

## 6

### Análise Numérica e Experimental, Validação

Neste capítulo apresentam-se as considerações e resultados numéricos da modelagem tanto para o sistema com e sem apoios elásticos, mostram-se também os resultados obtidos dos ensaios experimentais, finalmente é feita uma comparação entre os resultados da modelagem e os experimentais, constituindo a validação da proposta, considerando três aspectos: a resposta livre (análise dos autovalores), a forma das órbitas, e resposta em frequência. Foram considerados os parâmetros otimizados, com o objetivo de melhorar a qualidade do modelo numérico.

#### 6.1.

##### Sistema sem Apoios Elásticos (ou Apoios Rígidos)

###### 6.1.1.

###### Parâmetros do Sistema

$$m = 2,37 \text{ kg}, R = 0,05 \text{ m}, H = 0,04 \text{ m} \quad (\text{massa, raio e espessura do disco})$$

$$a = 0,23 \text{ m} \quad b = 0,068 \quad (\text{localização do disco})$$

$$l = a + b = 0,298 \text{ m} \quad (\text{comprimento efetivo do eixo})$$

$$E = 210 \text{ GPa} \quad (\text{Módulo de Young do eixo})$$

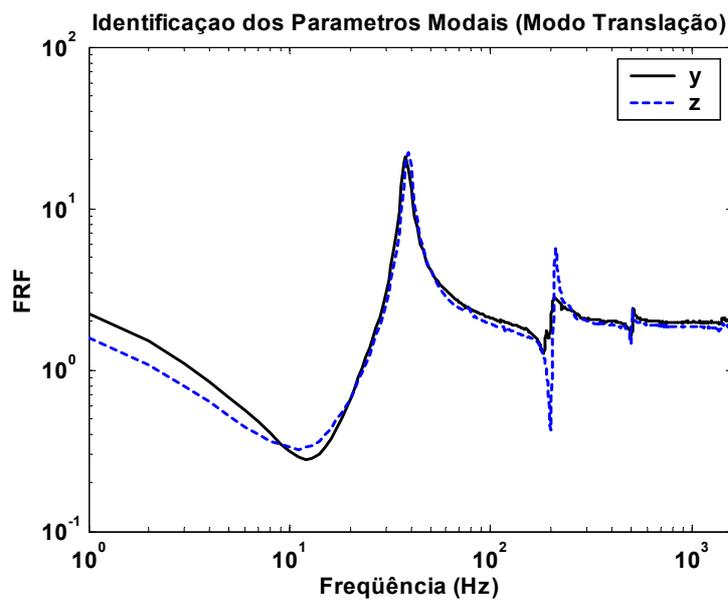
$$I_a = \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12} \quad (\text{Momento de inércia diametral do disco})$$

$$I_p = \frac{mR^2}{2} \text{ kgm}^2 \quad (\text{Momento de inércia polar do disco})$$

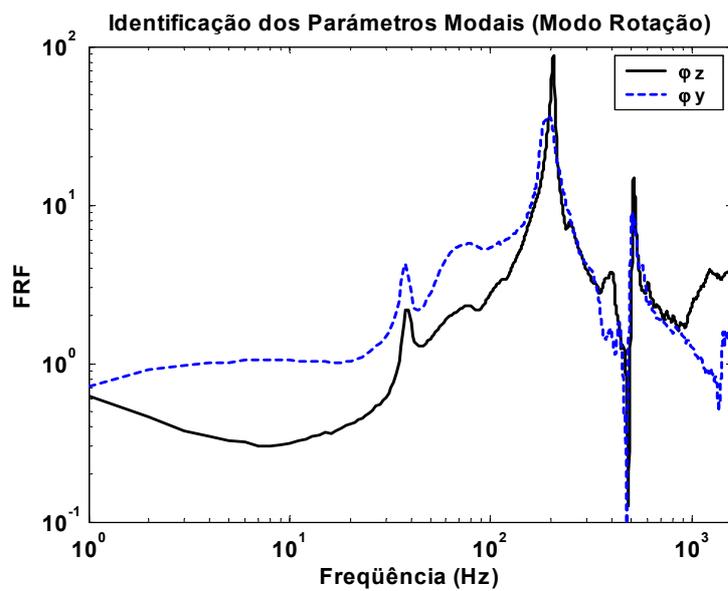
$$I = \frac{\pi}{4} r^4 \text{ m}^4 \quad (\text{Momento de inércia da seção do eixo})$$

### Parâmetros Modais obtidos por Identificação

plano	modo	$\omega_a$ (Hz)	$\xi$
horizontal	translação	37,75	0,045
	rotação	198,25	0,072
vertical	translação	39,00	0,042
	rotação	209,50	0,016



a)



b)

Figura 6.1: Resultados da Identificação, a) Translação, b) Rotação

## Parâmetros das Excitações

### Desbalanceamento

$$\begin{aligned}
 m_e &= 0,00866 \text{ kg} && (\text{massa desbalanceadora}) \\
 \epsilon &= 0,042 \text{ m} && (\text{excentricidade da massa desbalanceadora}) \\
 \beta &= 0^\circ && (\text{para todos os casos})
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

### Má Montagem

caso	$\alpha$ (rad)	$\eta$ (rad)
I	$1,09 \times 10^{-5}$	2,95
II	$1,48 \times 10^{-5}$	2,85

### Empenamento

Como já foi explicado no capítulo 2, realizou-se um ensaio para sua determinação, o resultado do mesmo é mostrado na figura 6.2, onde pode ser vista a órbita obtida a 0,75 Hz, e o seu aspecto logo após ser filtrada. Desta última foi obtido o raio do empenamento  $r_o = 0,021$  mm.

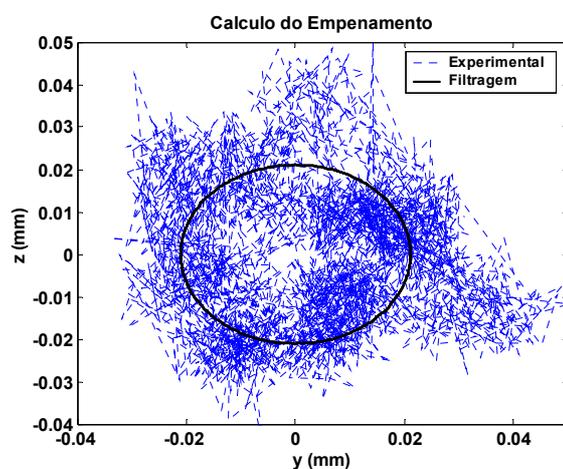


Figura 6.2: Cálculo do Empenamento do Eixo

## Matrizes que constituem as Equações de Movimento

### Matriz de Massa

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2,37 & & & \\ & 0,0017 & & \\ & & 2,37 & \\ & & & 0,0017 \end{pmatrix}
 \tag{6.2}$$

*Matriz de Rigidez*

- Teórica:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 413262 & 24999 & & \\ 24999 & 2413 & & \\ & & 413262 & -24999 \\ & & -24999 & 2413 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

- Otimizada

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 384737 & 25123 & & \\ 25123 & 2616 & & \\ & & 366571 & -25217 \\ & & -25217 & 2949 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

*Matriz de Amortecimento*

Obtida a partir da identificação dos parâmetros modais, e da matriz de rigidez otimizada:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 52,100 & 2,846 & & \\ 2,846 & 0,302 & & \\ & & 29,965 & -0,490 \\ & & -0,490 & 0,074 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

*Matriz Giroscópica*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0029.\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0029.\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

*Excitações*

- Desbalanceamento e Má Montagem para o primeiro caso:

$$\mathbf{F}_{des} + \mathbf{F}_{mm} = \begin{pmatrix} 0,00036.\Omega^2.\cos(\Omega t) \\ -1,277 \times 10^{-8}.\Omega^2.\cos(\Omega t + 2,95) \\ 0,00036.\Omega^2.\sin(\Omega t) \\ 1,277 \times 10^{-8}.\Omega^2.\sin(\Omega t + 2,95) \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

- Desbalanceamento e Má Montagem para o segundo caso:

$$\mathbf{F}_{\text{des}} + \mathbf{F}_{\text{mm}} = \begin{Bmatrix} 0,00036 \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t) \\ -1,734 \times 10^{-8} \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t + 2,85) \\ 0,00036 \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t) \\ 1,734 \times 10^{-8} \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t + 2,85) \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

- Empenamento, para os dois casos (dependendo do  $\gamma$ ):

$$\mathbf{F}_{\text{emp}} = \begin{Bmatrix} 8,079 \cos(\Omega t - \gamma) \\ 0,527 \cos(\Omega t - \gamma) \\ 7,697 \sin(\Omega t - \gamma) \\ -0,529 \sin(\Omega t - \gamma) \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

### 6.1.2.

#### Comparação entre os Resultados Numéricos e Experimentais

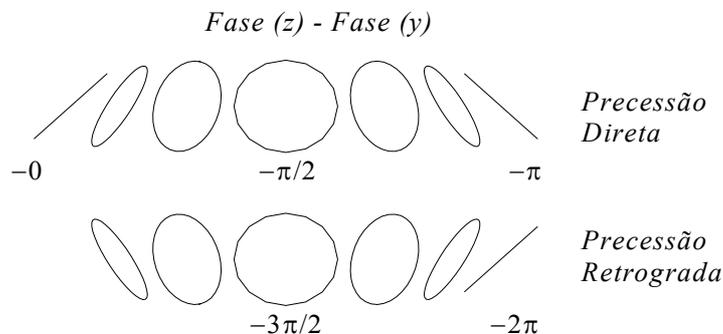
##### Equação Característica

Da modelagem numérica obteve-se as frequências críticas:

$$\omega_{c_1} = 36,48 \text{ Hz} \quad \omega_{c_2} = 40,28 \text{ Hz} \quad \omega_{c_3} = 131,50 \text{ Hz} \quad (6.10)$$

##### Fase entre os Sinais

Além da amplitude dos sinais dos deslocamentos horizontal ( $y$ ) e vertical ( $z$ ), o outro aspecto importante é a fase entre elas, que determina a forma da órbita, e o sentido da precessão. A variação da forma da órbita e o sentido da precessão em função da fase entre os sinais, é mostrada nas figuras 6.3:



6.3a)

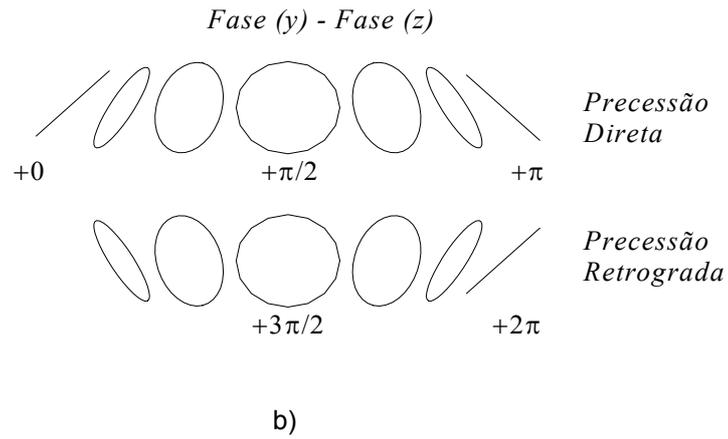
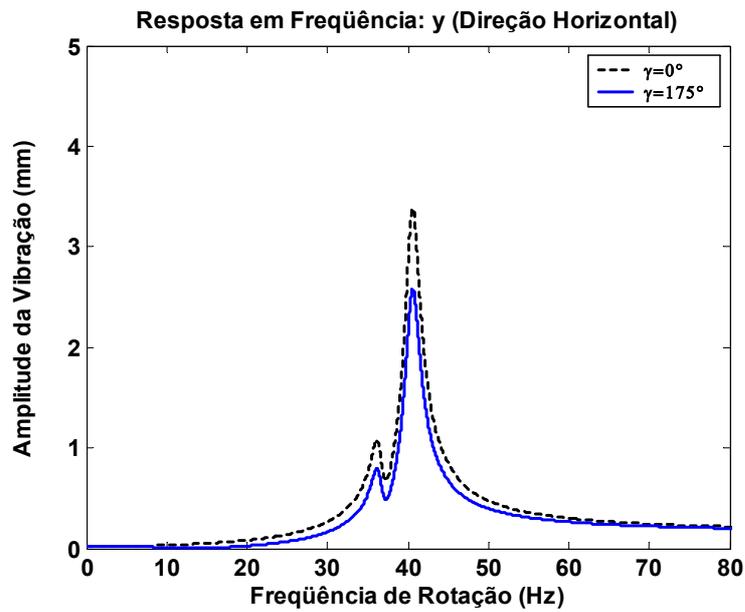


Figura 6.3: Forma da Orbita e Sentido da Precessão em função da Fase

### Comparação das Respostas para o Primeiro e Segundo Caso

Da modelagem numérica:



6.4a)

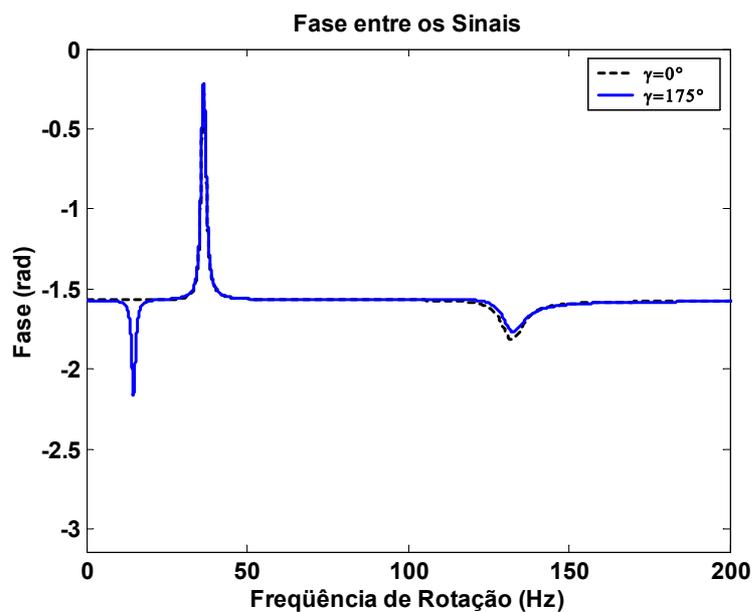
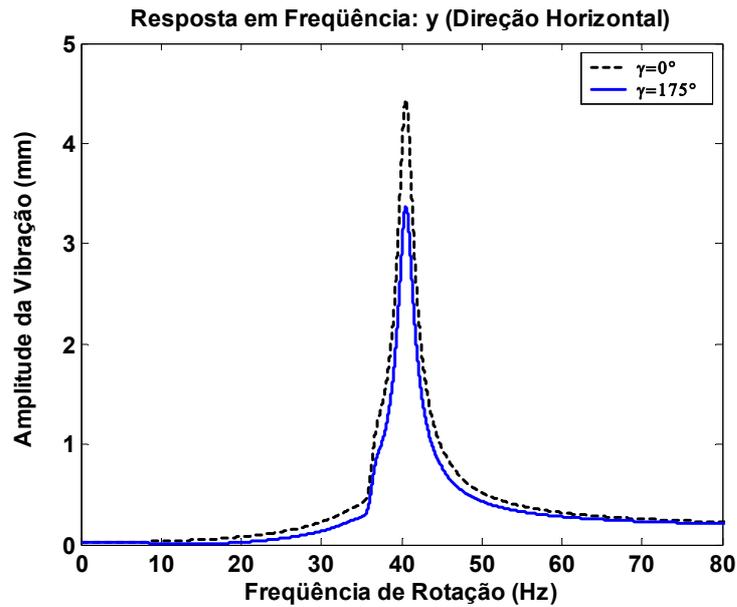


Figura 6.4: a) Resposta em y, b) Resposta em z, c) Fase entre y e z,  
Comparação entre os dois Casos

### Resposta Livre do Sistema - Testes

A partir de um processo de identificação, foram obtidos os autovalores do sistema em função da freqüência, construindo-se o diagrama de Campbell experimentalmente, mostrando na figura 6.5 os resultados dos testes.

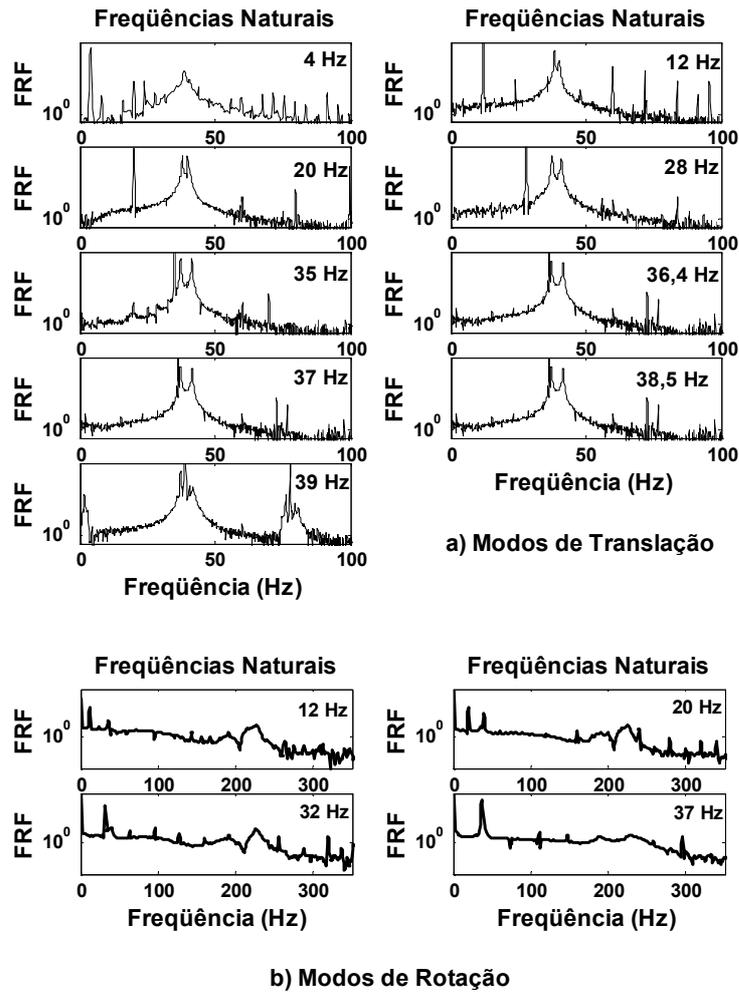


Figura 6.5: a) Modos de Translação, b) Modos de Rotação

### Resposta Livre – Validação

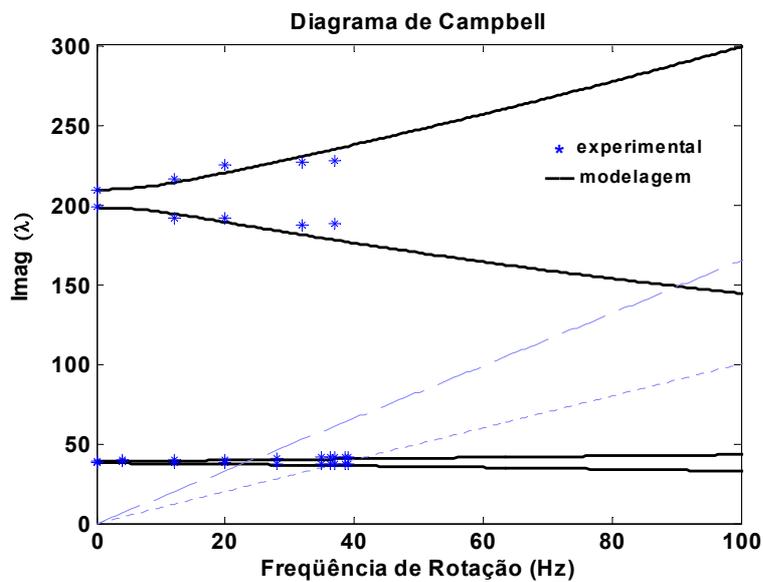
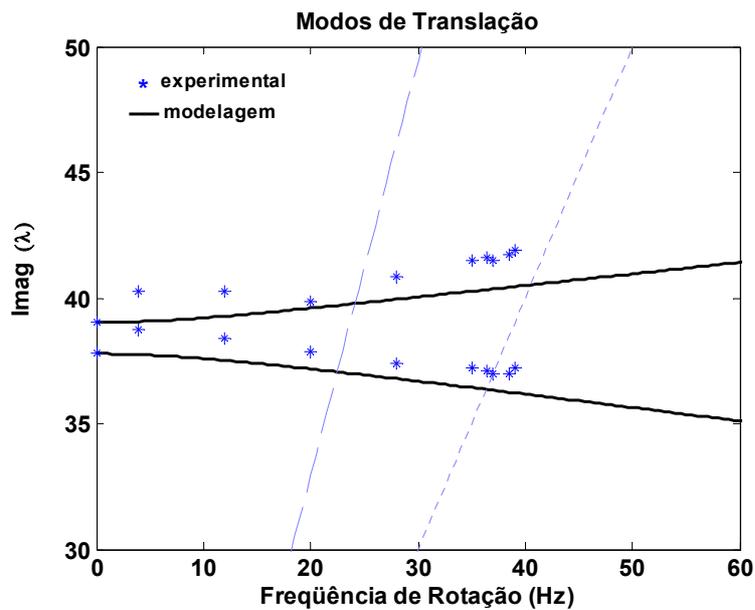
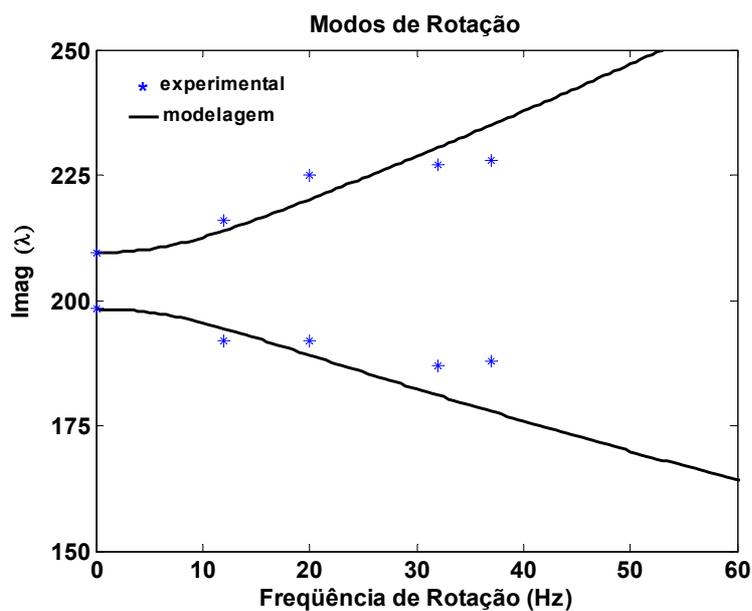


Figura 6.6: Validação do Diagrama de Campbell (Parte Imag. dos Autovalores)



Ampliação dos Modos de Translação na figura 6.6



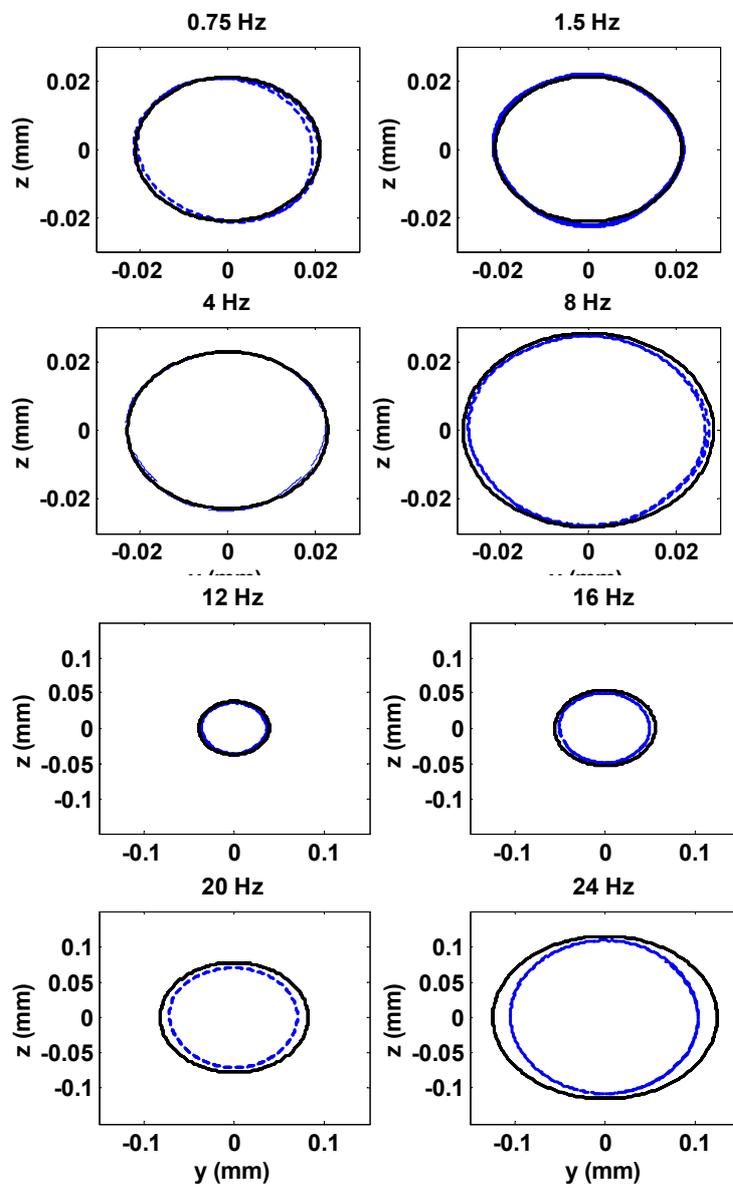
Ampliação dos Modos de Rotação na figura 6.6

Os desvios são:

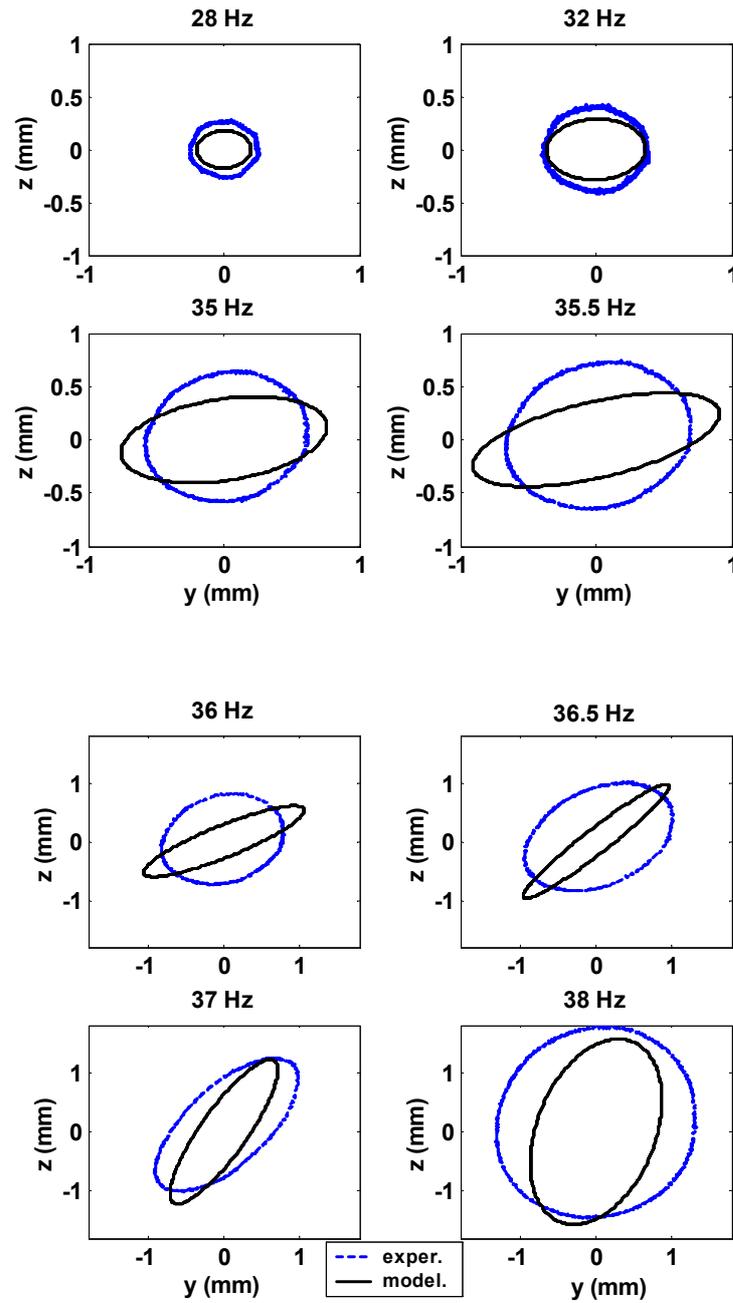
	Modo Translação	Modo Rotação
Desvio (Hz)	0,94	4,89
Diferença Máxima	3,40 % (a 39 Hz)	5,41 % (a 37 Hz)

## Resposta Forçada – Validação

- *Órbitas para o Primeiro Caso* (desbalanceamento e empenamento estão em fase)



6.7a)



b)

Figura 6.7: Validação – Orbitas para o Primeiro Caso

- *Órbitas para o Segundo Caso (desbalanceamento e empenamento em defasagem de 175°).*

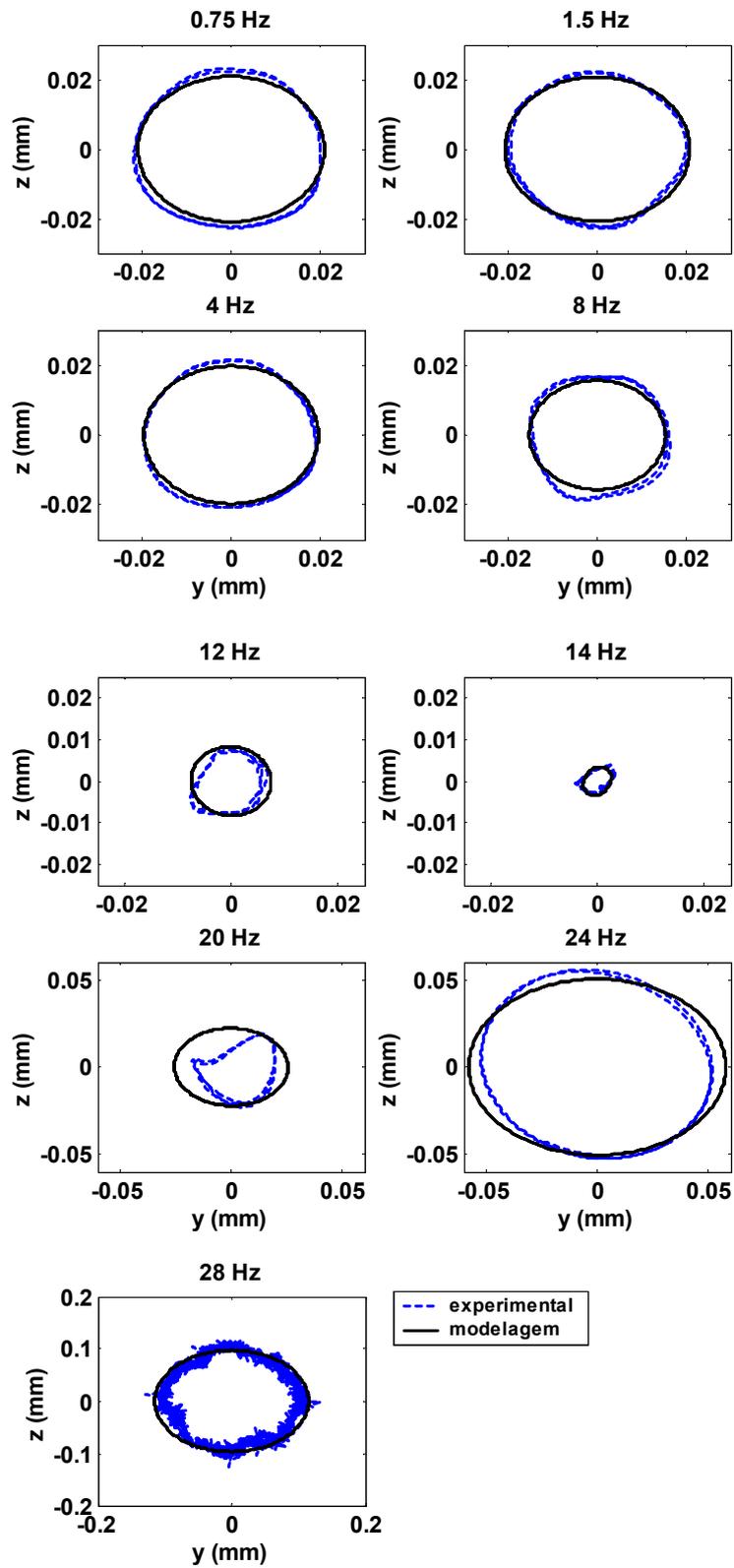
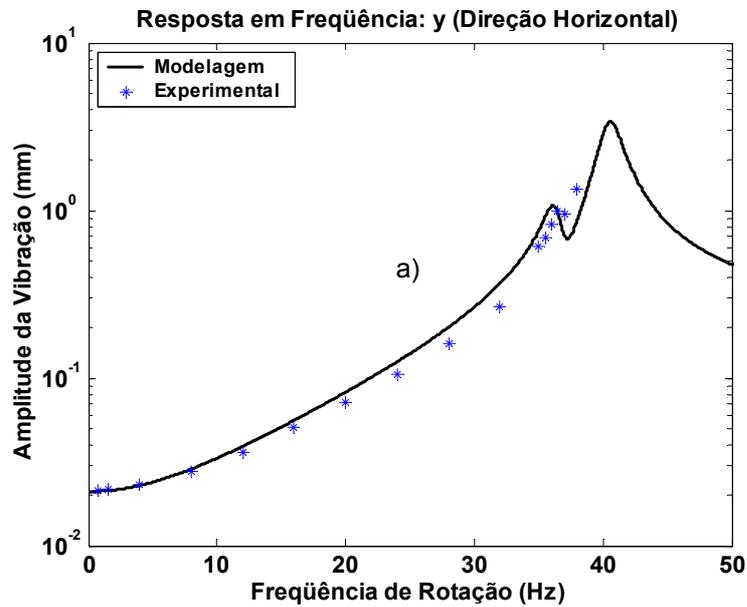
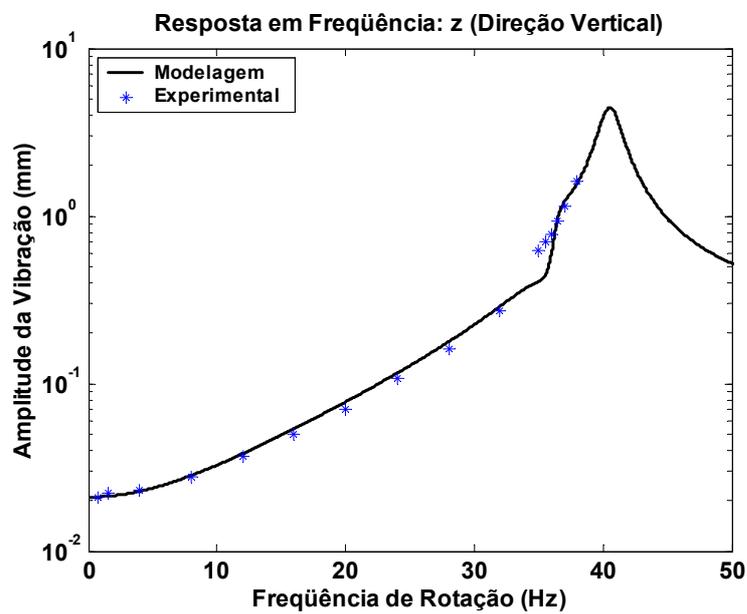


Figura 6.8: Validação – Órbitas para o Segundo Caso

- *Resposta em Frequência para o Primeiro Caso*



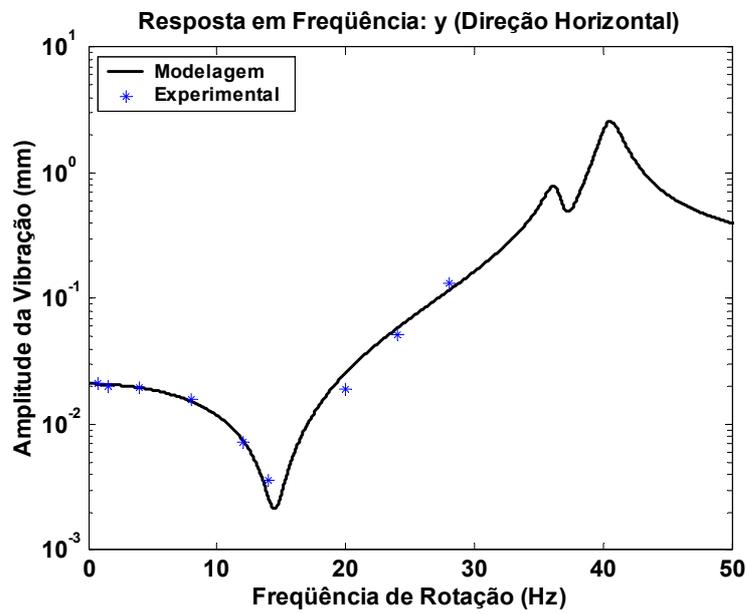
a)



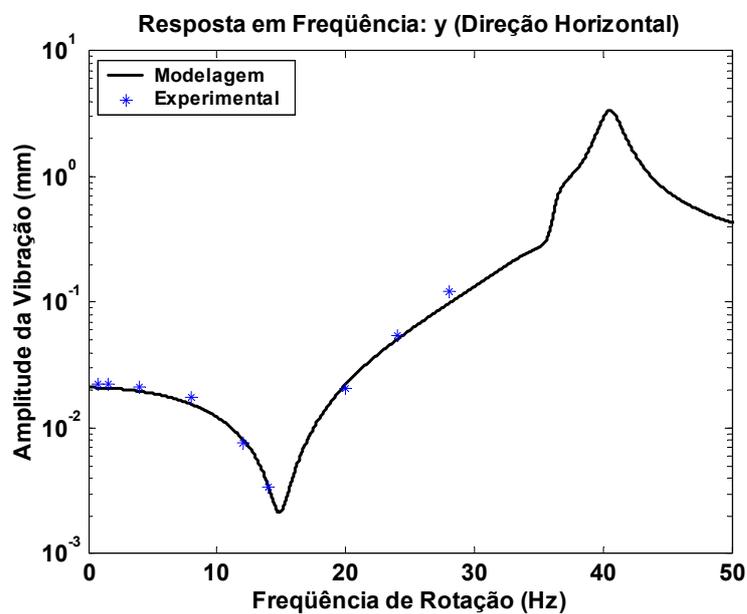
b)

Figura 6.9: Resposta em Frequência para o Primeiro Caso,  
a) Direção Horizontal (y), b) Direção Vertical (z)

- *Resposta em Freqüência para o Segundo Caso (desbalanceamento e empenamento em defasagem de  $175^\circ$ )*



a)



b)

Figura 6.10: Resposta em Freqüência para o Segundo Caso,  
a) Direção Horizontal (y), b) Direção Vertical (z)

Os desvios são:

	Primeiro Caso		Segundo Caso	
	Dir. Horiz.(y)	Dir. Vert.(z)	Dir. Horiz.(y)	Dir. Vert.(z)
Desvio (mm)	0,162	0,099	0,012	0,005
Diferença Máxima	37,27 % (a 32 Hz)	36,98 % (a 35,5 Hz)	35,13 % (a 20 Hz)	20,21 % (a 28 Hz)

## 6.2.

### Características Dinâmicas dos Apoios Elásticos

#### Geometria e constituição dos Apoios

*material do apoio: silicone*

$$D_m = 0,033 \text{ m} \quad (\text{diâmetro medio do apoio})$$

$$b_w = 0,007 \text{ m} \quad (\text{espessura do apoio}) \quad (6.11)$$

$$t_w = 0,010 \text{ m} \quad (\text{altura da seção do silicone})$$

$$\beta_w = \frac{b}{t} = 0,7$$

#### Cálculo da Rigidez e Amortecimento dos Apoios a partir do Módulo Complexo

O cálculo foi realizado segundo a metodologia apresentada na seção 3.3, a partir do módulo complexo:

$$G^* = G(1 + i.\eta) \quad (6.12)$$

Usando as expressões (3.4), (3.9) e (3.13):

$$k_1 = \pi.D_m.\frac{\beta_w}{2}(5 + \beta_w^2)G \quad (6.13)$$

$$c_1 = k_1.\eta$$

Substituindo a expressão (6.11) e (6.12) na equação (6.13):

$$k_1 = 0,199.G \quad (6.14)$$

$$c_1 = k_1.\eta = 0,199.G.\eta$$

## Levantamento Direto da Rigidez e Amortecimento dos Apoios

Segundo o procedimento desenvolvido na seção 3.5.

### Testes Forçados

Sistema No.	Apoios Rígidos			Apoios Elásticos		
	$m$ (kg)	$c$ (Ns/m)	$k$ (N/m)	$\omega_a$ (Hz)	$c_l$ (Ns/m)	$k_l$ (N/m)
1	2,50	6,44	84779	27,36	33671	290088
2	4,77	10,19	113428	21,62	9139	204981
3	1,02	2,00	77014	40,25	21218	225799
4	1,02	16,19	285460	68,00	36138	260886

### Testes de Impacto

Sistema No.	Apoios Rígidos			Apoios Elásticos			
	$m$ (kg)	$\omega_a$ (Hz)	$\xi$	$\omega_a$ (Hz)	$\xi$	$c_l$ (Ns/m)	$k_l$ (N/m)
1	2,50	29,31	0,054	27,00	0,067	26742	235204
2	4,77	21,00	0,077	19,50	0,088	18427	261058
3	1,02	45,87	0,039	42,18	0,049	18509	234087
4	1,02	87,75	0,069	72,31	0,098	29559	334608
5	1,02	124,12	0,105	89,12	0,183	54583	335599

Nesta forma de determinar os parâmetros dos apoios existe uma série de erros na hora da implementação experimental, um dos mais notórios é aquele cometido pela diferença do comprimento do eixo entre o sistema com apoios rígidos e o sistema com apoios elásticos, aproximadamente 2,5 mm (0,84 %), fazendo com que exista um erro de 2,5% no cálculo da rigidez do apoio.

Nos testes de impacto, os pontos obtidos para as mais altas frequências, correspondem aos sistemas adaptados mais rígidos, nos quais, as diferenças entre os parâmetros modais no sistema com e sem apoios elásticos, foram menores, na medida em que a frequência aumentava, ocasionando uma maior incerteza, já que o processo de identificação e otimização são sensíveis a estas diferenças.

### Aproximação do Módulo Complexo – Funções de Ajuste

Como foi explicado na seção 3.6, o módulo complexo será ajustado com dois modelos: o modelo apresentado por Espíndola (modelo 1) segundo a equação (3.43), para a solução particular; e o modelo ADF (modelo 2) segundo a equação (3.17), para a solução homogênea. Com o objetivo de comparar o comportamento do sistema com diferentes materiais viscoelásticos, se incluirá o cálculo com o Dyac 601, fabricado por SoundCoat, material usado no trabalho realizado por Bavastri [3]. Só na solução particular será usada a expressão da rigidez e amortecimento dos apoios (através do modelo 1), já na solução homogênea só se precisam dos parâmetros ADF (modelo 2).

#### Dyac 601

- *Modelo 1:* segundo a equação (3.43), os parâmetros otimizados são:

$$G_L = 4,42 \times 10^6 \quad G_H = 2,41 \times 10^8 \quad \beta_R = 0,80 \quad \varphi_o = 5,17 \times 10^{-4} \quad (6.15)$$

A rigidez e o amortecimento dos apoios, são calculados usando as equações (3.43), (6.14) e (6.15).

- *Modelo 2:* segundo a equação (3.17), os parâmetros otimizados são:

$$\begin{aligned} G_o &= 5,99 \times 10^6 & \Delta_1 &= 11,01 & \Delta_2 &= 11,01 & \Delta_3 &= 20,64 \\ \psi_1 &= 1,57 \times 10^5 & \psi_2 &= 1,57 \times 10^5 & \psi_3 &= 1,82 \times 10^4 \end{aligned} \quad (6.16)$$

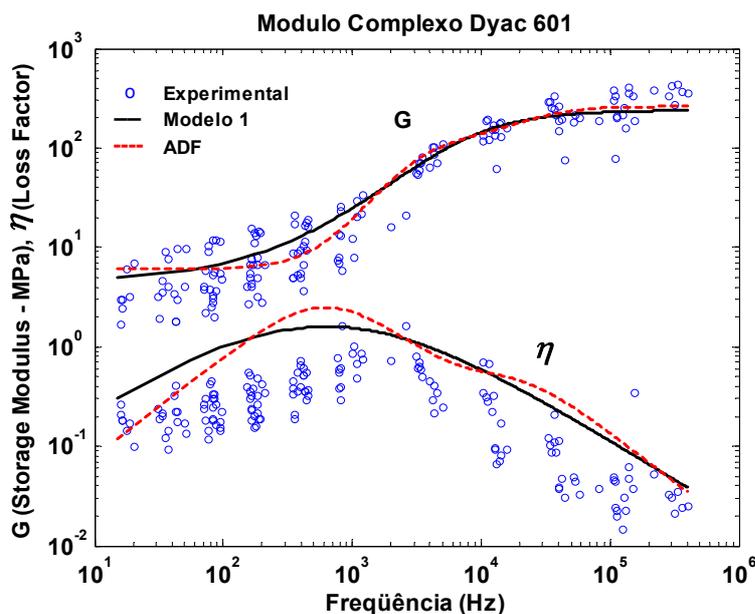


Figura 6.11: Módulo Complexo do Dyac 601

### Silicone (RJ)

Na seção 6.2 foram obtidos experimentalmente valores para a rigidez ( $k_I$ ) e o amortecimento ( $c_I$ ) dos apoios elásticos, a partir de estes e usando a equação (3.42), pode-se obter o módulo complexo.

- *Modelo 1*: segundo a equação (3.43), os parâmetros otimizados são:

$$G_L = 1,00 \cdot 10^4 \quad G_H = 7,36 \cdot 10^7 \quad \beta_R = 6,18 \cdot 10^{-2} \quad \varphi_o = 1,50 \cdot 10^{-2} \quad (6.17)$$

A rigidez e o amortecimento dos apoios, são calculados usando as equações (3.43) e (6.14) e (6.17).

- *Modelo 2*: segundo a equação (3.17), os parâmetros otimizados são:

$$\begin{aligned} G_o &= 1,11 \cdot 10^6 & \Delta_1 &= 0,32 & \Delta_2 &= 0,27 & \Delta_3 &= 0,37 \\ \psi_1 &= 2,10 \cdot 10^3 & \psi_2 &= 37,62 & \psi_3 &= 8,36 \cdot 10^4 \end{aligned} \quad (6.18)$$

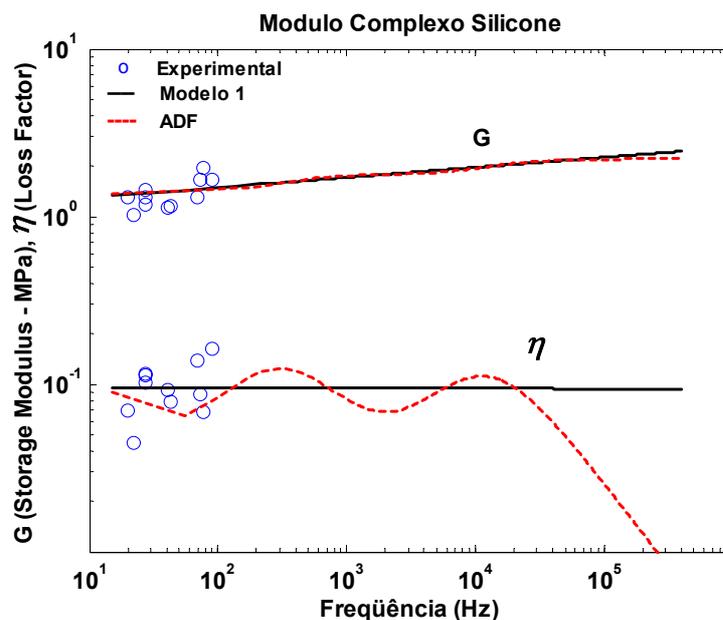


Figura 6.12: Módulo Complexo do Silicone (RJ)

### Silicone (SC)

A expressão do módulo complexo usando o modelo 1 foi segundo relatório.

- *Modelo 1*: segundo a equação (3.43), os parâmetros são:

$$G_L = 4,43.10^5 \quad G_H = 2,41.10^8 \quad \beta_R = 0,0941 \quad \varphi_o = 1,54.10^{-3} \quad (6.19)$$

A rigidez e o amortecimento dos apoios, são calculados usando as equações (3.43) e (6.14) e (6.19).

- *Modelo 2*: segundo a equação (3.17), os parâmetros otimizados são:

$$\begin{aligned} G_o &= 8,41.10^5 & \Delta_1 &= 0,34 & \Delta_2 &= 0,29 & \Delta_3 &= 0,25 \\ \psi_1 &= 1,67.10^5 & \psi_2 &= 7,70.10^3 & \psi_3 &= 113 \end{aligned} \quad (6.20)$$

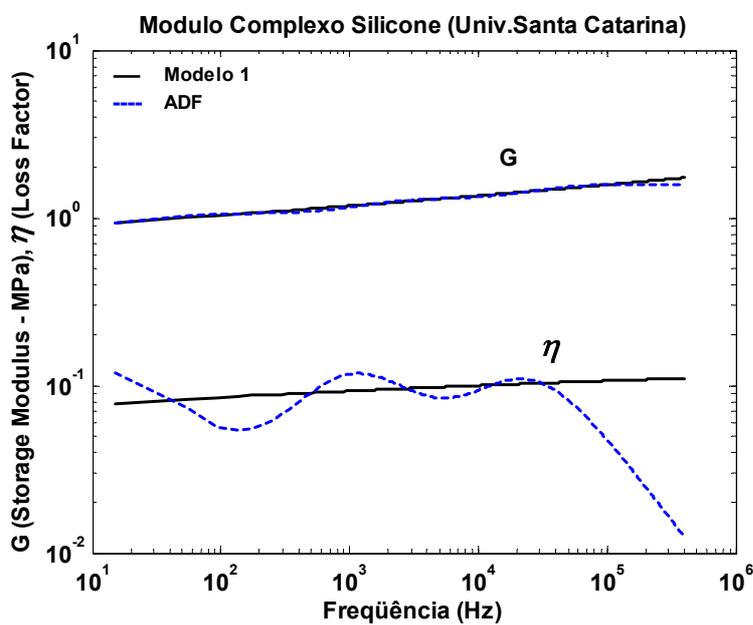


Figura 6.13: Módulo Complexo do Silicônio (SC)

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos através de técnicas diferentes do levantamento do módulo complexo, mostra-se na figura 6.14 os pontos obtidos experimentalmente, o ajuste segundo o modelo 1 para estes pontos, e o ajuste segundo o mesmo modelo fornecido por teste específico realizado pela Universidade de Santa Catarina para amostras deste material.

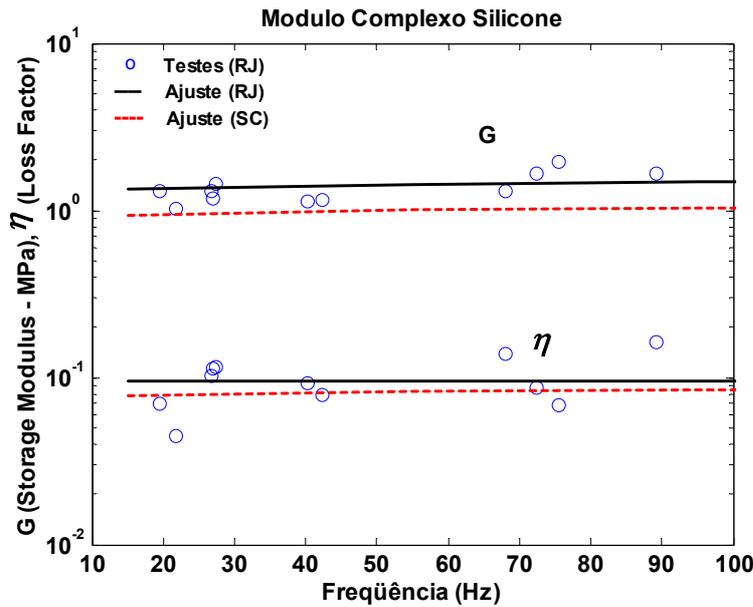


Figura 6.14: Módulo Complexo do Silicone na faixa dos testes

### 6.3.

#### Sistema com Apoios Elásticos

##### 6.3.1.

#### Parâmetros do Sistema

Visto que foi usada a mesma bancada tratada no capítulo 2, os parâmetros do eixo, disco e a sua posição são os mesmos.

Os parâmetros dos apoios elásticos são:

$$\begin{aligned}
 m_r &= 0,02332 \text{ kg} && (\text{massa do apoio}) \\
 k_1 &= 0,199 \cdot \text{Re}(G^*) \frac{N}{m} && (\Omega \text{ em Hz}) \\
 c_1 &= 0,199 \cdot \text{Im}(G^*) \frac{N.s}{m} && (\Omega \text{ em Hz})
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Onde a expressão do módulo complexo depende do material viscoelástico e do modelo de ajuste adotado.

#### Matrizes que constituem as Equações de Movimento

*Matriz de Massa*





$$\mathbf{F}_{des} + \mathbf{F}_{mm} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,00036.\Omega^2.\cos(\Omega t) \\ -1,277 \times 10^{-8}.\Omega^2.\cos(\Omega t + 2,95) \\ 0 \\ 0 \\ 0,00036.\Omega^2.\sin(\Omega t) \\ 1,277 \times 10^{-8}.\Omega^2.\sin(\Omega t + 2,95) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

- Desbalanceamento e Má Montagem para o segundo caso:

$$\mathbf{F}_{des} + \mathbf{F}_{mm} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,00036.\Omega^2.\cos(\Omega t) \\ -1,734 \times 10^{-8}.\Omega^2.\cos(\Omega t + 2,85) \\ 0 \\ 0 \\ 0,00036.\Omega^2.\sin(\Omega t) \\ 1,734 \times 10^{-8}.\Omega^2.\sin(\Omega t + 2,85) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

- Empenamento, para os dois casos (dependendo do  $\gamma$ ):

$$\mathbf{F}_{emp} = \begin{Bmatrix} -0,073 \cos(\Omega t - \gamma) \\ 8,079 \cos(\Omega t - \gamma) \\ 0,527 \cos(\Omega t - \gamma) \\ -8,006 \cos(\Omega t - \gamma) \\ 0,020 \sin(\Omega t - \gamma) \\ 7,697 \sin(\Omega t - \gamma) \\ -0,529 \sin(\Omega t - \gamma) \\ -7,718 \sin(\Omega t - \gamma) \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

### 6.3.2.

#### Comparação entre os Resultados Numéricos e Experimentais

##### Determinante da Equação Característica

- Dyac 601

$$\omega_{c_1} = 35,6 \text{ Hz} \quad (6.30)$$

- Silicone (RJ)

$$\omega_{c_1} = 32,20 \text{ Hz} \quad \omega_{c_2} = 93,80 \text{ Hz} \quad (6.31)$$

- Silicone (SC)

$$\omega_{c_1} = 30,40 \text{ Hz} \quad \omega_{c_2} = 87,20 \text{ Hz} \quad (6.32)$$

Resposta Livre – Validação

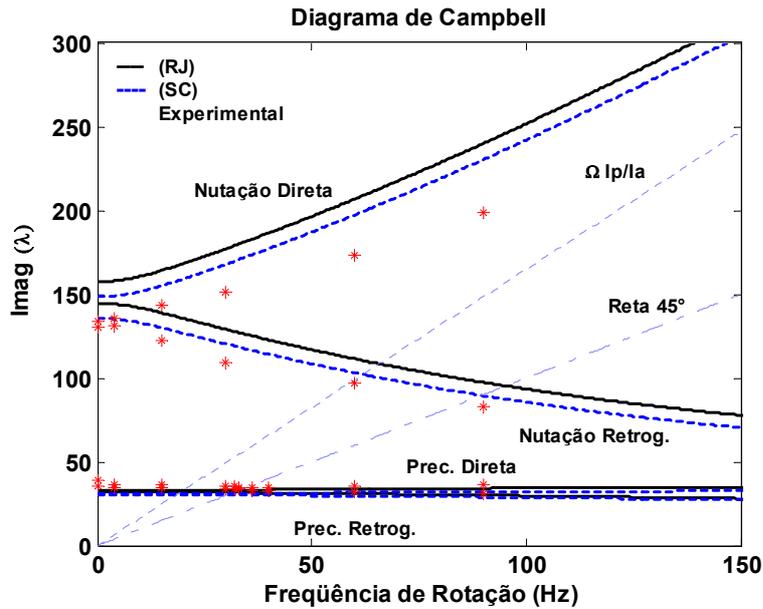
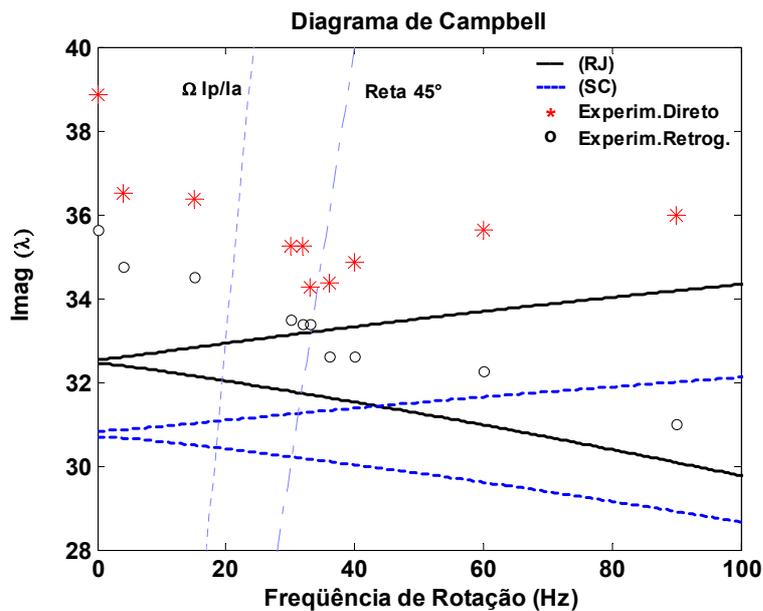
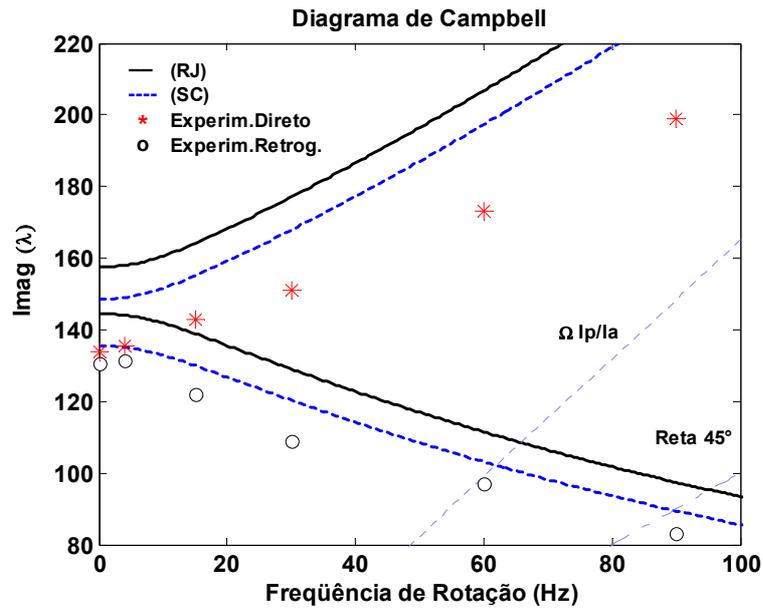


Figura 6.15: Diagrama de Campbell para o Silicone (Parte Imaginária dos Autovalores)



Ampliação dos Modos de Translação



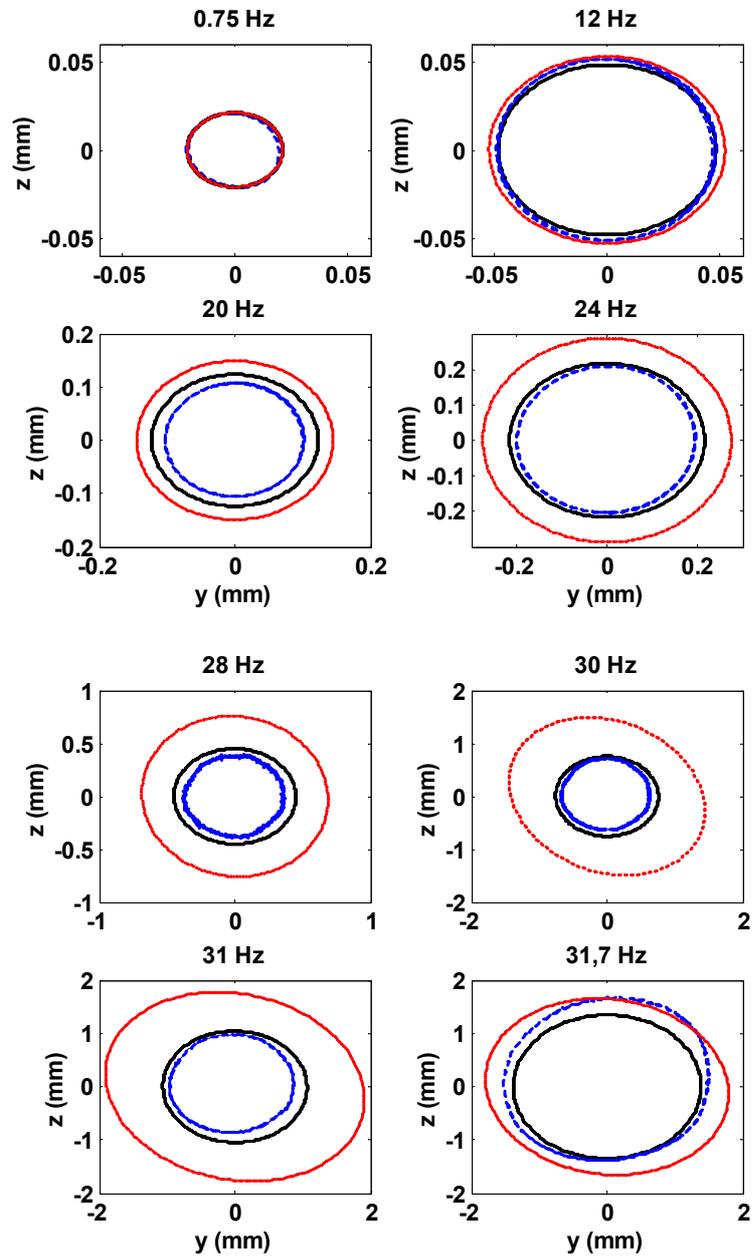
#### Ampliação dos Modos de Rotação

Os desvios são:

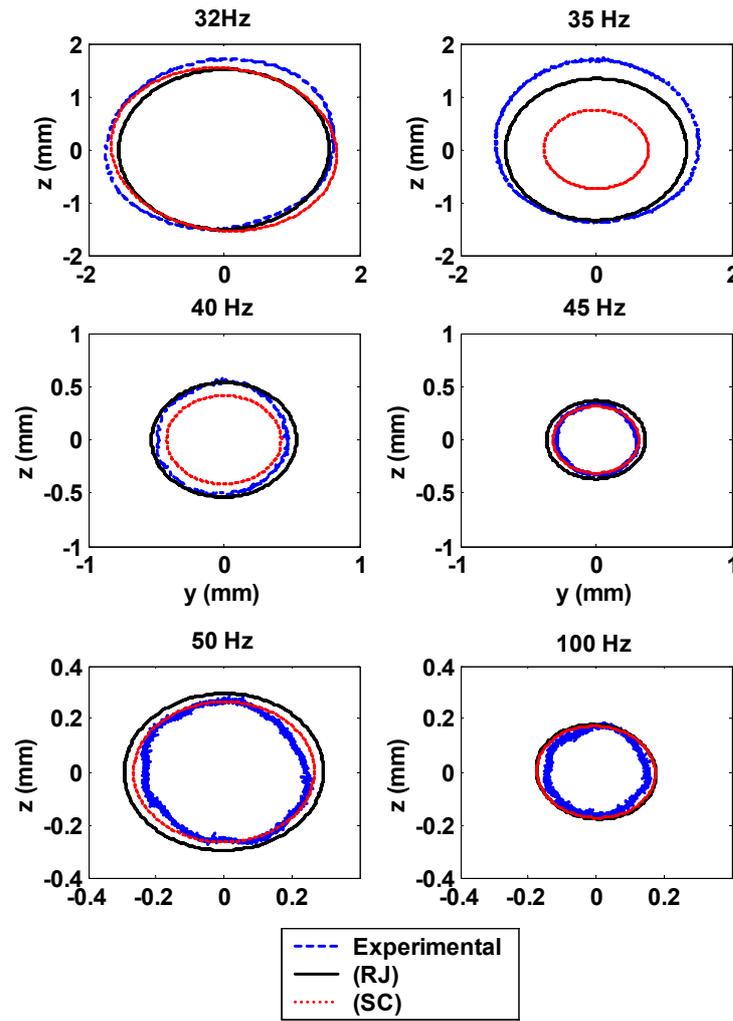
		Modo Translação	Modo Rotação
Silicone (RJ)	Desvio (Hz)	2,50	23,19
	Diferença Máxima (%)	16,55% (a 0 Hz)	20,58 % (a 90 Hz)
Silicone (SC)	Desvio (Hz)	4,08	15,01
	Diferença Máxima (%)	20,69 % (a 0 Hz)	15,74 % (a 90 Hz)

## Resposta Forçada – Validação

- *Órbitas*



6.16a)



b)

Figura 6.16: Orbitas para o Silicone

- *Resposta em Frequência*

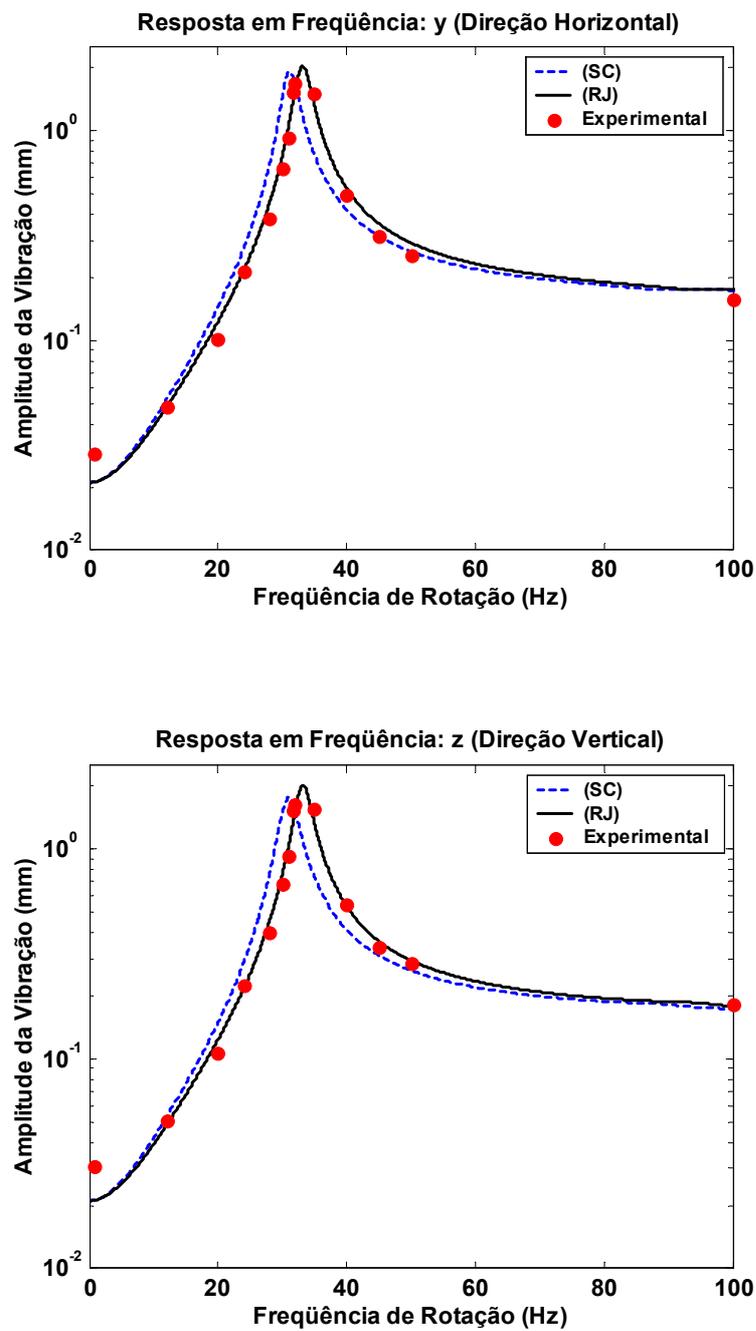


Figura 6.17: Resposta em Frequência para o Silicône

Os desvios são:

	Silicone (RJ)		Silicone(SC)	
	Dir. Horiz.(y)	Dir. Vert.(z)	Dir. Horiz.(y)	Dir. Vert.(z)
Desvios (mm)	0,087	0,093	0,406	0,397
Diferença	27,24 %	31,72 %	119,70 %	118,02 %
Máxima (%)	(a 0 Hz)	(a 0 Hz)	(a 30 Hz)	(a 30 Hz)

#### 6.4.

#### Resposta para Apoios com Distintos Materiais Viscoelásticos

Com o objetivo de comparar a resposta do sistema sem apoios elásticos (ou apoios rígidos), e com apoios usando diferentes tipos de materiais viscoelásticos (Dyac 601 e silicone (SC)), realizou-se uma análise a partir dos resultados das simulações numéricas. Os dados do módulo complexo do Dyac 601 foram obtidos a partir de Bavastri [3].

#### Módulo Complexo:

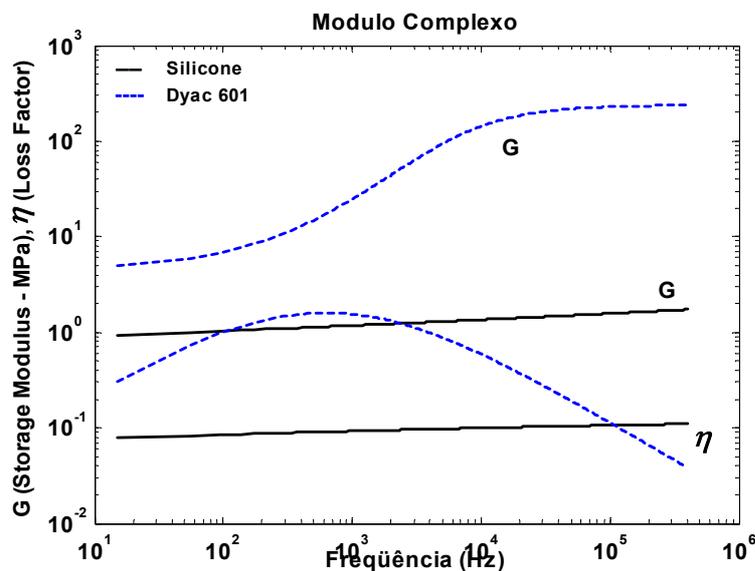
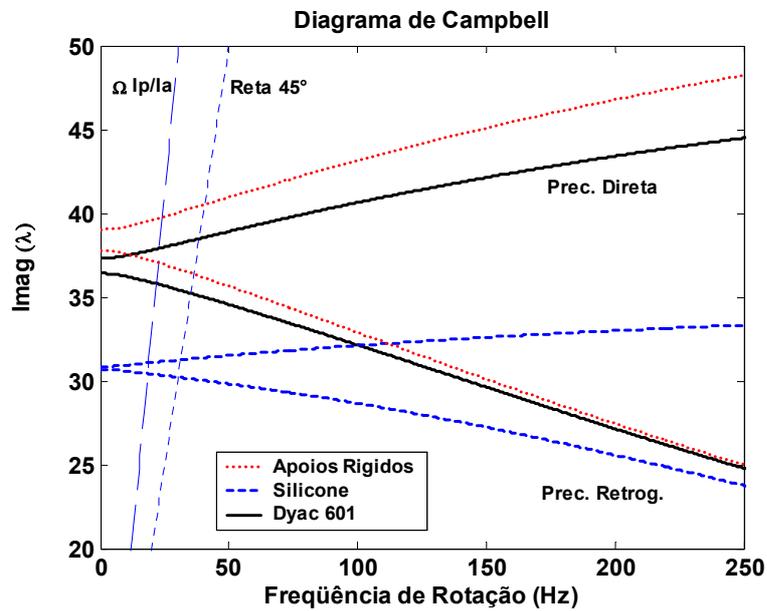
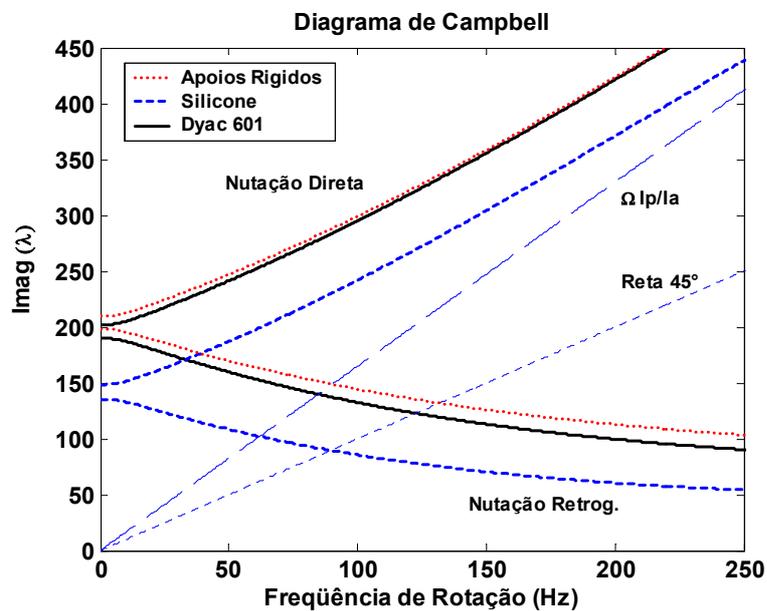


Figura 6.18: Módulo Complexo para o Dyac 601 e o Silicone

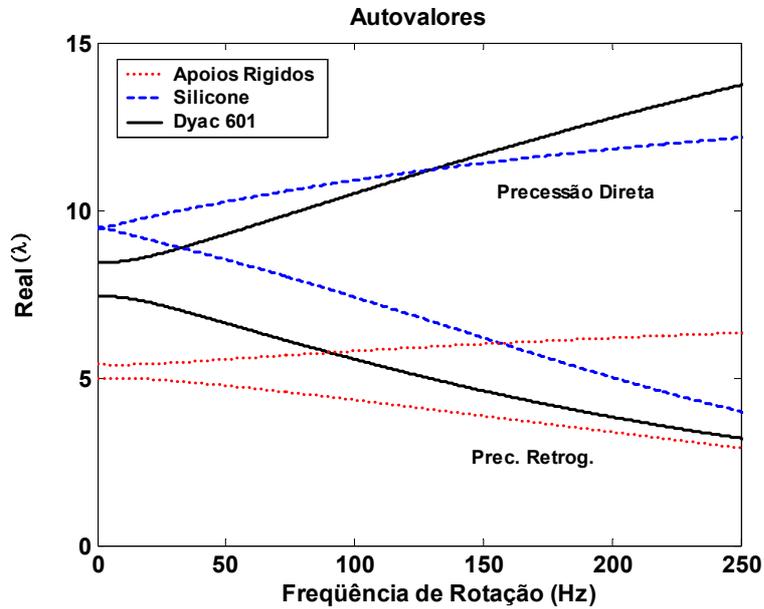
## Diagrama de Campbell



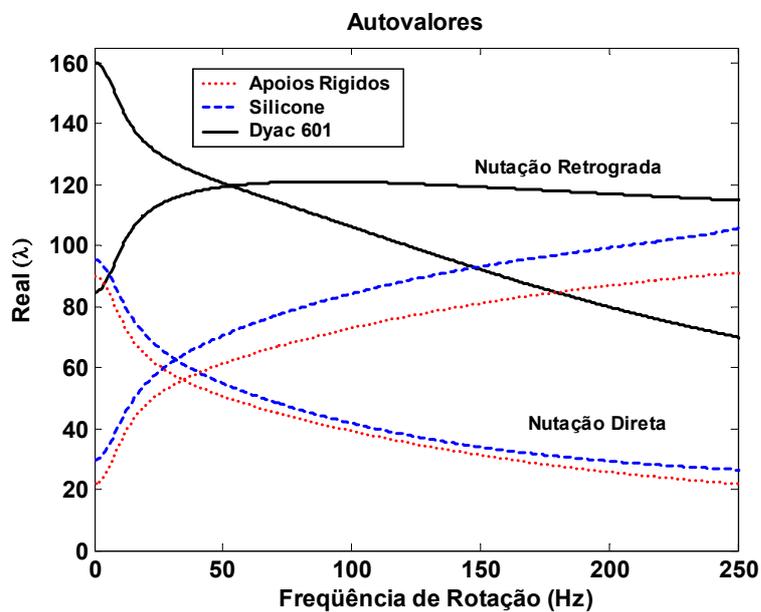
6.19a)



6.19b)



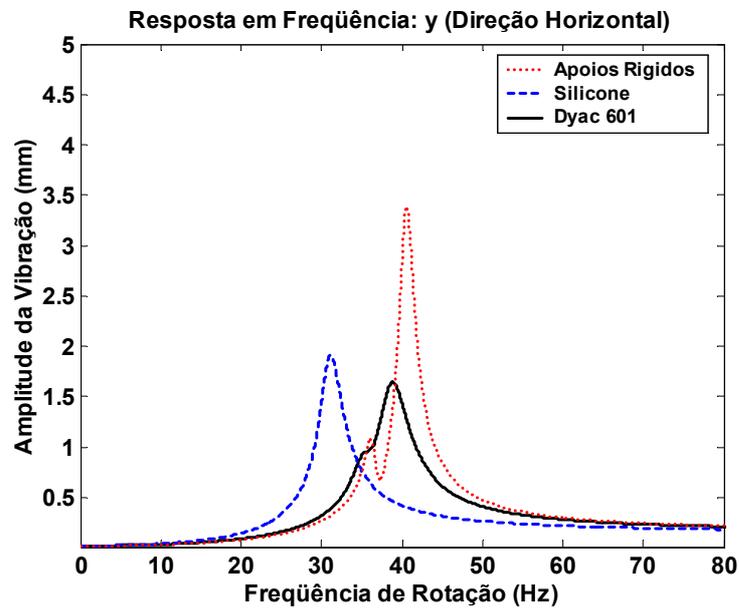
c)



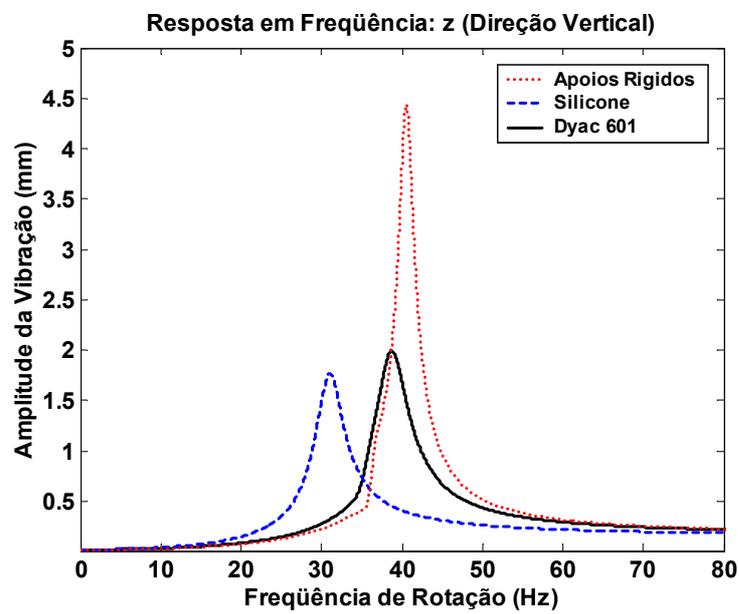
d)

Figura 6.19: Diagrama de Campbell para os Apoios rígidos, para o Dyac 601 e para o Silicone, a) Parte Imaginária dos Autovalores no modo translação, b) Parte Imaginária dos Autovalores no modo Rotação, c) Parte Real dos Autov. – Translação, d) Parte Real dos Autov. – Rotação.

## Resposta em Frequência



6.20a)



6.20b)

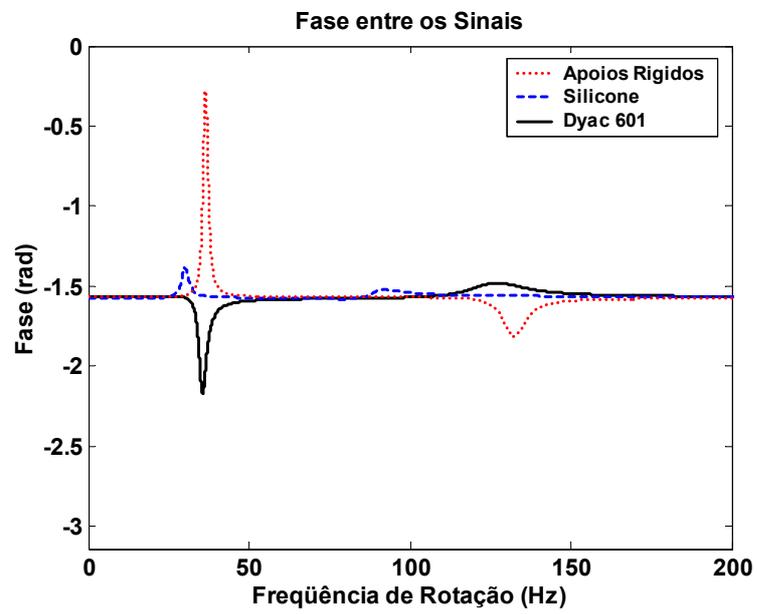


Figura 6.20: Resposta em Freqüência para o Dyac 601 e o Silicone