

Apêndice C

Técnica do Grupo de Renormalização

Neste apêndice é apresentada técnica de obtenção de modelos de turbulência desenvolvida por Yakhot & Orszag (1986), a qual foi chamada pelos autores como técnica do grupo de renormalização (RNG). Serão apresentados os principais aspectos e apontadas algumas inconsistências levantadas.

O procedimento RNG desenvolvido por Yakhot & Orszag toma por base, para o desenvolvimento dos modelos de turbulência, as equações:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \bullet \nabla) \vec{u} = \vec{f} - \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (\text{C.1})$$

$$\nabla \bullet \vec{u} = 0 \quad (\text{C.2})$$

onde $\vec{f}$ é a força aleatória escolhida para gerar o campo de velocidade descrito pelo espectro do intervalo inercial de Kolmogorov

$$E(\lambda, t) = C_\lambda \varepsilon^{2/3} \lambda^{-5/3} \quad (\text{C.3})$$

Nesta equação λ é o vetor número de onda e C_λ é uma constante. A transformada de Fourier da correlação de dois pontos desta força é dada por (Smith & Reynolds, 1992; Nagano & Itazu, 1997):

$$\langle f_i(\Omega) f_j(\Omega') \rangle = 2D(\Lambda_\lambda) (2\pi)^{d+1} P_{ij}(\lambda) \delta(\Omega + \Omega'), \quad \text{se } \lambda_L < \lambda < \lambda_d \quad (\text{C.4})$$

$$\langle f_i(\Omega) f_j(\Omega') \rangle = 0, \quad \text{se } \lambda \notin [\lambda_L, \lambda_d]$$

$$D(\Lambda_\lambda) = D_0 \Lambda_\lambda^{-y} \quad ; \quad P_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} - \frac{\lambda_i \lambda_j}{\Lambda_\lambda^2} \quad (\text{C.5})$$

onde $\Omega \equiv (\lambda, \omega)$ é o vetor frequência-número de onda com dimensão $d+1$, d é a dimensão espacial, λ é o vetor número de onda, Λ_λ é a norma euclidiana do vetor número de onda, λ_d é o número de onda característico da escala dissipativa e λ_L é

o número de onda característico da escala integral. D_0 é um coeficiente dimensional que é determinado pela teoria após definir o parâmetro y , o qual é escolhido para dar o decaimento espectral desejado ($y=3$, para lei espectral de Kolmogorov). P_{ij} faz a força ser estatisticamente isotrópica e livre de divergência (Smith & Reynolds, 1992; Nagano & Itazu, 1997).

Yakhot & Orszag (1986) e Yakhot & Smith (1992) postularam que as eq. (C.1) e (C.2), com uma força $\vec{f}$ propriamente escolhida, descrevem corretamente o movimento das pequenas escalas de uma larga classe de escoamento turbulentos. No intervalo inercial, a solução destas equações é suposta ser estatisticamente equivalente a solução das equações da continuidade e da quantidade de movimento com as respectivas condições de contorno. Na verdade, as referidas equações foram vista como um modelo geral, para descrever as propriedades de pequenas escalas do escoamento turbulento no intervalo inercial (Yakhot & Orszag, 1986).

Toda análise foi conduzida no espaço de Fourier, no qual as equações do modelo tomam a forma:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\lambda \leq \Lambda} \frac{d\lambda}{2\pi^d} \int \frac{d\omega}{2\pi} u_i(\lambda, \omega) \exp(i\lambda \mathbf{x} - i\omega t) \quad (\text{C.6})$$

$$u_i \lambda_i = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$L(\lambda)u_i(\Omega) = f_i(\Omega) - i\frac{\alpha_0}{2} P_{imn}(\lambda) \int u_m(q)u_n(\Omega - q) \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}} \quad (\text{C.8})$$

Aqui $u_i(\Omega) = u_i(\lambda, \omega)$ é amplitude de Fourier de $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}$ é o vetor espacial e o operador linear $L(\lambda)$, obtido da derivada no tempo e do termo viscoso, é dado por:

$$L(\lambda) = (-i\omega + \nu \Lambda_\lambda^2) \quad (\text{C.9})$$

O operador projeção complexo P_{imn} , vem da eliminação da pressão, usando a equação da continuidade, e é dado por:

$$P_{imn}(\lambda) = \lambda_m P_{in}(\lambda) + \lambda_n P_{im}(\lambda) \quad (C.10)$$

onde:

$$P_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} - \frac{\lambda_i \lambda_j}{\Lambda_\lambda^2} \quad (C.11)$$

O parâmetro $\alpha_o (=1)$ foi introduzido formalmente para permitir a solução da eq. (C.8) por análise de perturbações. O vetor frequência - número de onda (q) é uma variável muda de integração.

Ao fazer o corte para $\Lambda = O(\lambda_d)$, onde λ_d é o número de onda associado ao tamanho dos turbilhões que dão a principal contribuição para a dissipação total, assumiu-se (Yakhot & Orszag, 1986) que os modos de Fourier $\vec{u}(\Omega)$ anulam-se quando $\lambda > \Lambda$. Esta hipótese é plausível, uma vez que os modos $\vec{u}(\Omega)$, para $\lambda > O(\lambda_d)$, são super amortecidos pelo termo viscoso na equação do movimento (Yakhot & Orszag, 1986). A definição da força $\vec{f}$ reflete esta observação.

Note que a solução de ordem zero ($\alpha_o = 0$) da eq. (C.8), conforme mostrado abaixo, balanceia a força $\vec{f}$ contra a aceleração e a dissipação viscosa e que as interações não lineares só estão presentes a partir da correção de primeira ordem:

$$(-i\omega + \nu \Lambda_\lambda^2) u_i(\Omega) = f_i(\Omega) \quad (C.12)$$

Esta expressão é utilizada como base para a construção da solução por análise de perturbações em potências de α_o .

O procedimento RNG de Yakhot e Orszag (1986) consiste de dois passos. Primeiro, decompõe-se a velocidade $u_i(\Omega)$ em duas componentes $u_i^>(\Omega)$ e $u_i^<(\Omega)$, correspondendo respectivamente aos modos a serem eliminados e aos modos a serem retidos:

$$u_i(\Omega) = u_i^<(\Omega), \quad \lambda < \lambda(r) \quad (C.13)$$

$$u_i(\Omega) = u_i^>(\Omega), \quad \lambda(r) < \lambda < \lambda_d \quad (C.14)$$

onde $\lambda(r) = \lambda_d \exp(-r)$. A figura C.1 mostra a região do espectro, onde serão removidas as escalas. O parâmetro r é escolhido de modo que $0 < \exp(-r) < 1$.

A seguir procede-se a correspondente decomposição das equações de Navier-Stokes, substituindo-se as eq. (C.13) e (C.14) na eq. (C.8). Deste modo, obtém-se as seguintes equações:

$$L^<(\lambda) u_i^<(\Omega) = f_i^<(\Omega) - \quad (C.15)$$

$$\frac{i\alpha_0}{2} P_{imn}^<(\lambda) \int [u_m^<(q) u_n^<(\Omega - q) + 2u_m^>(q) u_n^<(\Omega - q) + u_m^>(q) u_n^>(\Omega - q)] \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}}$$

$$L^>(\lambda) u_i^>(\Omega) = f_i^>(\Omega) - \quad (C.16)$$

$$\frac{i\alpha_0}{2} P_{imn}^<(\lambda) \int [u_m^<(q) u_n^<(\Omega - q) + 2u_m^>(q) u_n^<(\Omega - q) + u_m^>(q) u_n^>(\Omega - q)] \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}}$$

Verifica-se que, na equação de $u^<$, eq. (C.15), aparece a amplitude correspondente aos modos a serem eliminados ($u^>$). Estes modos são incluídos através dos termos não lineares. A fim de eliminar os modos do intervalo $\Lambda e^{-r} < q < \Lambda$, todos os termos $u^>(q)$ na eq. (C.15) devem ser retirados. Yakhot & Orszag (1986) propõem a substituição repetida da eq. (C.16) em $u^>$, gerando uma

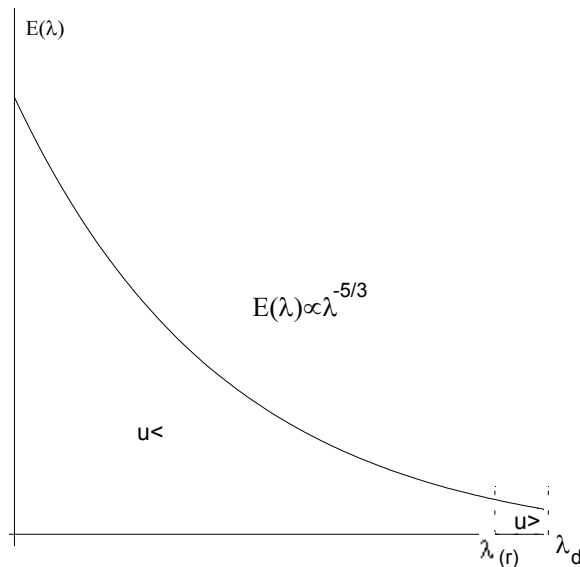


Figura C.1 – Região do espectro a ser removida

expansão infinita para $u^<$ em potências de α_0 , na qual $u^>$ não aparece explicitamente. Já Smith & Reynolds (1992) propõem a substituição da componente $u^>$ por uma expansão em série de potências do parâmetro α_0 , utilizando a análise de perturbação. Posteriormente, toma-se a média sobre a parte da força aleatória $\hat{f}$, correspondente ao intervalo retirado. Este procedimento elimina formalmente os modos $\Lambda e^{-r} < q < \Lambda$ e a equação da quantidade de movimento para $u^<$ pode ser escrita, considerando a expansão de α_0 até segunda ordem, como (Yakhot & Orszag, 1986; Smith & Reynolds, 1992):

$$L(\lambda)u_i^<(\Omega) = f_i(\Omega) - i\frac{\alpha_0}{2}P_{imn}(\lambda) \int [u_m^<(q)u_n^<(\Omega - q)] \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}} - \quad (C.17)$$

$$\Delta f_i + R_i + O[(u^<)^3]$$

onde :

$$\Delta f_i = -i\frac{\alpha_0}{2}P_{imn}(\lambda) \int G_0(q) G_0(\Omega - q) [f_n^>(q)f_m^>(\Omega - q)] \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}} \quad (C.18)$$

$$R_i = 4(i\frac{\alpha_0}{2})^2 (2D_0)P_{imn}(\lambda) \int |G_0(q)|^2 G_0(\Omega - q) P_{nrt}(\lambda - q_\lambda) \quad (C.19)$$

$$P_{mr}(q_\lambda)q_N^{-y}u_t^<(\Omega) \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}}$$

$$G_0(\lambda) = L^{-1}(\lambda) = \frac{1}{-i\omega + \nu \Lambda_\lambda^2} \quad (C.20)$$

q_λ é o vetor número de onda correspondente ao vetor frequência - número de onda q . O termo Δf_i (eq. C.18) é uma força aleatória induzida, com média zero, se a força for assumida como estatisticamente homogênea e q_N é a norma euclidiana do vetor q . A análise do termo R_i leva ao seguinte resultado (Yakhot & Orszag, 1986; Smith & Reynolds, 1992; Nagano & Itazu, 1997):

$$R_i = -\Delta \nu_t \Lambda_\lambda^2 u_t^<(\Omega) \quad (C.21)$$

onde:

$$\Delta v_t = \frac{\alpha_o^2}{v^2} \frac{D_o}{\Lambda^b} \frac{S}{(2\pi)^d} \frac{d^2 - d - b}{2(d+2)d} \frac{e^{br} - 1}{b} \quad (\text{C.22})$$

$$S = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{C.23})$$

$$b = 4 + y - d \quad (\text{C.24})$$

d é a dimensão espacial e y um parâmetro da força, o qual, se for igualado à dimensão espacial ($y=d$), gera correlações de velocidade descritas pela lei espectral de Kolmogorov, no limite de $\lambda \rightarrow 0$. S é a área da esfera de raio unitário no espaço d -dimensional. No caso do espaço tridimensional y é tomado como 3 e S é 4π .

Cabe destacar que além dos termos de ordem superior em $u_i^<$, eq. (C.17), o procedimento de eliminação dos modos de $u_i^>$ gera outros termos, que, segundo os autores (Yakhot & Orszag, 1986), são desprezados porque ou anulam-se após a média sobre a força $\tilde{f}$, ou vão para zero rapidamente, quando $\lambda \rightarrow 0$.

Da hipótese de f_i ser estatisticamente homogênea, a força aleatória induzida, Δf_i (eq. C.18), tem média zero. Deste modo, todos os efeitos dos modos eliminados $u_i^>$ estão condensados em R_i , eq. (C.21) (Yakhot & Orszag, 1986; Smith & Reynolds, 1992; Nagano & Itazu, 1997). Passando o termo R_i para o lado esquerdo da eq. (C.17), pode-se então rescrever esta equação como:

$$(L(\lambda) + \Delta v_t \Lambda_\lambda^2) u_i^<(\Omega) = f_i(\Omega) - \quad (\text{C.25})$$

$$i \frac{\alpha_o}{2} P_{imn}(\lambda) \int [u_m^<(q) u_n^<(\Omega - q)] \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}} + O[(u^<)^3]$$

onde, o lado esquerdo toma a forma:

$$(L(\lambda) + \Delta v_t \Lambda_\lambda^2) u_i^<(\Omega) = (-i\omega + (\nu + \Delta v_t) \Lambda_\lambda^2) u_i^<(\Omega) \quad (\text{C.26})$$

E torna-se claro que o efeito do termo R_i é modificar o termo viscoso, sendo

que a correção do coeficiente de transporte é dada por $\Delta\nu_t$, eq. (C.22), no limite $\lambda \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$ (Yakhot & Orszag, 1986). Consequentemente o coeficiente de transporte, chamado viscosidade efetiva renormalizada, resultante da eliminação dos modos $u_i^>$ ($\Lambda e^{-r} < \lambda < \Lambda$) é:

$$\nu_{er} = \nu \left(1 + A_d \frac{\overline{\alpha_o} e^{br} - 1}{b} \right) \quad (C.27)$$

onde:

$$\overline{\alpha_o} = \frac{\alpha_o^2 D_o}{\nu^3 \Lambda^b} \quad (C.28)$$

$$A_d = \frac{d^2 - d - b}{2(d+2)d} \frac{S}{(2\pi)^d} \quad (C.29)$$

Yakhot & Orszag (1986) também afirmam que as contribuições dos termos de ordem superior na eq. (C.25), $O[(u^<)^3]$, são insignificantes no limite $\lambda \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$ e por isso são desprezadas.

Destas observações, verifica-se que todas as aproximações são válidas, quando $\lambda \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$, mas não o são na região de $\lambda \approx \lambda_d$, onde eliminou-se a banda infinitesimal. A correção da viscosidade emerge naturalmente somente para $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda \ll \lambda_d$), sendo que os termos desprezados tornam-se importantes na região de $\lambda \approx \lambda_d$. Assim a equação modificada pode não ser muito precisa na extremidade do domínio ($\lambda \rightarrow \lambda_d$), embora ela seja novamente usada nesta região no próximo estágio do processo de eliminação da banda infinitesimal de λ . Outra hipótese, que parece ser fonte de imprecisão, é considerar, em cada realização, a força referente as pequenas escalas ser fracamente relacionada a velocidade das grandes escalas, embora estas sejam dinamicamente relacionadas a velocidade das pequenas escalas.

Finalmente, redefinindo-se o operador $L(\lambda)$ como:

$$L(\lambda) = (-i\omega + (\nu + \Delta\nu_t)\Lambda_\lambda^2) = (-i\omega + \nu_{er}\Lambda_\lambda^2) \quad (C.30)$$

onde ν_{er} é a viscosidade efetiva renormalizada, a eq. (C.25), supostamente válida

para o intervalo $0 < \lambda < \Lambda e^{-r}$, é escrita como (Yakhot & Orszag, 1986):

$$L(\lambda)u_i^<(\Omega) = f_i(\Omega) - i \frac{\alpha_0}{2} P_{imn}(\lambda) \int [u_m^<(q)u_n^<(\Omega - q)] \frac{dq}{(2\pi)^{d+1}} \quad (C.31)$$

Verifica-se assim que, com as aproximações discutidas acima, a equação remanescente, eq. (C.31), após a eliminação da banda infinitesimal, é semelhante a forma original da eq. (C.8), exceto que esta tem agora um termo viscoso modificado.

Os efeitos dos termos não lineares foram tratados como um incremento no coeficiente de transporte viscoso. A meta agora é estabelecer, a partir desse resultado, uma relação diferencial para a viscosidade efetiva renormalizada, de modo que o coeficiente de transporte modificado possa ser determinado em função do número de onda. Para isto, será seguido o procedimento adotado por Nagano & Itaza (1997), o qual mostrou-se mais claro e lógico que a proposta original de Yakhot & Orszag (1986). Das eq. (C.22), (C.23) e (C.29), os efeitos da eliminação dos modos $u_i^>$, no número de onda λ , podem ser representados como:

$$\Delta v_t(\lambda) = \frac{\alpha_0^2}{v_t^2(\lambda)} \frac{D_0}{\lambda^b} A_d \frac{e^{br} - 1}{b} \quad (C.32)$$

Já da eq. (C.27) pode-se escrever que:

$$v_{er}(\lambda - \Delta\lambda) = v_{er}(\lambda) + \Delta v_t(\lambda) \quad (C.33)$$

onde se considera que $\Delta v_t(\lambda) \geq 0$ e v_{er} é sempre positivo e decrescente com λ . A derivada de v_{er} pode então ser estabelecida a partir da própria definição:

$$\frac{dv_{er}(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{v_{er}(\lambda) - v_{er}(\lambda - \Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (C.34)$$

onde $\Delta\lambda = \lambda - \lambda e^{-r} = \lambda(1 - e^{-r})$. Da eq. (C.33), tem-se:

$$\frac{dv_{er}(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{(-\Delta v_t(\lambda))}{\Delta\lambda} = - \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{(\Delta v_t(\lambda))}{\Delta\lambda} \quad (C.35)$$

Substituindo-se a eq. (C.32) na relação diferencial acima tem-se:

$$\frac{dv_{er}(\lambda)}{d\lambda} = -\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha_o^2 D_o}{v_{er}^2(\lambda) \lambda^b} A_d \frac{e^{br} - 1}{b} \frac{1}{\lambda(1-e^{-r})} \right] \quad (C.36)$$

$$\frac{dv_{er}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\alpha_o^2 D_o}{v_{er}^2(\lambda) \lambda^b} A_d \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{e^{br} - 1}{b} \frac{1}{\lambda(1-e^{-r})} \right] \quad (C.37)$$

Mas, quando $\Delta\lambda \rightarrow 0$, tem-se que $r \rightarrow 0$. Deste modo

$$e^{br} = 1 + br + O(r^2) \quad (C.38)$$

$$e^{-r} = 1 - r + O(r^2)$$

Logo:

$$\frac{dv_{er}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\alpha_o^2 D_o}{v_{er}^2(\lambda) \lambda^{b+1}} A_d \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{1 + br - 1 + O(r^2)}{b} \frac{1}{(1 - 1 + r + O(r^2))} \right] \quad (C.39)$$

$$\frac{dv_{er}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\alpha_o^2 D_o}{v_{er}^2(\lambda) \lambda^{b+1}} A_d \quad (C.40)$$

Como α_o foi introduzido para gerar a expansão e b , no espaço tridimensional, é 4, pode-se escrever a relação acima como:

$$\frac{dv_{er}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{D_o A_d}{v_{er}^2(\lambda) \lambda^5} \quad (C.41)$$

ou, em termos do parâmetro r , como:

$$\frac{dv_{er}(r)}{dr} = \frac{A_d D_o}{v_{er}^2(r) \Lambda^4} e^{4r} \quad (C.42)$$

onde Λ é o número de onda correspondente a escala característica de dissipação.

Em termos do comprimento de onda, esta equação pode ser escrita como:

$$\frac{dv_{er}(\ell)}{d\ell} = \frac{A_d D_o \ell^3}{v_{er}^2(\ell) (2\pi)^4} \quad (C.43)$$

onde $\ell = 2\pi/\lambda$. A seguir Yakhot & Orszag (1986), invocando a consistência dos resultados com a lei espectral de Kolmogorov, estabelecem que D_o deve ser proporcional a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta (ε), de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{2D_o S}{(2\pi)^d} = 1,594\varepsilon \quad (\text{C.44})$$

ou

$$D_o = \frac{(2\pi)^d}{2S} 1,594\varepsilon \quad (\text{C.45})$$

Introduzindo a relação acima e a definição de A_d (eq. C.29) nas eq. (C.41) e (C.43), tem-se que:

$$\frac{d\nu_{er}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1,594}{2} \frac{(2\pi)^d}{S} \frac{d^2-d-b}{(2\pi)^d} \frac{\varepsilon}{2(d+2)d \nu_{er}^2(\lambda)\lambda^5} = -\frac{1,594}{2} \frac{d^2-d-b}{2(d+2)d} \frac{\varepsilon}{\nu_{er}^2(\lambda)\lambda^5} \quad (\text{C.46})$$

$$\frac{d\nu_{er}(\ell)}{d\ell} = \frac{1,594}{2} \frac{d^2-d-b}{2(d+2)d} \frac{\ell^3}{\nu_{er}^2(\ell)(2\pi)^4} \quad (\text{C.47})$$

Fazendo-se

$$A_\lambda = \frac{1,594}{2} \frac{d^2-d-b}{2(d+2)d} \quad (\text{C.48})$$

$$A_\ell = \frac{1,594}{2} \frac{d^2-d-b}{2(d+2)d} \frac{1}{(2\pi)^4} \quad (\text{C.49})$$

Pode-se finalmente escrever:

$$\frac{d\nu_{er}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{A_\lambda \varepsilon}{\lambda^5 \nu_{er}^2(\lambda)} \quad (\text{C.50})$$

$$\frac{d\nu_{er}(\ell)}{d\ell} = \frac{A_\ell \varepsilon \ell^3}{\nu_{er}^2(\ell)} \quad (C.51)$$

Na obtenção das constantes A_ℓ e A_λ , Yakhot & Orszag (1986) usaram $d=3$ coerente com toda a dedução no espaço tridimensional, mas de modo não claro fizeram $b=0$, na avaliação de A_d (Nagano & Itazu, 1997). Isto pode ser visto, por exemplo, na avaliação da energia cinética turbulenta espectral de Yakhot & Orszag (1986) (vide fórm. 2.55 do trabalho dos autores). Esta opção é incoerente com o corpo do trabalho, pois foi utilizado sempre $b=4$, com a justificativa da coerência dos resultados com a lei espectral de Kolmogorov (vide fórmula 2.44, 2.45 e 2.46 do trabalho de Yakhot & Orszag, 1986, e o item F - 'A expansão de ε ' - do trabalho de Smith & Reynolds, 1992). A_λ é avaliada pela teoria de Yakhot & Orszag (1986) como 0,1594, enquanto A_ℓ como $1,04 \times 10^{-4}$ (Yakhot et al., 1993). Contudo, mesmo utilizando $b=0$ na avaliação do parâmetro A_d , o valor de A_λ não foi corretamente determinado, pois há um erro na constante da fórmula (2.60) do trabalho de Yakhot & Orszag (1986). O valor correto de A_λ seria 0,157 (Nagano & Itazu, 1997; Smith & Reynolds, 1992). Consequentemente, o valor de A_ℓ deveria ser $1,01 \times 10^{-4}$. Cabe ainda destacar que o uso coerente do parâmetro b levaria a obtenção de valores que não seriam consistentes com os adotados nos modelos padrões e os experimentalmente obtidos, como por exemplo a constante de Kolmogorov e C_μ no modelo κ - ε (Nagano & Itazu, 1997).

Deste modo, a viscosidade modificada, pela eliminação de uma banda finita de número de onda, pode ser obtida, integrando-se as eq. (C.50) ou (C.52), com a condição inicial $\nu_{er}(\lambda_d) = \nu$, ou seja:

$$\nu_{er}(\lambda) = \nu \left[1 + \frac{3}{4} \frac{A_\lambda \varepsilon}{\nu^3} \left(\frac{1}{\lambda^4} - \frac{1}{\lambda_d^4} \right) \right]^{1/3} \quad (C.52)$$

$$\nu_{er}(\ell) = \nu \left[1 + \frac{3}{4} \frac{A_\ell \varepsilon}{\nu^3} (\ell^4 - \ell_d^4) \right]^{1/3} \quad (C.53)$$

onde λ_d e ℓ_d são respectivamente número de onda e comprimento de onda referentes aos turbilhões na escala dissipativa de Kolmogorov. Com as aproximações realizadas, a equação das maiores escalas ($0 < \lambda < \lambda_c$) tem a mesma forma original. A renormalização é simplesmente a redefinição de u_i, f_i e λ_c sem a adicional redefinição das escalas de representação das variáveis. O grupo é o conjunto dos procedimentos de eliminação e aproximações, que levam a equação original a ser invariante na sua forma. Como Yakhot & Orszag (1986) fizeram referência, o procedimento de remoção das escalas não é verdadeiramente um procedimento de renormalização. Contudo, os autores dizem ser razoável chamá-lo de método RNG, desde que algumas das suas aproximações são baseadas na análise RNG de outros campos.

Em essência, o método do grupo da renormalização de Yakhot & Orszag (1986) foi usado para obtenção de modelos de turbulência: modelo algébrico de viscosidade turbulenta, modelo κ - ε para alto Reynolds, modelo κ - ε para baixo Reynolds, modelo κ - ε não linear para alto Reynolds, modelo κ - ε diferencial para baixo Reynolds e modelo de escala submalha para simulação de grandes escalas. Este último modelo será comentado no próximo capítulo, onde será apresentada a técnica de simulação das grandes escalas.