# Apêndice A
# Modelagem Estatística Clássica - Equacionamento

Uma grande variedade de modelos de turbulência com média de Reynolds foi proposta ao longo do último século, desde modelos rudimentares, como os modelos algébricos, até os mais elaborados modelos diferenciais de transporte de tensão de Reynolds. Em complemento a discussão realizada no capítulo 2, serão apresentados a seguir as equações de transporte exatas e as modeladas, mencionadas no capítulo 3.

## A.1.
## Equações de Navier-Stokes com Média de Reynolds



O campo de velocidade instantâneo de um escoamento turbulento é descrito pelas equações de Navier-Stokes, desde que o número de Mach seja menor que quinze. Aplicando a decomposição de Reynolds as quantidades do escoamento, presentes nas equações de governo, e realizando o procedimento de média, obtém-se, para fluido incompressível (massa específica $\rho$ constante), com viscosidade absoluta $\mu$ constante, sem forças de campo e de empuxo, as seguintes equações do movimento médio:

$$\frac{\partial \ \overline{u}_i}{\partial \ x_i} \tag{A.1}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \, \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \, \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'} \right) + \rho \ g_i \tag{A.2}$$

Estas equações são conhecidas como as equações de Reynolds (RANS) e diferem das equações originais (continuidade e Navier-Stokes) apenas pela presença da média do produto das flutuações de velocidade $\rho \overline{u_i' u_j'}$ , o chamado tensor de Reynolds. Este termo representa a transferência de quantidade de movimento adicional, causada pela turbulência.

Embora $\rho \overline{u'_i u'_j}$ tenha origem na não linearidade dos termos de inércia da equação de Navier-Stokes, geralmente agrupa-se estes termos à tensão viscosa. Por este motivo e, também, pelo seu papel de aumentar a difusividade da quantidade de movimento, os componentes do tensor de Reynolds são algumas vezes chamados de tensões turbulentas.

## A.2.
## Conceito de Viscosidade Turbulenta

Os modelos de viscosidade turbulenta ou efetiva invocam a idéia de Boussinesq (1877). Esta propõe a proporcionalidade entre as tensões turbulentas e os gradientes de velocidade (Hinze, 1975).

Deste modo, para o caso de fluido incompressível, a formulação toma a forma (Hinze, 1975):

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho \, \kappa \, \delta_{ij} \tag{A.3}$$



O segundo termo da eq. (A.3) é nulo no caso de escoamento incompressíveis. A equação acima introduz o conceito de energia cinética turbulenta média no tempo (κ), definida como:

$$\kappa = \frac{1}{2} \overline{u'_i \, u'_i} \tag{A.4}$$

Fazendo uso da eq. (A.3) para as tensões de Reynolds, as equações de conservação da quantidade de movimento médio são escritas como:

$$\rho \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \overline{p} + \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} \rho \, \kappa \right] + \rho \, g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right] \tag{A.5}$$

É importante destacar que a eq. (A.3) não constitui, por si só, um modelo de turbulência, mas uma formulação geral que fornece uma base para construção de modelos de turbulência, cujo ponto de partida é a avaliação da viscosidade turbulenta em termos das quantidades do escoamento médio.

A grande virtude do conceito de viscosidade turbulenta é não alterar a estrutura da equação, mantendo-a na forma original das equações da Navier-Stokes.

Como a tensão turbulenta é considerada análoga a tensão viscosa, a grande maioria dos modelos de viscosidade turbulenta utiliza a analogia com a viscosidade molecular, para definir a viscosidade adicional $\mu_t$.

Diante deste argumento, considera-se a viscosidade turbulenta como sendo proporcional à massa específica ($\rho$), à flutuação de velocidade ($V_L$) e ao comprimento de escala característico da turbulência ($L$):

$$\mu_t \sim \rho V_L L \tag{A.6}$$

Diferentes aproximações podem ser usadas para avaliar as grandezas características do escoamento turbulento, dando origem a muitas teorias e formulações, geralmente classificadas com base no número de equações diferenciais de transporte utilizadas para descrever estas grandezas. Assim, os modelos freqüentemente são classificados como modelos de zero (ou algébricos), de uma ou de duas equações (Launder & Spalding, 1972).



## A.3.
## Modelos de Zero Equações ou Algébricos

São modelos nos quais a viscosidade turbulenta é avaliada através de expressões algébricas, não envolvendo equações diferenciais de transporte. O modelo de turbulência mais simples é aquele que considera a viscosidade turbulenta constante, estimando-a a partir do conhecimento de que a sua ordem de grandeza é superior a da viscosidade molecular. Esta hipótese tem aplicação muito limitada.

Um dos primeiros modelos de turbulência propostos é o modelo de comprimento de mistura de Prandtl (1925), o qual ainda é muito empregado. O campo da viscosidade turbulenta é levantado ao se considerar o comprimento de escala característico como sendo o comprimento de mistura ($l$) e a velocidade característica como sendo proporcional ao gradiente de velocidade média. Deste modo, a viscosidade turbulenta é dada por (Kays & Crawford, 1993):

$$\mu_t=\rho l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \tag{A.7}$$

A distribuição do comprimento de mistura é prescrita a partir de dados experimentais, variando com o tipo de escoamento. A falta de generalidade dos dados levantados é uma das principais limitações do modelo. Há uma significante base de dados experimentais para escoamentos simples, tais como camada limite e escoamentos cisalhantes. Contudo, especificar o comprimento de mistura em escoamentos complexos é particularmente difícil, pois não há dados experimentais para estimá-lo apropriadamente.

Outra limitação do modelo do comprimento de mistura é a que invoca o princípio do equilíbrio local. Por este princípio, a energia turbulenta é dissipada na mesma proporção em que é produzida. Como resultado, o modelo prevê que a viscosidade turbulenta será nula, quando o gradiente de velocidades médias o for, levando a resultados irreais em muitos casos.

## A.4. Modelos de uma Equação

Nesta classe de modelos de viscosidade de turbulência, uma equação diferencial de transporte é resolvida, para uma quantidade turbulenta. Esta quantidade pode ser usada para determinar o comprimento de escala ou a velocidade de escala, usados na avaliação da viscosidade turbulenta(eq. A.6). O modelo de uma equação mais usado no passado assume a velocidade característica proporcional à raiz quadrada da energia cinética turbulenta ($\kappa^{1/2}$) , dando origem a fórmula de Kolmogorov-Prandtl :

$$\mu_t=C'_\mu \rho \sqrt{\kappa}\, L \tag{A.8}$$

O campo de energia cinética turbulenta é determinado ao se resolver a correspondente equação diferencial de transporte. Esta é obtida a partir das equações de Navier-Stokes. Faz-se o produto escalar da equação da quantidade de movimento com o vetor velocidade $u_i$, tomando-se a média temporal do resultado. Ao se subtrair desta equação a equação da energia mecânica instantânea, obtém-se então a equação desejada da energia cinética turbulenta (κ), conforme mostrado por Hinze (1975):

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\kappa\right)=\upsilon\,\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_j^2}-\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_j'\left(\frac{p'}{\rho}+\kappa'\right)\right]}+ \left(-\overline{u_i' u_j'}\right)\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}-\upsilon\,\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)} \tag{A.9}$$

onde $\upsilon=\mu/\rho$ é a viscosidade cinemática. O primeiro e segundo termos do lado direito estão associados com a difusão da energia cinética turbulenta, enquanto o terceiro termo representa a produção da energia cinética turbulenta. Já o último termo é a parte homogênea da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta (Hinze, 1975), a qual é representada por $\varepsilon$ .

A eq. (A.9) ainda não pode ser utilizada, pois há termos de natureza complexa (quantidades flutuantes) que necessitam ser determinados em função de quantidades conhecidas ou que possam ser calculadas.

Após terem sido introduzidas hipótese adicionais, a forma modelada da equação da energia cinética turbulenta (eq. A.9) passa a ser:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j}\,\kappa\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\upsilon+\frac{\upsilon_t}{\sigma_\kappa}\right)\frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\right]+P_\kappa-\varepsilon \tag{A.10}$$

$$P_\kappa=-\overline{u_i' u_j'}\,\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \tag{A.11}$$

$$\varepsilon=C_D\,\frac{\kappa^{3/2}}{L} \tag{A.12}$$

Embora o modelo de uma equação melhore significativamente a qualidade do cálculo das grandezas turbulentas, em relação aos modelos de comprimento de mistura, a exigência de especificar empiricamente o comprimento de escala, para calcular a dissipação e a viscosidade turbulenta, tem dificultado o seu uso. Esta dificuldade levou a tendência geral de levantar o comprimento de escala, através da equação de transporte de uma quantidade turbulenta, e a partir do seu valor determinar a viscosidade turbulenta e a taxa dissipação ($\varepsilon$). Desta forma tiveram origem os modelos de duas equações.

## A.5.
## Modelos de Duas Equações

Os modelos de viscosidade turbulenta anteriormente considerados tem necessidade de especificar algebricamente um comprimento de escala, o que restringiu bastante a generalização do modelo.

Os modelos de duas equações geralmente estão vinculados à determinação da energia cinética de turbulência ($\kappa$) e a um comprimento de escala ($L$), através de equações diferenciais de transporte. A energia cinética turbulenta é determinada da equação de transporte deduzida na seção anterior (eq. A.10). Já o comprimento de escala $L$ geralmente não é tomado propriamente como variável dependente. Em vez disso, utiliza-se uma combinação de $\kappa$ e $L$ da forma:

$$Z \propto \kappa^m L^n \tag{A.13}$$

com $m$ e $n$ constantes, como variável dependente (Launder & Spalding, 1972). Para obter a equação de $Z$, procede-se em princípio do mesmo modo da derivação da equação de $\kappa$, isto é, faz-se a manipulação das equações de Navier-Stokes. Então, as várias correlações das flutuações devem ser representadas em termos das propriedades calculáveis do escoamento, tais como $\kappa$, $Z$ e gradientes da velocidade média.

Eliminando-se então o comprimento de escala na formulação da viscosidade turbulenta e da dissipação, tem-se o modelo dado pelas duas equações de transporte de $\kappa$ e $Z$.

A primeira tentativa bem sucedida de escrever uma equação de transporte para Z foi realizada em 1942 por Kolmogorov (Launder & Spalding, 1972), que propôs a relação:

$$Z = \kappa^{1/2} L \tag{A.14}$$

Esta relação pode ser interpretada como uma freqüência de turbulência.

Da formulação para a taxa de dissipação de energia turbulenta, eq. (A.12), pode-se retirar a forma mais utilizada para Z :

$$\varepsilon = C_D \kappa^{3/2} L^{-1} \tag{A.15}$$

Logo: $Z=\varepsilon$ ; $m=3/2$ e $n=-1$. Esta forma é conhecida como modelo κ-ε. Existem outros modelos de duas equações, por exemplo, κ-ω e κ-κ$L$, onde $Z=\omega=\kappa L^{-2}$ e $Z=\kappa L$ respectivamente. Entretanto o modelo κ-ε é correntemente o mais popular dos modelos de duas equações.

## A.6. Modelos κ–ε Para Altos Números de Reynolds

O modelo de duas equações mais utilizado é o modelo κ-ε (energia cinética turbulenta - taxa de dissipação de energia cinética turbulenta). Neste modelo, o comprimento de escala característico $L$ é eliminado, ao se combinar a eq. (A.8), para a viscosidade turbulenta, com a eq. (A.12), para a taxa de dissipação turbulenta, resultando:

$$\mu_t = \frac{\rho\, C_\mu \kappa^2}{\varepsilon} \tag{A.16}$$

onde $C_\mu$ é uma constante empírica.

Seguindo a formulação geral para modelos de duas equações, apresentada no item anterior, a taxa de dissipação assumiria a função da variável dependente $Z$ (eq. A.13) (Launder & Spalding, 1972 ):

$$Z = \varepsilon = C_D \kappa^{3/2} L^{-1} \tag{A.17}$$

Torna-se então necessário desenvolver, a partir da manipulação das equações de Navier-Stokes, uma equação diferencial de transporte para ε, como definido anteriormente e rescrito abaixo:

$$\varepsilon = \upsilon \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \tag{A.18}$$

A dedução da equação da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta é feita em cinco etapas:

Inicialmente, obtém-se a equação de transporte das flutuações de velocidade, a partir das equações de Navier-Stokes;

Faz-se a diferenciação da equação de transporte das flutuações de velocidade com respeito a $x_\ell$, onde $\ell$ é um índice livre em relação a equação; a equação resultante é multiplicada por $2\upsilon$. É então feito o produto duplo da equação pelo gradiente das flutuações

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_\ell} \tag{A.19}$$

onde $i$ e $\ell$ são índices livres da equação;

Por último, faz-se a média no tempo. Este procedimento é descrito em Warsi (1993), sendo a equação final dada por:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2} + P_{\varepsilon 3} + P_{\varepsilon 4} + P_{\varepsilon 5} \tag{A.20}$$

onde:

$$P_{\varepsilon 1} = -2\upsilon \overline{u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_l}} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_l} \tag{A.21}$$

$$P_{\varepsilon 2} = -2\upsilon \left[ \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} S_{ij} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} S_{ij} \right] \tag{A.22}$$

$$P_{\varepsilon 3} = -2\upsilon \left[ \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_l \partial x_l} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_l \partial x_l}} \right] \tag{A.23}$$

$$P_{\varepsilon 4} = -2\upsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l}} + \frac{1}{\rho} \left( \overline{\frac{\partial P'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} \right) \right] \tag{A.24}$$

$$P_{\varepsilon 5} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \upsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \tag{A.25}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \tag{A.26}$$

Como no caso da equação de transporte da energia cinética turbulenta, são necessárias hipóteses adicionais para o fechamento da equação da taxa de dissipação (eq. A.20). A modelagem dos diversos termos é vastamente documentada na literatura, como por exemplo, Mansour et at (1989) e Warsi (1993), e não será detalhada aqui.

A equação da taxa de dissipação modelada é finalmente escrita como:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + \left[ C_1 P_\kappa - C_2 \varepsilon \right] \frac{\varepsilon}{\kappa} \tag{A.27}$$

onde:

$$P_\kappa = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \upsilon_t \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{A.28}$$

É importante destacar que a equação da taxa de dissipação, assim como a equação da energia cinética turbulenta, representa um balanço entre o transporte convectivo e o difusivo e a produção e transferência de energia, sendo empregadas no seu fechamento hipóteses empíricas.

Obtém-se finalmente o fechamento do problema da turbulência, com a formulação do seguinte sistema de equações :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u_j} \kappa \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + P_\kappa - \rho \varepsilon \tag{A.29}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\upsilon + \frac{\upsilon_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right] + \left[C_1 P_\kappa - C_2\,\varepsilon\right]\frac{\varepsilon}{\kappa} \tag{A.30}$$

$$P_\kappa = -\overline{u_i' u_j'}\,\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \upsilon_t\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{A.31}$$

$$\mu_t = \frac{\rho\, C_\mu \kappa^2}{\varepsilon} \tag{A.32}$$

O modelo κ-ε é sem dúvida o mais utilizado e um enorme esforço tem sido desprendido, para melhorar o seu desempenho. Porém, em algumas situações comuns de escoamento, o modelo apresenta significativas deficiências.

Algumas propostas de modificações do modelo κ-ε têm sido apresentadas na literatura, visando resolver deficiências do modelo original. Os modelos κ-ε não linear, o κ-ε renormalizado e o κ-ε para baixo número de Reynolds são frutos desse esforço. Por interessar diretamente ao trabalho desenvolvido nesta tese, estas variantes dos modelos de duas equações foram tratadas especificamente no capítulo 3.

## A.7.
## Modelos de Transporte de Tensão

Nesta classe de modelos, o conceito de viscosidade de turbulência é abolido. Em vez deste conceito, equações de transporte para as tensões de Reynolds individuais são resolvidas. Estas equações de transporte são obtidas das equações de Navier-Stokes, conforme mostrado por Rodi (1984) e Warsi (1993). A forma final das equações de transporte, para as tensões turbulentas, é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u_i' u_j'}\right) = \overline{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = G_{ij} + Q_{ij} + F_{ij} + \varepsilon_{ij} + \upsilon\frac{\partial^2 \left(\overline{u_i' u_j'}\right)}{\partial x_k\, \partial x_k} \tag{A.33}$$

onde: $G_{ij}$ é o termo de Produção ou geração de tensões de Reynolds; $Q_{ij}$ é o termo de Redistribuição (pressão-tensão ); $F_{ij}$ é o termo Transporte Difusivo e $\varepsilon_{ij}$ é termo de Dissipação, dados por:

$$G_{ij} = \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \tag{A.34}$$

$$Q_{ij} = \overline{\frac{P'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \tag{A.35}$$

$$F_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{u'_i\, u'_j\, u'_k} - \overline{\frac{P'}{\rho} \left( \delta_{ik}\, u'_j + \delta_{jk}\, u'_i \right)} \right] \tag{A.36}$$

$$\varepsilon_{ij} = -2\upsilon \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \tag{A.37}$$

Há, no lado direito das equações de transporte, termos com tríplice correlação de velocidade, correlações velocidade-pressão e correlações tensão-pressão que não são conhecidas. Naturalmente, equações de transporte adicionais podem ser obtidas para estas quantidades, mas verifica-se que estas novas equações de transporte geram mais incógnitas. Em resumo, não tem sido possível fechar o sistema de equações, usando esta abordagem. Consequentemente, hipóteses de fechamento são feitas, a fim de permitir a modelagem destas correlações adicionais, em termos das quantidades conhecidas.

Duas estratégias distintas tem sido adotadas na modelagem dos termos das equações de transporte das tensões de Reynolds. A primeira consiste em simplificá-las, tornando-as equações algébricas. A segunda é estabelecer modelos para os termos mais complexos e resolver por completo o sistema de equações de transporte diferenciais para os componentes do tensor de Reynolds. Ambas as abordagens são mostrada por Rodi (1984).

## A.8.
## Lei da Parede

Funções de parede são usadas sobre os pontos de malha próximo a parede, para estimar o efeito da parede sobre o escoamento. As funções de parede baseiam-se na hipótese que existe um equilíbrio na camada limite turbulenta.

Consequentemente todas as propriedades relevantes do escoamento podem ser obtidas da lei trivial que descreve tais camadas.

A lei da parede é utilizada por duas grandes razões: primeiro, a função de parede dá uma grande economia computacional ; a segunda razão é que tanto os modelos κ-ε como o de transporte de tensão são definidos para altos números de Reynolds, não sendo válidos na região próxima a parede.

A forma padrão de duas camadas da lei de parede utiliza, para a região próximo ao contorno sólido, o perfil universal de velocidades da seguinte forma (Kays & Crawford, 1993):

$$u^{+}=n^{+} \quad se \;\; n^{+}<11{,}6 \tag{A.38}$$

$$u^{+}=\frac{1}{k_v}\, ln(n^{+})+5 \quad se \;\; n^{+}\geq 11{,}6 \tag{A.39}$$

sendo:

$$u^{+}=\frac{\bar{u}}{u_{\tau}} \tag{A.40}$$

$$n^{+}=\frac{\rho \;\, n\, u_{\tau}}{\mu} \tag{A.41}$$

$$u_{\tau}=\sqrt{\tau / \rho} \tag{A.42}$$

onde $u_{\tau}$ é a velocidade de atrito, τ é a tensão de cisalhamento na parede , *n* é a distância à parede e $k_v$ é a constante de Von Kármán ($k_v$=0,41).

Da hipótese de equilíbrio entre a produção ($P_k$ ) e a dissipação de energia cinética turbulenta (ε) na eq. (A.10) e considerando a tensão cisalhante aproximadamente constante tem-se (Kays & Crawford, 1993):

$$P_{\kappa}=\rho\;\varepsilon \tag{A.43}$$

mas:

$$P_{\kappa}=\mu_{t}\left(\frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,n}\right)^{2} \quad \text{e} \quad \tau=\mu_{t}\left(\frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,n}\right) \tag{A.44}$$

logo:

$$P_k = \tau \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) = \frac{\tau^2}{\mu_t} \qquad \text{(A.45)}$$

então :

$$\tau^2 / \mu_t = \rho\, \varepsilon \qquad \text{(A.46)}$$

Para o modelo κ-ε:

$$\mu_t = \frac{\rho\, C_\mu \kappa^2}{\varepsilon} \qquad \text{(A.47)}$$

Assim

$$\frac{\tau^2}{\rho} = \mu_t\, \varepsilon = \frac{\rho\, C_\mu \kappa^2}{\varepsilon} \varepsilon \qquad \text{(A.48)}$$

Portanto:

$$\tau = \rho C_\mu^{1/2} \kappa \qquad \text{(A.49)}$$

Como τ é constante na região em estudo:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \kappa}{\partial n} = 0 \qquad \text{(A.50)}$$

então, a difusão de κ nas regiões próximas a parede é nula (Kays & Crawford, 1993).

A taxa de dissipação de energia cinética turbulenta (ε) na região próxima a parede é obtida da manipulação das equações acima:

$$P_k = \rho\varepsilon \qquad \text{onde} \qquad P_\kappa = \tau \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \qquad \text{(A.51)}$$

logo:

$$\tau \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) = \rho\, \varepsilon \qquad \text{(A.52)}$$

mas:

$$\tau = \rho \, C_\mu^{1/2} \kappa \tag{A.53}$$

Assim:

$$\varepsilon = C_\mu^{1/2} \kappa \, \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \tag{A.54}$$

Da definição de $n^+$ e $u^+$, tem-se que:

$$\frac{\partial \, \bar{u}}{\partial \, n} = \frac{\tau}{\mu} \, \frac{\partial \, u^+}{\partial \, n^+} \tag{A.55}$$

Do perfil logarítmico tem-se :

$$\frac{\partial \, u^+}{\partial \, n^+} = \frac{1}{k_v \, n^+} \tag{A.56}$$

Das eq. (A.55), (A.56) e (A.57) vem que:

$$\varepsilon = C_\mu^{\,1/2} \kappa \;\; \frac{\tau}{\mu} \, \frac{1}{k_v \, n^+} \tag{A.57}$$

mas:

$$n^+ = \frac{\rho \;\; n \, \sqrt{\tau / \rho}}{\mu} \tag{A.58}$$

logo:

$$\varepsilon = C_\mu^{\,1/2} \kappa \;\; \frac{\sqrt{\tau / \rho}}{k_v \, n^+} \tag{A.59}$$

Da eq. (A.49), então, tem-se a forma final de ε :

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{\,3/4} \;\; \kappa^{\,3/2}}{k_v \, n^+} \tag{A.60}$$