtices da camada de cisalhamento, sendo que, neste caso, o seu máximo ocorre afastado da parede. Há um significativo aumento das flutuações de pressão na região afastada da parede. Em regiões de recirculação, as tensões cisalhantes de Reynolds e seus gradientes são grandes fora da parede e, assim, as maiores flutuações de pressão ocorrem no interior da camada de cisalhamento (Na & Moin, 1998).

Já a equação exata da taxa de dissipação ε é normalmente escrita como:

$$\frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{Dt}} = C_\varepsilon = P_\varepsilon - \Phi_\varepsilon - D_\varepsilon + D_{\mu\varepsilon} \tag{3.26}$$

onde P_ε, Φ_ε, D_ε e $D_{\mu\varepsilon}$ são respectivamente, os termos de produção, destruição, difusão turbulenta e difusão viscosa, dados por

$$P_\varepsilon = 2\upsilon\Big[-\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \tag{3.27}$$

$$-\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_r}\frac{\partial u'_k}{\partial x_r}} - \overline{u'_k\frac{\partial u'_j}{\partial x_m}\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_m}}\Big]$$

$$\Phi_\varepsilon = 2\upsilon^2\,\overline{\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_m}\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_m}} \tag{3.28}$$

$$D_\varepsilon = \pi_\varepsilon + T_\varepsilon = \upsilon\,\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m}\frac{\partial u'_k}{\partial x_m}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u'_k\frac{\partial u'_j}{\partial x_m}\frac{\partial u'_j}{\partial x_m}}\right) \tag{3.29}$$

$$D_{\varepsilon\mu} = \upsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \tag{3.30}$$

O termo de difusão turbulenta engloba os termos de transporte turbulento e difusão de pressão da equação da taxa de dissipação. Novamente, utilizando-se as expressões de u'_i, eq. (3.21), tem-se que $C_\varepsilon = O(y^1)$, $\Phi_\varepsilon = O(y^0)$, $P_\varepsilon = O(y^1)$, $D_\varepsilon = O(y^0)$ e $D_{\varepsilon\mu} = O(y^0)$.

O balanço da equação da taxa de dissipação, no limite de parede, para o caso de um escoamento turbulento completamente desenvolvido reduz-se a (Speziale et al., 1992):

$$\upsilon\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2} = \Phi_\varepsilon + D_\varepsilon \tag{3.31}$$

Esta expressão mostra prontamente que o balanço dos termos da equação exata de ε, no limite de parede, é predominantemente realizado pela difusão viscosa, pela difusão turbulenta de ε e pelo termo de destruição da taxa de dissipação, sendo que os dois últimos envolvem correlações de alta ordem. Como o termo de difusão viscosa é um termo exato, não necessitando, portanto, ser modelado, a modelagem do comportamento assintótico do termo de difusão turbulenta e, principalmente, do termo de destruição torna-se fundamental, para o perfeito balanceamento da equação de ε no limite da parede.

O termo de difusão turbulenta de ε, que mais uma vez engloba dois termos, é também modelado pela hipótese de transporte por gradiente

$$D_\varepsilon = [\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\upsilon_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y})] \tag{3.32}$$

Este modelo não é assintoticamente correto, pois o termo exato é $D_\varepsilon = O\ (y^0)$ no limite da parede, enquanto o modelo é $O\ (y^2)$. Contudo, a análise dos trabalhos de Mansour et al. (1988) e Rodi & Mansour (1993) mostra que, embora o modelo não reproduza o comportamento do termo exato para $y^+<20$, o termo é desprezível face ao termo de destruição e de difusão viscosa. O termo de difusão turbulenta é uma ordem de grandeza menor que os principais termos no limite da parede.

Esta observação indica que o balanceamento do termo exato de difusão viscosa da taxa de dissipação, no limite da parede, está todo apoiado no comportamento assintótico do modelo do termo de destruição (eq. 3.28). Cabe destacar que, dentro da estrutura do modelo κ-ε, o incorreto comportamento limite da taxa de dissipação irá desbalancear a equação da energia cinética turbulenta no limite da parede, devido ao balanço de κ nessa região ser diretamente dependente do comportamento de ε, como já foi visto. Além disso, há a possibilidade deste comportamento criar dificuldades numéricas na região da parede.

Análise do comportamento assintótico do termo de destruição modelado

$$\Phi_\varepsilon = C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \tag{3.33}$$

mostra que, sem considerar a função de amortecimento f_2, o termo é, no limite de parede, $O(y^{-2})$. Como o comportamento do termo exato de destruição é $O(1)$, é necessário que a função f_2 tenha um comportamento assintótico $O(y^2)$. A análise da Tabela 3.2 mostra que, em todos os modelos, a f_2 não tem o comportamento desejado (LS=SA=YS=MKM=$O(y^0)$ e LB=$O(y^8)$). Entretanto, os modelos LS e SA ao definirem o termo de destruição como

$$\Phi_\varepsilon = C_2 f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}\varepsilon}{\kappa} \tag{3.34}$$

substituindo ε^2 por $\varepsilon\tilde{\varepsilon}$ e fazendo f_2=1, garantem o correto comportamento assintótico do termo modelado de destruição. A definição de $\tilde{\varepsilon}$ também garante que o modelo de alto Reynolds seja alcançado no regime completamente turbulento ($\tilde{\varepsilon} \approx \varepsilon$ para $y^+ > 60$) (Patel et al., 1985). Entretanto, $\tilde{\varepsilon}$ tem uma maior taxa de crescimento na região da parede, tornando a solução numérica mais difícil. Há necessidade de maior refinamento da malha comparativamente a taxa de dissipação original ε. A pseudo-dissipação deverá, partindo de zero, alcançar o valor de ε em $y^+ \approx 60$. Este problema, somado a forma arbitrária como algumas pseudo-dissipações foram introduzidas nas equações, fez com que a sua inclusão fosse apontada como uma das grandes deficiências dos modelos de baixo número de Reynolds que a utilizam (Yang & Shih, 1993).

No limite da parede, através da expansão de *u'* e *v'*, sabe-se que $\overline{u' v'}$ comporta-se como $O(y^3)$. Assim, da relação

$$\overline{u' v'} = \upsilon_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right) \tag{3.35}$$

verifica-se prontamente que υ_t deve ter um comportamento assintótico do tipo $O(y^3)$. Em conseqüência das diferentes definições de escala de tempo e da viscosidade turbulenta nos modelos de baixo número de Reynolds, eq. (3.15), não há um comportamento limite padrão que deva ser atribuído as funções de amortecimento f_μ, para que a viscosidade turbulenta tenha o correto comportamento assintótico. No caso dos modelos que utilizam a relação (κ/ε) como escala de tempo, o comportamento assintótico da relação κ^2/ε é $O(y^4)$, indicando que a função de amortecimento teria que se comportar assintoticamente como $O(y^{-1})$. Este é o caso dos modelos SA, MKM e LB. A análise da Tabela 3.2 mostra que o comportamento assintótico da função de amortecimento do modelo SA é $O(y^2)$. Já o comportamento do modelo MKM é $O(y^1)$, enquanto o modelo LB tem um comportamento do tipo $O(y^4)$. Deste modo, verifica-se facilmente que nenhum dos três modelos é capaz de representar o correto comportamento da viscosidade turbulenta no limite da parede e consequentemente o comportamento da tensão de turbulência ($\overline{u'\,v'}$).

Nos modelos que utilizam a pseudo-dissipação, $\tilde{\varepsilon}$, e definem a escala de tempo como ($\kappa/\tilde{\varepsilon}$), o comportamento assintótico da relação $\kappa^2/\tilde{\varepsilon}$ é $O(y^2)$. Neste caso, f_μ deve ter um comportamento assintótico $O(y)$. Contudo, a função de amortecimento no modelo LS comporta-se assintoticamente como $O(y^0)$. Novamente, verifica-se que o modelo não representa corretamente o comportamento da viscosidade turbulenta no limite da parede.

O modelo YS define a escala de tempo como $(\kappa/\varepsilon)+(\nu/\varepsilon)^{1/2}$, a qual tem um comportamento assintótico do tipo $O(y^0)$. Como o comportamento da relação $\kappa/(\varepsilon)^{1/2}$ é do tipo $O(y^2)$, a função de amortecimento deveria comporta-se como $O(y)$, a fim de satisfazer o correto comportamento assintótico da viscosidade turbulenta. A análise da função de amortecimento do modelo mostra que esse é exatamente o comportamento da função proposta. Consequentemente, o modelo YS é o único dos modelos selecionados que reproduz o comportamento assintótico correto da viscosidade turbulenta e da tensão turbulenta.

De modo resumido, pode-se dizer que a viscosidade turbulenta, que deveria ter um comportamento assintótico $O(y^3)$, no modelo LS é $O(y^2)$, no modelo SA é $O(y^6)$, no modelo YS é $O(y^3)$, no modelo MKM é $O(y^5)$ e no modelo LB é $O(y^8)$.

De posse do comportamento assintótico da viscosidade turbulenta dos diferentes modelos, pode-se, agora, fazer a análise do comportamento limite do termo de produção modelado, face ao respectivo termo exato. Enquanto este último comporta-se assintoticamente como $O(y)$ (Speziale et al., 1993), a forma limite dos modelos é, mais uma vez, função das diferentes definições dos modelos, tais como a função de amortecimento f_1 e a escala de tempo.

De um modo geral, o termo modelado da produção da dissipação pode ser escrito como:

$$P_\varepsilon = C_1 f_1 \frac{1}{T_t} \upsilon_t \, (2\, S_{ij}\, S_{ij}) \tag{3.36}$$

onde S_{ij} é o tensor deformação médio (eq. 3.14) e $S_{ij}\,S_{ij}$ tem um comportamento, no limite da parede, do tipo $O(y^0)$.

Na Tabela 3.4, está condensado o comportamento assintótico da escala de tempo, da viscosidade turbulenta e da função de amortecimento de cada um dos modelos, deduzindo-se, a seguir, o comportamento limite do respectivo termo modelado da produção da dissipação. A análise dessa tabela mostra que nenhum dos modelos escolhidos reproduz corretamente o comportamento assintótico do termo de produção exato. Verifica-se ainda que a função f_1 aumenta efetivamente a produção da dissipação na região da parede, no modelo LB, diminuindo o pico de energia cinética.

Modelo	T_t	υ_t	f_1	P_ε
LS	$O(y^0)$	$O(y^2)$	$O(y^0)$	$O(y^2)$
SA	$O(y^2)$	$O(y^6)$	$O(y^0)$	$O(y^4)$
YS	$O(y^0)$	$O(y^3)$	$O(y^0)$	$O(y^3)$
MKM	$O(y^2)$	$O(y^5)$	$O(y^0)$	$O(y^3)$
LB	$O(y^2)$	$O(y^8)$	$O(y^{-12})$	$O(y^{-6})$

Tabela 3.4 - Comportamento assintótico dos termos de produção modelados

Alguns modelos de baixo número de Reynolds adicionam um termo empírico ξ na equação de ε, a fim de aumentar a produção da dissipação na região da parede (Rodi & Mansour, 1993). Normalmente os modelos que fazem uso deste termo extra tomam a função de amortecimento f_1 como 1,0. Neste trabalho, este é o caso dos modelos LS, SA e YS. A expressão de ξ no modelo LS também tem um comportamento assintótico $O(y^2)$, enquanto no modelo YS comporta-se como $O(y^3)$. Deste modo, verifica-se que, em ambos os modelos, embora a produção da dissipação seja aumentada, o comportamento assintótico do termo exato não é reproduzido.

A análise da expressão do termo extra ξ do modelo SA é mais difícil, uma vez que esta expressão envolve um balanço entre produção e destruição da taxa de dissipação. O estudo do comportamento assintótico mostra até ser possível o termo aumentar a destruição da dissipação no limite da parede. Comportamento este contrário ao da tendência geral dos modelos de aumentar a produção nessa região (Rodi & Mansour, 1993; Patel et al. 1985).

Outro problema da equação da taxa de dissipação é a falta de uma condição de contorno natural na parede. Uma das condições de contorno de ε comumente utilizadas em superfícies sólidas é:

$$\varepsilon_w = \left(\upsilon \, \frac{\partial^2 \kappa}{\partial y^2} \right)_w \tag{3.37}$$

Esta condição é conseqüência rigorosa da equação de transporte exata da energia cinética turbulenta. Contudo, para implementá-la, necessita-se de informações sobre a derivada segunda de κ na parede, o que pode introduzir consideráveis dificuldades numéricas. Alguns trabalhos, a fim de reduzir as dificuldades numéricas, reduzem a ordem da derivada, ao propor, como condição de contorno de ε, a expressão alternativa:

$$\varepsilon_w = 2\,\upsilon \left(\frac{\partial \sqrt{\kappa}}{\partial y} \right)_w^2 \tag{3.38}$$

Entretanto, mesmo esta condição pode introduzir dificuldades numéricas na solução, desde que também envolve parte da solução do sistema acoplado de equações diferenciais.

Outra forma alternativa, que algumas vezes tem sido utilizada na literatura como condição de contorno da equação da taxa de dissipação, é

$$\varepsilon_w = \frac{4\,\upsilon\,\kappa}{y_1^2} - \varepsilon_1 \tag{3.39}$$

onde o número 1 indica primeiro ponto interno da malha (Sakar & So, 1997; Chen et al., 1998).

A condição de contorno de Neumann

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \tag{3.40}$$

devido as suas vantagens numérica, tem também algumas vezes sido proposta na literatura. Entretanto esta condição é completamente desprovida de amparo teórico e experimental. O estudo assintótico da taxa da dissipação mostra que a derivada de ε só será nula se a parcela linear for desprezada (eq. 3.23). Afirmar a priori que o coeficiente da parcela linear é desprezível não encontra sustentação em qualquer argumento teórico/experimental. Resultados de simulações numéricas direta de escoamento em canal têm indicado que (Speziale et al., 1993):

$$\frac{\partial \varepsilon^{+}}{\partial y^{+}} = -\,0{,}25\,\varepsilon_{w}^{+} \tag{3.41}$$

Portanto, o uso da condição de contorno de Neumann pode introduzir consideráveis erros na solução da equação da taxa de dissipação e consequentemente comprometer toda a solução do escoamento.

De todo o estudo das equações de transporte modeladas dos modelos κ-ε para baixos números de Reynolds foi possível se verificar a dificuldade não só de estabelecer as correções para a região próxima a parede, como determinar a condição de contorno mais apropriada para a equação da taxa de dissipação.

Na equação da energia cinética foi visto que o procedimento usual de adicionar os termos do gradiente de pressão e de transporte turbulento é eficiente no núcleo turbulento, mas não reproduz corretamente o comportamento do termo do gradiente de pressão exato (π_κ), no limite da parede.

Consequentemente, mostrou-se que, mesmo que a taxa de dissipação tivesse um comportamento assintótico exato, a equação de κ não estaria balanceada no limite da parede. É necessário introduzir um modelo computacionalmente eficiente e assintoticamente correto para π_κ na região da subcamada viscosa, de modo que o balanço da equação da energia cinética seja fechado. Chen et al. (1998) afirmam que as dificuldades dos modelos κ-ε de baixo número de Reynolds deve-se a pobre modelagem de π_κ na região da subcamada viscosa. Contudo, não se pode esquecer que o balanço da equação de κ é fortemente dependente do comportamento da taxa de dissipação. E como foi possível ser visto, na equação da taxa de dissipação dos diferentes modelos, há sérias inconsistências na região da parede.

O uso de pseudo-dissipações, funções de amortecimento assintoticamente incorretas e algumas dependentes de y^{+}, constantes diferentes daquelas estabelecidas para escoamentos simples em alto números de Reynolds, termos fontes extras sem base física e condições de contorno artificiais são os principais problemas presentes nas equações da taxa de dissipação (ε) dos modelos κ-ε de baixo número de Reynolds.

3.3.
Modelo κ-ε Não Lineares

Como já foi supra citado, a mais difundida hipótese de fechamento da turbulência é aquela que liga linearmente o tensor de Reynolds à taxa de deformação média local. A popularidade dos modelos de viscosidade turbulenta linear (Boussinesq) está apoiada na facilidade da incorporação aos códigos de solução das equações de Navier-Stokes existentes e na sua capacidade de predição de escoamentos turbulentos cisalhantes simples, tais como camadas limite turbulentas com fracos gradientes de pressão, onde somente um componente de tensão de Reynolds é dinamicamente significativo. Contudo, escoamentos de interesse prático de engenharia exibem mecanismos complexos de deformação média, tais como gradientes de pressão longitudinais, separação, curvatura de linhas de corrente e rotação ("*swirl*"). Características estas que são, por sua vez, sensíveis a estrutura da turbulência, especialmente anisotropia, bem como efeitos de história (Apsley & Leschziner, 1998).

Há poucos anos atrás, o menor nível de fechamento de turbulência que era capaz de resolver tanto a anisotropia como os efeitos da história da turbulência, com algum grau de rigor, era o fechamento de segunda ordem. Resolvia-se equações de transporte para cada componente de tensão de Reynolds individualmente. Entretanto, para cálculos gerais 3D, tais modelos diferenciais de tensão são computacionalmente caros, freqüentemente instáveis, e contém muitos termos que requerem modelagem (Martins, 1994). Uma alternativa, que surgiu ao final da última década de oitenta, tem recebido uma crescente atenção e tem se mostrado muito promissora, é o desenvolvimento dos modelos de viscosidade turbulenta não lineares de alto e baixo número de Reynolds. O objetivo desse desenvolvimento é considerar corretamente os efeitos de complexas deformações (Speziale, 1987; Shih et al., 1993; Gatski & Speziale, 1993; Mompean et al., 1996; Craft et al., 1997; Mompean, 1998; Apsley & Leschziner, 1998).

Na verdade, os fundamentos da modelagem da viscosidade turbulenta não linear foram propostos por Pope em 1975 (Mompean et al., 1996; Apsley & Leschziner, 1998). Speziale (1987) foi então capaz de obter uma relação constitutiva não linear para a tensão turbulenta, ao impor invariância de forma, para a mudança de uma estrutura de referência arbitrária, no limite de turbulência bidimensional (Mompean et al., 1996). Posteriormente, um conjunto de relações constitutivas similares foi obtido (Gatski & Speziale, 1993).

A avaliação dos termos da equação da vorticidade média axial, componente do vetor vorticidade alinhado com a direção do escoamento principal, em um escoamento turbulento em duto de seção quadrada, tem mostrado que três termos estão envolvidos na geração da vorticidade, nominalmente gradiente da diferença das tensões normais transversais ($\overline{v' v'}$ e $\overline{w' w'}$), diferença dos gradientes da tensão cisalhante $\overline{v' w'}$ e o termo da dissipação da vorticidade ou difusão viscosa da vorticidade (Mompean, 1998; Gavrilakis, 1992). Ênfase é usualmente colocada sobre a anisotropia das tensões normais, mas os outros termos são igualmente importantes (Mompean et al., 1996). Achar, portanto, a correta modelagem de todos estes termos é fundamental para uma perfeita predição do referido escoamento. A análise do comportamento destes termos mostra que os seus máximos ocorrem próximo a parede das quinas, onde a influência da viscosidade molecular não pode ser negligenciada (Mompean et al, 1996).

É consequentemente muito provável que predições precisas dos escoamentos secundários na vizinhança das quinas não possam ser encontradas sem a extensão dos modelos de alto número de Reynolds, para incluir efeitos viscosos essenciais. Talvez, por isso, os modelos não lineares para altos números de Reynolds subestimem a magnitude dos escoamentos secundários em dutos quadráticos (Mompean et al., 1996).

Essa observação e o fato das deformações complexas freqüentemente coincidirem com fronteiras complexas, onde as funções de parede tornam-se inadequadas, motivaram o desenvolvimento dos modelos não lineares de baixo número de Reynolds. Uma abordagem comum tem sido simplesmente multiplicar os termos não lineares por uma função de amortecimento f_μ (Mompean, 1998). Contudo, isto ignora os diferentes comportamentos das tensões individuais. Por exemplo, $\overline{v'^2}/\kappa$ anula-se , quando no limite da parede, enquanto $\overline{u'^2}/\kappa$ e $\overline{w'^2}/\kappa$ tendem para valores diferentes de zero (Apsley & Leschziner, 1998).

Face a gama de possibilidades abertas pela relação constitutiva geral, entre a tensão de Reynolds e a deformação média em escoamentos incompressíveis, proposta por Pope (1975), o tensor anisotrópico tem sido definido até termos que são cúbico nos gradientes de velocidade média (Apsley & Leschziner, 1998). Se somente a parte linear da relação for utilizada, recupera-se o modelo κ-ε linear convencional, enquanto os modelos de Speziale (1987), de Rubinstein & Barton (1990), e o modelo da Shih et al. (1993, 1995) empregam termos que são quadráticos nos gradientes de velocidade média. Já o modelo de Lien et al. (1996), Craft et al. (1997) e Apsley & Leschziner (1998) são exemplos de modelos que empregam termos que são cúbicos nos gradientes de velocidade média.

Utilizando-se a definição do tensor anisotrópico com os termos que são quadráticos na velocidade média em escoamentos cisalhantes simples, onde somente $\partial \overline{u} / \partial y$ é diferente de zero, é fácil mostrar que os termos quadráticos são responsáveis pela anisotropia das tensões normais (Apsley & Leschziner, 1998). Sem estes termos, neste escoamento, todas as tensões normais seriam isotrópicas $(= 2/3\,\kappa)$, contrariando resultados experimentais. Speziale (1987) demonstrou que a anisotropia das tensões normais é necessária para o desenvolvimento dos escoamentos secundários em dutos não circulares. Sendo, portanto, a inclusão dos termos quadráticos uma condição necessária para produzir tais escoamentos secundários. Verifica-se, ainda desta análise, que os termos quadráticos não são importantes no estabelecimento das tensões cisalhantes (Apsley & Leschziner, 1998).

Já os efeitos de curvatura das linhas de corrente e o efeito de rotação ("*swirl*") são incorporados aos modelos não lineares com a inclusão dos termos cúbicos nos gradientes de velocidade média (Apsley & Leschziner, 1998).

Resumidamente, pode-se dizer que a adição de termos não lineares na relação constitutiva tensão-deformação pode representar a resposta da turbulência a certas deformações complexas, enquanto o modelo permanece dentro da estrutura de uma ou duas equações. Para considerar a anisotropia das tensões normais, a relação não linear tensão-deformação deve ser ao menos quadrática nos produtos dos gradientes da velocidade média, enquanto o tratamento da curvatura das linhas de corrente exigem termos cúbicos.

Neste trabalho empregou-se somente o modelo proposto por Speziale (1987) na predição de escoamentos complexos. Speziale obteve um modelo κ-ε não linear para alto número de Reynolds, que satisfaz o princípio de indiferença da estrutura de referência. Sua abordagem é baseada na similaridade entre o escoamento turbulento médio de um fluido Newtoniano e o escoamento laminar do fluido viscoelástico, como sugerido por Rivlin (Mompean, 1998). O modelo não linear, proposto por Speziale, incorpora termos que são quadráticos nos gradientes de velocidade média. Consequentemente, uma melhor modelagem das tensões normais é obtida e os escoamentos turbulentos, onde estas tensões desempenham papel importante, como em dutos não circulares, são melhor preditos.

Speziale (1987) definiu a relação constitutiva não linear da tensão de Reynolds-deformação média como sendo:

$$-\overline{u_i' u_j'} = -\frac{2}{3}\kappa\ \delta_{ij} + 2\,C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} S_{ij} + \\ +4\,C_D\ C_\mu^{\ 2}\frac{\kappa^3}{\varepsilon^2}\left[S_{ij}^o - \frac{1}{3}S_{kk}^o\,\delta_{ij} + S_{ik}\,S_{kj} - \frac{1}{3}S_{kl}\,S_{kl}\,\delta_{ij}\right] \tag{3.42}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) \tag{3.43}$$

$$S_{ij}^o = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} S_{ik} \tag{3.44}$$

onde S_{ij} é o tensor deformação médio (eq. 3.43), C_μ=0,09 e S_{ij}^o é a derivada de Oldroyd de S_{ij}. A constante C_D foi ajustada por Speziale (1987), para escoamento turbulento em canal com Reynolds de 30.800. Dos dados experimentais, obteve-se C_D= 1,68.

De posse dessa relação constitutiva não linear, proposta por Speziale, o fechamento do problema da turbulência é realizado com as equações de transporte de energia cinética turbulenta (eq. 3.3) e de sua taxa de dissipação (eq. 3.4), para altos números de Reynolds.

Mompean (1998), baseando-se na observação que o máximo dos termos de anisotropia ocorre próximo as paredes da quina, no escoamento em duto quadrado, propõe estender o modelo de Speziale a condição de baixo número de Reynolds. Para poder integrar o modelo até as paredes, Mompean propõe manter os termos da difusão molecular nas equações de κ e ε, além de empregar a função de amortecimento f_μ nos termos linear e não linear da relação constitutiva proposta por Speziale. Desta forma, o modelo de Speziale, estendido até as parede, foi definido pelas seguintes equações de governo (Mompean, 1998):

$$-\overline{u'_i\, u'_j} = -\frac{2}{3}\kappa\, \rho\, \delta_{ij} + 2\, \upsilon_t\, S_{ij} + \\ + 4\, C_D\, \frac{\upsilon_t^2}{\kappa}\left[S_{ij}^o - \frac{1}{3} S_{kk}^o\, \delta_{ij} + S_{ik}\, S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl}\, S_{kl}\, \delta_{ij} \right] \tag{3.45}$$

$$\upsilon_t = C_\mu f_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\, \kappa\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right] + P_\kappa - \varepsilon \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\, \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_1 \frac{\varepsilon}{\kappa} P_\kappa - C_2 \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \tag{3.48}$$

$$P_\kappa = -\overline{u'_i\, u'_j}\, \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \tag{3.49}$$

$$f_\mu = [1 - \mathbf{exp}(-A^+\, y^+)]\,[1 - \mathbf{exp}(-A^+\, z^+] \tag{3.50}$$

$$y^+ = \frac{u_\tau\, y}{\upsilon} \quad ; \quad z^+ = \frac{u_\tau\, z}{\upsilon} \quad ; \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{3.51}$$

onde as constantes empíricas foram definidas como A^+=0,008; C_1=1,44; C_2=1,92; C_D=1,68; σ_κ=1,0; σ_ε =1,3 e C_μ=0,09.

O modelo de Speziale (1987), tanto na forma original de alto número de Reynolds, como na forma modificada por Mompean (1998) para baixo número de Reynolds, foi utilizado na predição de escoamentos complexos. Todo o estudo do seu comportamento computacional e capacidade de predição faz parte do Capítulo 6.

3.4.
Modelos de Turbulência RNG

Ao final dos anos 80 e início da década passada, Yakhot & Orszag (Yakhot & Orszag, 1986; Karniadakis et al., 1989; Yakhot et al., 1992; Orszag et el., 1993) propuseram uma série de modelos de turbulência, os chamados modelos de turbulência RNG, obtidos a partir da teoria do grupo de renormalização (RNG). Eles usaram a técnica RNG para desenvolver uma teoria para as grandes escalas, na qual os efeitos das pequenas escalas são representados por coeficientes de transporte modificados (Smith & Reynolds, 1992). O efeito das grandes escalas sobre os turbilhões no intervalo inercial é representado por uma força aleatória, escolhida para produzir a forma correta do espectro de energia no referido intervalo, quando contraposta aos efeitos da viscosidade modificada. A força é assumida gaussiana, ruído branco no tempo, isotrópica no espaço, e homogênea no tempo. Yakhot & Orszag assumem que as estatísticas do intervalo inercial da turbulência isotrópica, descritas por este balanço entre a força e a viscosidade modificada, é representativa da turbulência sustentada por instabilidades hidrodinâmicas no intervalo inercial.

As equações dinâmicas, para as maiores escalas, são obtidas pela remoção de uma banda infinitesimal das menores escalas. Este procedimento rende modificações infinitesimais nas equações remanescentes. O processo é então repetido e as correções acumuladas produzem variações finitas. Somente uma parcela das modificações são retidas, incorporando-as a viscosidade. Os autores alegam que as outras modificações não são importantes para a dinâmica das grandes escalas. A cada estágio, a eliminação da banda infinitesimal é realizada em termos da força especificada e dos turbilhões retidos. Contudo este processo somente pode ser considerado correto se o número de Reynolds dos turbilhões removidos, baseados na viscosidade modificada, for pequeno (Smith & Reynolds, 1992).

Todo estudo da técnica desenvolvida pelos autores (Yakhot & Orszag, 1986; Karniadakis et al., 1989; Yakhot et al., 1992; Orszag et el., 1993) consta do Apêndice C. A seguir são apresentados resumidamente os modelos de turbulência obtidos com o chamado método do grupo de renormalização.

3.4.1. Modelo Algébrico RNG de Viscosidade Turbulenta

Este é o modelo mais simples, contudo ele não é muito geral, pois requer um conhecimento a priori do comprimento de escala integral característico. Deste modo necessita-se fazer uma hipótese adicional, baseada em considerações físicas, sendo esta a grande limitação do modelo. A viscosidade efetiva renormalizada υ_{er} é obtida da seguinte relação (Karniadakis et al., 1989):

$$\upsilon_{er} = \upsilon \left[1 + H\left(\frac{a\varepsilon}{(2\pi)^4 \upsilon^3} \Delta^4 - C \right) \right]^{1/3} \tag{3.52}$$

onde $H(x)=x$ para $x \geq 0$ e $H(x)=0$ se $x < 0$. Δ é o comprimento de escala integral de turbulência no intervalo inercial (Karniadakis et al., 1989). As constantes são $a = 0{,}12$ e $C=75$. A taxa de dissipação média é obtida através do campo resolvido por:

$$\varepsilon = \frac{\upsilon}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \tag{3.53}$$

A viscosidade efetiva renormalizada é então obtida, resolvendo-se simplesmente a equação algébrica cúbica em cada ponto nodal (Karniadakis et al., 1989).

3.4.2. Modelo κ-ε RNG Para Alto Re

O primeiro modelo κ-ε RNG para alto Reynolds foi proposto por Yakhot & Orszag (1986). Este modelo tinha, de um modo geral, a mesma forma do modelo κ-ε tradicional, exceto o valor das constantes. A viscosidade turbulenta, para o caso de alto número de Reynolds, foi obtida a partir da eq. (C.53), a qual é transcrita abaixo:

$$\upsilon_{er}(\ell) = \upsilon \left[1 + \frac{3}{4} \frac{A_\ell \varepsilon}{\upsilon^3} \left(\ell^4 - \ell_d^4 \right) \right]^{1/3} \tag{3.54}$$

Para alto número de Reynolds, tem-se que $L >>> \ell_d$. Logo:

$$\upsilon_{er}(L) = \upsilon\left[1 + \frac{3}{4}\frac{A_\ell\,\varepsilon}{\upsilon^3}\,L^4\right]^{1/3} \tag{3.55}$$

mas,

$$\frac{3}{4}\frac{A_\ell\varepsilon}{\upsilon^3}\left(L^4\right) >>> 1 \qquad \left(R_e \to \infty\right) \tag{3.56}$$

Assim:

$$\upsilon_{er}(L) = \upsilon\left[\frac{3}{4}\frac{A_\ell\,\varepsilon}{\upsilon^3}L^4\right]^{1/3} = \left(\frac{3}{4}A_\ell\right)^{1/3}\varepsilon^{1/3}L^{4/3} \tag{3.57}$$

Da lei de Kolmogorov, a energia cinética total do intervalo isotrópico inercial, para escalas menores que L, é dada por (Yakhot & Orszag, 1986; Orszag et al., 1993):

$$\kappa = 0{,}71\,\varepsilon^{2/3}\,L^{2/3} \tag{3.58}$$

Retirando-se o valor de L e introduzindo-se na eq. (3.57), obtém-se:

$$\upsilon_{er}(L) = \left(\frac{3}{4}A_\ell\right)^{1/3}\frac{\varepsilon^{1/3}\kappa^2}{(0{,}71)^2\,\varepsilon^{4/3}} = \left(\frac{3}{4}A_\ell\right)^{1/3}\frac{1}{(0{,}71)^2}\frac{\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.59}$$

ou:

$$\upsilon_{er} = C_\mu\,\frac{\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.60}$$

onde (Orszag et al., 1993):

$$C_\mu = \left(\frac{3}{4}A_\ell\right)^{1/3}\frac{1}{(0{,}71)^2} = 0{,}0845 \tag{3.61}$$

Cabe, agora, obter as equações da energia cinética turbulenta (κ) e de sua taxa de dissipação (ε). Contudo, estas equações não são trivialmente relacionadas as equações de Navier-Stokes renormalizadas. Em conseqüência as equações de κ e ε instantâneas são obtidas das equações do modelo adotado (Navier-Stokes com a força f_i – eq. C.1), aplicando-se a seguir a metodologia RNG desenvolvida para problemas de turbulência (Yakhot & Orszag, 1986; Smith & Reynolds, 1992; Yakhot et al., 1992; Nagano & Itazu, 1997). A partir destas equações, o procedimento é basicamente o mesmo utilizado no tratamento das equações da quantidade do movimento (Navier-Stokes com força – eq. C.1). Remove-se os modos em um pequeno intervalo de número de onda, representando os efeitos destes modos como um incremento do termo de difusão.

Embora a equação da energia cinética turbulenta RNG tenha a forma semelhante a equação de κ modelada dos modelos κ-ε, ela não é totalmente derivada da teoria RNG. Esta teoria prediz somente o termo de difusão modificado. O uso de dois valores para o parâmetro *b* (*b*=0 e *b*=4), como ocorreu na equação da quantidade de movimento, é outro ponto vulnerável da teoria (Nagano & Itazu, 1997). Da mesma forma, há severas críticas a obtenção da equação da taxa de dissipação RNG. Nagano e& Itazu (1997) apontam não só problemas na obtenção das constantes, como também na ordem de grandeza dos termos renormalizados. Termos, que as simulações diretas tem apontado como dominantes no balanço da equação, anulam-se na teoria de Yakhot & Orszag (1986) e de Yakhot & Smith (1992) (Nagano & Itazu, 1997).

Simultaneamente, enquanto Smith & Reynolds (1992) identificavam alguns problemas na derivação original da equação de ε, Thangam & Speziale (1992) examinava, em escoamentos turbulentos complexos, o comportamento numérico do modelo κ-ε RNG para altos números de Reynolds, proposto por Yakhot & Orszag (1986). Os autores tinham afirmado que, para alto número de Reynolds, a teoria rendia a mesma forma da equação da dissipação do modelo κ–ε tradicional. Contudo Smith e Reynolds (1992) mostraram que a teoria RNG, como aplicada por Yakhot & Orszag, não obtinha um termo de produção da forma empregada na equação padrão. Eles mostraram ainda que, embora a equação da dissipação contivesse o termo de destruição na forma correntemente utilizada no modelo κ–ε tradicional, seu coeficiente não era bem predito. Os resultados numéricos obtidos por Speziale confirmaram as suas conclusões. Este último observou que a constante do termo de produção era muito próximo de 1, valor este que define a singularidade da equação de ε em escoamentos cisalhantes homogêneos (Speziale, 1992). Embora os valores das constantes tenham sido obtidos sem empregar qualquer resultado experimental, os valores deveriam estar próximos aos convencionais, a fim de reproduzirem corretamente alguns escoamentos simples. A grande diferença existente entre os valores das constantes fazia previsível a deficiência deste primeiro modelo para predizer escoamentos turbulentos simples, pois os valores originais do modelo tradicional tinham sido calibrados para resolver estes escoamentos. Diante de tais fatos, Yakhot & Smith (1992) apresentaram uma nova abordagem para obtenção da equação da dissipação e um novo modelo κ–ε RNG para alto número de Reynolds foi publicado, ainda em 1992, por Yakhot et. al (1992).

Com referência ao modelo tradicional este novo modelo renormalizado apresenta duas diferenças: Os valores das constantes, que foram obtidas analiticamente, e a inclusão de um novo termo na equação da dissipação (ε), chamado termo *R*. A teoria RNG obtém $C_{\varepsilon 1}$=1,42, $C_{\varepsilon 2}$=1,68, σ_κ=0,72 e σ_ε =0,72, enquanto, no modelo κ–ε tradicional, estas constantes foram ajustadas experimentalmente como $C_{\varepsilon 1}$=1,44, $C_{\varepsilon 2}$=1,92, σ_κ=1,0 e σ_ε =1,3.

O baixo valor da constante do termo de destruição ($C_{\varepsilon 2}$=1,68), comparado ao valor padrão ($C_{\varepsilon 2}$=1,92), tende a diminuir a influência do referido termo sobre o valor da dissipação e consequentemente aumentar a destruição da equação de κ. Este efeito é em parte anulado pelo elevado coeficiente de difusão (80% maior no RNG) e pelo termo *R* nas regiões de pequenas taxas de deformação. É a presença deste termo adicional (*R*), na equação da dissipação, a grande diferença deste modelo com relação ao modelo κ–ε tradicional. O termo na sua forma exata é dado por:

$$R = 2\upsilon_o \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} S_{ij} \tag{3.62}$$

Negligenciando este termo na equação da dissipação, obtém-se as equações de transporte semelhantes as utilizadas no modelo κ–ε tradicional, a exceção das constantes. Yakhot et al. (1992) afirmam que esta aproximação (*R*=0) é formalmente justificada, para alto número de Reynolds, se a hipótese de isotropia local é adotada. Quando esta hipótese é considerada, o termo de produção da equação da dissipação é exclusivamente atribuído a $C_{\varepsilon 2}\varepsilon^2/\kappa$. Contudo, Yakhot et al. (1992) e Yakhot & Smith (1992) questionaram a validade desta hipótese, particularmente em escoamentos turbulentos fortemente cisalhantes, apontando como sustentação o trabalho de Durbin & Speziale (1991).

Consistente com esta posição, o referido termo não foi desprezado, mas, ao invés disto, os autores se propõem a modelá-lo (Yakhot et al., 1992). Como o seu valor é pequeno em escoamentos com baixas taxas de deformação, a forma padrão do termo de produção deve ser recuperada nestas condições. A técnica do grupo de renormalização e a expansão em potências de α_o foram então utilizadas para avaliar o termo R. Este procedimento sistemático gerou uma expansão em potências do parâmetro adimensional $\eta_{ij} = S_{ij}\,(\kappa / \varepsilon)$. A contribuição do termo é pequena para turbulência com pequenas taxas de deformação e grande no limite de grandes deformações, quando $\eta \to \infty$. Os autores afirmam que todas as tentativas de modelar o termo por meio da técnica de renormalização, mostraram-se infrutíferas (Yakhot et al., 1992).

Deste modo, por um processo interativo da expressão do termo R, usando as equações de Navier-Stokes, os autores (Yakhot et al., 1992) obtiveram uma expansão em potências do parâmetro adimensional $\eta = S\,(\kappa/\varepsilon)$ da forma:

$$R = \upsilon_t\, S^3 \sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(\frac{S\kappa}{\varepsilon} \right)^n \tag{3.63}$$

onde:

$$S = \sqrt{2\, S_{ij}\, S_{ij}} \tag{3.64}$$

Os valores dos coeficientes r_n não são conhecidos e consequentemente não se pode avaliar R (Yakhot et. al., 1992). Neste contexto, os autores propõem considerar como modelo somente a parte do termo correspondente a série geométrica:

$$R = \upsilon_t \; S^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \left(\frac{S\kappa}{\varepsilon} \right)^{3n} = \frac{\upsilon_t \, S^3}{1+\beta\,\eta^3} \tag{3.65}$$

Como em escoamentos cisalhantes homogêneo, no limite de S_{ij} pequeno, tem-se η_o=4,38, os autores, motivados pela aproximação de Padé ao invés de derivação baseada na técnica de renormalização, estabeleceram então o modelo final para R, como sendo:

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1-\eta/\eta_o)}{1+\beta\eta^3} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \tag{3.66}$$

onde β=0,012, o qual foi avaliado pelo uso da lei logarítmica.

Este termo adicional merece atenção, pois ele muda de sinal, dependendo da taxa da escala de tempo η ser maior ou menor que η_o, distinguindo de tal modo as pequenas das grandes taxas de deformação. Nas regiões de pequenas taxas de deformação turbulenta, o termo R tende a aumentar a viscosidade turbulenta (υ_t), enquanto, nas regiões de grandes taxas de tensão, o sinal do termo na equação é invertido (-→+) e a viscosidade turbulenta diminui comparativamente ao modelo κ–ε tradicional. Esta característica tem provavelmente contribuído, mas que outras modificações para um aparente sucesso do modelo em predizer o comprimento apropriado da região de recirculação de alguns escoamentos separados, quando comparado ao modelo padrão.

É interessante, por fim, destacar a falta de universalidade da equação RNG da dissipação. Hanjalic (1994), incorporou a referida equação ao modelo de tensão de Reynolds, para alto Reynolds, não obtendo bons resultados (Hanjalic, 1994).

A forma final do modelo κ-ε renormalizado (κ-ε RNG), para altos números de Reynolds, é dada por Yakhot et al. (1992) como sendo:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j}\,\overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\upsilon_{er}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\upsilon_{er}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right] \tag{3.67}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\kappa\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\upsilon_{er}}{\sigma_k}\frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right] + P_\kappa - \varepsilon \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\upsilon_{er}}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]+C_1\frac{\varepsilon}{\kappa}P_\kappa-R-C_2\frac{\varepsilon^2}{\kappa} \tag{3.69}$$

$$R=\frac{C_\mu\,\eta^3(1-\eta/\eta_o)}{1+\beta\eta^3}\frac{\varepsilon^2}{\kappa} \tag{3.70}$$

$$\eta=\frac{S\,\kappa}{\varepsilon} \tag{3.71}$$

$$S=\sqrt{2\,S_{ij}\,S_{ij}} \tag{3.72}$$

$$P_\kappa=-\overline{u_i'\,u_j'}\,\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \tag{3.73}$$

$$\upsilon_{er}=\frac{C_\mu\,\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.74}$$

A teoria RNG obtém para as constantes os valores: C_1=1,42; C_2=1,68; σ_κ =0,72; σ_ε=0,72; C_μ =0,0845; η_o=4,38; e β=0,012.

3.4.3.
Modelo κ-ε RNG Diferencial

O modelo renormalizado diferencial é válido para regiões de alto e baixo número de Reynolds (Yakhot & Orszag, 1986; Karniadakis et al., 1989). Neste modelo não há necessidade de se ajustar qualquer parâmetro, mas quatro equações diferenciais, entre elas a de κ, ε e υ_{er}, necessitam ser resolvidas, além das equações de conservação de massa e quantidade de movimento.

O modelo diferencial foi publicado tanto no trabalho de Yakhot & Orszag (1986) como no trabalho de Karniadakis et al. (1989), sendo que em nenhum deles foram apresentados detalhes da derivação das equações diferenciais obtidas.

Embora este modelo não tenha sido diretamente utilizado neste trabalho de tese, sua apresentação é importante, tendo em vista que a viscosidade efetiva do modelo κ-ε renormalizado de baixo número de Reynolds, publicado por Orszag et al. (1993), é obtida diretamente da integração da correspondente equação diferencial.

Cabe destacar que há algumas divergências na equação diferencial da taxa de dissipação publicada em ambos os trabalhos (Yakhot & Orszag, 1986; Karniadakis et al., 1989). Como este modelo tem aqui somente um caráter informativo, as equações de governo apresentadas, a seguir, são as publicadas por Karniadakis et al. (1989).

As equações da energia cinética turbulenta (κ) e de sua taxa de dissipação (ε) são definidas no modelo renormalizado diferencial como (Karniadakis et al., 1989):

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\kappa\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha\, \upsilon_{er} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right] + P_{d\kappa} - \varepsilon \tag{3.75}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha\, \upsilon_{er} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + P_{d\varepsilon} - Y \tag{3.76}$$

$$P_{d\kappa} = \frac{\upsilon_{er}}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)^2 = \upsilon_{er}\,(2 S_{ij} S_{ij}) \tag{3.77}$$

$$P_{d\varepsilon} = 0{,}656\, \varepsilon^{1/2}\, Y_\varepsilon\, P_{d\kappa} \tag{3.78}$$

$$Y = \varepsilon^{1/2}\, Y_\varepsilon \tag{3.79}$$

O procedimento de renormalização gera duas equações diferenciais adicionais para $\frac{\kappa}{\varepsilon^{1/2}}$ e Y_ε, as quais podem ser integradas como:

$$Y_\varepsilon = \alpha_y - \gamma_y \int_1^{\upsilon_{er}/\upsilon} \frac{dz}{(z^3 - 1 + C)^{1/2}} \tag{3.80}$$

$$\frac{\kappa}{\varepsilon^{1/2}} = \alpha_\kappa + \gamma_\kappa \int_1^{\upsilon_{er}/\upsilon} \frac{z\,dz}{(z^3 - 1 + C)^{1/2}} \tag{3.81}$$

onde $z = \upsilon(\lambda)/\upsilon$ e os coeficientes (α_y, γ_y) e $(\alpha_\kappa, \gamma_\kappa)$ são constantes obtidas do comportamento assintótico do modelo (Karniadakis et al., 1989), enquanto o parâmetro α é o inverso do número de Prandlt e é dado pela relação:

$$\left|\frac{\alpha - 1{,}3929}{\alpha_o - 1{,}3929}\right|^{0{,}6321} \left|\frac{\alpha + 2{,}3929}{\alpha_o + 2{,}3929}\right|^{0{,}3679} = \frac{\upsilon}{\upsilon_{er}} \tag{3.82}$$

onde α_o=1,0. Já a viscosidade efetiva renormalizada (υ_{er}) é implicitamente definida pelas eq. (3.80) e (3.81) para cada ponto nodal do domínio computacional. É através da eq. (3.81) que será gerada a viscosidade renormalizada efetiva, proposta por Orszag et al. (1993) como sendo válida para qualquer número de Reynolds.

3.4.4. Modelo κ-ε RNG para Baixo Re

Orszag et al. (1993) publicaram, sem apresentar detalhes, uma nova expressão para a determinação da viscosidade efetiva renormalizada

$$\upsilon_{er} = \upsilon \left[1 + \sqrt{\frac{C_\mu}{\upsilon}} \frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}}\right]^2 \tag{3.83}$$

afirmando que esta relação seria válida tanto em regiões de alto como baixo número de Reynolds. Em adição, incluiu-se a variação do número de Prandlt turbulento com o número de Reynolds, através da eq. (3.82).

Estes resultados permitiriam que as equações de transporte de κ e ε, como definidas no modelo κ-ε RNG de alto Reynolds (eq. 3.68 e 3.69), pudessem ser aplicadas na região de baixo número de Reynolds, sem o uso de funções de parede ou funções de amortecimento no limite da parede (Orszag et al., 1993). Os autores alegam que υ_{er} e α variam lentamente, de valores moleculares a valores completamente turbulentos, de acordo com o número de Reynolds efetivo e, consequentemente, as equações de transporte de κ e ε teriam um efeito natural de amortecimento na região da parede.

Contudo, na derivação da eq. (3.83), foi introduzida a hipótese que $\upsilon_{er} >> \upsilon$, o que, em tese, invalida o uso da equação na região de baixo número de Reynolds. Para obtenção da referida equação, parte-se da equação de ($\kappa/\varepsilon^{1/2}$) do modelo diferencial:

$$\frac{\kappa}{\varepsilon^{1/2}} = \alpha_\kappa + \gamma_\kappa \int_1^{\upsilon_{er}/\upsilon} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^3 - 1 + C)^{1/2}} \tag{3.84}$$

Como $\alpha_\kappa = 0$, $\gamma_\kappa = (1/2)\sqrt{\upsilon / C_\mu}$ e C=75 (Yakhot & Orszag, 1986; Smith & Reynolds, 1992) e supondo-se que $z^3 = [\upsilon(\lambda)/\upsilon]^3 >>> C - 1 = 74$, uma hipótese somente válida para elevados números de Reynolds, tem-se que:

$$\frac{\kappa}{\varepsilon^{1/2}} \cong \gamma_\kappa \int_1^{\upsilon_{er}/\upsilon} \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^{3/2}} \cong \gamma_\kappa \int_1^{\upsilon_{er}/\upsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z^{1/2}} \cong \gamma_\kappa \left[2 z^{1/2}\right]_1^{\upsilon_{er}/\upsilon} \tag{3.85}$$

$$\frac{\kappa}{\varepsilon^{1/2}} \cong 2\gamma_\kappa \left[\left(\frac{\upsilon_{er}}{\upsilon}\right)^{1/2} - 1\right] \Rightarrow \frac{\kappa}{2\gamma_\kappa\, \varepsilon^{1/2}} \cong \left(\frac{\upsilon_{er}}{\upsilon}\right)^{1/2} - 1 \tag{3.86}$$

Assim

$$\upsilon_{er}^{1/2} \cong \upsilon^{1/2}\left[\frac{\kappa}{2\gamma_\kappa\, \varepsilon^{1/2}} + 1\right] \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{er} \cong \upsilon \left[\frac{\kappa}{2\gamma_\kappa\, \varepsilon^{1/2}} + 1\right]^2 \tag{3.87}$$

Resultando em

$$\upsilon_{er} \cong \upsilon \left[1 + \sqrt{\frac{C_\mu}{\upsilon}}\, \frac{\kappa}{\varepsilon^{1/2}}\right]^2 \tag{3.88}$$

a qual é a fórmula apresentada por Orszag et al. (1993). A hipótese $[\upsilon(\lambda)/\upsilon]^3 >>> 74$ considera que o coeficiente de difusão modificado pela técnica de Yakhot & Orszag (1986), em todo número de onda, é muito maior que a viscosidade molecular. Supondo-se que a hipótese seja considerada válida quando a relação entre os dois lados da desigualdade for da ordem de 10%, pode-se então escrever que:

$$\left(\frac{\upsilon(\lambda)}{\upsilon}\right)^3 \approx 740 \tag{3.89}$$

e consequentemente $\upsilon_{er} \cong 9{,}045\upsilon$. Já se a relação for posta como 5%, então se terá que $\upsilon_{er} \cong 11{,}4\upsilon$. Deste modo, verifica-se que a relação proposta por Orszag et al. (1993) somente é válida para elevados números de Reynolds. Portanto, a hipótese inserida na dedução da eq. (3.83) não sustenta a afirmação de que a viscosidade efetiva renormalizada varia lentamente a partir da viscosidade molecular, o que garantiria o uso do modelo sem a necessidade de funções de amortecimento. Este resultado é coerente com todo o procedimento utilizado por Yakhot & Orszag (1986), que obtiveram sempre as aproximações para $\lambda \to 0$ ($R_e \to \infty$), como foi mostrado anteriormente no estudo do procedimento RNG.

Se a viscosidade efetiva renormalizada proposta por Orszag et al. (1993), no modelo κ-ε RNG para baixo Re, for decomposta nas parcelas molecular e turbulenta, ou seja, $\upsilon_{er} = \upsilon + \upsilon_t$, então tem-se que:

$$\upsilon_t = \frac{C_\mu \kappa^2}{\varepsilon} + 2\sqrt{C_\mu}\sqrt{\frac{\upsilon}{\varepsilon}}\,\kappa = C_\mu \kappa \left[\frac{\kappa}{\varepsilon} + \frac{2}{\sqrt{C_\mu}}\sqrt{\frac{\upsilon}{\varepsilon}}\right] \tag{3.90}$$

Por outro lado, como a viscosidade turbulenta é normalmente definida em função da uma escala de velocidade e uma escala de comprimento turbulentas, sendo esta última obtida a partir da própria escala de velocidade e de uma escala de tempo, isto é, $\upsilon_{er} = C_\mu \kappa \tau$, pode-se então dizer que a escala de tempo renormalizada é da forma:

$$\tau = \left[\frac{\kappa}{\varepsilon} + \frac{2}{\sqrt{C_\mu}}\sqrt{\frac{\upsilon}{\varepsilon}}\right] \tag{3.91}$$

Alguns trabalhos que foram publicados no início da década passada (Durbin, 1991, 1993) indicaram a possibilidade de estender o uso dos modelos κ-ε em escoamentos de baixo Re, sem empregar funções de amortecimento empíricas.

A proposta envolvia exatamente o uso da escala de tempo de Kolmogorov na definição da viscosidade turbulenta (υ_t), se o número de Reynolds se tornasse pequeno (Hanjalic, 1994). Foi proposto por Durbin para a escala de tempo a expressão (Hanjalic, 1994):

$$\tau = \max\left[\frac{\kappa}{\varepsilon}, C_\tau\sqrt{\frac{\upsilon}{\varepsilon}}\right] \tag{3.92}$$

onde C_τ=6,4. Esta expressão está próxima a variante proposta por Orszag et al. (1993), onde $\frac{2}{\sqrt{C_\mu}} = 6{,}9$. Talvez esse seja o motivo pelo qual o modelo κ-ε RNG para baixo Re tenha tido um relativo sucesso nas regiões de baixo número de Reynolds de alguns escoamentos turbulentos, sem qualquer função de amortecimento (Hanjalic, 1994). Contudo, não se pode deixar de observar que a proposta de Durbin adota como escala representativa da turbulência a maior das duas escalas propostas, enquanto o resultado RNG soma essas duas escalas. Certamente, o modelo terá maiores dificuldades nas regiões onde as duas escalas forem equivalentes, pois neste caso a proposta RNG terá o dobro do valor da viscosidade turbulenta do modelo de Durbin. Ou seja, o modelo κ-ε RNG para baixo números de Reynolds proposto por Orszag et al. (1993) sempre terá valores de viscosidade turbulenta maiores que os da proposta de Durbin e até do modelo κ-ε para alto Re. Parte desse problema talvez possa ser compensado, em escoamentos fortemente cisalhantes, pelo novo termo *R* da equação da taxa de dissipação.

Registre-se ainda que essa mesma escala de tempo, gerada pelo procedimento RNG, também foi utilizada no modelo proposto por Yang & Shih (1993). Entretanto este modelo introduz uma função de amortecimento empírica na fórmula da viscosidade turbulenta.

Outro problema, que pode ser levantado com referência ao modelo RNG, é o comportamento assintótico dos termos das equações da energia cinética turbulenta e da sua taxa de dissipação. Como não são introduzidas funções de amortecimento no modelo e a viscosidade turbulenta (υ_t) tem um comportamento limite $O(y^{-2})$, sabe-se, do estudo dos modelos κ-ε para baixo Re, que os termos das equações de κ e ε do modelo proposto por Orszag et al. (1993) não tem um comportamento assintótico correto.

3.4.5.
Modelo κ-ε RNG Não Linear

A técnica do grupo de renormalização, como desenvolvida por Yakhot & Orszag (1986), foi aplicada por Rubinstein & Barton (1990), a fim de deduzir uma relação constitutiva turbulenta não linear. Na aplicação do procedimento às tensões de Reynolds, foram retidos os termos de segunda ordem, gerando-se um modelo não linear quadrático nos gradientes de velocidade.

Desprezando-se os efeitos convectivos da derivada de Oldroyd no modelo de Speziale (1987), a diferença do modelo não linear renormalizado de Rubinstein & Barton (1990) para o modelo não linear de Speziale (1987) restringe-se exclusivamente aos valores das constantes. Contrariamente ao que Rubinstein & Barton (1990) afirmam, não há uma boa concordância dos valores das constantes que multiplicam os termos quadráticos nestes modelos, conforme será visto posteriormente. Isto põe em dúvida a capacidade do modelo reproduzir os escoamentos, para os quais o modelo de Speziale foi calibrado.

Outra crítica, que mais uma vez pode ser feita, é o fato de dois valores do parâmetro b terem sidos utilizados (b=0 e b=4) na avaliação das constantes do modelo. Tal procedimento coloca os valores das constantes novamente sob suspeita.

Um novo modelo κ-ε renormalizado não linear foi posteriormente construído por Yakhot et al. (1992). Os autores propõem acoplar a relação constitutiva não linear proposta por Speziale (1987) às equações de governo de κ e ε, obtidas pela técnica do grupo de renormalização (Yakhot et al., 1992). Neste novo modelo, os efeitos convectivos da derivada de Oldroyd foram negligenciados, aproximando-o do modelo proposto por Rubinstein & Barton (1990).

Deste modo, a relação constitutiva turbulenta não linear de ambos os modelos, na forma proposta por Rubinstein & Barton (1990), pode ser escrita como:

$$-\overline{u_i' u_j'} = -\frac{2}{3}\kappa\,\delta_{ij} + C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) +$$
$$F_1\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_r} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_r} - \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_r}\frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_r}\delta_{ij}\right) +$$
$$F_2\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_r}\frac{\partial \overline{u}_r}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_r}\frac{\partial \overline{u}_r}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \overline{u}_r}{\partial x_m}\frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_r}\delta_{ij}\right) +$$
$$F_3\left(\frac{\partial \overline{u}_r}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}_r}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial \overline{u}_r}{\partial x_m}\frac{\partial \overline{u}_r}{\partial x_m}\delta_{ij}\right) \tag{3.93}$$

As constantes (C_μ, F_1, F_2 e F_3) dos modelos são supostas serem válidas somente para altos números de Reynolds (Rubinstein & Barton, 1990; Mompean et al., 1996) e constam da Tabela 3.5. Verifica-se prontamente a efetiva diferença de valor entre as constantes dos dois modelos.

Modelo	C_μ	F_1	F_2	F_3
Yakhot et al. (1992)	0,09	-0,041	-0,014	0,014
Rubinstein & Barton (1990)	0,0845	-0,034	-0,104	0,014

Tabela 3.5. Constantes dos modelos RNG não lineares

Mompean (1998) propõe estender o uso do modelo κ-ε RNG não linear proposto por Yakhot et al. (1992) a regiões de baixo número de Reynolds, pela introdução da função de amortecimento f_μ na avaliação da viscosidade turbulenta e da própria relação constitutiva não linear.

Cabe destacar que neste trabalho somente foram utilizadas em simulações as propostas de Yakhot et al. (1992) e Mompean (1998). O modelo de Rubinstein & Barton (1990) não foi avaliado numericamente. Consequentemente, as equações de governo do modelo κ-ε RNG não linear de alto e baixo número de Reynolds, na forma proposta por Yakhot et al. (1992) e Mompean (1998), podem ser escritas resumidamente como:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j}\,\overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\upsilon\,\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial(-\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} \tag{3.94}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\kappa\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon + \alpha\,\upsilon_{er}\right)\frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right] + P_\kappa - \varepsilon \tag{3.95}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon + \alpha\,\upsilon_{er}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_1\frac{\varepsilon}{\kappa}P_\kappa - R - C_2\frac{\varepsilon^2}{\kappa} \tag{3.96}$$

$$R = \frac{C_\mu\,\eta^3(1-\eta/\eta_o)}{1+\beta\eta^3}\frac{\varepsilon^2}{\kappa} \tag{3.97}$$

$$\eta = \frac{S\,\kappa}{\varepsilon} \tag{3.98}$$

$$S = \sqrt{2\,S_{ij}\,S_{ij}} \tag{3.99}$$

$$P_\kappa = -\,\overline{u_i'\,u_j'}\,\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \tag{3.100}$$

$$\upsilon_{er} = f_\mu\,\frac{\mathrm{C}_\mu\,\kappa^2}{\varepsilon} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned} -\overline{u_i' u_j'} = & -\frac{2}{3}\kappa\,\delta_{\mathrm{ij}} + 2\upsilon_{er}\,S_{ij} + \\ & + 4C_D\,\frac{\upsilon_{er}^2}{\kappa}\left[S_{ij}^o - \frac{1}{3}S_{kk}^o\,\delta_{ij} + S_{ik}\,S_{kj} - \frac{1}{3}S_{kl}\,S_{kl}\,\delta_{ij}\right] \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) \tag{3.103}$$

$$S_{ij}^o = \frac{\partial\,S_{ij}}{\partial\,t} - \frac{\partial\,\overline{u}_i}{\partial\,x_k}S_{kj} - \frac{\partial\,\overline{u}_j}{\partial\,x_k}S_{ik} \tag{3.104}$$

onde já foram desprezados os efeitos convectivos da derivada de Oldroyd, α=1,39, C_1=1,42; C_2=1,68; C_μ=0,0845; C_D=1,68, η_o=4,38; e β=0,012.