

### 3

## Modelo Viscoelástico dos Apoios

Neste capítulo revisa-se alguns conceitos básicos referentes às propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos; mencionam-se os métodos para obtenção do módulo complexo dos materiais viscoelásticos; descreve-se o método para determinar a rigidez e o amortecimento dos apoios elásticos a partir do módulo complexo, que são função da frequência e temperatura; descreve-se a formulação do modelo ADF (*Anelastics Displacements Field*), estes modelos viscoelásticos permitem a eliminação da dependência da frequência da rigidez e amortecimento dos apoios, mantendo o comportamento viscoelástico dos mesmos.

Realiza-se um *levantamento direto* do amortecimento e rigidez dos apoios elásticos, através de testes experimentais de vibração forçada e de impacto (vibração livre) e de algoritmos de otimização não linear. Isto, caso não conhecer o módulo complexo em função da frequência, o qual pode ser determinado experimentalmente com equipamento apropriado.

### 3.1.

#### Propriedades Dinâmicas dos Materiais Viscoelásticos

A deformação induzida em um material linear puramente elástico é proporcional à tensão que produz esta deformação. Existem dois tipos fundamentais de deformações que um material pode sofrer: cisalhamento, em que há variação de forma mas não de volume, e compressão isostática, em que o material sofre variação de volume mas não de forma.

O primeiro tipo de deformação (figura 3.1a) é descrito pelo módulo de cisalhamento  $G$ , e o segundo (figura 3.1b) pelo módulo volumétrico  $B$  (Snowdon [30]). Na maioria dos casos o estado de deformação do material é um misto entre cisalhamento e compressão, podendo predominar uma ou outra forma.

No caso de uma placa em que as dimensões laterais são grandes quando comparadas com a espessura (figura 3.1d), pode-se demonstrar que a relação entre tensão e deformação é dada pelo módulo (que governa a propagação de uma onda elástica longitudinal no material):

$$M_b = B + \left(\frac{4G}{3}\right) \cong B \quad (3.1)$$

uma vez que  $B \gg G$ . O módulo volumétrico  $B$  é numericamente muito maior que o módulo de cisalhamento  $G$ , assim, uma placa de borracha, por exemplo, é muito rígida à compressão.

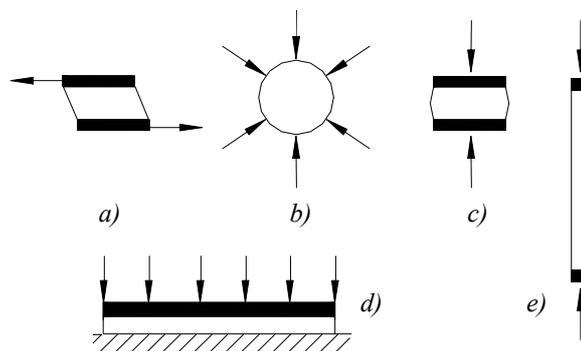


Figura 3.1: Deformações dos Materiais Elásticos

No caso oposto (figura 3.1e), em que as dimensões laterais são pequenas em comparação com a espessura, a relação entre tensão e deformação é dada, aproximadamente, pelo módulo de Young  $E$ , que tem a seguinte relação com  $B$  e  $G$ :

$$E = \frac{9BG}{3B + G} \quad (3.2)$$

Sendo o coeficiente de Poisson:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (3.3)$$

Aqui, também, como  $B \gg G$ , as equações (3.2) e (3.3) podem ser aproximadas pelas seguintes expressões:

$$E = 3G \quad (3.4)$$

$$\nu = 0,5 \quad (3.5)$$

Um elemento de borracha submetido à compressão (figura 3.1c) é um caso intermediário entre os casos das figuras 3.1a e 3.1b. Evidentemente não se tem

compressão pura, mas um estado complexo de deformações envolvendo variação de forma e de volume.

Introduz-se um módulo complexo  $\eta$  relacionado ao cisalhamento, ao módulo de Young e à rigidez, respectivamente, através de:

$$G^* = G(1 + i\eta_G) \quad (3.6)$$

$$E^* = E(1 + i\eta_E) \quad (3.7)$$

$$k^* = k(1 + i\eta_k) \quad (3.8)$$

Segundo Snowdon [30], para borrachas em geral (também válida para alguns materiais metálicos):

$$\eta_E = \eta_G \quad (3.9)$$

### 3.2.

#### **Determinação do Módulo Complexo em Materiais Viscoelásticos**

Existem muitas técnicas experimentais que são usadas para a determinação das propriedades dinâmicas de um material viscoelástico. Um dos mais usados é o Método da Viga Vibrante, padronizado pela norma ASTM E-756-93, o qual está limitado à obtenção de dados na faixa de comportamento linear dos materiais sob ensaio, e se caracteriza pela simplicidade de utilização, cobrindo uma ampla gama de frequências.

O módulo complexo do material viscoelástico usado neste trabalho (silicone), foi determinado na Universidade Federal de Santa Catarina, por gentil colaboração do Prof. Espíndola.

### 3.3.

#### **Determinação da Rigidez e o Amortecimento dos Apoios a partir do Módulo Complexo**

Já determinado o módulo de cisalhamento complexo, por algum método experimental, continua o problema de calcular a rigidez e o amortecimento dos apoios viscoelásticos, os quais são função do módulo complexo e da geometria dos mancais.

A determinação da rigidez e o amortecimento dos apoios, foi baseada no trabalho de Bormann e Gasch [6], no qual foram desenvolvidas expressões para O-rings (anéis de seção circular) e R-rings (anéis de seção quadrada), a partir de uma análise estática não linear sobre um modelo de mancal (figura 3.2b), e das curvas mestres (Master-curves) que representam o comportamento do módulo complexo em função da frequência, na temperatura de referência.

Os apoios construídos são de seção quadrada (R-rings) e o material viscoelástico foi vulcanizado e colado nas partes metálicas.

No desenvolvimento do trabalho mencionado no parágrafo anterior, considerou-se que para evitar contornos de contato não definidos, o que implicaria em uma grande complicação na modelagem relacionada com as pré-deformações radiais dos anéis viscoelásticos, os R-rings podem ser vulcanizados diretamente nos suportes de metal.

Considerando o modelo da figura 3.2b, a rigidez  $k_l$  de um anel completo (O-ring ou R-ring) com diâmetro  $D_m$ , resulta da integração da rigidez diferencial na direção radial ( $k_r$ ) e tangencial ( $k_t$ ):

$$k_l = \frac{P_z}{u_z} = \pi D_m \frac{k_r + k_t}{2} \quad (3.10)$$

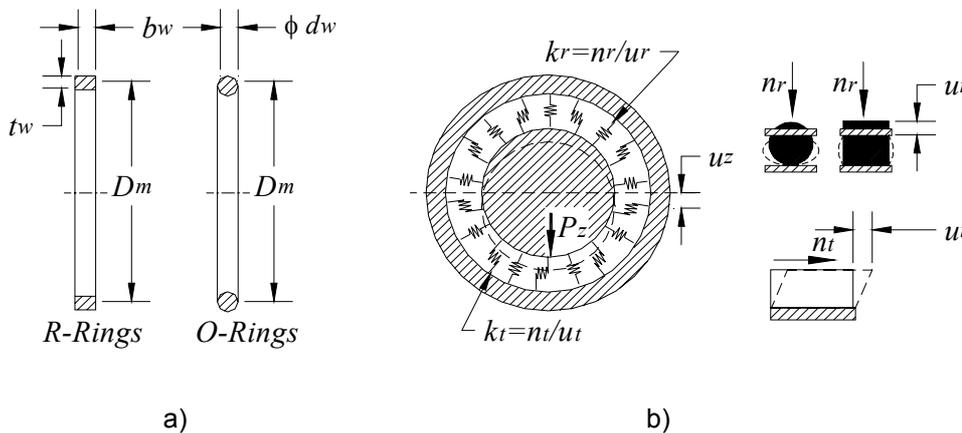


Figura 3.2: a) Geometria dos anéis elastoméricos, b) Modelo de Rigidez dos anéis

Para um anel de seção quadrada (R-ring) com  $\beta_w = \frac{b_w}{t_w}$  onde  $b_w$  e  $t_w$  são a largura e espessura da seção respectivamente (ver figura 3.2a), o trabalho mostra a seguinte relação para a rigidez radial e tangencial:

$$k_r = E\beta_w \left( \frac{1}{1-\nu^2} + \frac{1}{3}\beta_w^2 \right) \quad (3.11)$$

$$k_t = \frac{E\beta_w}{2(1+\nu)} \quad (3.12)$$

Para R-rings vulcanizados com pouca predeformação radial, o módulo de Poisson é  $\nu = 0.5$  (mostrado na equação 3.5), com o que a rigidez total do apoio pode ser expressa como:

$$k_1 = \pi D_m E \frac{\beta_w}{6} (5 + \beta_w^2) \quad (3.13)$$

O trabalho mencionado, inclui uma verificação experimental com grande êxito, em especial para R-rings vulcanizados, caso que coincide com a presente pesquisa.

### 3.4.

#### **Modelo ADF (*Anelastics Displacements Field*)**

O módulo complexo do material viscoelástico é função da frequência da excitação e da temperatura da operação. No caso de trabalhar com a resposta permanente do sistema (solução particular das equações de movimento), pode-se usar diretamente o módulo complexo ou seu equivalente viscoso no caso do amortecimento, ou seja, pode ser usada a matriz de estado com alguns coeficientes complexos, pode ser usada. Mas surge um problema quando se trata de trabalhar com a resposta livre do sistema (solução homogênea das equações de movimento), já que para este caso precisa-se que a matriz de estado seja real, para poder ter uma interpretação adequada dos resultados.

Uma solução ao problema mencionado, é a utilização de um modelo viscoelástico. Neste trabalho considerou-se o modelo ADF, mostrado por Trindade [32], o qual permite a eliminação da dependência da frequência, da rigidez e amortecimento dos apoios, mantendo o comportamento viscoelástico dos mesmos.

Neste trabalho, os testes realizados foram a temperatura constante.

Considerando um sistema não conservativo geral:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_{CG}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_c)\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (3.14)$$

Onde  $\mathbf{x}$  é o vetor que representa os graus de liberdade,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{D}_{CG}$  representa a soma das matrizes de amortecimento e giroscópica,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez sem o efeito dos apoios elásticos,  $\mathbf{K}_c$  representa a inclusão dos apoios elásticos, onde se encontra embutido o módulo complexo, e  $\mathbf{F}$  é a força externa total.

Fazendo:

$$\mathbf{K}_c = G^*(\Omega) \bar{\mathbf{K}}_c \quad (3.15)$$

Onde  $G^*(\Omega)$  é o módulo complexo do material viscoelástico.

A equação (3.14) pode então ser escrita no domínio da frequência:

$$\left( -\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{D}_{CG} + \left[ \mathbf{K} + G^*(\Omega) \bar{\mathbf{K}}_c \right] \right) \mathbf{x}_o = \mathbf{F}_o \quad (3.16)$$

De acordo com o modelo ADF, o módulo complexo pode ser expresso no domínio da frequência, da seguinte forma:

$$G^*(\Omega) = G_o + G_o \sum_j \Delta_j \frac{\Omega^2 + i\Omega \Psi_j}{\Omega^2 + \Psi_j^2} \quad (3.17)$$

Onde  $i = \sqrt{-1}$ ,  $G_o, \Delta_j, \Psi_j$  são parâmetros do material que tem que ser ajustados em relação ao módulo complexo  $G^*(\Omega)$ .

O modelo parte da inclusão de  $n$  séries de graus de liberdade dissipativos  $\mathbf{x}_j^d$  ( $j=1\dots n$ ). Em geral quanto mais séries forem consideradas no modelo, melhor será a aproximação. Neste trabalho, foram consideradas três series, conseguindo-se uma representação regular do módulo complexo. Não foram usadas mais series visto que o benefício seria pouco.

A técnica usada para a obtenção dos parâmetros do material viscoelástico foi a mesma descrita na seção 2.5 (otimização não linear usando a função LSQNONLIN do Matlab).

Os parâmetros calculados, são validos só na faixa de frequência onde as propriedades do material foram determinadas experimentalmente. Portanto é necessário assegurar-se um comportamento razoável das propriedades do material estimadas fora dessa faixa de frequência, já que esta faixa poderia estar incluída na operação do rotor. As propriedades assintóticas requeridas são:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} G^*(\Omega) = G_o \qquad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} G^*(\Omega) = G_\infty \quad (3.18)$$

Onde  $G_\infty > G_o \in R$ , significando que o módulo de cisalhamento tende ao seu valor estático (relaxado  $G_o$ ) e valor instantâneo (não relaxado  $G_\infty$ ) nos limites 0 e  $\infty$ , respectivamente. Isto também implica que  $\eta(0), \eta(\infty) = 0$ .

Como já foi dito, o modelo parte da inclusão de  $n$  séries de graus de liberdade dissipativos  $\mathbf{x}_j^{\mathbf{d}}$  ( $j=1\dots n$ ), neste caso foram adotadas três series, e substituindo a equação (3.17) na equação (3.16), e transformando ao domínio do tempo, obteve-se um sistema aumentado (com o vetor de deslocamentos

$\bar{\mathbf{x}} = \left\{ \mathbf{x} \quad \mathbf{x}_1^{\mathbf{d}} \quad \dots \quad \mathbf{x}_n^{\mathbf{d}} \right\}^T$ ), cuja matriz de estado é a seguinte:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} \\ \frac{\psi_1}{c_1} \mathbf{T}^T & -\psi_1 \mathbf{I} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \frac{\psi_n}{c_n} \mathbf{T}^T & 0 & & -\psi_n \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c^\infty) & \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_c^\infty \mathbf{T} & & \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_c^\infty \mathbf{T} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_{CG} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Onde:

$$\mathbf{K}_c^\infty = G_\infty \bar{\mathbf{K}}_c; \quad G_\infty = G_o \left( 1 + \sum_j \Delta_j \right); \quad c_j = \frac{\left( 1 + \sum_j \Delta_j \right)}{\Delta_j}$$

$\mathbf{T}$  é a matriz de autovetores de  $\mathbf{K}_c^\infty$ ,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

Neste trabalho se faz a hipótese a seguir, explicada em detalhe no capítulo quatro (todos os apoios são considerados idênticos):

$$k_1 + ic_1 = fG^* \quad (3.20)$$



Os dois tipos de testes, partem da concepção de dois modelos vibratórios:

- O primeiro baseado no tratamento do sistema sem apoios elásticos (estudado no capítulo 2) como um sistema de um grau de liberdade, ou seja considerando o disco no meio (sem efeito giroscópico) o que permite considerar só um deslocamento horizontal quando excitado apenas nesta direção, o modelo e o seu equivalente são mostrados nas figuras 3.3a e 3.3b, respectivamente.

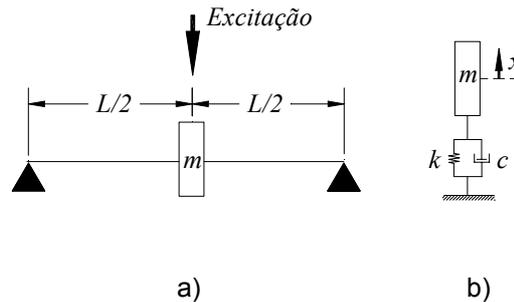


Figura 3.3: a) Modelo do Rotor sem Apoios Elásticos, b) Modelo Equivalente

Para este sistema de um grau de liberdade o autovalor é:

$$\lambda = -\xi\omega_o \pm i\omega_o\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_a = \text{imag}(\lambda) = \omega_o\sqrt{1-\xi^2}$$

A seguir procede-se à uma identificação experimental dos parâmetros do sistema descrito, usando as técnicas da seção 2.3, obtendo-se o seguinte autovalor, no qual estão embutidos os parâmetros modais do sistema:

$$\lambda = -a + ib \quad (3.23)$$

Para o sistema de um grau de liberdade, pode-se usar a seguinte relação para calcular a rigidez e o amortecimento do sistema:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_o} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.24)$$

- O segundo (mostrado na figura 3.4a), é baseado no primeiro modelo só que montando nos apoios elásticos. Como já foi dito, os apoios são considerados idênticos, e, graças a isto e à simetria do sistema apresentado, pode-se estabelecer seu equivalente, como mostra a figura 3.4b.

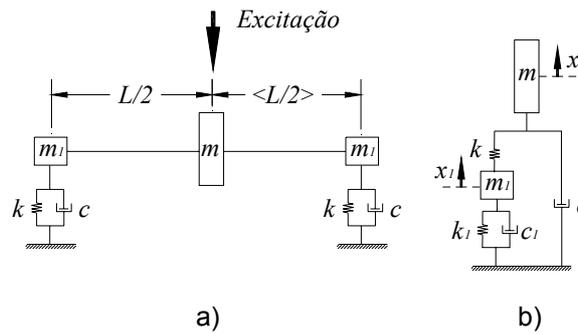


Figura 3.4: a) Modelo do Rotor com Apoios Elásticos, b) Modelo Equivalente

Do modelo equivalente, pode-se escrever as seguintes equações de movimento ( $m_r$  é a massa do apoio):

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m_r \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k + 2(k_1 + ic_1) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}(t) \quad (3.25)$$

### Teste Baseado na Resposta a Excitação Harmônica (Teste Forçado)

Este teste é baseado na identificação dos parâmetros a partir do modelo mostrado na figura 3.4a, quando excitado harmonicamente. O procedimento contempla os seguintes passos:

- Teste forçado com excitação senoidal na *frequência crítica* do sistema, já que nesta frequência obteve-se a melhor representação dos parâmetros dos apoios para o caso, tomando como resultados as medições de força e aceleração do disco.
- Como segundo passo, a determinação da rigidez e o amortecimento dos apoios, através de uma otimização não linear e a solução da equação do sistema apresentado, a partir da seguinte formulação:

Considerando a equação de movimento (3.25), a excitação é:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_o \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i(\Omega t - 90^\circ)} \quad (3.26)$$

Supondo  $\begin{Bmatrix} x \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ x_{1o} \end{Bmatrix} e^{i(\Omega t - 90^\circ)}$ , a solução particular é:

$$\begin{Bmatrix} x_o \\ x_{1o} \end{Bmatrix} = \left( \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega(\mathbf{C} + \mathbf{G}) \right)^{-1} \begin{Bmatrix} F_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

A equação (3.27) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} x_o \\ x_{1_o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_o e^{i\theta_o} \\ R_1 e^{i\theta_1} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Então:

$$\begin{Bmatrix} x \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_o e^{i\theta_o} \\ R_1 e^{i\theta_1} \end{Bmatrix} e^{i(\Omega t - 90)} \quad (3.29)$$

Para uma excitação do tipo  $F(t) = F_o \sin(\Omega t) = \text{Re} \left\{ F_o e^{i(\Omega t - 90^\circ)} \right\}$ :

$$\begin{Bmatrix} x \\ x_1 \end{Bmatrix} = \text{Re} \left\{ \begin{Bmatrix} R_o e^{i\theta_o} \\ R_1 e^{i\theta_1} \end{Bmatrix} e^{i(\Omega t - 90)} \right\} \quad (3.30)$$

Então:

$$\begin{aligned} x &= R_o \sin(\Omega t + \theta_o) \\ x_1 &= R_1 \sin(\Omega t + \theta_1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Derivando duas vezes a equação (3.31), obtemos as acelerações:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -R_o \Omega^2 \sin(\Omega t + \theta_o) & R_o &= R_o(c_1, k_1) \\ \ddot{x}_1 &= -R_1 \Omega^2 \sin(\Omega t + \theta_1) & R_1 &= R_1(c_1, k_1) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Devido a limitações na bancada, as medições do movimento do rolamento  $(x_1, \ddot{x}_1)$  não foram possíveis. Por este motivo, o método foi restringido às medições do movimento do disco  $(x)$ .

Com as medições da aceleração  $\ddot{x}$  e da excitação  $F_o$  num teste feito na velocidade crítica  $(\omega_c)$ , procede-se ao cálculo da rigidez e do amortecimento dos mancais  $(k_1, c_1)$ , através de um algoritmo de otimização não linear.

A técnica usada para a obtenção de  $k_1, c_1$ , foi a mesma descrita na seção 2.5.1:

- **Variável do problema.** A variável é constituída pela rigidez e amortecimento dos apoios  $(k_1, c_1)$ :

$$\mathbf{q} = \{c_1 \quad k_1\} \quad (3.33)$$

- **Ponto de partida da busca.** Este foi definido considerando resultados mostrados em alguns trabalhos como Trindade [32] e Bavastri [3]:

$$\mathbf{q}_{in} = \left\{ c_{1_{in}} \quad k_{1_{in}} \right\} \quad (3.34)$$

- **Função objetivo.** Já obtida a medição da aceleração do disco ( $\ddot{x}_e$ ), e o cálculo teórico do mesmo parâmetro ( $\ddot{x}_t$ ) com a equação (3.32), pode-se definir a seguinte função objetivo:

$$\mathbf{f}_{obj} = \left\{ \ddot{x}_t - \ddot{x}_e \right\} \quad (3.35)$$

- **Restrições.** Estas foram definidas considerando resultados mostrados em alguns trabalhos, como os de Trindade [32] e Bavastri [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{LB} &= \left\{ c_{1_{inf}} \quad k_{1_{inf}} \right\} \\ \mathbf{UB} &= \left\{ c_{1_{sup}} \quad k_{1_{sup}} \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Devido ao problema mencionado anteriormente da limitação da bancada para medições experimentais do movimento do rolamento ( $x_1, \ddot{x}_1$ ), propõe-se neste trabalho, para diminuir a incerteza, estender a análise a um conjunto de amostras (dados experimentais da aceleração e força) na vizinhança da frequência crítica, por exemplo numa faixa de 4 Hz, o que não ocasionará muito erro nos cálculos (erro pelo fato dos parâmetros serem função da frequência). Leva-se em conta que o comportamento de alguns materiais viscoelásticos mostrados em Trindade [32] e Bavastri [3], para faixas de frequências baixas, que é o caso neste trabalho, varia relativamente pouco com a frequência.

O resultado final deste processo, é a obtenção dos parâmetros da rigidez e do amortecimento dos apoios.

### **Teste Baseado na Resposta à Excitação Impulsiva (Teste de Impacto – Vibração livre)**

A outra proposta para determinar a rigidez e o amortecimento dos apoios, é através de testes de impacto (vibração livre), e o cálculo do problema de autovalor do sistema, o que significa que a matriz de estado não será mais real ao usar o módulo complexo dos apoios, dificuldade que é contornada com o uso do modelo ADF para transformar a matriz de estado em uma matriz com coeficientes reais.

Finalmente utiliza-se técnicas de otimização não linear para o cálculo dos parâmetros do modelo ADF, mostrados na equação (3.17), a partir dos parâmetros

modais (autovalor) obtidos experimentalmente através de técnicas de identificação.

Este teste é baseado na identificação dos parâmetros a partir do modelo mostrado na figura 3.4a, quando é excitado impulsivamente (martelo de impacto), produzindo nele uma vibração livre. O procedimento contempla os seguintes passos:

- Teste de impacto com excitação impulsiva, Perfaz-se uma identificação experimental dos parâmetros do sistema, usando as técnicas descritas na seção 2.3, obtendo-se o seguinte autovalor, no qual estão embutidos os parâmetros modais do sistema, de acordo com a equação (3.23):  

$$\lambda = -a + i.b.$$
- Como segundo passo, determina-se os parâmetros do modelo ADF, mostrados na equação 3.17, relacionados diretamente com a rigidez e o amortecimento dos apoios, da seguinte forma, de acordo com a equação (3.20):

$$c_1 = f \operatorname{Im}(G^*) \quad k_1 = f \operatorname{Re}(G^*) \quad (3.37)$$

Esta determinação é feita através de uma otimização não linear e a solução do problema de autovalor do sistema apresentado na figura 3.4a na sua forma de estado. Como foi mencionado anteriormente, a formulação original do sistema apresentada na equação (3.25) tem a desvantagem de conter alguns coeficientes complexos; e, para solucionar esse problema, ele foi transformado num sistema com graus de liberdade aumentados, usando o modelo ADF com 3 séries dissipativas, transformando a matriz de estado complexa em uma matriz com coeficientes reais (levando em conta as equações (3.14) e (3.19)).

Obtido experimentalmente o autovalor do sistema (relacionado com os parâmetros modais pelas equações (3.24)), procede-se ao cálculo dos parâmetros ADF, através da solução do problema de autovalor da matriz de estado já com coeficientes reais (no sistema com graus de liberdade aumentados) e um algoritmo de otimização não linear.

A técnica usada para a obtenção dos parâmetros em questão, foi a mesma descrita na seção 2.5.1:

- **Variável do problema.** A variável é constituída pelos parâmetros do modelo ADF :

$$\mathbf{q} = \{G_o \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3\} \quad (3.38)$$

- **Ponto de partida da busca.** Este foi definido considerando resultados mostrados em alguns trabalhos como Trindade [32] e Bavastri [3]:

$$\mathbf{q}_{in} = \{G_{o_{in}} \quad \Delta_{1_{in}} \quad \Delta_{2_{in}} \quad \Delta_{3_{in}} \quad \psi_{1_{in}} \quad \psi_{2_{in}} \quad \psi_{3_{in}}\} \quad (3.39)$$

- **Função objetivo.** Uma vez identificado experimentalmente o autovalor do sistema ( $\lambda_e$ ), e o cálculo dos autovalores do sistema ( $\lambda_t$ ) com o modelo ADF, pode-se definir a seguinte função objetivo:

$$\mathbf{f}_{obj} = \{\text{Re}(\lambda_t) - \text{Re}(\lambda_e) \quad \text{Im}(\lambda_t) - \text{Im}(\lambda_e)\} \quad (3.40)$$

O sistema, contém vários autovalores dependendo da ordem do sistema aumentado, para a definição da função objetivo, teve-se que se fazer a escolha dos autovalores correspondentes ao disco.

- **Restrições**

$$\begin{aligned} \mathbf{LB} &= \{G_{o_{inf}} \quad \Delta_{1_{inf}} \quad \Delta_{2_{inf}} \quad \Delta_{3_{inf}} \quad \psi_{1_{inf}} \quad \psi_{2_{inf}} \quad \psi_{3_{inf}}\} \\ \mathbf{UB} &= \{G_{o_{sup}} \quad \Delta_{1_{sup}} \quad \Delta_{2_{sup}} \quad \Delta_{3_{sup}} \quad \psi_{1_{sup}} \quad \psi_{2_{sup}} \quad \psi_{3_{sup}}\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

O resultado final deste processo é a obtenção dos parâmetros ótimos do modelo ADF, dos quais pode-se calcular o módulo complexo, e a rigidez e o amortecimento dos apoios através das equações (3.17) e (3.37).

Para a realização desta parte do trabalho, (para os dois tipos de testes) foram adaptados na mesma bancada, vários sistemas diferentes, através da variação de alguns parâmetros como massa do disco e comprimento do eixo (separação entre apoios), permitindo a obtenção de uma série de pontos para a rigidez e o amortecimento dos apoios em função da frequência crítica (para os testes forçados) ou da frequência natural amortecida (para os testes de impacto) de cada sistema adaptado, segundo o caso, com os quais pode-se ajustar uma curva que os represente em forma contínua em função da frequência.

No caso dos testes de impacto, obteve-se conjuntos de valores dos parâmetros ADF, em geral diferentes, relacionados às frequências naturais amortecidas de cada sistema adaptado. De cada conjunto, obteve-se um valor para

a rigidez e para o amortecimento dos apoios, obtendo-se assim uma nuvem de pontos em função das frequências críticas e naturais amortecidas dos sistemas adaptados.

Pode-se calcular o módulo complexo a partir da nuvem de pontos obtida da rigidez e amortecimento dos apoios, usando as expressões (3.4), (3.6), (3.9) e (3.13):

$$G^* = G(1 + i\eta)$$

$$G = \frac{k_1}{\pi D_m \frac{\beta}{2} (5 + \beta^2)} \quad (3.42)$$

$$\eta = \frac{c_1}{k_1}$$

A partir destes valores, é necessário fazer um novo ajuste de curva, para obter os parâmetros ADF definitivos, que representem a dinâmica dos apoios em todo o espectro de frequências. A seguir se realizará uma outra aproximação do módulo complexo, como será explicado na seção 3.6.

### 3.6.

#### Aproximação do Módulo Complexo – Funções de Ajuste

Considerou-se para a solução particular dos sistemas com apoios elásticos, o módulo complexo representado pela seguinte função (modelo da derivada fracionaria):

$$G^*(\Omega, T_p) = \frac{G_L + G_H \varphi_o \left( iF_{R(\Omega, T_p)} \right)^{\beta_R}}{1 + \varphi_o \left( iF_{R(\Omega, T_p)} \right)^{\beta_R}} \quad (3.43)$$

$$F_R = \Omega.10^{\frac{-6,68.(T_p - T_o)}{159 + (T_p - T_o)}}$$

Onde  $T_p$  é a temperatura de trabalho do material viscoelástico (considerada para este trabalho de 298 K),  $T_o$  é a temperatura de referência do mesmo (considerada 283 K), e os demais parâmetros são para serem ajustados de acordo com dados determinados experimentalmente, usando técnicas de otimização não linear. Esta função foi apresentada por Espíndola, no relatório do levantamento do

módulo complexo do material viscoelástico usado neste trabalho (silicone), baseado no método das variáveis reduzidas, Snowdon [30]. Foi usada esta representação devido a ser a que melhor se ajustava ao comportamento do material usado.

Já para a solução homogênea, considerou-se o modelo ADF com graus de liberdade aumentados, pelos motivos explicados na seção 3.4.

Finalmente, a partir dos resultados experimentais ajustou-se os valores de  $G^*$  que serão utilizados em simulações numéricas. As simulações que utilizam o módulo complexo obtido no trabalho realizado em Santa Catarina foram denominadas (SC) e as realizadas no laboratório (RJ).