

## Capítulo 1:

### INTRODUÇÃO

As opções financeiras são geralmente classificadas de acordo com sua possibilidade de exercício antecipado. Enquanto as opções européias só podem ser exercidas na sua data de expiração, as americanas podem ser exercidas a qualquer momento até seu vencimento. Assim, a precificação de opções européias por exigir apenas o conhecimento do preço final do ativo apresenta-se como uma tarefa bastante simples se comparada com opções mais complexas do estilo americano. Black e Scholes (1973) desenvolveram uma solução analítica de precificação de uma *call* européia simples. No entanto, as soluções analíticas para opções mais complexas não existem ou ainda não foram desenvolvidas. Dessa forma, a maior parte das pesquisas que atualmente estão sendo desenvolvidas na área de instrumentos financeiros são focadas no uso de procedimentos numéricos na avaliação de opções com características mais complexas, dentre elas americanas. Esse trabalho pretende estudar os métodos numéricos disponíveis para a avaliação de opções americanas. Modelos desenvolvidos recentemente, baseados em Simulações de Monte Carlo, parecem ser a resposta para a análise das características de exercício antecipado presentes nesse tipo de opção sejam elas tradicionais ou complexas.

A característica de exercício antecipado tem sido a maior dificuldade no desenvolvimento de soluções analíticas para opções do estilo americano. Assim, ao longo dos anos, foram desenvolvidos vários métodos numéricos utilizados na precificação de opções americanas. No entanto, a maioria torna-se impraticável na avaliação de opções americanas complexas ou com mais de três fatores de incerteza. Dentre os métodos mais comuns, temos: Brennan e Schwartz (1977) desenvolveram o método de diferenças finitas; Cox, Ross e Rubinstein (1979) propuseram o modelo de árvores binomiais; Johnson (1983) e Geske e Johnson (1984) mostram como o valor de uma *put* americana pode estimado usando o método de Extrapolação de Richardson baseado numa série de opções bermudas;

Last e MacMillan (1986), Barone-Adesi e Whaley (1987) e Bjerksund e Stensland desenvolveram aproximações analíticas para precificação de uma *put* americana tradicional.

Boyle (1977) introduziu o modelo de Simulação de Monte Carlo na avaliação de opções. Até recentemente, o uso de simulações na avaliação de opções se restringiu a precificação de opções do estilo europeu. Muitos são os que consideram esses modelos inaplicáveis a opções americanas, visto que seu algoritmo de precificação envolve a determinação da estratégia ótima de exercício antecipado através de um recurso de programação dinâmica. Acreditava-se que os modelos de simulação por serem inerentemente do tipo *forward* não comportariam um modelo de programação dinâmica, *backward* por natureza. Esse fato pode ser melhor exemplificado pela declaração de alguns autores: de acordo com Hull, “Uma limitação do Modelo de Monte Carlo é que somente pode ser aplicado na avaliação de derivativos do estilo europeu.”; Hull e White tornam essa idéia ainda mais clara quando afirma que “A Simulação de Monte Carlo não pode captar a característica de exercício antecipado, visto não sabermos a decisão de exercício ótimo para um certo preço num dado instante.”

Demonstraremos através da análise de dois modelos, como podemos incorporar a característica de exercício antecipado ao método de precificação por Simulação de Monte Carlo de modo a avaliarmos opções americanas. Com isso pretendemos demonstrar a importância e flexibilidade desses modelos de simulação na avaliação de opções sejam elas européias ou americanas, simples ou complexas.

O presente estudo encontra-se dividido em 3 partes: a primeira parte apresenta os conceitos básicos envolvidos na Simulação de Monte Carlo, assim como um estudo de técnicas de aceleração de convergência. O estudo destas técnicas tem por objetivo fundamentar a escolha daquela que melhor se adapta ao nosso modelo de simulação na precificação de opções americanas. A segunda envolve o estudo dos modelos de precificação tradicionais. Devido à popularidade destes modelos (árvores binomiais e diferenças finitas) optamos, na medida do possível, por uma abordagem diferenciada, procurando apresentar alguns conceitos adicionais não encontrados na maioria dos livros e literatura de financeira. Na última parte, analisamos dois modelos de avaliação de opções americanas baseados em Simulações de Monte Carlo. Optamos por incorporar aos dois

métodos originais um modelo de Quase-Monte Carlo Híbrido de modo a melhorarmos a precisão dos resultados. No capítulo final apresentamos como o modelo LSM pode ser eficientemente aplicado na avaliação de opções americanas exóticas e complexas que envolvam múltiplas variáveis de estado. O apêndice detalha alguns conceitos complementares aplicados ao longo do trabalho, assim como a tabela dos programas desenvolvidos.

Primeiramente estudaremos a aplicação desses modelos baseados em simulação na precificação de opções americanas tradicionais de modo a compararmos os valores com aqueles obtidos através de aproximações analíticas. Esse procedimento permite determinarmos a precisão dos modelos antes de nos estendermos na avaliação de opções americanas mais complexas, como: taxas de juros e volatilidade estocásticas, processos estocásticos diversos e particularidades inerentes a opções exóticas.

## Capítulo 2:

# SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

### 2.1. Conceitos Básicos

A precificação de opções através de simulações de Monte Carlo (SMC) pode ser dividido em 3 passos básicos:

1. simulação do preço do ativo(s) e outros parâmetros como taxa livre de risco, dividendos e volatilidade do preço do ativo (variáveis de estado);
2. determinação do *payoff* do ativo(s);
3. precificação da opção através da média das simulações e determinação da precisão do resultado representada pelo intervalo de confiança e desvio padrão.

O primeiro passo representa os parâmetros de *input* no processo de precificação e envolvem respectivamente: a geração de números aleatórios (NA) para cada variável de estado, geração das distribuições de probabilidades desejadas e construção dos caminhos de preços do ativo(s). O segundo passo depende das características específicas da opção que pretendemos precificar.

Como a simulação destas variáveis são amostras de um determinado processo estocástico, o passo 3 faz uso de conceitos estatísticos básicos para determinarmos a precisão da simulação. A existência dessa medida de precisão no modelo de SMC é uma de suas vantagens frente aos demais métodos numéricos de precificação tais como as árvores binomiais. A eficiência computacional da simulação depende da precisão pretendida. Assim, métodos alternativos são geralmente adicionados ao modelo de simulação básico, de modo a aumentarmos sua eficiência, são eles: técnicas de redução de variância e Quase-Monte Carlo.

A SMC é o modelo de precificação a ser escolhido quando uma ou mais das características abaixo estão presentes:

- processos estocásticos mais complexos que o movimento geométrico browniano;
- opções dependentes de múltiplas variáveis de estado e processos estocásticos diversos;
- *payoff's* dependentes da trajetória de preços do ativo (“*path dependent*”): opções asiáticas, *lookback* ..... e em última instância qualquer tipo de opção do estilo americano.

A existência de processos estocásticos diversos podem ser exemplificados pela presença de taxas de juros, dividendos e volatilidade estocásticos. Além das variáveis citadas anteriormente podemos ter também opções envolvendo múltiplos ativos, geralmente seguindo um mesmo processo estocástico. No caso de opções com *payoff's* dependentes do tempo, a história de preços do ativo objeto deve ser considerada quando na precificação da opção e não apenas o preço no instante final, como é o caso de opções européias.

A precificação de uma opção envolvendo apenas um ativo objeto pode ser resumido pelos passos abaixo:

1. simulação dos preços do ativo,  $S_t, 0 \leq t \leq T$  ;
2. estimar  $E[f(S_t, 0 \leq t \leq \tau)e^{-rt}]$ , onde:  $f$  é a função representativa do *payoff* e  $\tau \in [0, T]$  representa o momento de exercício;

No caso de termos taxas de juros ( $r$ ) e volatilidade ( $\sigma$ ) estocásticas, estes valores devem também ser simulados. Uma opção envolvendo múltiplos ativos pode ser precificado pelas simulações dos preços dos diferentes ativos e determinação dos *payoff's* de acordo com a função  $f$  dependente dos múltiplos ativos. Abaixo apresentamos algumas das funções  $f$  mais comuns:

Européia:  $(S_T - K)^+$

Americana:  $(S_t - K)^+$

Asiática:  $\left( T^{-1} \int_0^T S_t dt - K \right)^+$

$$\begin{aligned}
 \textit{knockout (up-and-out):} & & (S_T - K)^+, \{S_t < U, 0 \leq t \leq T\} \\
 \text{Barreira dupla (knockout):} & & (S_T - K)^+, \{L < S_t < U, 0 \leq t \leq T\} \\
 \textit{Lookback (strike):} & & (S_T - \min\{S_t, 0 \leq t \leq T\})^+
 \end{aligned}$$

A precificação de uma *call* europeia envolve apenas a simulação de preços no instante final  $T$ , onde o *payoff* é  $S_T - K$  se  $S_T > K$  e 0 caso contrário. As simulações dos preços do ativo objeto são repetidas através da utilização de diferentes números aleatórios (NA) representativos de uma distribuição  $N \sim (0,1)$ . Assim, neste caso a SMC é dita unidimensional por envolver apenas a geração de uma seqüência de NA. Já a precificação de uma opção americana é um problema mais complexo por envolver a possibilidade de exercício antecipado em qualquer instante  $t_i$  até o vencimento da opção em  $T$ . Este problema será abordado de forma mais detalhada nos capítulos a seguir. Por hora, assumindo o conhecimento da política de exercício ótimo ao longo do tempo, o procedimento de precificação da opção americana será similar ao da opção europeia. A diferença básica reside no fato de termos que simular os preços do ativo em cada instante  $t_i$  de modo a checarmos a possibilidade de exercício antecipado ( $t_i^*$ ). No caso da opção europeia asiática, precisamos simular os preços do ativo ao longo do tempo de modo a calcularmos seu preço médio e compará-lo ao valor de exercício  $K$  no instante final  $T$ . De maneira similar, numa opção *lookback* o valor de exercício no instante final depende do preço mínimo atingido nas simulações do ativo ao longo do tempo. Essa simulação, por envolver a geração de diversas seqüências de NA (uma para cada instante  $t_i$ ), é conhecida como SMC em altas dimensões ou multidimensional. A simulação em altas dimensões será discutida mais adiante na precificação de opções americanas, através da abordagem de uma técnica denominada Quase-Monte Carlo Híbrido.

A flexibilidade da SMC permite a utilização de qualquer processo estocástico. Se estivermos interessados na geração de apenas um preço simulado, como o valor  $S_T$  no caso de opções europeias, precisaremos gerar apenas um NA ( $Z$ ) para cada simulação em  $T$ . No caso de optarmos pelo movimento geométrico browniano, o preço do ativo pode ser simulado pela expressão abaixo:

$$S_T = S_0 e^{[(r-q-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z]} \quad \therefore \quad Z \sim N(0,1)$$

Se estivermos interessados em construir um caminho simulado de preços ao longo do tempo, como  $S_{t_i}$  para  $t_i = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  ( $t_0 = 0$ ) no caso de opções dependentes da trajetória de preços e americanas, temos:

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{[(r-q-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i]} \quad \therefore \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Podemos estender o mesmo processo estocástico às variáveis  $r$  e  $\sigma$ .

$$d\sigma = \mu_\sigma \sigma dt + \sigma_\sigma \sigma dW_t^{(\sigma)}$$

$$dr = \mu_r r dt + \sigma_r r dW_t^{(r)}$$

## 2.2. Esquemas Básicos de Precificação

A seguir apresentaremos alguns exemplos de precificação de opções visando fixarmos os conceitos introduzidos, para posteriormente abordarmos a precificação de opções americanas tradicionais e complexas. Os casos estudados logo abaixo servem de referência para a abordagem opções complexas do estilo europeu: opções envolvendo múltiplos ativos, volatilidade e taxa de risco estocásticas e *payoff's* diversos.

### 2.2.1. Opção Européia

Num título europeu, os *payoff's* independem das decisões do detentor ao longo da vida útil da opção. Assim, supondo a não existência de arbitragem, uma opção européia pode ser precificada com base no valor esperado de sua remuneração terminal, descontado a uma taxa livre de risco. O algoritmo de precificação pode ser descrito como:

1. gerar um NA  $Z_j$  e simular os preços do ativo objeto no instante  $T$ :

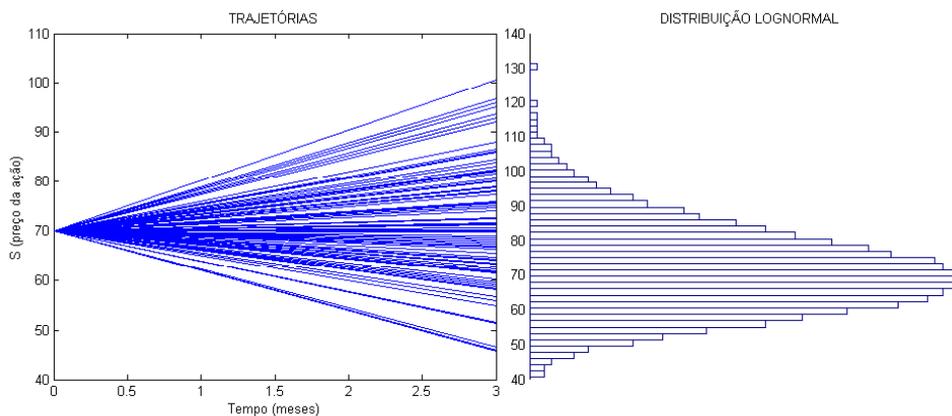
$$S_{T,j} = S_{0,j} e^{[(r-q-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z_j]}$$

2. calcular o *payoff* ( $f_T$ ) da opção no vencimento para cada uma das trajetórias simuladas:

$$f_{T,j} = \max(S_{T,j} - K, 0)$$

3. descontar cada um dos *payoff's* para o instante inicial usando a taxa livre de risco e calcular a média desses valores:

$$C = e^{-rT} \frac{\sum_{j=1}^M f_{T,j}}{M} \quad \therefore M \rightarrow \text{número de simulações}$$



**Figura 2.1-** Esquema gráfico da simulação de preços (100 trajetórias) e distribuição lognormal (1000 preços no instante final). Dados da simulação:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/\text{ano}$ ,  $\sigma = .35/\text{ano}$ ,  $T = 3$  meses.

**Tabela 2.1-** Tabela de convergência do modelo de SMC:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/\text{ano}$ ,  $\sigma = .35/\text{ano}$ ,  $T = 3$  meses ( $Call_{BLS}: 5.7337$ ).

Simulações	$Call_{MC}$	$\sigma_{pop}$
100	5.9732	0.7419
500	6.2139	0.3874
1.000	5.9376	0.2775
5.000	5.6011	0.1182
10.000	5.6693	0.0856
50.000	5.7448	0.0383

### 2.2.2. Opção Barreira

A opção barreira é um exemplo clássico de opção dependente da trajetória de preços. Neste caso, o *payoff* depende tanto do preço do ativo no vencimento da opção, como também se o preço atingiu determinado valor (barreira) em algum momento da trajetória. Por exemplo, uma opção *down-out* é uma opção barreira que automaticamente expira sem valor quando o preço do ativo cair abaixo de um determinado valor de barreira. Da mesma forma, opções *down-in* não fornecem um *payoff*, a não ser que o preço do ativo caia abaixo da barreira ao menos uma vez durante a vida da opção. O algoritmo de precificação pode ser descrito como:

1. gerar as trajetórias de preços do ativo objeto nos instantes  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  onde  $i = 0, 1, \dots, N$ :

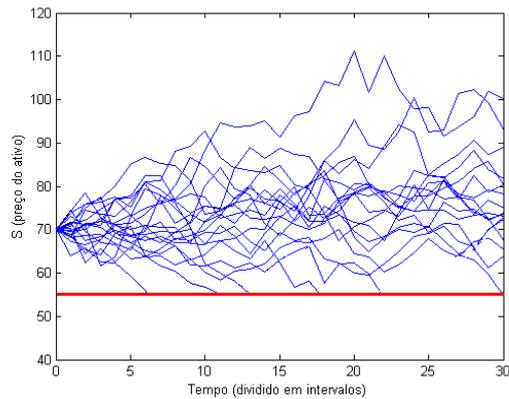
$$S_{t_{i+1},j} = S_{t_i,j} e^{[(r-q-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{i,j}]} \quad \therefore N \rightarrow \text{intervalos de tempo}$$

2. calcular o *payoff* ( $f_T$ ) da opção no vencimento para cada trajetória  $j = 1, 2, \dots, M$ :

$$f_{T,j} = \begin{cases} \max(S_{T,j} - K, 0), & \text{para } S_{t_i,j} > S_B \text{ em todos instantes } t_i \\ 0, & \text{para } S_{t_i,j} < S_B \text{ em todos instantes } t_i \end{cases}$$

3. descontar cada um dos *payoff's* para o instante inicial usando a taxa livre de risco e calcular a média desses valores:

$$C = e^{-rT} \frac{\sum_{j=1}^M f_{T,j}}{M} \quad \therefore M \rightarrow \text{número de trajetórias}$$



**Figura 2.2-** Esquema gráfico da simulação de trajetórias com 30 intervalos de tempo e o respectivo valor barreira:  $X = 70$ ,  $S_{BAR} = 55$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses.

**Tabela 2.2-** Tabela de convergência do modelo de SMC na precificação de uma *put* estilo barreira:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $S_{BAR} = 55$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses.

Simulações	$PUT_{down-out}$	$N_S$ Barreira*
<i>25 intervalos de tempo</i>		
500	2.2140	63
5.000	2.1450	626
10.000	2.1041	1242
50.000	2.0930	6326
100.000	2.0915	12777
<i>50 intervalos de tempo</i>		
500	2.1850	67
5.000	2.0059	674
10.000	2.0194	1352
50.000	2.0057	6835
100.000	2.0000	13518
<i>100 intervalos de tempo</i>		
500	2.2001	64
5.000	1.9529	708
10.000	1.9630	1350
50.000	1.9533	7008
100.000	1.9488	14094

\* número de simulações que atingiram a barreira

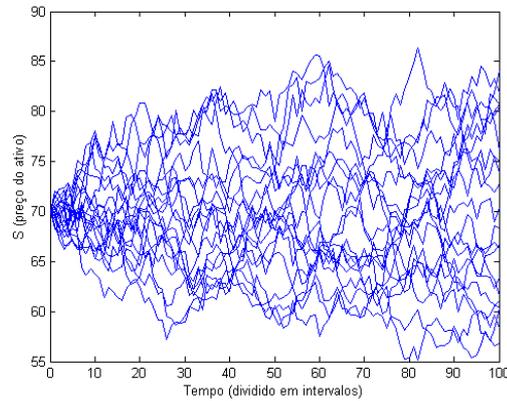
\*\* solução analítica:  $PUT=1.9596$  (uma vez ao dia)

### 2.2.3. Opção Asiática

Nas opções asiáticas os *payoff's* dependem do preço médio do ativo medido durante uma parte ou toda a vida da opção. Dependendo de como a média é calculada, temos dois tipos básicos de opções asiáticas: geométrica e aritmética. A função *payoff* de uma opção asiática pode ser descrita por:

$$f_T = \max(\bar{S}_{T,j} - K, 0) \quad \therefore \quad \bar{S}_{T,j} = \frac{\sum_{i=0}^N S_{t_i,j}}{N+1} \quad (\text{m\u00e9dia aritm\u00e9tica})$$

$$\text{ou} \quad \bar{S}_{T,j} = \left[ \prod_{i=0}^N S_{t_i,j} \right]^{1/(N+1)} \quad (\text{m\u00e9dia geom\u00e9trica})$$



**Figura 2.3-** Esquema gr\u00e1fico da simula\u00e7\u00e3o de trajet\u00f3rias com 100 intervalos de tempo:

$S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses.

**Tabela 2.3-** Tabela de converg\u00eancia do modelo de SMC na precifica\u00e7\u00e3o de uma *call* asi\u00e1tica:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses.

Simula\u00e7\u00f5es	$CALL_{ASI\u00c1T.}$	$\sigma_{pop}$
<i>25 intervalos de tempo</i>		
500	3.2535	0.2144
5.000	3.2965	0.0681
10.000	3.3354	0.0482
50.000	3.3531	0.0218
100.000	3.3286	0.0153
<i>50 intervalos de tempo</i>		
500	3.1416	0.2056
5.000	3.2652	0.0662
10.000	3.3022	0.0477
50.000	3.2625	0.0212
100.000	3.2732	0.0150
<i>100 intervalos de tempo</i>		
500	3.2212	0.2020
5.000	3.2287	0.0665
10.000	3.2964	0.0476
50.000	3.2063	0.0209
100.000	3.2334	0.0149

## Capítulo 3:

# MÉTODOS DE ACELERAÇÃO DE CONVERGÊNCIA

### 3.1. Técnicas de Redução de Variância

O erro na estimativa da precificação de opções pelo método de SMC pode ser representado pelo desvio padrão da simulação dividido pela raiz quadrada do número de simulações. Quanto menor o desvio da simulação, maior a precisão dos resultados. Devemos lembrar que esse desvio deve ser associado à variância dos preços da opção obtida com a repetição das simulações inúmeras vezes, sendo assim um desvio padrão populacional e não amostral. Vários métodos foram desenvolvidos no intuito de reduzir esse desvio padrão e assim diminuir também o número de simulações necessárias a determinado nível precisão. Esses métodos são: (1) variáveis antitéticas, (2) estratificação, (3) variáveis de controle, (4) *importance sampling*. A seguir discutiremos cada um desses métodos, exemplificando sua aplicação na avaliação de opções européias.

#### 3.1.1. Variáveis Antitéticas

Variáveis antitéticas é a mais simples e uma das principais técnicas utilizadas para reduzir a variância de uma estimativa. A idéia básica consiste em fazermos uso do fato de que uma trajetória de preços e sua imagem possuem a mesma probabilidade de ocorrência. Em outras palavras, devemos gerar uma variável estocástica negativamente correlacionada à variável de estado do ativo objeto. Assim, cada trajetória deve ser associada a um par de seqüências, isto é duas trajetórias negativamente correlacionadas. Supondo uma opção européia, geraremos duas seqüências de NA representativas do preço do ativo no instante final  $T$ :  $Z_j^1$  e  $Z_j^2 = f(Z_j^1)$  onde  $Cov(Z^1, Z^2) < 0$ . Segue abaixo a utilização desse método na precificação de uma opção européia com base na simulação de  $M$  trajetórias de preços:

$$\text{Trajetória 1: } S_{T,j}^1 = S_{0,j} e^{[(r-q-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z_j^1]} \quad \therefore \quad Z_j^1 = Z_1^1, Z_2^1, \dots, Z_M^1$$

$$\text{Payoff's: } f_{t_0,j}^1 = e^{-rT} \max(S_{T,j}^1 - K, 0) \quad \text{e} \quad C^1 = e^{-rT} \frac{\sum_{j=1}^M f_{T,j}^1}{M} = \frac{\sum_{j=1}^M f_{t_0,j}^1}{M}$$

$$\text{Trajetória 2: } S_{T,j}^2 = S_{0,j} e^{[(r-q-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z_j^2]} \quad \therefore \quad Z_j^2 = f(Z_j^1) = Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_M^2$$

$$\text{Payoff's: } f_{t_0,j}^2 = e^{-rT} \max(S_{T,j}^2 - K, 0)$$

Com base nos valores presentes dos *payoff's* acima, o valor da opção pode ser estimado por:

$$C_{VA} = \frac{\sum_{j=1}^M (f_{t_0,j}^1 + f_{t_0,j}^2) / 2}{M}$$

O argumento para utilizarmos o método de variáveis antitéticas baseia-se na comparação entre as variâncias das duas simulações:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \frac{f_{t_0}^1 + f_{t_0}^2}{2} \right] &= \frac{\text{Var}[f_{t_0}^1] + \text{Var}[f_{t_0}^2] + 2\text{Cov}[f_{t_0}^1, f_{t_0}^2]}{4} \\ &= \frac{1}{2} (\text{Var}[C] + \text{Cov}[f_{t_0}^1, f_{t_0}^2]) \end{aligned}$$

$$\text{onde } \text{Var}[f_{t_0}^1] = \text{Var}[f_{t_0}^2] = \text{Var}[C]$$

Assim, temos que  $\text{Var}[C_{VA}] \leq \text{Var}[C]$  se  $\text{Cov}[f_{t_0}^1, f_{t_0}^2] \leq \text{Var}[C]$ . No entanto, como a avaliação de  $C_{VA}$  usa duas vezes mais simulações ( $2M$ ) que a avaliação de  $C$ , devemos acrescentar uma nova restrição representada por:  $2\text{Var}[C_{VA}] \leq \text{Var}[C]$ . Concluimos que  $\text{Cov}[f_{t_0}^1, f_{t_0}^2] \leq 0$  de modo a satisfazermos as equações acima e dessa forma aumentarmos a eficiência da simulação ao utilizarmos o método de variáveis antitéticas. Geralmente fazemos uso das seguintes funções quando na

simulação da segunda trajetória de preços:  $Z_j^2 = f(Z_j^1) = -Z_j^1$  ou  $Z_j^2 = f(Z_j^1) = 1 - Z_j^1$ .

**Tabela 3.1-** Tabela de convergência do modelo de SMC com variáveis antitéticas:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses ( $Call_{BLS}$ : 5.7337).

Simulações	$Call_{MC}$	$\sigma_{MC}$	$Call_{VA}$	$\sigma_{VA}$
100	5.9732	0.7419	5.5074	0.4090
500	6.2139	0.3874	5.8549	0.1954
1.000	5.9376	0.2775	6.0235	0.1389
5.000	5.6011	0.1182	5.7021	0.0621
10.000	5.6693	0.0856	5.7484	0.0447
50.000	5.7448	0.0383	5.7403	0.0200

### 3.1.2. Variáveis de Controle

A implementação desse método baseia-se na utilização de uma variável conhecida, denominada variável de controle, que têm um valor próximo àquele da variável que esta sendo estimada. Suponha que queiramos estimar o valor de  $\theta = E[C^A]$  e tenhamos outra variável  $Y$  com valor esperado conhecido  $v$ . Fazendo uma analogia à precificação de opções,  $\theta$  é o valor estimado da opção que queremos precificar para o qual não existe uma solução analítica conhecida (por exemplo, uma opção exótica ou americana) e  $v$  é o preço da opção *vanilla* correspondente cujo valor é dado pela solução de Black Scholes. Assim, duas simulações devem ser feitas em paralelo: uma para obtermos o valor estimado de  $C^A$  e outra para o valor estimado de  $C^B$ . O valor da opção pode ser mais bem estimado usando a fórmula abaixo:

$$C_{vC}^A = C^A + \beta(C^B - v)$$

onde  $C^A$  e  $C^B$  são os valores estimados das opções  $A$  e  $B$ , respectivamente,  $v$  é a solução analítica da opção  $B$  e  $\beta$  um parâmetro a ser escolhido.

De modo a reduzirmos a variância da estimação do valor da opção, uma escolha viável para  $\beta$  é dada por:

$$E[C_{VC}^A] = E[C^A] + \beta E[C^B - v] = \theta$$

$$Var[C_{VC}^A] = Var[C^A] + \beta^2 Var[C^B] + 2\beta Cov[C^A, C^B]$$

A primeira equação demonstra que o método de variável de controle gera um estimador não tendencioso independente do valor escolhido para  $\beta$ , enquanto a segunda sugere que a variância poderia ser minimizada pela seguinte escolha de  $\beta$ :

$$\beta = -\frac{Cov[C^A, C^B]}{Var[C^B]}$$

Devemos salientar que o valor de  $\beta$  deve ser estimado por simulações piloto, visto não sabermos *a priori* os valores  $Cov[C^A, C^B]$  e  $Var[C^B]$ .

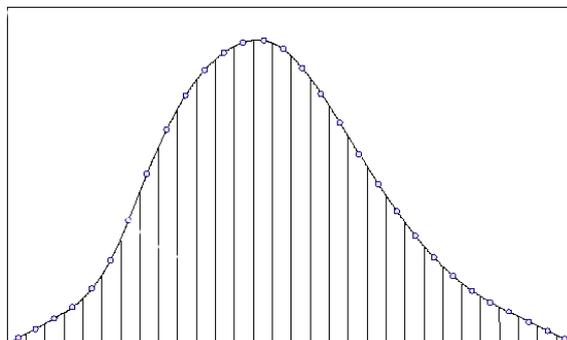
**Tabela 3.2-** Tabela de convergência do modelo de SMC com variáveis de controle:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses ( $Call_{BLS}: 5.7337$ ).

Simulações	$Call_{MC}$	$\sigma_{MC}$	$Call_{VC}$	$\sigma_{VC}$
100	5.9732	0.7419	5.8118	0.3988
500	6.2139	0.3874	5.7649	0.1673
1.000	5.9376	0.2775	5.7377	0.1173
5.000	5.6011	0.1182	5.7013	0.0514
10.000	5.6693	0.0856	5.7382	0.0366
50.000	5.7448	0.0383	5.7294	0.0163

### 3.1.3. Estratificação

Envolve a divisão da distribuição em intervalos iguais ou preferencialmente com probabilidades de ocorrência iguais. Suponha que tenhamos dividido a distribuição em 10 intervalos, todos com a mesma probabilidade. Assim, escolheremos um esquema de simulação que nos assegure que 10% das amostras estejam dentro do primeiro intervalo, 10% no segundo e assim por diante. Ao final da simulação, teremos 10 valores médios resultantes da simulação dentro dos limites de cada intervalo. Como cada intervalo possui uma probabilidade de ocorrência igual a 1/10, podemos estimar o valor médio ao longo de toda a

distribuição com base nestes 10 valores. No exemplo em questão, devemos observar a necessidade de gerarmos 10 seqüências de NA, cada uma restrita a um determinado intervalo. Segue logo abaixo a representação gráfica do método de estratificação baseado na divisão da distribuição em 30 intervalos iguais.



**Ilustração 3.1-** Esquema do método de estratificação com 30 intervalos (\*Fonte: JACKEL, P. Monte Carlo Methods in Finance).

**Tabela 3.3-** Tabela de convergência do modelo de SMC com 5 estratificações:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses ( $Call_{BLS}: 5.7337$ ).

Simulações	$Call_{MC}$	$\sigma_{MC}$	$Call_{SS}$	$\sigma_{SS}$
100	5.9732	0.7419	5.9447	0.5118
500	6.2139	0.3874	5.4886	0.1433
1.000	5.9376	0.2775	5.7217	0.1051
5.000	5.6011	0.1182	5.7366	0.0506
10.000	5.6693	0.0856	5.7831	0.0373
50.000	5.7448	0.0383	5.7422	0.0161

### 3.1.4. Importance Sampling

Esse método é mais facilmente entendido através de um exemplo. Supondo que queiramos precificar uma *call* europeia cujo preço do ativo no instante inicial esta bem abaixo do seu valor de exercício. Se simularmos uma trajetória, é bem provável que tenhamos um *payoff* final igual a zero. Apesar de infreqüentes, são as trajetórias com *payoff*'s positivos que determinarão o preço da opção. Isso significa que precisaremos de um grande número de trajetórias para obtermos valores precisos para o preço da opção. A idéia básica do método é então adotar artifícios que façam com que a simulação gere um menor número de trajetórias

com *payoff's* iguais a zero. Abaixo apresentaremos os estimadores das duas abordagens mais comumente adotadas na solução do problema.

a) alteração da função distribuição de probabilidade  $Z_i$  em  $\tilde{Z}_i$ :

$$\text{Temos que: } C = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_i \right) - K \right)^+$$

$$\therefore Z_i \sim N(0,1)$$

Substituindo a função de probabilidade  $Z_i \sim N(0,1)$  por  $\tilde{Z}_i \sim N\left(\frac{m}{\sigma} \sqrt{T}, s^2\right)$ ,

onde  $m$  é um valor positivo de modo a aumentarmos a taxa de retorno do ativo e conseqüentemente aumentarmos também a possibilidade de *payoff's* positivos. Caso  $m = 0$ , adotaremos  $s > 1$  de modo a aumentarmos a volatilidade ( $s$ ).

Assim, o estimador da *call* européia é dado por:

$$C_{IS} = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} \tilde{Z}_i \right) - K \right)^+ R(\tilde{Z}_i)$$

$$\text{onde } R(\tilde{Z}_i) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{Z}_i^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{1}{2s^2} \left(\tilde{Z}_i - \frac{m}{\sigma} \sqrt{T}\right)^2\right)}$$

ou substituindo  $\tilde{Z}_i = sZ_i + \frac{m}{\sigma} \sqrt{T}$ , temos:

$$C_{IS} = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( S_0 \exp \left( \left( r + m - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + s \sigma \sqrt{T} Z_i \right) - K \right)^+ \tilde{R}(Z_i)$$

$$\text{onde } R(\tilde{Z}_i) = \tilde{R}(Z_i) = s \cdot \exp \left( \frac{1-s^2}{2} Z_i^2 - \frac{sm\sqrt{T}}{\sigma} Z_i - \frac{1}{2} \left( \frac{m}{\sigma} \right)^2 T \right)$$

b) adicionar ao método acima uma truncagem lateral na função distribuição de probabilidade:

Para que a *call* europeia possua um *payoff* positivo temos que:

$$Z_i > L = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right)$$

Adicionando a restrição acima de modo a garantirmos um *payoff* sempre positivo, temos que  $Z_i$  truncado a esquerda possui uma função de distribuição acumulada dada por  $\frac{\Phi(x) - \Phi(L_{s,m})}{1 - \Phi(L_{s,m})}$ , onde

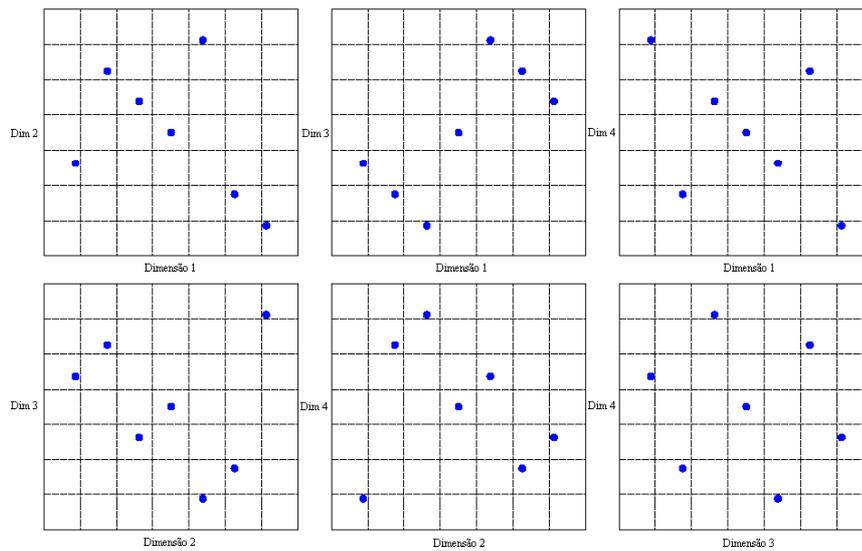
$$L_{s,m} = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T}} \left( \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r + m - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right).$$

**Tabela 3.4-** Tabela de convergência do modelo de SMC com *importance sampling*:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/\text{ano}$ ,  $\sigma = .35/\text{ano}$ ,  $T = 3$  meses ( $Call_{BLS}$ : 5.7337).

Simulações	Monte Carlo		Método A		Método B	
	$Call_{MC}$	$\sigma_{MC}$	$Call_{IS}$	$\sigma_{IS}$	$Call_{IS}$	$\sigma_{IS}$
100	5.9732	0.7419	6.3049	0.4620	5.8437	0.2489
500	6.2139	0.3874	5.9773	0.2106	5.7296	0.1093
1.000	5.9376	0.2775	5.6055	0.1512	5.7550	0.0767
5.000	5.6011	0.1182	5.6840	0.0656	5.7392	0.0346
10.000	5.6693	0.0856	5.6792	0.0464	5.7458	0.0247
50.000	5.7448	0.0383	5.7401	0.02071	5.7394	0.0110

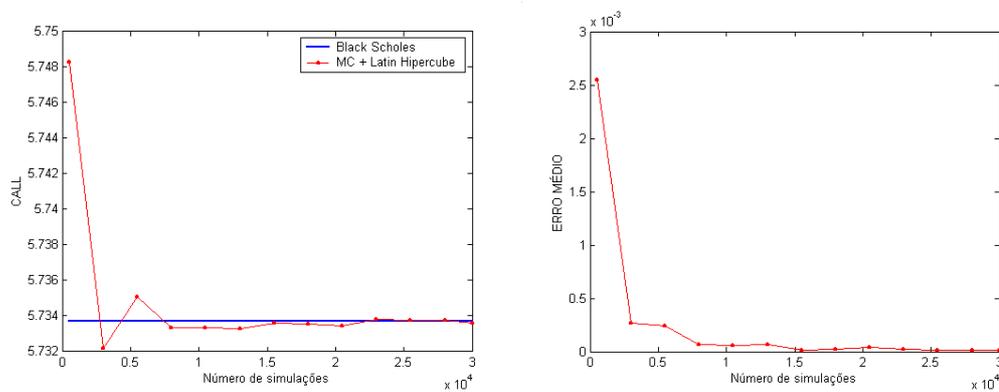
### 3.1.5. Latin Hipercube (LH)

Esse método tem por base a tentativa de alocar amostras num stratum multidimensional com o mínimo de *overlaps* numa projeção unidimensional. Imagine que queremos avaliar o efeito de quatro parâmetros (stratum com quatro dimensões) sobre uma variável. Cada um desses parâmetros pode assumir sete valores. O método LH é um esquema que aloca um valor para cada parâmetro ao menos uma vez em cada stratum. Na figura abaixo demonstramos a alocação de pontos de acordo com o modelo LH para o caso citado acima.



**Ilustração 3.2-** Esquema gráfico do método *Latin Hipercube*. (\* Fonte: JACKEL, P. Monte Carlo Methods in Finance.)

Devido ao excelente desempenho do método LH frente as demais técnicas de redução de variância, seu respectivo gráfico de convergência segue logo abaixo separado dos demais.



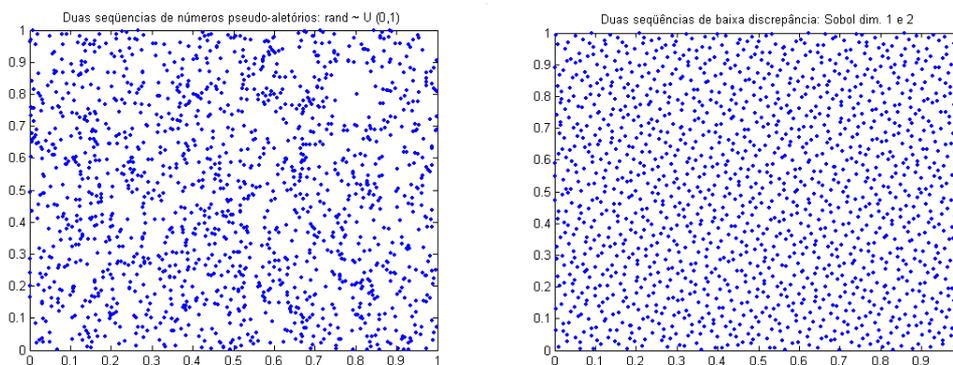
**Figura 3.1-** Convergência do método *Latin Hipercube*:  $S_0 = 70$ ,  $X = 70$ ,  $r = .1/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ ,  $T = 3$  meses ( $Call_{BLS} = 5.7337$ ).

### 3.2. Seqüências de Baixa Discrepância ou Quase-Monte Carlo (QMC)

Nas simulações das seções anteriores utilizamos números pseudo-aleatórios gerados pela função *randn* disponível na linguagem de programação MATLAB 6.0. Essa função gera uma seqüência de números com distribuição  $N(0,1)$ .

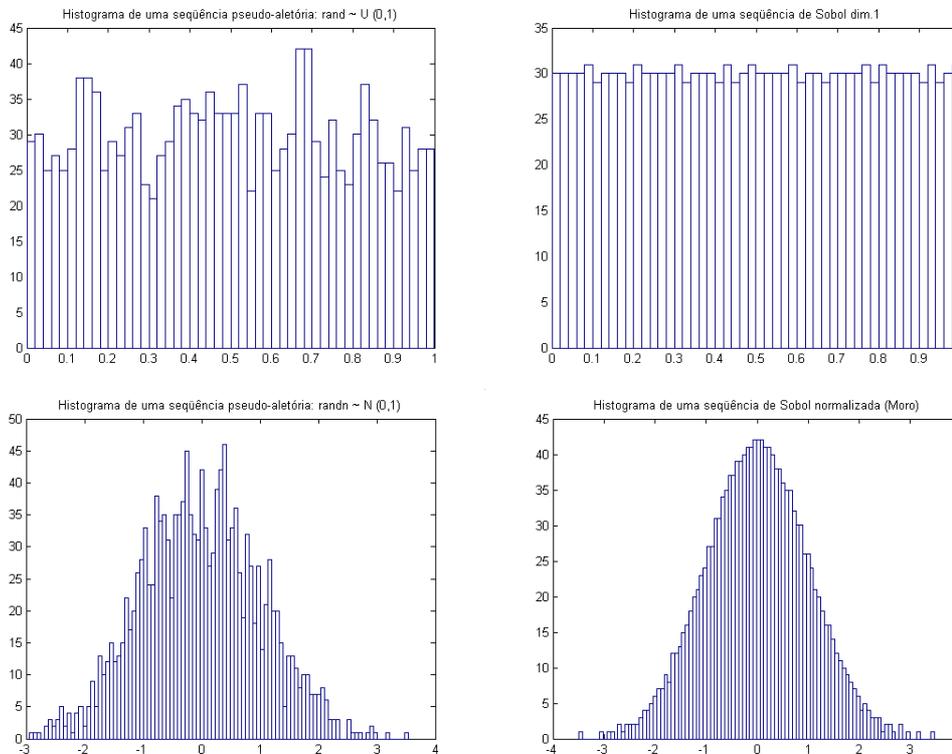
Trabalhos recentes têm mostrado que a utilização de seqüências de baixa discrepância (ou quase-aleatórias) podem acelerar substancialmente a convergência da SMC devido à necessidade de um menor número de simulações a fim de atingirmos a precisão desejada. Nestas seqüências, as amostras são selecionadas de modo a preencherem igualmente todo o domínio da simulação. Em seu trabalho Boyle (1996) utilizou seqüências de baixa discrepância na precificação de opções européias, demonstrando assim as vantagens deste modelo em relação ao modelo de SMC, este último baseado em seqüências de números pseudo-aleatórios.

A melhor performance da SQMC sobre a SMC pode ser explicada através da análise gráfica das seqüências de NA geradas respectivamente pelos dois métodos. Abaixo, comparamos empiricamente gráficos resultantes da plotagem de números pseudo-aleatórios e seqüências de baixa discrepância. Note que no primeiro gráfico existem regiões que não são preenchidas e outras com um maior agrupamento de pontos. Já a seqüência de Sobol, preenche o espaço bidimensional de maneira mais uniforme, evitando *gaps* e agrupamentos.



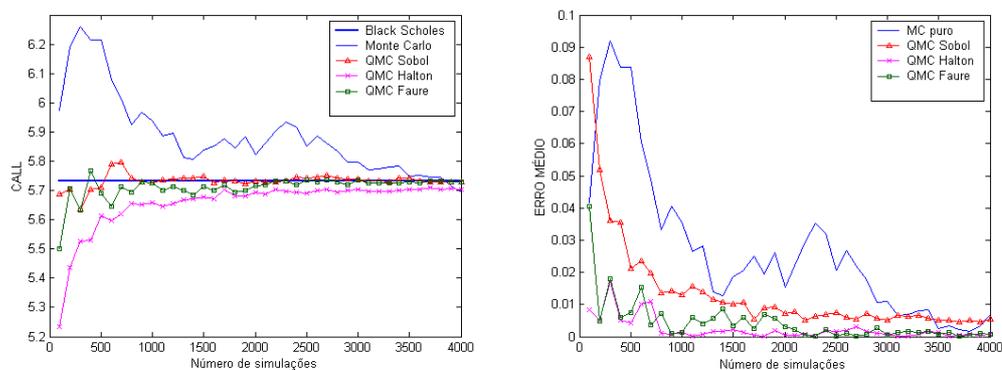
**Figura 3.2-** Uniformidade no preenchimento do gráfico das seqüências de números pseudo-aleatórios e de baixa discrepância.

Da mesma maneira podemos observar gráficos que nos indiquem quão bem essas seqüências representam as distribuições uniforme e normal. Novamente evidenciamos o melhor desempenho das seqüências de baixa discrepância.



**Figura 3.3-** Comparação das distribuições geradas pelas seqüências de números pseudo-aleatórios e de baixa discrepância.

Constatamos que a homogeneidade das seqüências de baixa discrepância conferem uma convergência mais eficiente na precificação de opções européias.



**Figura 3.4-** Convergência dos métodos de MC e QMC.

### 3.2.1. Geração de Números Quase-Aleatórios Uniformes

#### 3.2.1.1. Halton

A idéia por trás da seqüência de Halton é representarmos cada número inteiro da seqüência numa base prima diferente para cada dimensão. Assim, para gerarmos seqüências de números em diferentes dimensões devemos alterar o valor do número primo usado como base. Alguns exemplos de bases para diversas dimensões são:  $b = 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29 \quad \dots\dots\dots$

O problema observado na geração de números com base no método de Halton é a constatação de perda da uniformidade à medida que aumentamos o número de dimensões. Constatamos que a seqüência de Halton não deve ser utilizada em simulações acima de 8 dimensões.

#### Procedimento para gerar um número de Halton:

- I. Para  $n = 1, 2, \dots, N$  onde  $N$  é o tamanho da seqüência que pretendemos gerar;
- II. Representar  $n$  numa base escolhida previamente. Esta nova base deve ser um número primo;  
Ex:  $(n)_{10} \rightarrow (n)_b = (d_m \dots\dots d_4 \ d_3 \ d_2 \ d_1 \ d_0)_b$
- III. Refletir o número na nova base e torná-lo decimal;  
Ex:  $h = (0. \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ \dots\dots \ d_m)_b$
- IV. O número aleatório de Halton é então calculado da seguinte forma:

$$H(n, b) = \sum_{k=1}^m d_k b^{-k}$$

#### 3.2.1.2. Sobol

A seqüência de Sobol é gerada com base num vetor de números direcionais. Assim, primeiramente demonstraremos o procedimento para a determinação desses números para posteriormente abordarmos a determinação da seqüência de Sobol.

### Números direcionais

Devemos salientar a necessidade da correta determinação dos números direcionais de modo a gerarmos uma seqüência não corrompida.

$$P = x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_{d-1} x + 1;$$

onde  $P$  é um polinômio primitivo escolhido.

$$m_i = 2 \cdot a_1 \cdot m_{i-1} \oplus_2 2^2 \cdot a_2 \cdot m_{i-2} \oplus_2 \dots \oplus_2 2^{d-1} \cdot a_{d-1} \cdot m_{i-d+1} \oplus_2 2^d \cdot m_{i-d} \oplus_2 m_{i-d}$$

Observamos que devemos entrar com os primeiros  $m_1 \dots m_d$  de modo a inicializarmos o procedimento de cálculo. Os demais termos  $m_{d+1} \dots$  são determinados pela fórmula acima.

$$v_i = \frac{m_i}{2^i}; \text{ para } m_i < 2^i \text{ e ímpar}$$

A escolha do polinômio primitivo e os valores iniciais de  $m_i$  ( $m_1 \dots m_d$ ), determinarão a correta valoração dos números direcionais, que serão de particular importância na geração da seqüência de Sobol.

### Geração da seqüência de números de Sobol:

Na seqüência de Sobol usamos o valor do número  $x^{n-1}$  para determinarmos o número  $x^n$  posterior. Assim, precisamos escolher um número inicial qualquer para a seqüência.

A seqüência é calculada com base no processo iterativo a seguir:

$$x^n = x^{n-1} \oplus_2 v_c$$

onde  $c$  é o índice do zero mais à direita da representação binária de  $n-1$ .

Desse modo a seqüência se parece com:

$$x^1 = x^0 \oplus_2 v_{c(0)}$$

$$x^2 = x^1 \oplus_2 v_{c(1)}$$

.....

$$x^n = x^{n-1} \oplus_2 v_{c(n-1)}$$

A grande vantagem da seqüência de Sobol é a possibilidade de a utilizarmos em simulações envolvendo dimensões maiores que a de Halton.

### 3.2.2. Associação das Técnicas de Redução de Variância e QMC

Finalmente devemos chamar a atenção para a possibilidade de utilizarmos QMC associada às técnicas de redução de variância como forma de tornar a convergência ainda mais eficiente. No entanto, devemos observar que as técnicas de variáveis antitéticas e estratificação não apresentam ganho adicional quando associadas a QMC. As seqüências de baixa discrepância são desenvolvidas para preencher a região da simulação uniformemente, dessa forma as vantagens advindas dessas duas técnicas de redução de variância já estão incorporados às propriedades de QMC.

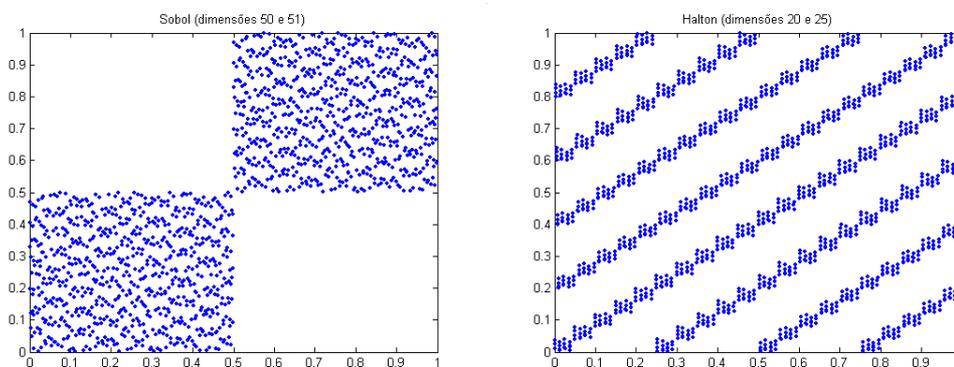
**Tabela 3.5-** Tabela de convergência do modelo de QMC associado a técnica de variáveis de controle.

Simulações	MC	MC+VC	QMC	QMC+VC
100	5.9732	5.8118	5.6860	5.7215
500	6.2139	5.7649	5.7101	5.7304
1.000	5.9376	5.7377	5.7263	5.7311
5.000	5.6011	5.7013	5.7396	5.7335
10.000	5.6693	5.7382	5.7327	5.7334
50.000	5.7448	5.7294	5.7344	5.7337

\*  $CALL_{BS}$ : 5.7337

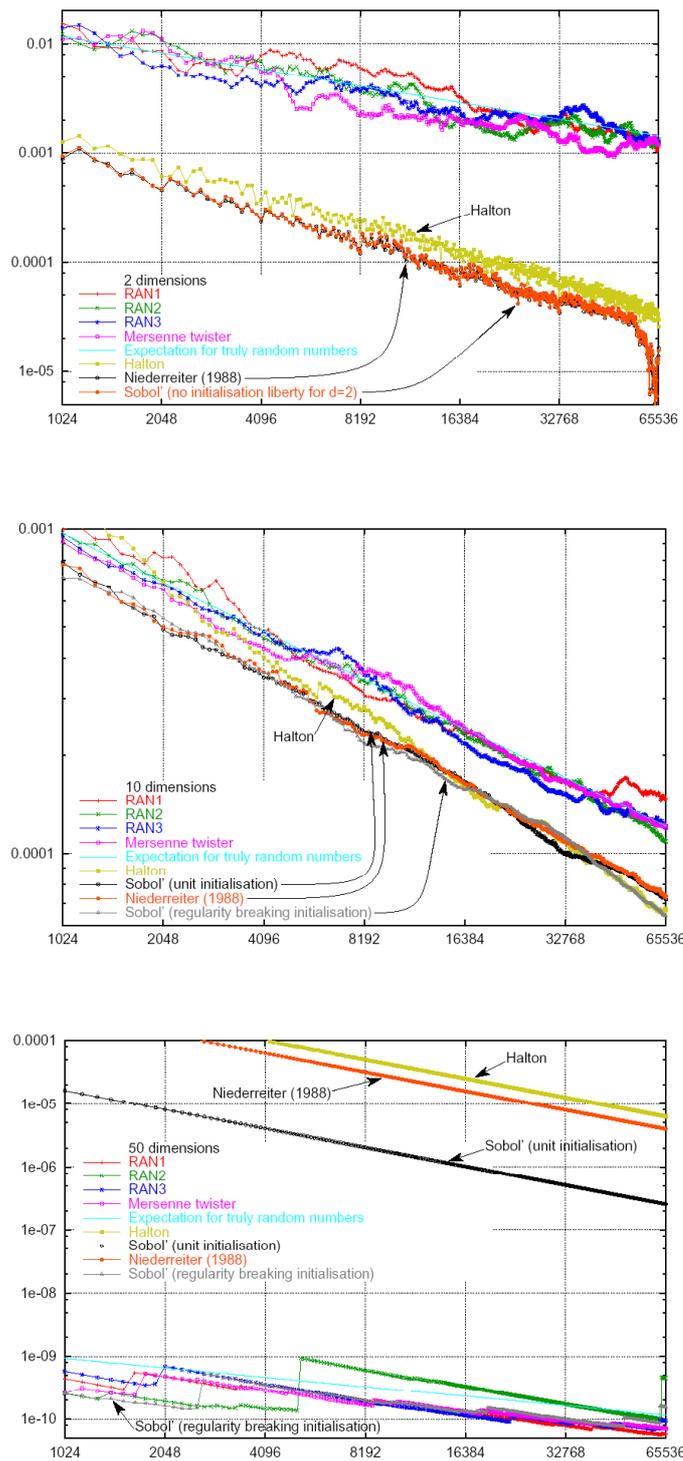
### 3.2.3. Homogeneidade das Seqüências em Altas Dimensões

As seqüências de baixa discrepância (Halton, Sobol, Faure e etc) perdem gradativamente a uniformidade à medida que aumentamos a dimensão. Podemos demonstrar esses resultados pela simples inspeção visual dos gráficos abaixo. Essas projeções são uma primeira indicação da inaplicabilidade da SQMC em simulações envolvendo altas dimensões e conseqüentemente sua inaplicabilidade também na precificação de opções americanas onde o número de dimensões é dado pelo número de datas de exercício antecipado.



**Figura 3.5-** Falta de uniformidade das seqüências de baixa discrepância em altas dimensões.

Uma forma mais eficaz de demonstrarmos o efeito da dimensão é avaliarmos a homogeneidade das seqüências quase-aleatórias com base na análise da discrepância à medida que aumentamos a dimensão. Nos gráficos abaixo podemos verificar a superioridade das seqüências de baixa discrepância quando em baixas dimensões (dimensões 5 e 15), no entanto uma vez que aumentamos as dimensões observamos que as vantagens dessas seqüências diminuem gradativamente. No último gráfico de dimensão 50, as seqüências quase-aleatórias passam a apresentar homogeneidade inferior às pseudo-aleatórias.

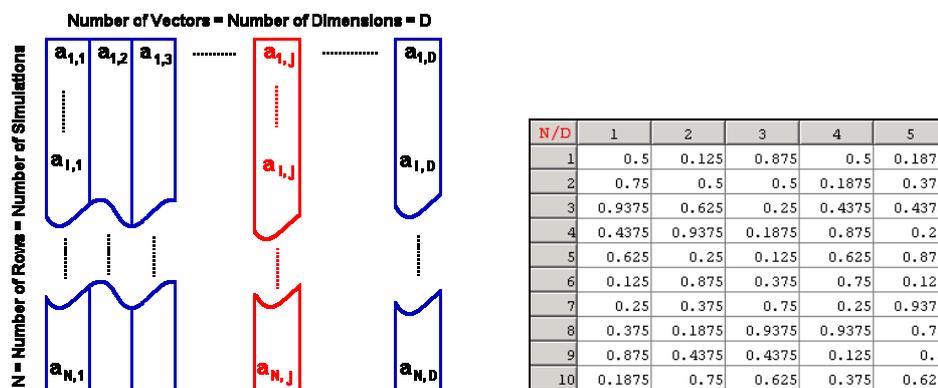


**Figura 3.6-** Comparação da homogeneidade das seqüências quase-aleatórias e pseudo-aleatórias com base na análise da discrepância (\*Fonte: JACKEL, P. Monte Carlo Methods in Finance).

### 3.2.4. QMC Híbrido

Visando eliminar a degradação de simulações de QMC em altas dimensões, usaremos um algoritmo chamado por nós de QMC Híbrido. Esse algoritmo permutará aleatoriamente a seqüência de números quase-aleatórios de modo gerarmos novas seqüências independentes, mantendo as mesmas propriedades de baixa discrepância observadas em simulações de QMC em baixas dimensões.

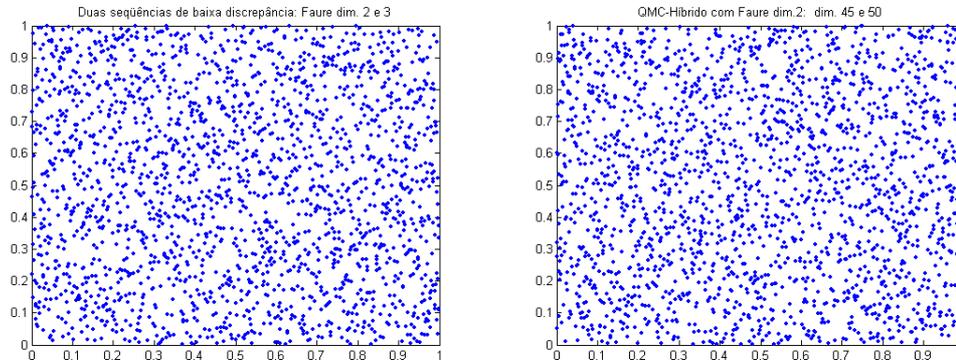
Na figura abaixo apresentamos o esquema gráfico do método. A primeira coluna (vetor) corresponde a uma seqüência de baixa discrepância qualquer. O número de vetores é igual ao número de dimensões  $D$ , e pode ser interpretado como o número de intervalos de tempo utilizados na discretização da vida da opção que queremos avaliar. O número de elementos em cada vetor corresponde ao número de simulações  $N$  (ou trajetórias de preços). Sendo assim, a maneira mais simples de gerarmos  $D$  seqüências de baixa discrepância independentes, seria gerarmos uma seqüência inicial de Sobol Dim.2 (ou qualquer outra) para o primeiro vetor e então para cada um dos  $D-1$  vetores seguintes utilizarmos um algoritmo de permutação aleatória de modo a embaralharmos os elementos da seqüência de Sobol Dim.2 original.



**Ilustração 3.3-** Esquema do modelo de QMC-Híbrido.

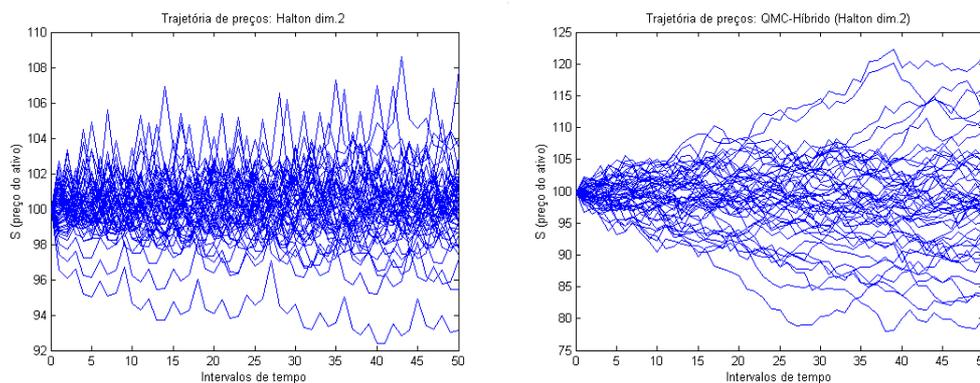
Para  $N \gg D$ , a independência entre as seqüências mostra-se bastante satisfatória por facilitar a destruição de qualquer correlação entre elas. Mesmo para  $N = D$ , as seqüências geradas podem ser consideradas independentes em termos práticos. No entanto, na grande maioria das vezes as simulações envolverão  $N \gg D$ .

Empiricamente podemos constatar que o método de QMC-Híbrido não se mostra inferior, em termos do preenchimento uniforme do gráfico abaixo, se comparado com seqüências de baixa discrepância.



**Figura 3.7-** Uniformidade no preenchimento do gráfico nos modelos de QMC e QMC-Híbrido.

As vantagens da aplicação deste método ficam evidentes na comparação entre os dois gráficos de simulações de trajetórias de preços mostrados abaixo. No primeiro evidenciamos o efeito da degradação da simulação de QMC quando na utilização de apenas uma seqüência números de baixa discrepância na geração de trajetórias de preços. Já o segundo representa a mesma simulação pelo método de QMC-Híbrido.



**Figura 3.8-** Simulação de trajetórias de preços no modelo de QMC e QMC-Híbrido.

## Capítulo 4:

# OPÇÕES AMERICANAS

### 4.1 Conceitos Básicos

As opções americanas diferem das européias por poderem ser exercidas a qualquer momento ao longo de sua vida e não somente na data de expiração (vencimento). No entanto, existem algumas variações, como no caso de opções bermuda, que só podem ser exercidas em datas específicas até o vencimento. Parte do problema de precificação envolve a determinação do momento ótimo de exercício antecipado. É exatamente a necessidade da determinação deste momento ótimo de exercício que tornam as opções americanas mais interessantes e difíceis de avaliarmos que as européias.

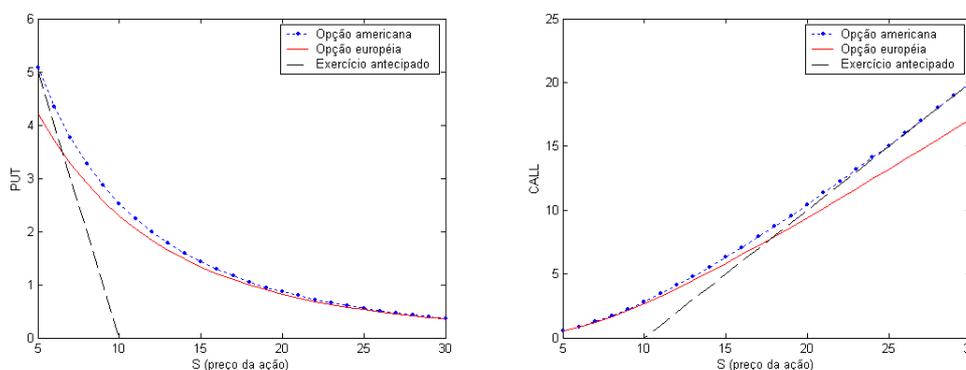
Geralmente não existem soluções analíticas para opções do estilo americano, algumas exceções envolvendo casos mais simples seriam: uma *call* americana cujo ativo não paga dividendos, que pode ser avaliada como européia; a solução analítica de Barone-Adesi e a de Bjerksund e Stensland, envolvendo opções americanas *vanilla* pagando taxas contínuas de dividendos; opções americanas que pagam um único dividendo conhecido, que podem ser calculadas por uma ligeira modificação na aplicação usual da equação de Black Scholes ou através de uma solução analítica desenvolvida por Roll, Geske e Whaley.

A primeira propriedade importante a respeito das opções americanas é que seu valor ( $V(S_i, t_i)$ , onde  $S_i = S(t_i)$ ) deve ser maior ou igual ao seu valor intrínseco ( $\Lambda(S_i, t_i)$ ) em qualquer momento até a data de expiração. Do contrário, cria-se uma oportunidade de arbitragem, onde compraríamos uma opção americana e a venderíamos imediatamente de modo a lucrar  $V - \Lambda$  sem nenhum risco.

$$V(S_i, t_i) \geq \Lambda(S_i, t_i) \rightarrow \text{Call: } \Lambda(S_i, t) = \max(S_i - X, 0)$$

$$\text{Put: } \Lambda(S_i, t) = \max(X - S_i, 0)$$

Devemos observar também que uma opção americana que paga dividendos vale mais que sua similar européia. A explicação pode ser facilmente constatada pela análise dos gráficos abaixo. Note que no gráfico correspondente à *put*, temos que  $P(S_i, t_i) < \max(X - S_i, 0)$  em pelo menos parte da região. Nesta região o valor da opção americana deve ser necessariamente maior que a européia, pois do contrário para um certo valor de  $S_i$ , poderíamos comprar uma *put*  $P(S_i, t_i)$  e exercer-la imediatamente obtendo assim o respectivo lucro sem risco:  $X - P - S > 0$ . A mesma explicação pode ser usada para explicarmos porque o preço de uma *call* americana é superior ao de sua similar européia.



**Figura 4.1-** Comparação entre os valores de opções americanas, européias e o valor de exercício antecipado.

## 4.2. Formulação Matemática do Problema

A avaliação de opções americanas baseia-se nos mesmos passos da dedução da equação diferencial parcial (EDP) de Black Scholes com algumas modificações que caracterizam os efeitos da possibilidade de exercício antecipado. Assim, considerando a impossibilidade de arbitragem, construiremos um portfólio  $\Pi$  composto de uma unidade da opção  $V$  e uma posição de  $-\Delta$  no ativo objeto, assim temos:

$$\Pi = V - \Delta S$$

Após um instante de tempo pequeno  $dt$ , o valor da carteira sofre uma variação  $d\Pi$  dado por:

$$d\Pi = dV - \Delta dS \quad \therefore \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Usando o Lema de Itô, temos:

$$d\Pi = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \right] - \frac{\partial V}{\partial S} dS$$

Considerando a impossibilidade de arbitragem o rendimento da carteira é dado por:

$$\begin{aligned} d\Pi &= r\Pi dt \\ &= r \left[ V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right] dt \end{aligned}$$

Igualando os rendimentos da carteira, a avaliação de uma opção europeia é dada pela solução da EDP abaixo.

$$\begin{aligned} r \left[ V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right] dt &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \right] - \frac{\partial V}{\partial S} dS \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0 \quad (\text{EDP de Black Scholes}) \end{aligned}$$

No caso de uma opção americana a EDP acima vira uma inequação. Diferentemente dos contratos europeus, nos contratos americanos a relação entre o lançador e o tomador da opção é assimétrica. O tomador da opção tem o direito de exercício antecipado enquanto o lançador não pode fazer nada a não ser esperar. Se  $V$  é o valor da opção americana para o tomador, então a carteira  $\Pi$  não pode possuir retorno superior à taxa livre de risco. No entanto, observamos que o lançador pode obter rendimento superior à taxa livre de risco caso o tomador da opção não a exerça num instante e preço ótimos.

$$d\Pi \leq r\Pi dt$$

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \right] - \frac{\partial V}{\partial S} dS \leq r \left[ V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right] dt$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0$$

Uma condição adicional é que o valor da opção americana é sempre maior ou igual ao seu *payoff* ( $\Lambda(S)$ ).

$$V \geq \Lambda(S)$$

Se em algum momento  $V < \Lambda(S)$ , a opção deve ser exercida imediatamente. Caso  $V > \Lambda(S)$ , então a opção deve ser mantida viva satisfazendo a EDP de Black Scholes original:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Definindo o operador  $L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r$ , se  $LV < 0$  a opção deve ser exercida imediatamente fazendo com que  $V = \Lambda(S)$ . Assim, esse problema pode ser formulado da seguinte maneira (*linear complementary problem*):

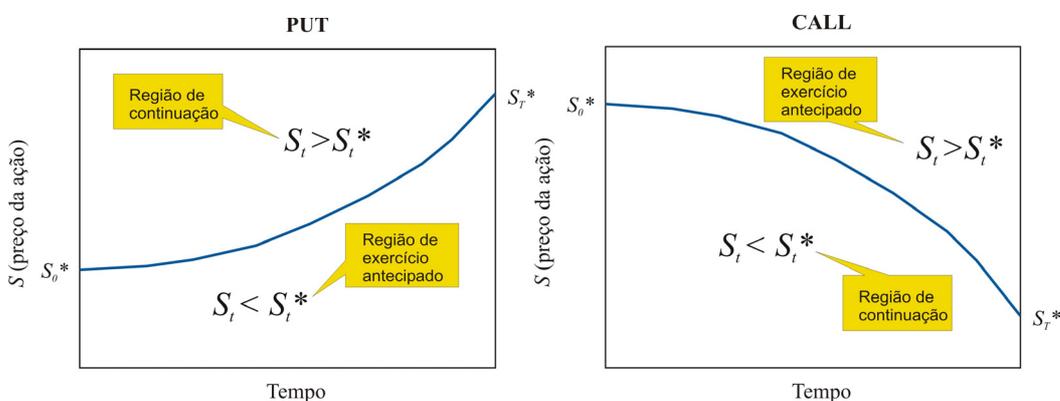
$$LV \leq 0, \quad V - \Lambda(S) \geq 0 \quad e \quad (V - \Lambda(S))LV = 0$$

### 4.3. Condição de Contorno Livre

Podemos analisar uma opção americana como um problema envolvendo uma condição de contorno livre. Assim, tomemos como exemplo a precificação de uma *put* americana.

Primeiramente, existe um preço  $S_i^*$  (ou  $S^*(t_i)$ ) para o qual o exercício antecipado da opção é ótimo no instante  $t_i$ ,  $t_i = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ . Caso  $S_i^*$

não exista, trataríamos o problema de maneira semelhante a uma opção européia, pois não exerceríamos antecipadamente a opção em nenhum momento, independente do preço do ativo  $S_i$ . Assim numa *put* americana, existe uma região  $S_i < S_i^*$  onde o exercício antecipado é ótimo, pois maximiza a função de *payoff*  $\Lambda(S_i, t_i) = \max(X - S_i, 0)$ . Caso  $S_i > S_i^*$ , devemos manter a opção viva. Os valores  $S_i^*$  para todos os instantes  $t_i = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ , são denominados condição de contorno livre<sup>1</sup>. Como não conhecemos esses preços de exercício ótimo devemos tratar  $S_i^*$  como uma restrição a ser determinada por procedimentos numéricos.



**Ilustração 4.1-** Esquema gráfico da curva de gatilho (condição de contorno livre) de uma *put* e *call* americanas.

Assim, supondo o conhecimento da curva de gatilho  $S_i^*$  (em azul no gráfico acima) a precificação de uma *put* americana é dada por:

1. para  $S_i < S_i^*$ , exercício antecipado é ótimo:  $P(S_i, t_i) = [X - S_i]$ ;
2. para  $S_i > S_i^*$ , devemos manter a opção viva e o valor da *put* ( $P$ ) deve

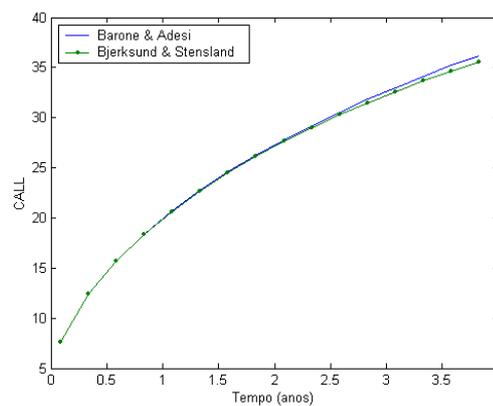
satisfazer a equação de Black-Scholes: 
$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

<sup>1</sup> A condição de contorno livre de uma opção americana é também conhecida como curva de gatilho. Adotaremos esta terminologia ao longo deste trabalho.

3. ao longo da curva de gatilho  $S_i^*$ ,  $\frac{\partial P}{\partial S}$  deve ser contínuo.

#### 4.4. Aproximações Analíticas

Existem duas aproximações analíticas para a precificação de opções americanas com dividendos contínuos. A primeira aproximação foi desenvolvida por Barone-Adesi e Whaley. A segunda, desenvolvida mais recentemente por Bjerksund e Stensland, é considerada computacionalmente mais eficiente e mais precisa na precificação de opções com prazos mais longos. Conforme pode ser visto no gráfico abaixo, os valores dos dois métodos divergem à medida que aumentos o tempo de duração da opção.



**Figura 4.2-** Comparação das soluções analíticas de Barone-Adesi e Bjerksund e Stensland.

Como essas soluções são consideradas aproximações exatas, usaremos o modelo de Bjerksund e Stensland como *benchmark* para a análise dos resultados obtidos nos modelos numéricos abordados nos capítulos seguintes. Essas aproximações mostram-se de grande importância para testarmos a precisão de nossos modelos antes de partirmos para a precificação de opções mais complexas para os quais não existem soluções analíticas.

## Capítulo 5:

### MODELO BINOMIAL

#### 5.1. Conceitos Básicos

A idéia do modelo binomial é discretizar o processo de neutralidade ao risco representado pela EDP de Black Scholes, e então usar o modelo de programação dinâmica para achar o preço da opção. Abaixo temos a representação de uma árvore de três passos.

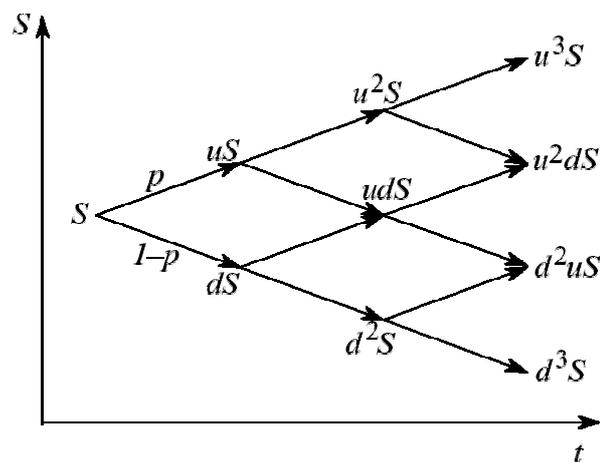


Ilustração 5.1- Esquema gráfico de uma árvore binomial.

Cox, Ross e Rubinstein (1979) desenvolveram um método que converge para a solução encontrada por Black e Scholes. Eles mostraram que a equação do movimento geométrico browniano poderia ser obtida como um limite contínuo de um caminho aleatório em tempo discreto. Em seu artigo original, o método binomial é caracterizado pelos seguintes parâmetros:  $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ,  $d = 1/u$ ,  $\Delta t = T/n$ , onde  $n$  corresponde ao número de passos na árvore entre os instantes inicial e final ( $T$ ). A probabilidade de um movimento para cima no preço da ação objeto é dada por  $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{\sigma} \sqrt{\Delta t}$ . Estabelecido estes parâmetros, a árvore binomial converge para o movimento geométrico browniano a medida que

$n \rightarrow \infty$ . Outras variações deste modelo binomial usam valores diferentes para esses parâmetros, são eles: Modelos de Jarrow e Rudd (JR), Hull e White (HW) e Trigeorgis (TRG).

A rotina de programação dinâmica é inicializada estabelecendo o preço da *call* igual a  $C_T(S_T) = \max(S_T - X, 0)$ , em cada um dos nós terminais  $T$ . No instante  $T - \Delta t$ , correspondente ao nó  $u^2 S$  o valor da opção é dado por:

$$C_{T-\Delta t}(u^2 S) = \max\left\{ (u^2 S - X), e^{-r\Delta t} \left( p C_T(u^3 S) + (1-p) C_T(u^2 S) \right) \right\}$$

Isto é, o valor de uma opção americana é o máximo entre o valor de exercício imediato e o valor presente de manter a opção viva (valor de continuação). O valor da opção nos demais nós são determinados recursivamente de maneira similar.

Conforme demonstrado nos resultados, o modelo binomial possui uma convergência oscilatória lenta que independe do tipo de modelo adotado. De modo a solucionar este problema, muitos têm optado por uma variação do modelo binomial que faz uso do valor médio dos preços da opção nos nós  $n$  e  $(n+1)$ . Este modelo ficou conhecido como Método dos Valores Médios.

Broadie e Detemple também propuseram duas modificações ao modelo binomial de modo a melhorar sua convergência. Na primeira, a fórmula de Black Scholes substitui o valor de continuação no instante de tempo anterior ao instante final  $T$  (método BBS); a segunda modificação adiciona uma extrapolação de Richardson ao método BBS (método BBSR).

## 5.2. Tipos de Modelos Binomiais

### 5.2.1. Cox, Ross e Rubinstein (CRR)

Considere a equação do movimento geométrico browniano:

$$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

Essa equação pode ser modificada para levar em conta os dividendos ( $\delta$ ) pagos continuamente pelo ativo objeto. Assim, temos:

$$dS = (r - \delta)Sdt + \sigma Sdz \quad \therefore \quad v = r - \delta$$

$$dS/S = vdt + \sigma dz$$

Substituindo a variável  $S$  por  $x = \ln(S)$ , a equação acima pode ser reescrita como:

$$dx = vdt + \sigma dz \quad \therefore \quad dx = dS/S$$

ou na forma discreta:  $\Delta x = v\Delta t + \sigma\Delta z$ , onde  $\Delta t = T/n$ .

De acordo com o movimento geométrico browniano, temos que o valor esperado e variância de  $\Delta x$  são dados por:

$$E(\Delta x) = v\Delta t \quad \text{e} \quad Var(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$$

lembrando que  $E(\Delta z) = 0$  e  $Var(\Delta z) = \Delta t$ .

Observando a troca de variáveis, a árvore binomial acima deve ser alterada de modo a exibir as variações em  $x$ . Isto pode ser feito aplicando-se o logaritmo em cada um dos nós. Assim sendo, a variável  $x$  move-se para cima ou para baixo segundo os seguintes novos incrementos:  $u_x = \ln(u)$  e  $d_x = \ln(d)$ .

Analisando a árvore representativa de  $x$ , o valor esperado e variância de  $\Delta x$  são obtidos segundo a distribuição binomial:

$$E(\Delta x) = p \ln(u) + (1 - p) \ln(d) \quad \text{e} \quad Var(\Delta x) = p(1 - p)(\ln(u) - \ln(d))^2$$

Como a distribuição de probabilidades em cada período da árvore segue uma distribuição binomial, então quanto maior o número de passos, mais ela se aproxima de uma distribuição normal. Conseqüente, devemos estabelecer os parâmetros para que, no limite, as médias e variâncias das duas distribuições sejam iguais. Dessa forma, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} p \ln(u) + (1 - p) \ln(d) &= v\Delta t \\ p(1 - p)(\ln(u) - \ln(d))^2 &= \sigma^2 \Delta t \end{aligned}$$

Esse sistema possui duas equações e três variáveis desconhecidas. Assim, podemos escolher um valor para uma das variáveis de modo a satisfazermos o sistema.

De modo a obter uma solução para o sistema acima, Cox, Ross e Rubinstein acrescentaram uma nova equação:  $\ln(u) = -\ln(d)$ . A seguinte solução foi então encontrada assumindo que as potências de  $\Delta t$  superiores a unidade tendem a zero a medida que  $n \rightarrow \infty$ .

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{\sigma} \sqrt{\Delta t}$$

### 5.2.2. Modelo de Jarrow e Rudd (JR)

Jarrow e Rudd propuseram  $p = 1/2$ , como alternativa para solucionar o sistema anterior. Desse modo, o sistema passa a ter duas equações e duas incógnitas, apresentando a seguinte solução:

$$u = e^{(v-1/2\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(v-1/2\sigma^2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{e} \quad p = 1/2$$

Assim como no modelo CRR, o modelo JR supõe que as potências de  $\Delta t$  maiores do que a unidade tendem para zero.

### 5.2.3. Modelo de Hull e White (HW)

Um modelo mais preciso foi proposto por Hull e White. Neste os termos com potências de  $\Delta t$  maiores do que a unidade não foram desprezados. Desse modo, este modelo mostra-se mais preciso que os anteriores, especialmente quando  $n$  é pequeno. Os parâmetros do modelo são dados por:

$$u = \frac{\left[ (m_1^2 + m_2^2 + 1) + \sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + 1) - 4m_1^2} \right]}{2m_1}, \quad d = 1/u \quad \text{e} \quad p = \frac{(m_1 - d)}{(u - d)}$$

onde  $m_1 = e^{r\Delta t}$  e  $m_2 = m_1^2 (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$ .

#### 5.2.4. Modelo de Trigeorgis (TRG)

Neste modelo Trigeorgis aplicou o Lema de Itô de modo a determinar o processo estocástico da variável  $x = \ln(S)$ . O processo encontrado é dado por:

$$dx = \left( v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

Procedendo de maneira análoga ao modelo CRR onde  $\ln(u) = -\ln(d)$  é a equação adicional, os seguintes parâmetros foram determinados:

$$\ln(u) = \sqrt{\sigma^2 \Delta t + (v - \sigma^2)^2 \Delta t^2}, \quad \ln(d) = -\ln(u) \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v \Delta t}{\ln(u)}$$

Neste modelo, as potências de  $\Delta t$  superiores a unidade não foram desprezadas.

### 5.3. Variações do Modelo Binomial

#### 5.3.1. Método dos Valores Médios (MVM)

Muitas vezes, regras práticas são utilizadas para tirar vantagens de características de modelos numéricos. No caso do modelo binomial, a média entre os valores obtidos nos passos  $n+1$  e  $n$  é calculada a fim de tomar vantagem da regra de convergência oscilatória.

#### 5.3.2. Método Binomial Black-Scholes (BBS)

Este método, proposto por Broadie e Detemple é idêntico ao binomial, exceto que no instante  $t - \Delta t$  a fórmula de Black-Scholes substitui o valor de continuação. A precificação pela fórmula de Black Scholes requer mais trabalho que o cálculo do valor de continuação que envolve apenas duas multiplicações. No entanto, este trabalho adicional é feito apenas em  $n$  nós, não alterando em muito o tempo computacional do modelo. Este método tem como benefício a suavização e maior precisão da convergência que o modelo binomial original.

### 5.3.3. Método BBS com Extrapolação de Richardson (BBSR)

O modelo BBSR adiciona uma extrapolação de Richardson de dois pontos ao modelo BBS. Para calcular o preço de uma opção com  $n$  intervalos de tempo três passos devem ser seguidos:

1. calcular o preço de uma opção usando o modelo BBS com  $n$  intervalos de tempo ( $C_n$ );
2. calcular o preço de uma opção usando o modelo BBS com  $m = n/2$  intervalos ( $C_m$ );
3. usar a fórmula de extrapolação para estimar o valor da opção:

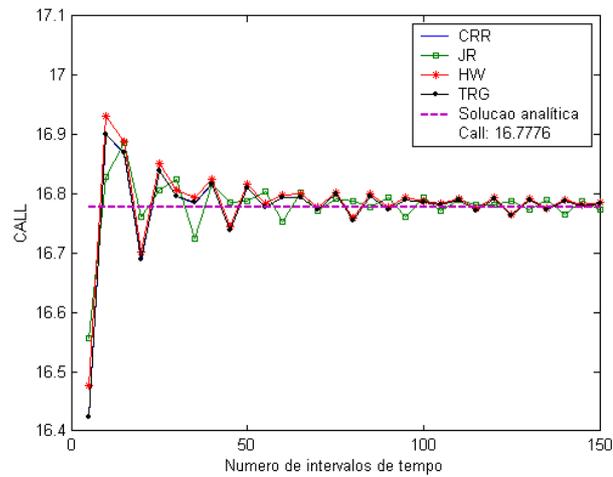
$$C_{BBSR,n} = 2C_n - C_m .$$

Estudos têm mostrado que o método BBSR é melhor que qualquer outro tipo de modelo binomial no que se refere à precisão e convergência.

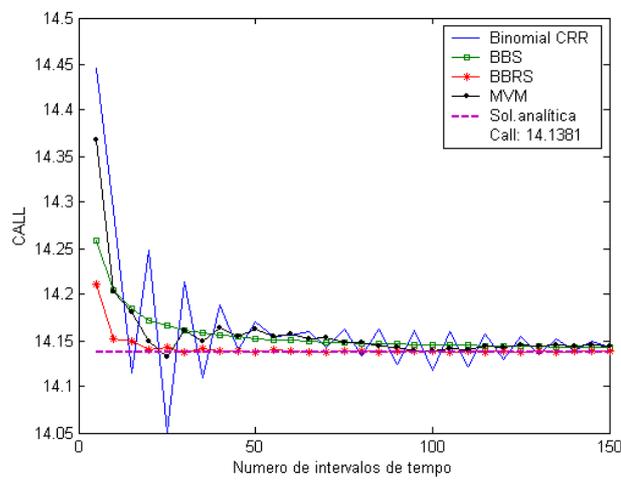
### 5.3.4. Método das Variáveis de Controle (MVC)

O erro do modelo binomial pode ser reduzido a ponto de torná-lo independente do número de passos da árvore ao o utilizarmos apenas para calcular a diferença entre os preços da opção americana e a européia equivalente. A solução de Black Scholes é então corrigida por esta diferença. Em outras palavras, podemos dizer que o preço da opção européia é usado como uma variável de controle na precificação da opção americana. Considerando  $C_{BS}$  como a solução da opção européia por Black Scholes e  $C_{Eur}$  e  $C_{Amer}$ , as respectivas soluções das opções européias e americanas pelo modelo binomial, temos que a precificação pelo MVC é dada por :  $C_{MVC} = C_{BS} + (C_{Amer} - C_{Eur})$

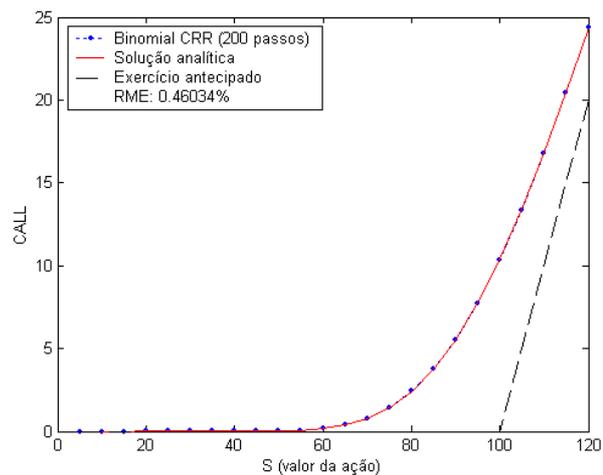
## 5.4. Resultados



**Figura 5.1-** Convergência dos modelos binomiais CRR, JR, HW e TRG em função do número de passos da árvore. Caso base:  $S_0 = 110$ ,  $X = 100$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .10/ano$ ,  $q = 0.03/ano$ ,  $\sigma = .3/ano$ .



**Figura 5.2-** Convergência dos modelos binomiais CRR, BBS, BBSR e MVM em função do número de passos da árvore. Caso base: call americana,  $S_0 = 105$ ,  $X = 100$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .10/ano$ ,  $q = 0.04/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ .



**Figura 5.3-** Precisão do modelo binomial CRR. A solução analítica corresponde à aproximação de Bjerksund & Stensland. Caso base: call americana,  $S_0 = 100$ ,  $X = 100$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .06/ano$ ,  $q = 0.03/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ .

## Capítulo 6:

### MODELO DE DIFERENÇAS FINITAS

A possibilidade de exercício antecipado nas opções americanas pode ser representada por uma condição de contorno livre variando com o tempo. Assim, o método numérico para a avaliação de opções americanas deve levar em conta esta condição de contorno adicional não fixada, tornando o procedimento um pouco mais complexo que o empregado na avaliação de opções européias.

Na literatura financeira, existem duas abordagens para a solução numérica de opções americanas. A primeira baseia-se na solução da equação de Black Scholes juntamente com a determinação da condição de contorno livre à medida que prosseguimos recursivamente ao longo do tempo. A outra estratégia envolve a solução da opção americana vista como um problema linear complementar envolvendo apenas condições de contorno fixadas (fora do escopo deste trabalho<sup>2</sup>).

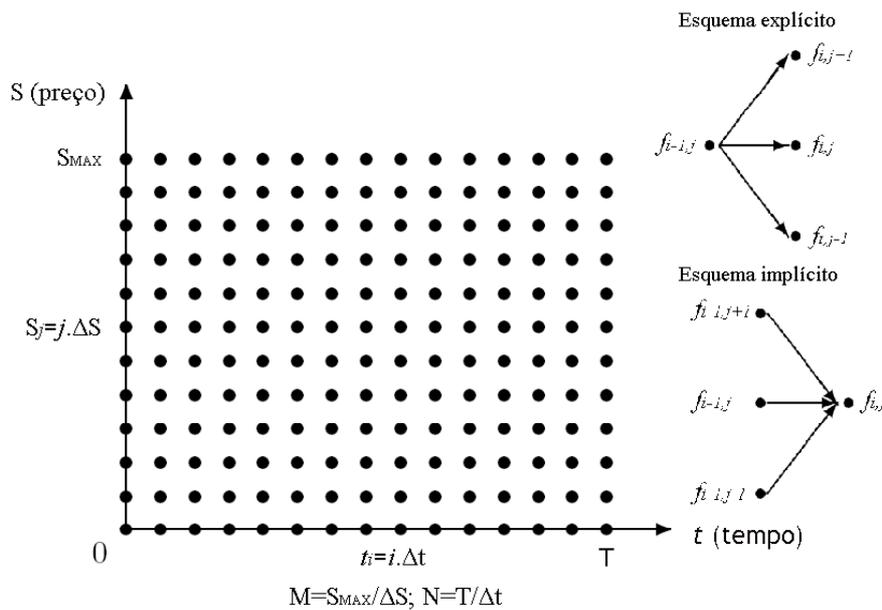
Para o caso de optarmos por resolver a equação de Black Scholes, podemos escolher dentre os métodos explícito, implícito e Crank-Nicholson. Enquanto o método implícito e Crank-Nicholson se mostram estáveis independentemente da discretização do *GRID*, o mesmo não se pode afirmar sobre o método explícito. Quando na utilização do método explícito, devemos adotar um *GRID* suficientemente pequeno no que se refere aos intervalos de preço e tempo de modo a assegurarmos a convergência.

Neste trabalho, adotamos o método de Crank-Nicholson como *Benchmark* para nossos testes. Ele é basicamente uma combinação dos métodos explícito e implícito, e de acordo com a literatura, apresenta a vantagem adicional de possuir uma taxa de convergência superior aos demais modelos de diferenças finitas.

---

<sup>2</sup> Ver Willmott.

## 6.1. Escolha do GRID



**Ilustração 6.1-** Representação do GRID e dos métodos explícito e implícito.

Na avaliação de opções, o preço da ação objeto tem que permanecer dentro do GRID para todo instante de tempo. Devemos escolher um valor  $S_{MAX}$  grande o suficiente para que a probabilidade do preço da ação ( $S_{i,j} = j \cdot \Delta S$ ) sair do GRID seja reduzida. Supondo uma probabilidade igual a 0.27% (3 desvios),  $S_{MAX}$  pode ser estimado através da seguinte fórmula, detalhada no apêndice

$$S_{MAX} = S_0 \cdot e^{(r - \sigma^2 / 2)(T-t) + 3\sigma\sqrt{T-t}}$$

## 6.2. Método Explícito

De acordo com Wilmott, o método explícito nada mais é que uma versão mais sofisticada que o binomial, que pode ser facilmente alterado para precificar opções americanas. Assim, a condição de contorno livre não apresenta maiores dificuldades no método explícito, bastando acrescentarmos uma restrição ao algoritmo desenvolvido para a avaliação de opções européias. Compararemos o valor de continuação gerado pelo método com o exercício imediato da opção, sendo maior dentre os dois adotado como o valor de  $f_{i,j}$ .

Temos que: 
$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (\text{Black Scholes})$$

Equações de diferenças:

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta S^2}$$

Substituindo na EDP de Black Scholes:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + r \cdot (j\Delta S) \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot (j\Delta S)^2 \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta S)^2} = r \cdot f_{i,j}$$

.....

$$f_{i-1,j} = a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1$$

onde:  $a_j^* = \frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 j^2 - rj);$

$$b_j^* = \frac{1}{2} - \Delta t (\sigma^2 j^2 + r);$$

$$c_j^* = \frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 j^2 + rj).$$

Condições de contorno:

❖ *PUT*:  $f_{N,j} = \max(X - j\Delta S, 0), \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$

$$f_{i,0} = X \cdot e^{-r(N-i)\Delta t}, \quad f_{i,M} = 0, \quad i = 0, \dots, N$$

$$f_{i-1,j} = \max(f_{i-1,j}, X - j\Delta S) \quad \therefore \quad \text{contorno livre}$$

❖ *CALL*:  $f_{N,j} = \max(j\Delta S - X, 0), \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$

$$f_{i,0} = 0, \quad f_{i,M} = (M \cdot \Delta S - X) e^{-r(N-i)\Delta t}, \quad i = 0, \dots, N$$

$$f_{i-1,j} = \max(f_{i-1,j}, j\Delta S - X) \quad \therefore \quad \text{contorno livre}$$

### 6.2.1. Instabilidade do Método Explícito

O método explícito nem sempre converge para o resultado da equação diferencial. Este problema de instabilidade depende da magnitude dos intervalos  $\Delta S$  e  $\Delta t$ , sendo ocasionado por estarmos usando um *GRID* aproximado para os valores das opções. Estas aproximações acabam por gerar erros que somadas a cada iteração, geram soluções bastante divergentes do valor real da opção. No método explícito este problema de instabilidade é representado pela presença de valores negativos para as variáveis  $a_j^*$ ,  $b_j^*$  e  $c_j^*$ . Dewynne (1996) demonstra que uma condição suficiente para garantir a estabilidade do esquema explícito é adotarmos  $0 < \Delta t \leq \frac{1}{\sigma^2 (S_{MAX} / \Delta S)^2} = \frac{1}{\sigma^2 M^2}$ .

### 6.2.2. Interpretação Financeira da Instabilidade

No método explícito o preço da opção  $f(t, S)$  é obtido iterativamente pela combinação dos valores  $f(t + \Delta t, S + \Delta S)$ ,  $f(t + \Delta t, S)$  e  $f(t + \Delta t, S - \Delta S)$ . Assim, observamos que o método explícito se mostra bastante parecido com o modelo trinomial<sup>3</sup>. Para tornarmos essa interpretação mais clara, mostraremos uma versão alternativa do método explícito.

Equações de diferenças:

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{\Delta S^2}$$

Substituindo na EDP de Black Scholes:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + r \cdot (j\Delta S) \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot (j\Delta S)^2 \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta S)^2} = r \cdot f_{i,j}$$

<sup>3</sup> Este modelo pode ser visto como uma extensão daquele baseado em árvores binomiais.

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M-1$$

$$\text{onde } a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( -\frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right) = \frac{1}{1+r\Delta t} \pi_d$$

$$b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t) = \frac{1}{1+r\Delta t} \pi_0$$

$$c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( \frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right) = \frac{1}{1+r\Delta t} \pi_u$$

Esse esquema é também explícito, sendo que neste os coeficientes  $\pi_d$ ,  $\pi_0$  e  $\pi_u$  ( $\pi_u + \pi_0 + \pi_d = 1$ ) podem ser interpretados como probabilidades neutras ao risco. Assim, o método explícito se assemelha ao modelo trinomial, exceto em momentos de instabilidade quando as probabilidades são negativas.

### 6.3. Método Implícito

O método Implícito apresenta uma complicação adicional visto se tratar de um sistema de equações. A restrição adicional, requer que saibamos o valor de cada  $f_{i,j}$  do *GRID* para então compará-lo com o valor de exercício imediato e só então calcularmos o valor seguinte  $f_{i,j+1}$ . Obviamente, este não é o caso no método implícito, onde não podemos calcular cada valor  $f_{i,j}$  isoladamente, mas sim resolver o sistema de equações obtendo o conjunto de valores  $f_{i,\dots}$  para cada intervalo de tempo. A resposta para este problema baseia-se no uso de um método iterativo SOR<sup>4</sup> ligeiramente modificado, de modo a incorporar a condição de contorno livre na solução dos sistemas de equações.

$$\text{Equações de diferenças: } \frac{\partial f_{i,j}}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}$$

<sup>4</sup> Outras alternativas seriam os métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel e SSOR



$$f_{i,j=1}^{k+1} = \max \left\{ X - \delta S, f_{i,1}^k + \frac{w}{a_{1,1}} \left( b_1 - \sum_{l<1} a_{1,l} f_l^{k+1} - \sum_{l>1} a_{1,l} f_l^k \right) \right\}$$

$$f_{i,2}^{k+1} = \max \left\{ X - 2\delta S, f_{i,2}^k + \frac{w}{a_{2,2}} \left( b_2 - \sum_{l<2} a_{2,l} f_l^{k+1} - \sum_{l>2} a_{2,l} f_l^k \right) \right\}$$

$$f_{i,3}^{k+1} = \max \left\{ X - 3\delta S, f_{i,3}^k + \frac{w}{a_{3,3}} \left( b_3 - \sum_{l<3} a_{3,l} f_l^{k+1} - \sum_{l>3} a_{3,l} f_l^k \right) \right\}$$

⋮

$$f_{i,M-1}^{k+1} = \max \left\{ X - (M-1)\delta S, f_{i,M-1}^k + \frac{w}{a_{M-1,M-1}} \left( b_{M-1} - \sum_{l<M-1} a_{M-1,l} f_l^{k+1} - \sum_{l>M-1} a_{M-1,l} f_l^k \right) \right\}$$

Continuamos com as iterações até atingirmos um valor máximo de  $k$  iterações ou até atingirmos um valor de convergência previamente determinado ( $\varepsilon^5$ ) dado por:  $|f^{k+1} - f^k| \leq \varepsilon$ .

#### 6.4. Método Crank-Nicholson

Assim como no método implícito, devemos fazer uso de um método iterativo para a solução dos sistemas quando na avaliação de opções americanas.

Equações de diferenças:

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial t} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial S} = \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1} + f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{4\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial S^2} = \frac{f_{i-1,j+1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1} + f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{2\Delta S^2}$$

---

<sup>5</sup> O valor de convergência (ou precisão) adotada por nós nesse trabalho é de  $\varepsilon = 0,00001$ .

$$f_{i,j} = \frac{f_{i-1,j} + f_{i,j}}{2}$$

Substituindo na EDP de Black Scholes:

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta t} + \frac{r.(j\Delta S)}{2} \left( \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta S} \right) + \frac{r.(j\Delta S)}{2} \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \right) \\ & + \frac{1}{4} \sigma^2 .(j\Delta S)^2 \left( \frac{f_{i-1,j+1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1}}{(\Delta S)^2} \right) + \frac{1}{4} \sigma^2 .(j\Delta S)^2 \left( \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta S)^2} \right) \\ & = \frac{r}{2} .f_{i-1,j} + \frac{r}{2} .f_{i,j} \\ & \dots\dots\dots \\ & -\alpha_j f_{i-1,j-1} + (1-\beta_j) f_{i-1,j} - \gamma_j f_{i-1,j+1} = \alpha_j f_{i,j-1} + (1+\beta_j) f_{i,j} + \gamma_j f_{i,j+1} \end{aligned}$$

onde  $\alpha_j = \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 j^2 - rj)$

$$\beta_j = -\frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 j^2 + r)$$

$$\gamma_j = \frac{\Delta t}{4} (\sigma^2 j^2 + rj)$$

Representação matricial do sistema de equações acima:

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{i-1} = \mathbf{r}_i$$

onde  $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & -\gamma_1 & & & & \\ -\alpha_2 & 1-\beta_2 & -\gamma_2 & & & \\ & -\alpha_3 & 1-\beta_3 & -\gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha_{M-2} & 1-\beta_{M-2} & -\gamma_{M-2} \\ & & & & -\alpha_{M-1} & 1-\beta_{M-1} \end{bmatrix}$



- Delta ( $\Delta$ ): representa a sensibilidade da opção em relação à movimentos no preço da ação.

$$\Delta_{Call,Put} = \frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{0,j+1} - f_{0,j-1}}{S_{0,j+1} - S_{0,j-1}}, \quad \text{onde } f \text{ é valor da opção.}$$

- Gama ( $\Gamma$ ): representa a sensibilidade do delta da opção em relação à movimentos no preço da ação.

$$\Gamma_{Call,Put} = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta_{Call,Put}}{\partial S} \approx \frac{\left( \frac{f_{0,j+1} - f_{0,j}}{S_{0,j+1} - S_{0,j}} \right) - \left( \frac{f_{0,j} - f_{0,j-1}}{S_{0,j} - S_{0,j-1}} \right)}{\frac{1}{2}(S_{0,j+1} - S_{0,j-1})}$$

- Theta ( $\Theta$ ): representa a sensibilidade da opção em relação à mudanças no tempo de vencimento.

$$\Theta_{Call,Put} = \frac{\partial f}{\partial T} \approx \frac{f_{1,j} - f_{0,j}}{\Delta T}$$

- Vega<sup>6</sup>: representa a sensibilidade da opção em relação a movimentos na volatilidade do preço da ação.

$$Vega_{Call,Put} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \approx \frac{f_{\sigma+\Delta\sigma} - f_{\sigma-\Delta\sigma}}{2\Delta\sigma}$$

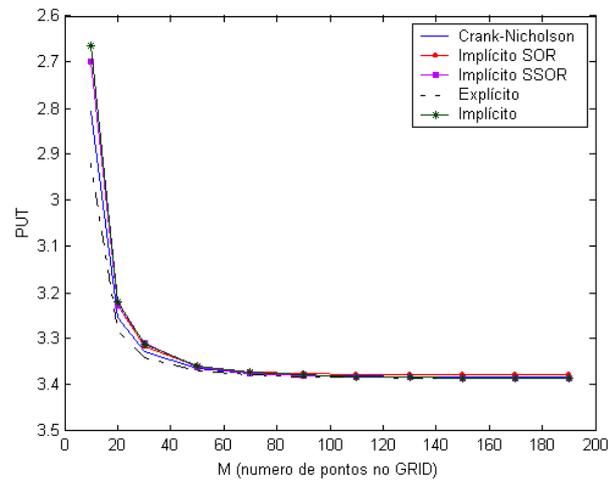
- Rho<sup>6</sup> ( $\rho$ ): representa a sensibilidade da opção em relação a movimentos na taxa de juros livre de risco.

$$\rho_{Call,Put} = \frac{\partial f}{\partial r} \approx \frac{f_{r+\Delta r} - f_{r-\Delta r}}{2\Delta r}$$

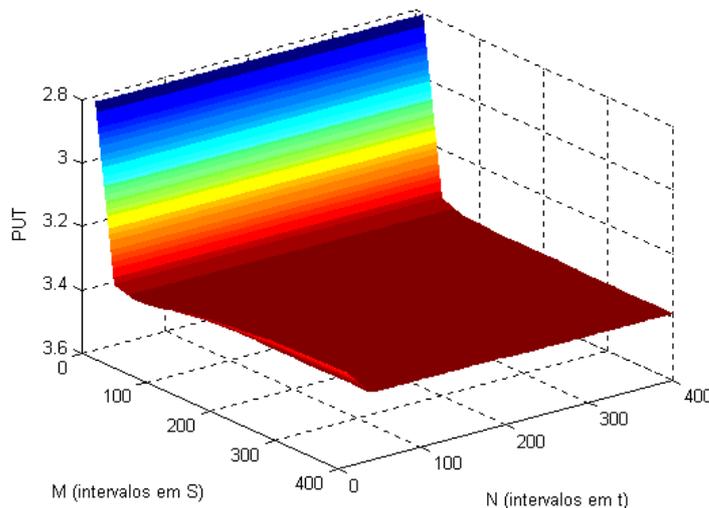
---

<sup>6</sup> Estas gregas não podem ser valoradas pela análise de apenas um GRID. Para isso, é necessário que tenhamos pelo menos dois *GRID'S* ou apenas um em 3 dimensões.

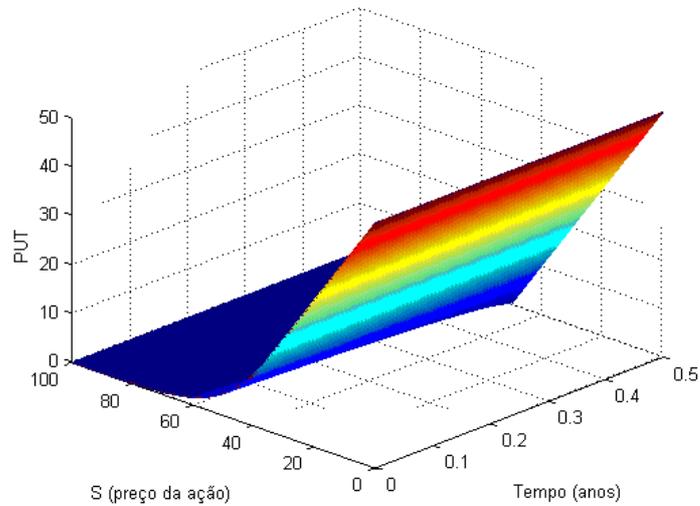
## 6.6. Resultados



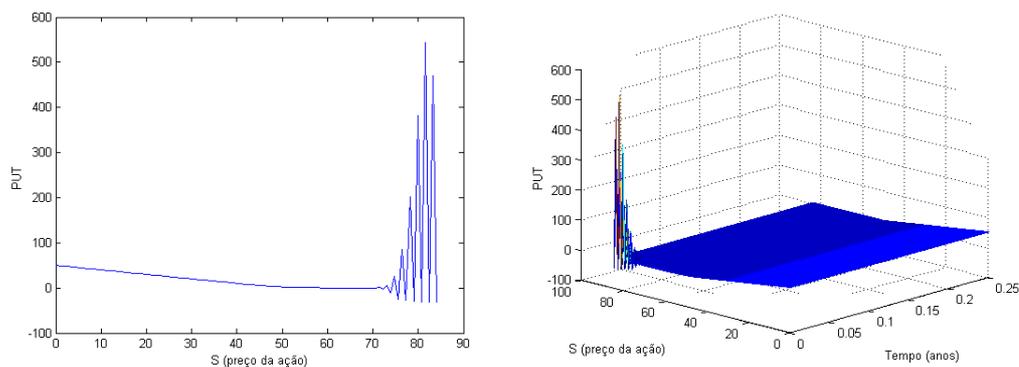
**Figura 6.1-** Convergência dos métodos de DF em função do refinamento do *GRID*. Nesta análise, adotamos  $N = T \cdot (\sigma^2 \cdot M^2)$  de modo a assegurarmos a convergência do modelo explícito. Caso base: *put* americana,  $S_0 = 40$ ,  $X = 40$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .10/ano$ ,  $q = 0.04/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação:  $S_{Max} = 100$ ,  $w_{SOR/SSOR} = 0.4$ ,  $N_{Max} = 100$ ,  $\varepsilon_{SOR/SSOR} = 0.00001$  (precisão do processo iterativo).



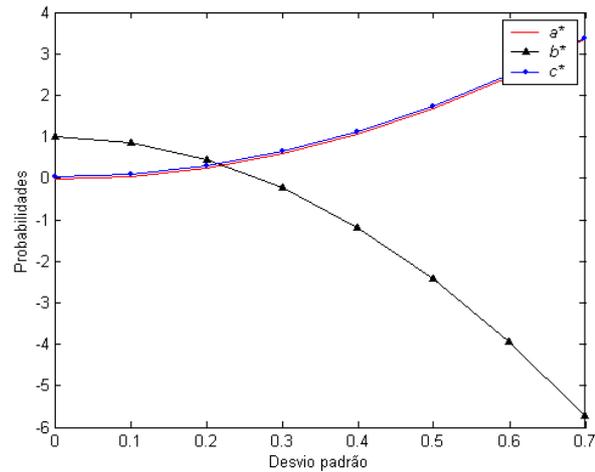
**Figura 6.2-** Convergência do Modelo de DF Crank-Nicholson em função de refinamentos em  $M$  e  $N$ . Caso base: *put* americana,  $S_0 = 40$ ,  $X = 40$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .10/ano$ ,  $q = 0.04/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação:  $S_{Max} = 100$ ,  $w_{SOR/SSOR} = 0.4$ ,  $N_{Max} = 100$ ,  $\varepsilon_{SOR/SSOR} = 0.00001$ .



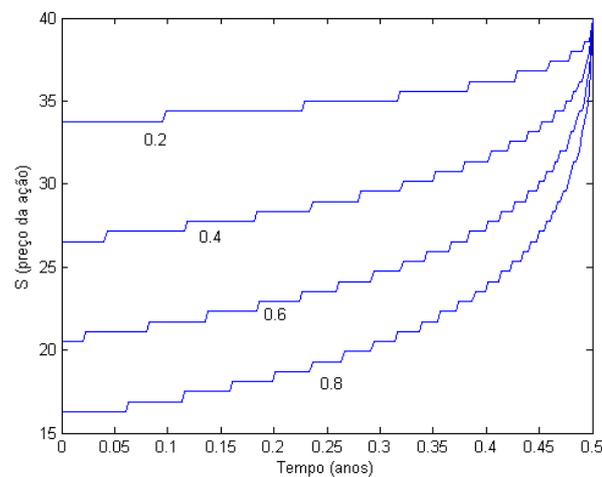
**Figura 6.3-** Representação gráfica do *GRID* obtido no método de DF. Demonstra a relação entre o preço de uma *put* americana em função do preço da ação e tempo até o vencimento. Caso base:  $S_0 = 50$ ,  $X = 50$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .08/ano$ ,  $q = 0.04/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação: DF implícito-SOR,  $M = N = 200$ ,  $S_{Max} = 100$ .



**Figura 6.4-** Demonstração da instabilidade do método explícito na precificação de uma *put* americana. Caso base:  $S_0 = 50$ ,  $X = 50$ ,  $T = 3$  meses,  $r = .06/ano$ ,  $q = 0.02/ano$ ,  $\sigma = .25/ano$ . Dados da simulação: DF explícito,  $M = N = 100$ ,  $S_{Max} = 85$ .



**Figura 6.5-** Instabilidade do método explícito demonstrado pela existência de probabilidades negativas. Caso base:  $T = 6$  meses,  $r = .15/ano$ ,  $q = 0.02/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação: DF explícito,  $M = N = 50$ .



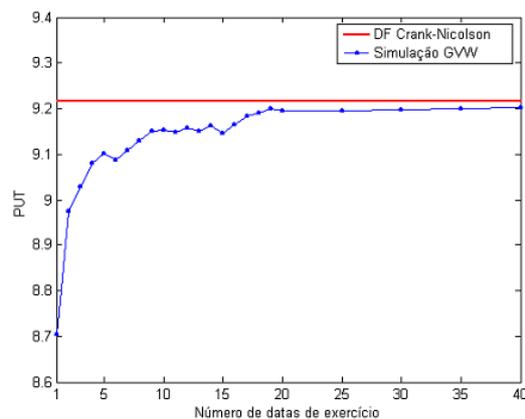
**Figura 6.6-** Curvas de gatilho (condição de contorno livre) de uma *put* americana para diferentes valores de  $\sigma$ . Caso base:  $S_0 = 40$ ,  $X = 40$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .08/ano$ ,  $q = 0.03/ano$ . Dados da simulação: DF Crank-Nicholson,  $M = N = 300$ .

## Capítulo 7:

### MODELO DE GRANT, VORA E WEEKS (GVW)

O algoritmo desenvolvido por Grant, Vora e Weeks tenta identificar o preço de exercício crítico ( $S^*(t_i)$  ou  $S_{t_i}^*$ ) para os instantes de tempo  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , entre a data inicial e o tempo de expiração da opção  $T$ . O preço de exercício crítico ( $S_{t_i}^*$ ) é determinado recursivamente (*backwards*), através de simulações a partir do instante final  $T$  até o inicial  $t_0$ . Uma vez determinada a curva de gatilho isto é, os preços críticos para todas as datas de exercício antecipado  $t_i$ , o valor da opção é computado através de simulações de MC (ou QMC) a partir do instante inicial de maneira análoga a estimação de uma opção europeia.

Sabemos que uma opção americana pode ser exercida em qualquer momento e não apenas em alguns determinados instantes de tempo. Isto é, a opção de exercício é representada por um período de tempo contínuo e não discreto. No entanto, o valor da opção americana pode ser aproximado tomando-se opções bermuda com um número de possibilidades de exercício suficientemente grandes.



**Figura 7.1-** Gráfico de convergência de uma opção bermuda para o valor de uma put americana à medida que aumentamos as datas de exercício antecipado.

## 7.1. Formulação do Problema

A decisão de exercício antecipado em cada instante de tempo ( $t_i$ ) depende do conhecimento de todos os preços de exercícios futuros ( $S_{t_i}^*$ ,  $t_i = t_0 < t_1 < \dots < T-1 < T$ ). Assim, temos que proceder recursivamente a partir do instante  $T$ , empregando um modelo de programação dinâmica, de modo a compararmos as duas alternativas viáveis: exercer a opção ou mantê-la viva (valor de continuação).

No instante final  $T$ , é ótimo exercer a opção sempre que a opção estiver *in the money*, isto é quando seu valor é (considerando uma *call* americana):

$$C_T(S_T) = \max(0; S_T - X) \quad \therefore \quad S_T^* = X \text{ (valor crítico)}$$

O processo de otimização começa na última data de exercício antecipado ( $T-1$ ) antes do vencimento da opção. O dono da opção tem em suas mãos a decisão de exercer imediatamente ou manter a opção viva até a data do próximo exercício, onde deverá tomar nova decisão. Assim, em qualquer instante  $t_i$ , o valor de uma *call* americana é dado por:

$$C_{t_i}(S_{t_i}) = \max \left\{ \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N Q_{t_i, n}(S_{t_i}) \right\}; \text{ média para cada instante de tempo}$$

onde

$$Q_{t_i}(S_{t_i}) = \begin{cases} S_{t_i} - X, & \text{se } S_{t_i} > S_{t_i}^* \text{ (exercer a opção)} \\ e^{-r \cdot \tau} E_{t_i} [C_{t_i+\tau}(S_{t_i+\tau})], & \text{se } S_{t_i} < S_{t_i}^* \text{ (manter a opção viva)} \end{cases}$$

A identificação do preço de exercício crítico ( $S_{t_i}^*$ ) é feita ao tentarmos encontrar o preço do ativo no qual o dono da opção é indiferente entre o exercício imediato ou manter a opção viva, isto é:

$$S_{t_i}^* - X = e^{-r \cdot \tau} E_{t_i} [C_{t_i+\tau}(S_{t_i+\tau}^*)]$$

Uma vez que o preço crítico para todos os instantes foi identificado (curva de gatilho), estimamos o valor da opção americana como sendo a média das  $N$  simulações inicializadas no instante inicial ( $t_0$ ). O valor da *call* para cada simulação será estimado com base nas decisões de exercício antecipado em cada uma das respectivas datas  $t_i$ , trazidos ao valor presente. Assim, temos que:

$$CALL = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N C_j \quad \therefore \quad C_j = e^{-r \cdot \tau} (S_{t_0+\tau} - X) \text{ para } S_{t_0+\tau} > S_{t_0+\tau}^*$$

onde  $j$  representa cada simulação.

## 7.2. Esquema Gráfico de Precificação de uma Call Americana

### ■ Cálculo da curva de gatilho por programação dinâmica

PASSO 1. Dividimos o tempo de vencimento da opção em um número determinado de intervalos. Adotamos como condição terminal  $S_T^* = X$ .

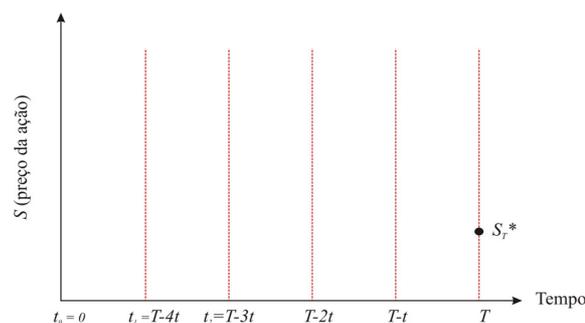
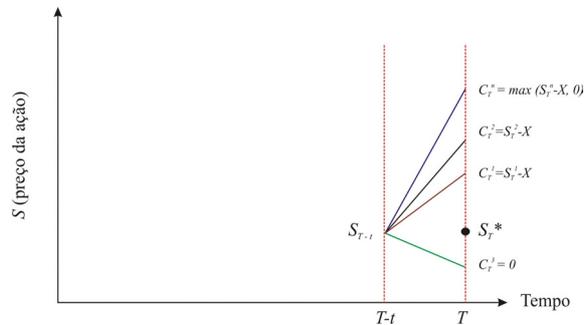


Ilustração 7.1- Esquema PASSO 1

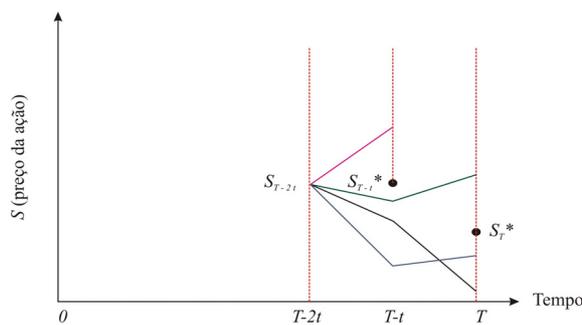
PASSO 2. Agora no instante  $T - t$  adota-se como sendo o preço inicial do ativo, um valor igual ou próximo de  $S_T^*$ . Inicia-se as simulações chegando-se a diversos valores para a opção no instante  $T$ . O valor final da opção em  $T-t$  é a média desses valores descontado de  $e^{-t}$ . Verifica-se se o respectivo

ponto pertence à curva de gatilho:  $S_{T-t_i}^* - X = e^{-r \cdot t} E_{T-t} [C_T(S_T^*)]$ . Caso não pertença, devemos fazer um novo acréscimo ( $S_{T-t} = S_T^* + \epsilon$ )<sup>7</sup> e reiniciar o processo de busca.



**Ilustração 7.2-** Esquema PASSO 2

PASSO 3. Devemos refazer o PASSO 2 só que agora devemos testar a opção para todos os momentos posteriores ao tempo em questão, respeitando sempre o processo decisório de exercer a opção sempre que o preço simulado do ativo ultrapassar a curva de gatilho. Repetiremos recursivamente esse processo de busca dos preços críticos até chegarmos ao instante inicial  $t_0$ .



**Ilustração 7.3-** Esquema PASSO 3

<sup>7</sup> No caso de uma opção *put* americana, temos que  $S_{T-t} = S_T^* - \epsilon$ .

### ■ Cálculo da opção americana por analogia a um derivativo europeu

PASSO 4. Terminada a construção da curva de gatilho (PASSOS 1 a 3), fazemos novas simulações a partir do preço inicial  $S_0$ . O preço final da opção é o valor médio de todas as opções trazidas ao valor presente.

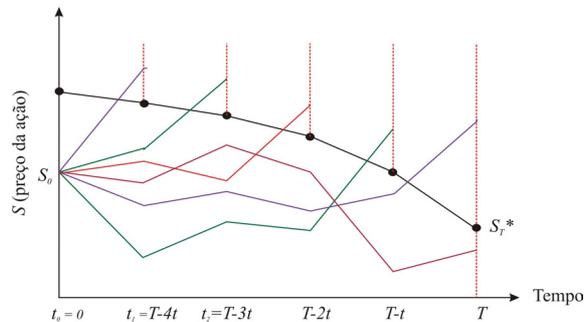


Ilustração 7.4- Esquema PASSO 4

## 7.3. Extensões do Modelo GVW

### 7.3.1. Técnicas de Quasi-Monte Carlo

A aplicação dessas técnicas de simulação visa melhorar a precisão dos resultados, assim como otimizar o tempo computacional com a redução do número de simulações necessárias para a determinação da curva de gatilho. No presente trabalho, aplicaremos um modelo de QMC Híbrido de modo a resolver o problema encontrado em simulações envolvendo altas dimensões.

### 7.3.2. Método da Bisseção

Este envolve a aplicação de um método de busca dos valores críticos ( $S_{t_i}^*$ ) mais eficiente que o proposto originalmente, baseado no simples incremento de valores ( $\epsilon$ ). A aplicação do método da bisseção no modelo de GVW envolve cuidado especial na escolha dos valores iniciais da curva de modo a não ultrapassarem os valores críticos das respectivas datas de exercício antecipado. Escolhidos valores iniciais razoáveis temos o seguinte algoritmo de busca:

$$\square 1^{\circ} \text{ ponto de busca: } (S_{T-t}^*)_1 = \frac{S_T^* + (S_{T-t})_{\max}}{2}; \quad \text{intervalo: } [S_T^*, (S_{T-t})_{\max}]$$

□ 2º ponto de busca:

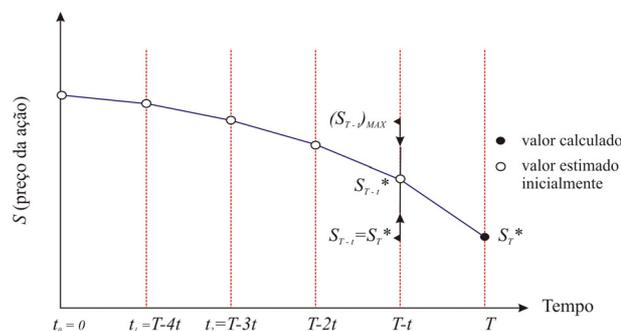
se  $S_{T-t}^* - X < e^{-r \cdot t} E_{T-t}[C_T(S_T^*)]$  :

$$\text{então } (S_{T-t}^*)_2 = \frac{S_T^* + (S_{T-t}^*)_1}{2}; \quad \text{intervalo } [S_T^*, (S_{T-t}^*)_1]$$

se  $S_{T-t}^* - X > e^{-r \cdot t} E_{T-t}[C_T(S_T^*)]$  :

$$\text{então } (S_{T-t}^*)_2 = \frac{(S_{T-t}^*)_1 + (S_{T-t})_{\max}}{2}; \quad \text{intervalo } [(S_{T-t}^*)_1, (S_{T-t})_{\max}]$$

..... continuamos determinando novos pontos até acharmos o valor crítico da respectiva data de exercício antecipado.



**Ilustração 7.5-** Esquema da aplicação do método da bisseção no modelo de GVW.

### 7.3.3. Aplicar a Aproximação de Geske e Johnson (GJ)<sup>8</sup>

Em seu artigo original Geske e Johnson (1984) mostram como poderíamos aproximar o valor de uma *put* americana utilizando os valores de uma opção européia ( $P_1$ ) e outras duas opções bermuda ( $P_2$  e  $P_3$ ) com duas e três datas de exercício respectivamente. Assim, a incorporação do modelo de GJ no método de GVW faz com que não precisemos calcular uma curva de gatilho com inúmeros

<sup>8</sup> Ver Apêndice A.5.

pontos críticos. Reduzimos nossas simulações a apenas três valores críticos ( $\frac{T}{3}, \frac{T}{2}$  e  $\frac{2.T}{3}$ ), necessários na determinação de  $P_2$  e  $P_3$ .

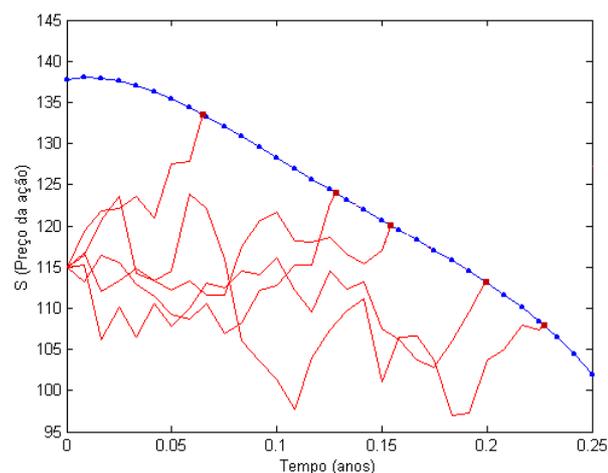
## 7.4. Resultados

**Tabela 7.1-** Precisão do Modelo GVW em função do número total de simulações (gatilho ( $n_1$ ) e preço final da opção ( $n_2$ )) quando comparado a um *benchmark* baseado na solução analítica de Bjerksund e Stensland. Caso base: *call* americana,  $S_0 = 50$ ,  $X = 50$ ,  $T = 6/12$  anos,  $r = .10/ano$ ,  $q = .05/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação:  $N = 24$ ,  $\epsilon = 0.1$ .

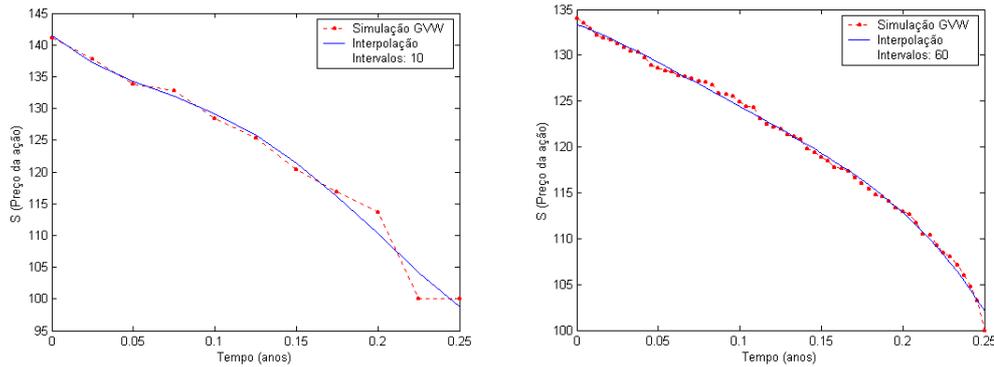
$n_1$	3000			5000			7000			
$n_2$	GVW	Erro (%)	CPU Time	GVW	Erro (%)	CPU Time	GVW	Erro (%)	CPU Time	$\sigma_{pop}$
5000	5.3167	0.9803	74.76	5.3081	1.1405	117.32	5.3303	0.7266	181.75	0.107651
10000	5.3293	0.7443	76.84	5.3328	0.6790	119.14	5.3463	0.4277	182.85	0.076391
20000	5.3317	0.7009	80.14	5.3191	0.9348	122.98	5.3364	0.6130	186.36	0.054245
30000	5.3475	0.4052	84.26	5.3506	0.3480	126.60	5.3533	0.2978	190.98	0.044532
40000	5.3331	0.6749	88.22	5.3412	0.5226	131.05	5.3358	0.6230	194.49	0.038241
50000	5.3545	0.2764	92.16	5.3570	0.2292	134.63	5.3673	0.0365	198.72	0.034349

\* Solução analítica: 5.3693.

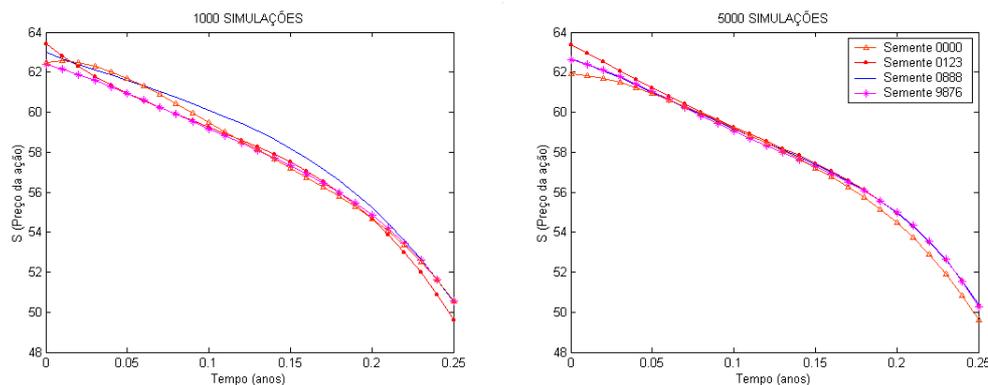
\*\* CPU Time em segundos.



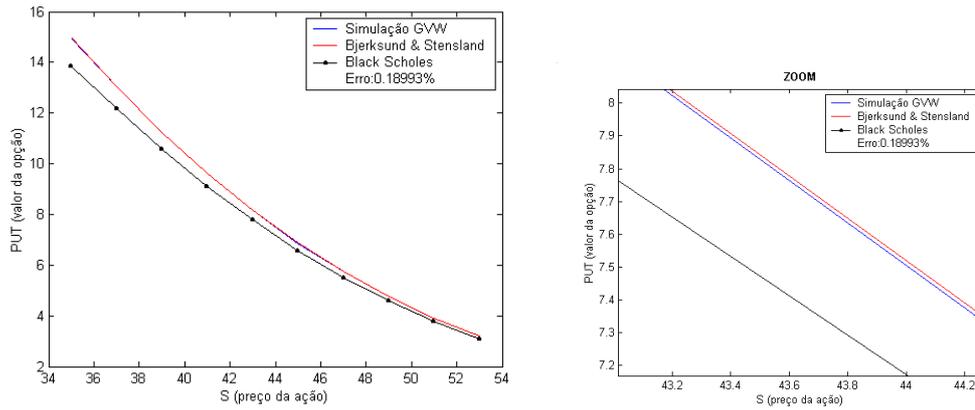
**Figura 7.2-** Simulação dos preços de uma ação com exercício antecipado determinado pela curva de gatilho (*call* americana) previamente calculada.



**Figura 7.3-** Curvas de gatilho (condições de contorno livre) do caso base para diversas datas de exercício antecipado. Notamos que à medida que aumentamos o número de intervalos de tempo a curva se torna mais uniforme, por fim se sobrepondo quase que completamente à curva de regressão. Caso base: *put* americana,  $S_0 = 100$ ,  $X = 100$ ,  $T = 3/12$  anos,  $r = .06/ano$ ,  $q = .03/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação:  $n_{simul.} = 3000$ ,  $\epsilon = 0.1$ .



**Figura 7.4-** Simulações das curvas de gatilho usando números quase-aleatórios de Sobol com diferentes sementes de inicialização. Os gráficos demonstram o aspecto estocástico da curva de gatilho gerada pelo Modelo GVW. Notamos também que à medida que aumentamos o número de simulações de 1000 para 5000, as curvas tendem a convergir, tornando-se independentes da semente utilizada. Caso base: *call* americana,  $S_0 = 50$ ,  $X = 50$ ,  $T = 3/12$ ,  $r = .07/ano$ ,  $q = .04/ano$ ,  $\sigma = .3/ano$ . Dados da simulação:  $n_{simul.} = 1000$  e  $5000$ , 25 Intervalos de tempos e  $\epsilon = 0.1$ .



**Figura 7.5-** Gráfico de comparação entre os valores de opções americanas aproximadas pelos Modelos de GVW (Sobol) e Bjerksund & Stensland. Notamos que o erro (RME) estimado para o modelo de GVW nesta simulação foi de aproximadamente 0.18%.

Dados da simulação: -*Gatilho:*  $n_{simul.} = 3000$  , 25 intervalos de tempo,  $\epsilon = 0.1$ ; -*Gráfico:*

$n_{simul.} = 50000$  e 10 pontos

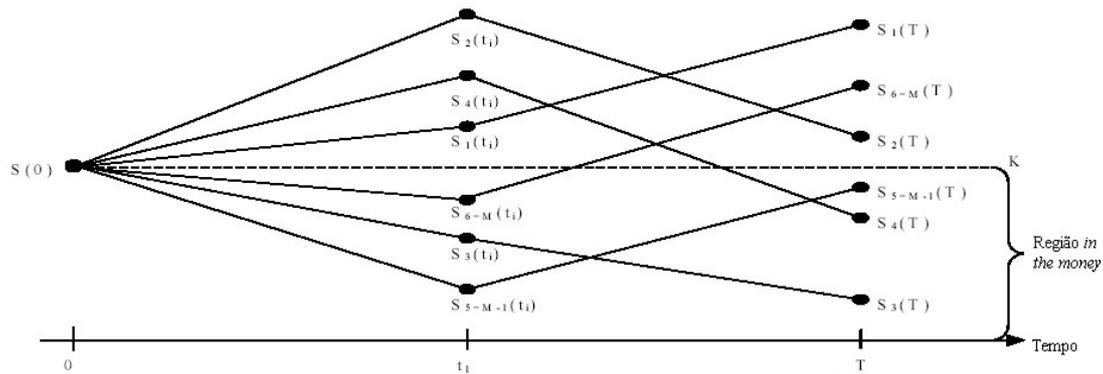
## Capítulo 8:

### MODELO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (LSM)

Este método de precificação de opções americanas, desenvolvido por Longstaff e Schwartz, fundamenta-se na estimação dos valores de manter a opção viva (valor de continuação) para cada instante de tempo  $t_i$ . Esta aproximação baseia-se numa função de regressão (mínimos quadrados) para cada instante  $t_i$ , representativa dos valores de continuação das simulações ( $V(w; t_i)$ ). Assim como no Modelo de GVW, o valor esperado da opção para cada  $t_i$  é determinado recursivamente (*backwards*). A maior vantagem do Modelo LSM frente aos demais métodos de avaliação baseados em simulações, é o fato do valor esperado da opção só precisar ser calculado uma única vez, reduzindo consideravelmente o tempo computacional exigido.

As vantagens deste modelo envolvem principalmente:

- flexibilidade para precificar opções envolvendo diferentes processos estocásticos e características específicas;
- simplicidade por não envolver aspectos relativos à condição de contorno livre;
- velocidade de processamento quando comparado com os demais modelos de precificação baseados em simulações;
- precisão.



**Ilustração 1-** Esquema de precificação do modelo LSM na avaliação de uma *put* americana com seis trajetórias de preços e apenas dois intervalos de tempo. Por meio deste esquema objetivamos separar as simulações em duas regiões: região *in the money* e *out of the money* (\* Fonte: L. Stentoft, Working Paper Series N.112, July 2002 – Aarhus School of Business).

### 8.1. Formulação do Problema

A precificação de uma *call* americana pode ser representada como:

$$A_{CALL} = \text{Max}_{t_i} E \left[ \exp \left( - \int_0^{t_i} r(w, S) \right) \cdot \max \{ S(t_i) - K \} \right] \quad \text{para } t_i \leq T$$

onde  $t_i \rightarrow$  instante de exercício:  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{L-1} < t_L = T$ ;

$S(t_i) \rightarrow$  preço da ação no instante  $t_i$ ;

$K \rightarrow$  preço de exercício;

$r(w, S) \rightarrow$  taxa de desconto associada a cada simulação ( $w$ ) e preço da ação ( $S$ ). No caso de uma opção americana simples, consideraremos essa taxa como sendo constante para todos os caminhos simulados de

$$\text{preços: } \exp \left( - \int_0^{t_i} r(w, S) \right) = e^{-r \cdot t_i};$$

Na prática, sabemos que uma opção americana pode ser exercida a qualquer instante e não apenas em alguns determinados instantes de tempo. Isto é, a opção de exercício é representada por um período de tempo contínuo e não discreto. No

entanto, o valor da opção pode ser aproximado tomando-se um número de intervalos ( $L$ ) suficientemente grandes.

No instante final  $t_L = T$ , temos a alternativa de exercer a opção caso ela esteja “*in the money*” ou permitir sua expiração se estiver “*out of the money*”. No instante de exercício antecipado  $t_i$  ( $t_i < T$ ), o investidor deve decidir entre o exercício antecipado ou manter a opção viva e reavaliar novamente a possibilidade de exercício no instante posterior  $t_{i+1}$ . No instante  $t_i$ , sabemos que o valor da opção devido ao exercício antecipado é igual a  $S(t_i) - K$ . No caso de optarmos por mantê-la viva, o valor da opção em  $t_i$  ( $V(w, t_i)$ ) corresponderá ao valor esperado dos *payoffs* gerados pelo exercício futuro nos instantes  $t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{L-1}, t_L = T$ . Assim, considerando a hipótese de não arbitragem, o valor de continuação em  $t_i$  corresponderá a:

$$V(w, t_i) = E_Q \left[ \sum_{j=i+1}^L \exp \left( - \int_{t_i}^{t_j} r(w, S) dS \right) C(w, t_j; t_i, T) F_{t_i} \right]$$

onde  $C(w, t_j; t_i, T)$  são os *payoffs* gerados pelo exercício da opção. Observamos que  $F_{t_i}$  indica que o valor de continuação no instante  $t_i$ , esta condicionado às informações conhecidas na respectiva data ( $F_{t_i}$ );

Assim, a estratégia de exercício ótimo em cada instante de tempo  $t_i$  se reduz à comparação dos valores de exercício imediato ( $S(t_i) - K$ ) e valores de continuação ( $V(w, t_i)$ ). Bem como no modelo de GVW, exerceremos antecipadamente a opção (*call*) sempre que  $S(t_i) - K \geq V(w, t_i)$ .

O modelo LSM assume que o valor de continuação  $V(w, t_i)$  em  $t_i$ ,  $i = L-1, L-2, \dots, 1$  pode ser estimado por um modelo de regressão dos mínimos quadrados e uma combinação linear de um número determinado de bases ( $f_{in}(X)$ ) representativas do conjunto de informações conhecidas em  $t_i$  ( $F_{t_i}$ ). Em seu artigo original, Longstaff e Schwartz usam como exemplo inicial as potências de uma variável de estado  $X$  como funções base. Assim, temos

$$\hat{V}(w, t_i) = a_0 + a_{i1} \cdot f_{i1}(X) + a_{i2} \cdot f_{i2}(X) + \dots$$

$$\hat{V}(w, t_i) = a_0 + a_{i1} \cdot X + a_{i2} \cdot X^2 + \dots \quad (\text{Base: } f_{in}(X) = X^n, n = 1, 2, 3, \dots)$$

onde  $\hat{V}(w, t_i)$  é uma função que estima os valores  $V(w, t_i)$  para cada simulação  $w$  e instante  $t_i$ .

Devemos salientar que outras funções como Laguerre, Legendre, Chebyshev e polinômios de Jacobi poderiam igualmente ser usadas como base.

Uma vez simulados os preços das ações para todos os instantes de exercício antecipado  $(t_1, t_2, \dots, t_{L-1}, t_L = T)$ , o modelo em questão pode ser dividido em duas partes principais correspondentes a cada instante  $t_i$ : **(1)** estimar os coeficientes de  $\hat{V}(w, t_i)$  pela regressão de  $Y_{t_i}$  sobre  $X_{t_i}$  ( $Y_{t_i}$  = vetor dos valores de continuação em  $t_i$ ,  $X_{t_i}$  = vetor dos preços das ações “*in the money*” em  $t_i$ ); **(2)** determinar o exercício antecipado em  $t_i$  pela comparação dos valores  $\hat{V}(w, t_i)$  e  $S(t_i) - K$  para cada ação “*in the money*”.

Os passos (1) e (2) são então repetidos recursivamente  $(t_L = T, t_{L-1}, \dots, t_1)$  até que todas as decisões de exercício antecipado para todos os instantes de tempo e simulações ( $w = 1, 2, \dots, N$ , onde  $N$  = número total de simulações) tenham sido determinados. Finalmente o valor da *call* americana pode ser valorado por

$$\hat{A}_{CALL} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp\left(-\int_0^{t_i} r(w, S) \cdot dS\right) \max\{S^w(t_i^*) - K, 0\}$$

onde  $S^w(t_i^*)$  é o preço da ação para cada instante de exercício antecipado ótimo  $t_i^*$  para cada simulação  $w$  (ou trajetória).

Caso não exista nenhum instante de exercício antecipado ótimo para a simulação  $w$ , então  $\max\{S^w(t_i) - K, 0\} = 0$ . Posteriormente, mostraremos através de um exemplo simplificado, que a estratégia ótima de exercício antecipado pode ser representada por uma matriz  $N \times L$ , formada por coeficientes 0 ou 1.

## 8.2. Algoritmo LSM

1. Devemos gerar  $N$  trajetórias de preços (MC ou QMC) correspondentes a um determinado processo ou processos estocásticos. Essas trajetórias ( $w, w = 1, 2, \dots, N$ ) devem ser definidas apenas nas datas onde o exercício antecipado é possível ( $t_i, t_1, t_2, \dots, t_{L-1}, t_L = T$ ). Os preços da ação para cada instante  $t_i$  e trajetória  $w$  é representado por  $S^w(t_i), w = 1, 2, \dots, N$ .

$$\text{Matriz de preços: } S = \begin{pmatrix} S(t_0) & S^1(t_1) & S^1(t_2) & \dots & S^1(t_L = T) \\ S(t_0) & S^2(t_1) & S^2(t_2) & \dots & S^2(T) \\ S(t_0) & S^3(t_1) & S^3(t_2) & \dots & S^3(T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S(t_0) & S^{N-1}(t_1) & S^{N-1}(t_2) & \dots & S^{N-1}(T) \\ S(t_0) & S^N(t_1) & S^N(t_2) & \dots & S^N(T) \end{pmatrix}_{N \times L}$$

2. No instante de exercício final  $t_L = T$ , devemos exercer a opção caso ela esteja “*in the money*”, isto é:  $\max\{S^w(t_T) - K, 0\}$ , para todo  $w = 1, 2, \dots, N$ ;
3. Trabalhando recursivamente a partir do instante  $t_{L-1}$  até o instante inicial  $t_1$ , determinamos o valor da opção para cada trajetória  $w$  como sendo:

$$V_{CALL}(t_i, S^w(t_i)) = \max\{C_{t_i}^w, \hat{V}_{t_i}^w\};$$

onde:  $C_{t_i}^w = \max\{S^w(t_i) - K, 0\} \rightarrow$  valor de exercício antecipado

$\hat{V}_{t_i}^w \rightarrow$  valor de continuação estimado pela regressão.

- 3.a. Determinar os valores de continuação para cada  $w$ ,  $w = 1, 2, \dots, N$ :

$$V_{t_i}^w = E_Q \left[ \sum_{j=i+1}^L \exp\left(-\int_{t_i}^{t_j} r(w, S) dS\right) \cdot C_{t_j}^w \right]$$

$$\therefore \text{ simplificando: } \exp\left(-\int_{t_i}^{t_j} r(w, S) dS\right) = e^{-r \cdot (t_j - t_i)}$$

O somatório da expressão acima é feito até o instante de exercício antecipado previamente calculado, ou até a expiração da opção em  $T$ .

**3.b.** Determinar a função de continuação  $\hat{V}_{t_i}^w$ :

Para cada  $S^w(t_i)$ ,  $w=1,2,\dots,N$ , “*in the money*” faremos a regressão de  $Y_{t_i}$  sobre  $X_{t_i}$  de modo a determinarmos os coeficientes  $a_0, a_{1i}, a_{2i}, \dots$  da função  $\hat{V}_{t_i}$ .

$$Y_{t_i} = \begin{bmatrix} V_{t_i}^1 \\ V_{t_i}^2 \\ \vdots \\ V_{t_i}^M \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_{t_i} = \begin{bmatrix} S^1(t_i) \\ S^2(t_i) \\ \vdots \\ S^M(t_i) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_0, a_{1i}, a_{2i}, \dots$$

onde  $M$  representa o número de preços  $S^w(t_i)$  “*in the money*” em  $t_i$ .

Agora podemos calcular os valores de continuação estimados para cada simulação  $w$ . Tomando  $f_{in}(X) = X^n$  como base, temos

$$\hat{V}_{t_i}^w = a_0 + a_{1i} \cdot X_{t_i}^w + a_{2i} \cdot (X_{t_i}^w)^2 + \dots,$$

calculado para cada simulação “*in the money*”.

4. Para cada decisão de exercício antecipado  $C_{t_i}^w \geq \hat{V}_{t_i}^w$ , armazenaremos o instante  $t_i^*$  numa matriz  $(\Theta_{N \times L})$  representativa das estratégias de exercício ótimo. Esta matriz é composta por valores 1 ou 0: 1 para os instantes nos quais o exercício antecipado é a estratégia ótima e 0 para aqueles nos quais

manter a opção viva é a melhor estratégia. Essa matriz determinará quais elementos entrarão no cálculo de  $V_{t_i}^w$  (somatório descrito no item **3.a**).

*OBS:* Repetiremos os passos (3) e (4) recursivamente para todo  $t_{L-1}, t_{L-2}, \dots, t_1$ ;

5. Construída a matriz de decisão  $\Theta_{N \times L}$ , estimaremos o valor da *call* americana no instante inicial ( $t_0$ ) da seguinte maneira:

$$CALL = \frac{1}{N} \sum_{w=1}^N \left( \sum_{i=1}^L e^{-r \cdot t_i} (\Theta_{wi} \cdot \Phi_{wi}) \right)$$

onde  $\Phi_{wi}$  é a matriz representativa dos valores de exercício, dados por  $\max\{S^w(t_{t_i}) - K, 0\}$ .

### 8.3. Exemplo do Cálculo de uma *Put* Americana

Dados:  $S_{t_0} = 1.0$ ;  $r = 6\%$ ;  $K = 1.10$ ;  $T = 3$  meses

Em nosso exemplo, consideraremos a possibilidade de exercício em 3 datas ( $L = 3$ ), usando apenas 8 simulações de trajetórias de preços ( $N = 8$ ).

1. Por Simulação de MC ou QMC, determinar a matriz de preços  $S_{8 \times 3}$ :

		<i>Matriz de Preços (S)</i>		
$w$	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3 = T$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

**Quadro 8.1-** Simulação de preços.

$$\text{Matriz } \Phi_{8 \times 3} = \max\{K - S^w(t_i), 0\}: \Phi_{8 \times 3} = \begin{bmatrix} .01 & .02 & .00 \\ .00 & .00 & .00 \\ .00 & .03 & .07 \\ .17 & .13 & .18 \\ .00 & .00 & .00 \\ .34 & .33 & .2 \\ .18 & .26 & .09 \\ .22 & .00 & .00 \end{bmatrix}$$

2. No instante  $t_3 = T$ , devemos determinar os valores de exercício imediato para cada trajetória:

$w$	<i>Valores da PUT</i>		
	$t_1$	$t_2$	$t_3 = T$
1	-	-	.00
2	-	-	.01
3	-	-	.07
4	-	-	.18
5	-	-	.00
6	-	-	.20
7	-	-	.09
8	-	-	.00

**Quadro 8.2-** Valores de exercício.

$$\text{Matriz de exercício antecipado: } \Theta_{8 \times 3} = \begin{bmatrix} - & - & 0 \\ - & - & 1 \\ - & - & 1 \\ - & - & 1 \\ - & - & 1 \\ - & - & 0 \\ - & - & 1 \\ - & - & 1 \\ - & - & 0 \end{bmatrix}$$

3. Trabalhando recursivamente a partir do instante  $t_2$ , devemos determinar a estratégia de exercício antecipado ótimo para os instantes  $t_2$  e  $t_1$ :

**3.a.** Instante  $t_2$ ;

Determinando  $\hat{V}_{t_2}$  pela regressão dos vetores  $X$  e  $Y$  abaixo:

Regressão no instante $t_2$		
$w$	$Y_{t_2}$	$X_{t_2}$
1	$.00 \times .9418$	1.08
2	-	<i>Out of the money</i>
3	$.07 \times .9418$	1.07
4	$.18 \times .9418$	.97
5	-	<i>Out of the money</i>
6	$.20 \times .9418$	.77
7	$.09 \times .9418$	.84
8	-	<i>Out of the money</i>

**Quadro 8.3-** Regressão no instante  $t_2$ .

$$\therefore e^{-r \cdot (t_j - t_i)} = .9418$$

$X_{t_2}$  - vetor de preços “*in the money*” no instante  $t_2$

$Y_{t_2}$  - vetor dos valores de continuação correspondentes a cada opção “*in the money*”

Da regressão temos:  $\hat{V}_{t_2}^w = -1.07 + 2.983 \cdot X_{t_2}^w - 1.813 \cdot (X_{t_2}^w)^2$

Determinando a estratégia de exercício antecipado  $C_{t_2}^w \geq \hat{V}_{t_2}^w$ :

Estratégia de exercício antecipado no instante $t_2$			
$w$	Valor de Exercício	Valor de Continuação	Estratégia de exercício
1	$1.10 - 1.08 = .02$	$\hat{V}_{t_2}^1 = -1.07 + 2.983 \cdot (1.08) - 1.813 \cdot (1.08)^2 = .0369$	0
2	-	-	0
3	$1.10 - 1.07 = .03$	$\hat{V}_{t_2}^3 = -1.07 + 2.983 \cdot (1.07) - 1.813 \cdot (1.07)^2 = .0461$	0
4	$1.10 - .97 = .13$	$\hat{V}_{t_2}^4 = .1176$	1
5	-	-	0
6	$1.10 - .77 = .33$	$\hat{V}_{t_2}^6 = .1520$	1
7	$1.10 - .84 = .26$	$\hat{V}_{t_2}^7 = .1565$	1
8	-	-	0

**Quadro 8.4-** Estratégia de exercício em  $t_2$ .

Matriz de exercício antecipado:  $\Theta_{8 \times 3} =$

$$\begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz valores ótimos da *put* em  $t_2$  e  $t_3$ :

$$(\Theta_{8 \times 3} \cdot \Phi_{8 \times 3}) = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} .01 & .02 & .00 \\ .00 & .00 & .00 \\ .00 & .03 & .07 \\ .17 & .13 & .18 \\ .00 & .00 & .00 \\ .34 & .33 & .2 \\ .18 & .26 & .09 \\ .22 & .00 & .00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & 0 & .07 \\ - & .13 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ - & .33 & 0 \\ - & .26 & 0 \\ - & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.b. Instante $t_1$ ;

Regressão no instante $t_1$		
w	$Y_{t_1}$	$X_{t_1}$
1	.00 × .9418	1.08
2	-	<i>Out of the money</i>
3	-	<i>Out of the money</i>
4	.13 × .9418	.93
5	-	<i>Out of the money</i>
6	.33 × .9418	.76
7	.26 × .9418	.92
8	.00 × .9418	.88

**Quadro 8.5-** Regressão no instante  $t_1$ .

Da regressão temos:  $\hat{V}_{t_1}^w = 2.038 - 3.335.X_{t_1}^w + 1.356.(X_{t_1}^w)^2$

Estratégia de exercício antecipado no instante $t_1$			
$w$	Valor de Exercício	Valor de Continuação	Estratégia de exercício
1	.01	$\hat{V}_{t_1}^1 = 2.038 - 3.335.X_{t_1}^1 + 1.356.(X_{t_1}^1)^2 = .0139$	0
2	-	-	0
3	-	-	0
4	.17	$\hat{V}_{t_1}^4 = .1092$	1
5	-	-	0
6	.34	$\hat{V}_{t_1}^6 = .2866$	1
7	.18	$\hat{V}_{t_1}^7 = .1175$	1
8	.22	$\hat{V}_{t_1}^8 = .1533$	1

**Quadro 8.6-** Estratégia de exercício em  $t_1$ .

Estratégia ótima de exercício antecipado para a *put*:

$$\Theta_{8 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4. Cálculo do valor da *put*:

$$PUT = \frac{1}{N} \sum_{w=1}^N \left( \sum_{i=1}^L e^{-r.t_i} (\Theta_{wi} \cdot \Phi_{wi}) \right) = \frac{1}{8} \sum_{w=1}^8 \left( \sum_{i=1}^3 e^{-r.t_i} (\Pi_{w,i}) \right) = .1144$$

$$\therefore \Pi_{8 \times 3} = (\Theta_{8 \times 3} \cdot \Phi_{8 \times 3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} .01 & .02 & .00 \\ .00 & .00 & .00 \\ .00 & .03 & .07 \\ .17 & .13 & .18 \\ .00 & .00 & .00 \\ .34 & .33 & .2 \\ .18 & .26 & .09 \\ .22 & .00 & .00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .07 \\ .17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ .34 & 0 & 0 \\ .18 & 0 & 0 \\ .22 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 8.4. Curva de Gatilho

Conforme mencionado anteriormente, a determinação da curva de gatilho (ou contorno livre) não é essencial para a precificação de opções pelo Modelo LSM. No entanto, quando na análise de opções complexas a curva de gatilho pode oferecer informações adicionais sobre o comportamento da opção no tempo.

A curva de gatilho de uma *call* americana pode ser capturada através de duas abordagens distintas:

1. Determinar as raízes da função abaixo para cada instante de tempo:

$$f(S_{t_i}) = \hat{V}_{t_i} - C_{t_i} = [a_0 + a_{i1} \cdot S_{t_i} + a_{i2} \cdot (S_{t_i})^2 + \dots] - [S_{t_i} - X],$$

2. Através de incrementos (ou decrementos no caso de uma *put*) em  $S_{t_i} + \epsilon$ , realizar um processo de busca semelhante ao do Modelo GVW de modo a encontramos o valor da ação em cada instante  $t_i$  para o qual  $\hat{V}_{t_i} = C_{t_i}$ .

## 8.5. Resultados

**Tabela 8.1-** Análise da convergência do Modelo LSM em função do número de simulações e intervalos de tempo. Apesar da precisão do modelo, não observamos um padrão de convergência definido. Caso base: *put* americana,  $S_0 = 40$ ,  $K = 40$ ,  $T = 1$  anos,  $r = .06/ano$ ,  $q = 0/ano$ ,  $\sigma = .4/ano$ . Dados da regressão: polinômio linear de 3° grau.

Simulações	$PUT_{LSM}$	Erro (%)	CPU Time (seg)
<i>10 intervalos de tempo</i>			
5.000	5.2841	0.5102	0.2800
10.000	5.3296	0.3464	0.3300
50.000	5.3275	0.3068	1.8700
100.000	5.2781	0.6232	3.9500
<i>25 intervalos de tempo</i>			
5.000	5.3176	0.1205	0.3800
10.000	5.3334	0.4179	0.7700
50.000	5.3001	0.2089	4.7700
100.000	5.2917	0.3671	9.7800
<i>50 intervalos de tempo</i>			
5.000	5.3576	0.8736	0.7700
10.000	5.3094	0.0338	1.5900
50.000	5.3254	0.2673	9.3900
100.000	5.3115	0.0056	21.8100
<i>100 intervalos de tempo</i>			
5.000	5.2576	1.0091	1.5900
10.000	5.3426	0.5912	3.1300
50.000	5.3110	0.0037	19.0100
100.000	5.3140	0.0527	43.6100

\*  $PUT_{B-S} = 5.0596$ ,  $PUT_{DF} = 5.3112$

**Tabela 8.2-** Análise do Modelo LSM em função do grau do polinômio linear utilizado na regressão. Conforme podemos constatar o grau do polinômio usado na precificação de uma *put* americana (Tabela 8.1) não gerou resultados conclusivos no que se refere à precisão da simulação. No entanto, salientamos a importância da correta escolha do grau do polinômio quando na precificação de opções complexas ou exóticas<sup>9</sup>.

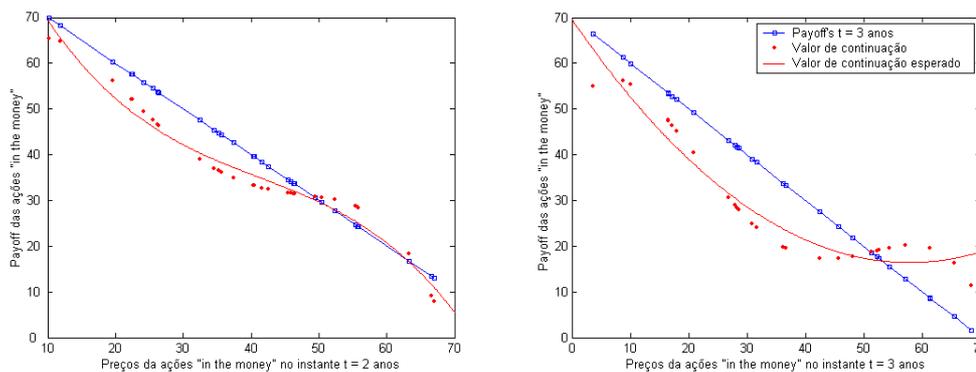
Grau do polinômio	<i>15.000 simulações.</i>		<i>100.000 simulações</i>	
	$PUT_{LSM}$	Erro (%)	$PUT_{LSM}$	Erro (%)
2	5.3372	0.48953156	5.3115	0.00565
3	5.3470	0.67404730	5.3175	0.11862
4	5.3553	0.83032083	5.3182	0.13180
5	5.3556	0.83596927	5.3196	0.15816
6	5.3421	0.58178943	5.3127	0.02824

<sup>9</sup> Ver Tavella.

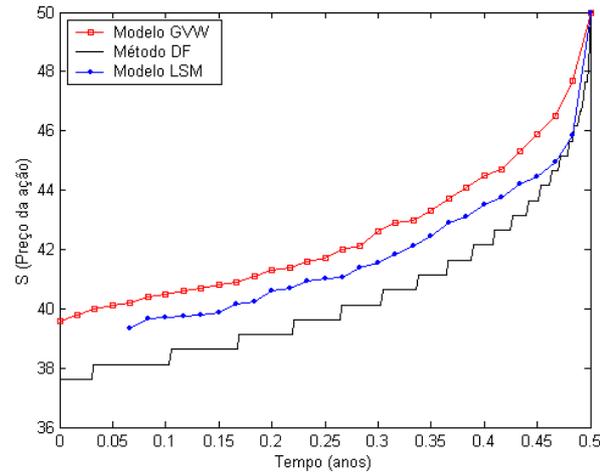
**Tabela 8.3-** Precisão do Modelo LSM e GVW quando comparado a um benchmark baseado no método de D.F. Crank-Nicholson (400 x 400) e árvores binomiais (500 passos), Caso base: *put* americana,  $K = 50$ ,  $T = 1$  ano,  $r = .1/ano$ ,  $q = 0/ano$ .

Dados da simulação: polinômio linear de 3° grau, 50000 simulações (sobol).

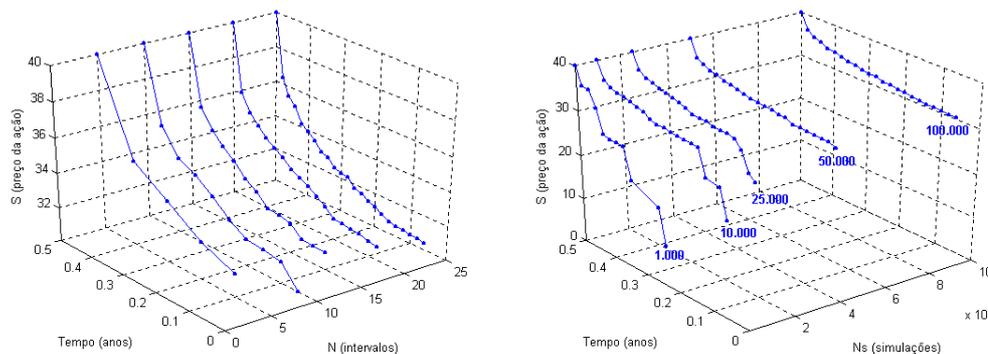
S0	$\sigma = 25\%$				$\sigma = 35\%$			
	BIN <sub>500</sub>	DF <sub>400</sub>	GVW	LSM	BIN <sub>500</sub>	DF <sub>400</sub>	GVW	LSM
<i>Tempo: 6 meses (24 intervalos)</i>								
45	5.4293	5.4272	<b>5.4035</b>	<b>5.4036</b>	6.4802	6.4779	<b>6.4668</b>	<b>6.4616</b>
50	2.6107	2.6089	<b>2.6082</b>	<b>2.6000</b>	3.9387	3.9377	<b>3.9397</b>	<b>3.9287</b>
55	1.1283	1.1268	<b>1.1325</b>	<b>1.1267</b>	2.2965	2.2931	<b>2.3005</b>	<b>2.2896</b>
<i>1 ano (48 intervalos)</i>								
45	5.8202	5.8183	<b>5.8152</b>	<b>5.8038</b>	7.3597	7.3570	<b>7.3321</b>	<b>7.3453</b>
50	3.2773	3.2762	<b>3.2795</b>	<b>3.2631</b>	5.0696	5.0693	<b>5.0796</b>	<b>5.0495</b>
55	1.7900	1.7875	<b>1.7973</b>	<b>1.7867</b>	3.4625	3.4618	<b>3.4790</b>	<b>3.4601</b>



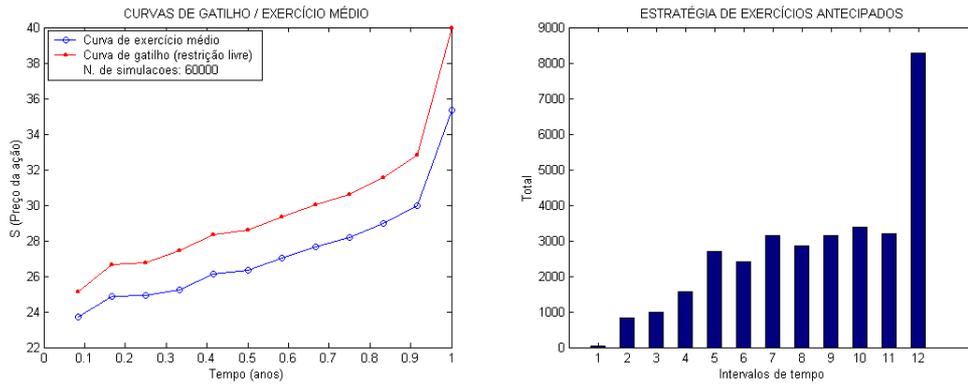
**Figura 8.1-** Representação dos *payoff's* e curvas de continuação no segundo e terceiro anos. Os *payoff's* devem ser comparados com a curva do valor de continuação, optando-se pelo exercício imediato caso o *payoff* seja maior. Caso base: *put* americana,  $S_0 = 60$ ,  $K = 70$ ,  $T = 4$  anos,  $r = .15/ano$ ,  $q = 0.08/ano$ ,  $\sigma = .45/ano$ . Dados da simulação: polinômio linear de 3° grau, 4 intervalos de tempo, 50 simulações (Sobol) e precisão e incremento iguais a 0.05 (LSM).



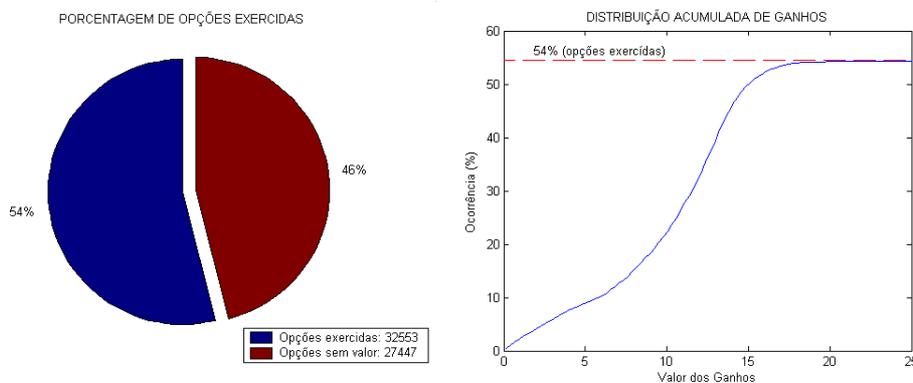
**Figura 8.2-** Comparação entre as curvas de gatilho geradas pelos Modelos de Diferenças Finitas Crank-Nicholson, LSM e GVW. Devemos salientar que estes resultados não podem ser vistos como valores exatos por se tratarem de variáveis estocásticas. Caso base: *put* americana,  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .1/ano$ ,  $q = 0.0/ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação: DF:  $M = N = 300$ ; GVW: 30 intervalos de tempo e 3000 simulações (Sobol); LSM: polinômio linear de 3° grau, 30 intervalos de tempo, 50000 simulações (Sobol) e precisão e incremento iguais a 0.05.



**Figura 8.3-** Curvas de gatilho para simulações envolvendo diversos intervalos de tempo e total de simulações. Caso base: *put* americana,  $S_0 = 40$ ,  $K = 40$ ,  $T = 6$  meses,  $r = .1/ano$ ,  $q = 0$ ,  $\sigma = .4/ano$ . Dados da simulação: polinômio linear de 3° grau, 100000 simulações (*randn*) e precisão e incremento iguais a 0.05.



**Figura 8.4-** Informações sobre o “timing” de exercício: (a) Curva de gatilho e curva de exercício médio do modelo LSM. Podemos observar que a curva de exercício médio fica abaixo do gatilho. Isto representa o fato do exercício antecipado só ser ótimo para os preços das ações que se encontram abaixo da curva de gatilho; (b) Demonstra o total de opções exercidas em cada instante, informando assim os momentos de exercício mais significativos. Caso base: put americana,  $S_0 = 40$ ,  $K = 40$ ,  $T = 1$  ano,  $r = .06/ano$ ,  $q = 0$ ,  $\sigma = .4/ano$ . Dados da simulação: Polinômio linear de 3° grau, 12 intervalos de tempo, 60000 simulações (Sobol) e precisão e incremento iguais a 0.05.



**Figura 8.5-** Informações sobre o risco: (a) Apresenta a probabilidade da opção americana expirar sem o exercício, isto é vencer sem valor; (b) Distribuição acumulada de ganhos. Notar que esta distribuição converge para 54% visto ser este a porcentagem esperada de exercícios. Caso base: igual à figura 8.4.

## Capítulo 9:

# AValiação DE Opções AMERICANAS COMPLEXAS

Nesta seção mostraremos como podemos estender o modelo LSM para a avaliação de opções americanas (bermuda) com características complexas. Os modelos serão apresentados de forma a aumentarmos gradativamente o grau de complexidade envolvido. Dessa forma, abordaremos primeiramente a avaliação de opções americanas com processo estocástico diverso do geométrico browniano, em seguida trabalharemos alguns tipos opções exóticas como barreira, asiática e *lookback*. Finalmente, concluiremos o trabalho com a avaliação opções americanas com múltiplos ativos e taxas de juros e volatilidade estocásticas.

### 9.1. Modelo Jump-to-Ruin

Merton (1976) propôs um processo estocástico onde o preço do ativo seguiria um movimento geométrico browniano adicionado de “*jumps*” aleatórios determinados por uma distribuição de Poisson. O fator adicional representado por esses “*jumps*” pode ser visto como um risco não sistemático não captado pelo mercado. Esse processo estocástico é interessante por permitir a representação de descontinuidades no preço do ativo, geradas pelo surgimento de novas informações. Observamos também que somente os modelos baseados em SMC são capazes de precificar eficientemente opções cujos ativos possuam processos estocásticos sujeitos a *jumps*. Em seu artigo original Merton propôs uma solução analítica para a precificação de uma opção europeia cujo ativo segue um movimento baseado em *jumps*. No entanto, ele demonstra que a precificação de uma opção americana envolve a solução de uma equação diferencial de difícil solução.

Visando a simplificação de nossa ilustração, abordaremos uma versão simplificada do modelo desenvolvido por Merton, conhecido como “*Jump-to-ruin Model*”. Neste modelo a ação segue um processo geométrico browniano até que um evento (*jump*) ocorra, a partir do qual a ação perderia totalmente seu valor.

Nesta ilustração, o *jump* representa o risco de falência da empresa emissora das ações. O processo em questão pode ser representado por

$$dS = (r + \lambda)S dt + \sigma S dZ - S dq$$

onde  $q$  é um processo de Poisson independente com intensidade  $\lambda$ . Quando um evento de Poisson ocorre, o valor de  $q$  passa de zero a um ( $dq = 1$ ), e o preço da ação passa a ser zero daí em diante.

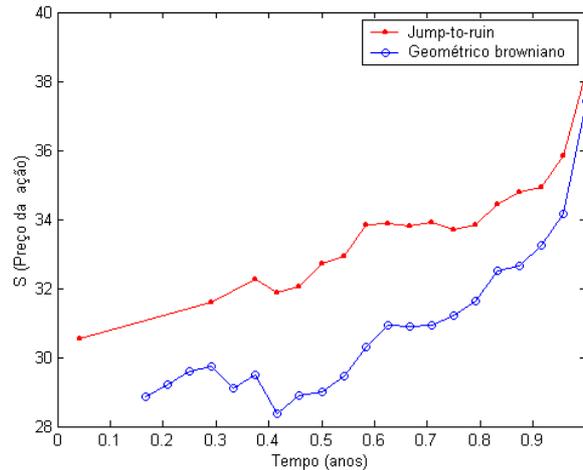
A avaliação de opções com ativos baseados em processos estocásticos mais complexos envolvendo *jumps* podem ser prontamente incorporados aos modelos GVW e LSM, bastando à substituição do processo em questão na simulação dos preços da ação.

A seguir apresentaremos os resultados obtidos na avaliação de duas opções americanas com  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 0.05$  respectivamente. Visando tornar a comparação de nossos resultados mais significativa, ajustaremos os parâmetros dos dois casos de modo que as duas distribuições de preços do ativo tenham médias e variâncias iguais. A variância do preço do ativo para um “*Jump-Difusion process*” é dada por

$$S^2(0) e^{(2r)} \left( e^{(\lambda + \sigma^2) T} - 1 \right)$$

**Tabela 9.1-** Valores de duas opções *put* americanas e europeias cujos preços das ações seguem dois processos estocásticos diversos. Caso base:  $S_0 = 40$ ,  $X = 40$ ,  $r = .06/ano$ ,  $q = 0/ano$ ,  $\sigma = .2/ano$  (*jump-to-ruin* com  $\lambda = 0.05$ ),  $\sigma = 30\%$  (mov. geométrico browniano com  $\lambda = 0$ ) e  $T = 1 ano$ ; Dados da simulação: Modelo LSM,  $N = 24$  e  $n = 30.000$  simulações e polinômio linear de 3° grau (regressão).

	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.05$
$PUT_{EUR}$	3.5575	3.1981
$PUT_{AM}$	3.7915	3.4178



**Figura 9.1-** Curvas de exercício médio das duas opções americanas apresentadas na tabela acima. No gráfico acima notamos que a estratégia de exercício antecipado é mais agressiva quando na presença de *jumps*.

## 9.2. Opções Barreira

Nesta seção abordaremos a precificação de opções americanas barreira pelo modelo LSM. Focaremos nossos resultados no estudo de duas opções barreira, uma *put up-out* e outra *down-out*. Por definição, opções *put up-out* e *down-out* são opções que perdem totalmente seu valor no momento que o preço do ativo atingir uma barreira superior ou inferior respectivamente.

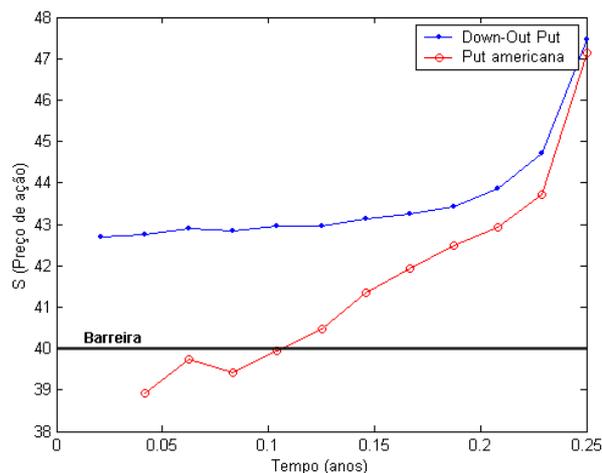
A aplicação do modelo LSM na avaliação de opções do tipo barreira é relativamente simples. Basicamente devemos modificar a matriz inicial de preços utilizada na precificação de opções americanas tradicionais (*vanilla*) tornando os preços das ações que atingirem a barreira iguais a  $INF$  (valor infinitamente grande) para todas as trajetórias simuladas. O objetivo desta mudança é tornar as ações que atingirem a barreira “*out of the money*” para todos os instantes posteriores ao momento de corte da barreira.

**Tabela 9.2-** Valores de opções americanas *put up-out* precificadas pelo modelo LSM para diversos valores de  $\sigma$  (desvio padrão) e valores da barreira. Adotamos como *benchmark* os valores obtidos pelo método de DF ( $M = 100$  e  $N = 4000$ ). Podemos constatar que à medida que aumentamos o desvio padrão, a diferença entre os valores obtidos pelo modelo LSM e nosso *benchmark* tende a aumentar. Isso ocorre devido à alta dependência das opções do tipo barreira em relação ao número de instantes de exercício usados na simulação. Caso base: Modelo LSM,  $S_0 = 40$ ,  $X = 45$ ,  $r = .0488/ano$ ,  $q = 0$ ,  $T = 1 ano$ ; Dados da simulação:  $N = 24$ ,  $n = 50.000$  simulações e polinômio linear de 3° grau (regressão).

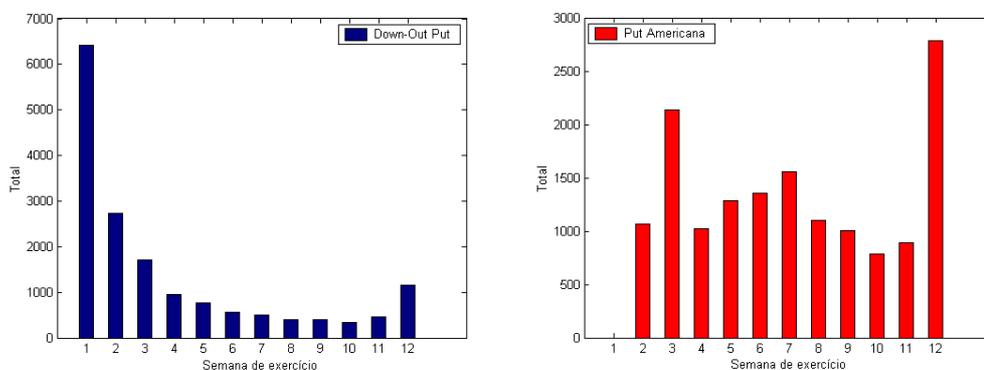
$S_B$	$\sigma = 0.2$		0.3		0.4		0.5	
	$PUT_{LSM}$	DF	$PUT_{LSM}$	DF	$PUT_{LSM}$	DF	$PUT_{LSM}$	DF
50	5.4304	5.3851	6.3746	6.1451	7.1682	6.7053	7.8219	7.1056
55	5.5188	5.5261	6.7974	6.7286	7.9723	7.7511	8.9613	8.5329
60	5.5275	5.5377	6.8960	6.8847	8.2847	8.1939	9.5271	9.2895
65	5.5273	5.5393	6.9138	6.9199	8.3941	8.3650	9.7902	9.6709
	$Put_{Am}$	5.5371	$Put_{Am}$	6.9284	$Put_{Am}$	8.459	$Put_{Am}$	10.0228

**Tabela 9.3-** Valores de opções americanas *put up-out* do caso base da tabela acima para diversos intervalos de exercício antecipado (datas). Notamos que à medida que aumentamos o número de datas de exercício o valor estimado da *put up-out* pelo modelo LSM converge gradativamente para o valor real representado pelo *benchmark* (DF).

$S_B$	DF	$PUT_{LSM}$		
		<i>Datas = 40</i>	80	160
50	7.1056	7.8219	7.6670	7.4752
55	8.5329	8.9613	8.8455	8.7706
60	9.2895	9.5271	9.4682	9.4290
65	9.6709	9.7902	9.7508	9.7290



**Figura 9.2-** Curvas de exercício antecipado médio para uma *put down-out* e outra americana do tipo *vanilla* com parâmetros iguais. Conforme podemos constatar, a curva correspondente à opção *down-out* permanece sempre acima do valor de barreira. Caso base: Modelo LSM,  $S_0 = 45$ ,  $S_b = 40$  (barreira),  $X = 50$ ,  $r = .1/ano$ ,  $q = .03/ano$ ,  $T = 3$  meses; Dados da simulação:  $N = 12$ ,  $n = 20.000$  simulações e polinômio linear de 3° grau (regressão).



**Figura 9.3-** Estratégia de exercício antecipado para as opções barreira e americana do caso base da figura acima. Notamos uma diferença nítida nas estratégias das duas opções. Constatamos que na opção *put down-out* a maximização dos *payoffs* resulta de uma maior concentração dos exercícios antecipados nas semanas iniciais.

### 9.3. Opções Asiáticas

A precificação de opções asiáticas do tipo americana ou bermuda apresentam-se como um desafio no campo das finanças computacionais. Essa opção é particularmente mais complexa que as abordadas anteriormente por apresentar a possibilidade de exercício antecipado associada a *payoffs* dependentes da trajetória de preços da ação durante determinada janela de tempo. Geralmente esses tipos de opções são de difícil avaliação pelos métodos tradicionais baseados em árvores binomiais e diferenças finitas.

Para uma opção asiática do tipo americano, a função do valor de continuação (manter a opção viva) e a decisão de exercício antecipado em cada instante de tempo  $t_i$ , depende não mais da monitoração de apenas uma variável de estado ( $S_{t_i}$  = preço da ação) mas sim de duas ( $S_{t_i}$  e  $\bar{S}_{t_i}$  = preço médio da ação).

$$\bar{S}_{t_n} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{t_i}$$

Dessa forma, tanto a curva de gatilho determinada pelo modelo GVW assim como as regressões utilizadas no modelo LSM, devem ser representadas não mais num espaço bidimensional ( $S \times t$ ) mas sim por uma superfície em três dimensões ( $S \times \bar{S} \times t$ ).

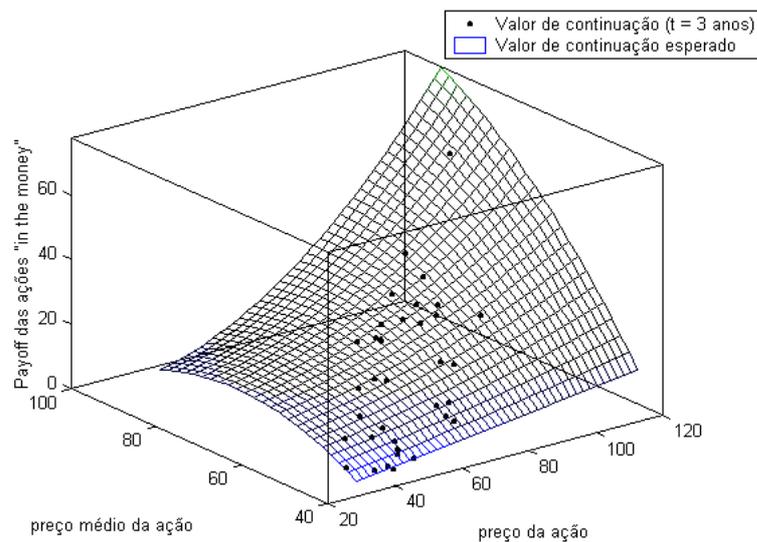
Longstaff e Schwartz sugerem a utilização de oito bases e polinômios de Laguerre nas regressões a cada instante de exercício antecipado. De modo a acelerar o tempo computacional, optamos por utilizar um polinômio mais simples descrito por:

$$f(S_{t_i}, \bar{S}_{t_i}) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot S_{t_i} + \alpha_3 \cdot \bar{S}_{t_i} + \alpha_4 \cdot S_{t_i}^2 + \alpha_5 \cdot \bar{S}_{t_i}^2 + \alpha_6 \cdot S_{t_i} \bar{S}_{t_i} + \alpha_7 \cdot S_{t_i}^2 \bar{S}_{t_i} + \alpha_8 \cdot S_{t_i} \bar{S}_{t_i}^2$$

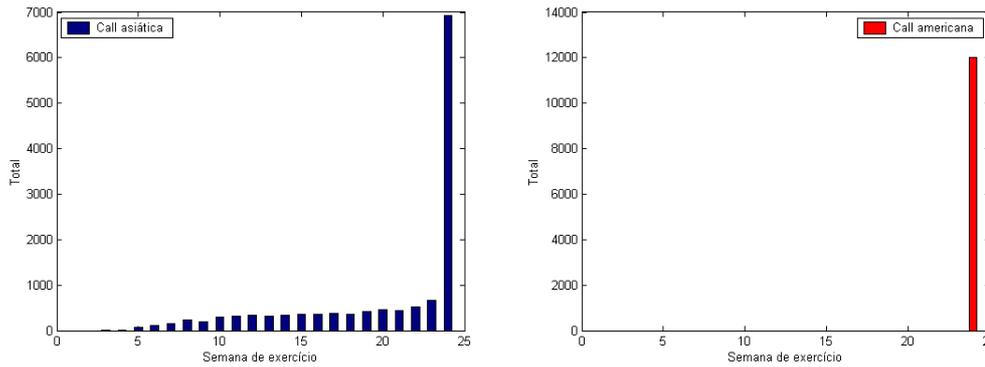
Notamos que em alguns tipos de opções exóticas a utilização de polinômios mais complexos, como os de Laguerre, Hermite e Legendre, podem conferir um maior grau de precisão aos resultados. No entanto, a escolha do polinômio acima satisfaz nossas expectativas a respeito da precisão do modelo quando comparado com um valor de Benchmark (Hull e White, 1993).

Tabela 9.4- Valores de opções *call* asiáticas para diversos preços de exercício e vencimentos (6 meses e 1 ano). Notamos que o valor estimado pelo modelo LSM permanece próximo do *benchmark* (HW) tido como uma boa aproximação do valor real. Caso base: *call* asiática (média aritmética) estilo americano,  $S_0 = 50$ ,  $r = .1/ano$ ,  $q = 0/ano$ ; Dados da simulação: Modelo LSM,  $N = 40$ ,  $n = 30.000$  simulações e polinômio com oito bases descrito acima.

	X = 40		X = 45		X = 50		X = 55	
	T = 0.5	T = 1	T = 0.5	T = 1	T = 0.5	T = 1	T = 0.5	T = 1
HW	12.1150	13.1530	7.2610	8.5510	3.2750	4.8920	1.1520	2.5360
LSM	12.1362	13.1792	7.2861	8.5584	3.2646	4.8856	1.1537	2.5365



**Figura 9.4-** Curva de continuação no terceiro ano de uma *call* asiática americana descrita abaixo. Observamos que diferentemente do gráfico da figura 8.1, essa curva é função de duas variáveis, devendo ser analisada num espaço tridimensional. Caso base: *call* asiática-americana,  $S_0 = 50$ ,  $X = 45$ ,  $T = 4$  anos,  $r = .10/ano$ ,  $q = 0.05/ano$ ,  $\sigma = .30/ano$ . Dados da simulação: Modelo LSM, 4 intervalos e 50 simulações.



**Figura 9.5-** Estratégia de exercício antecipado para as opções asiática e americana do tipo *vanilla*. Notamos que uma *call* americana que não paga dividendos jamais será exercida antecipadamente. Nesse caso, a estratégia ótima é representada pelo exercício no momento do vencimento (semana 24), tornando seu valor igual ao de uma opção européia. Constatamos que o mesmo não vale para o caso de opções asiáticas, onde são observados exercícios em praticamente todas as semanas. Caso base: *call* asiática (média aritmética) estilo americano,  $S_0 = 50$ ,  $X = 50$ ,  $r = .15/ano$ ,  $q = 0/ano$ ,  $\sigma = .3/ano$ ,  $T = 6$  meses; Dados da simulação: Modelo LSM,  $N = 24$ ,  $n = 20.000$  simulações e polinômio com oito bases descrito acima.

#### 9.4. Opções *Lookback*

As opções *lookback* são contratos cujos *payoffs* dependem do preço máximo/mínimo atingido pela ação ao longo de determinado período. Para simplificarmos usaremos o termo máximo/mínimo da ação. Como os *payoffs* destes tipos de opções tendem ser elevados, elas tendem a ser mais caras que as *vanilla*.

Estas opções podem ser classificadas em dois tipos conforme o *payoff*: *floating strike*, onde o valor de exercício corresponde ao preço máximo/mínimo da ação, ou: *fixed strike* onde o valor de exercício permanece constante e o valor da ação é substituído pelo máximo/mínimo.

##### 1. *floating strike*:

a. *call*:  $Max [0, S_{t_i} - S_{t_i}^{Min} ]$ ;

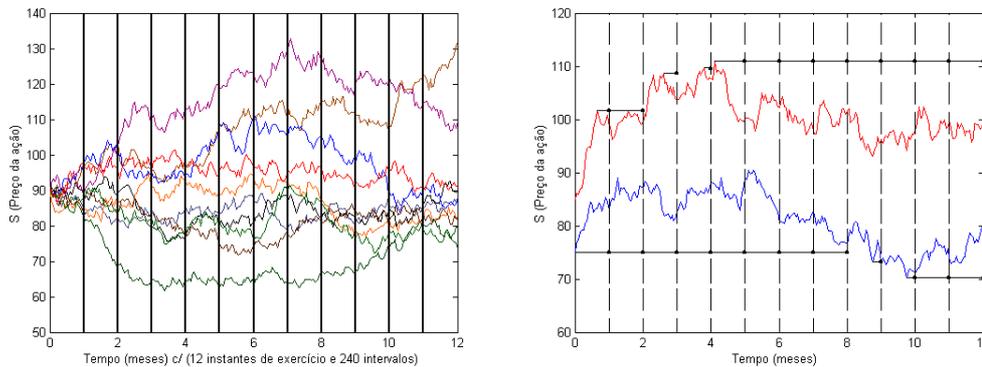
b. *put*:  $Max [0, S_{t_i}^{Max} - S_{t_i} ]$ ;

2. *fixed strike*:

a. *call*:  $Max [0, S_{t_i}^{Max} - X]$ ;

b. *put*:  $Max [0, X - S_{t_i}^{Min}]$ .

Conforme visto na avaliação de opções asiáticas, a discretização do tempo é crucial quando na avaliação de opções americanas cujos *payoffs* dependem da trajetória de preços da ação. O aumento do número de instantes de exercício antecipado, 200 ou mais, pode tornar os modelos de simulação computacionalmente muito custosos. Assim, uma alternativa eficiente e relativamente simples seria aumentarmos somente a discretização das trajetórias de modo a monitorarmos o máximo/mínimo da ação, mantendo o número de possibilidades de exercício iguais aos utilizados em opções americanas tradicionais.



**Figura 9.6-** A figura acima demonstra o processo de precificação de uma opção onde os máximos/mínimos nos 12 instantes de exercício são estimados com base num número elevado de discretizações de tempo. No segundo gráfico utilizamos diferentes preços iniciais ( $S_0 = 75$  e  $85$ ) de modo a melhor exemplificarmos o método. Dados da simulação: 12 instantes de exercício e 240 discretizações para a monitoração do máximo/mínimo da ação.

Assim como na avaliação de opções asiáticas as regressões utilizadas no modelo LSM, devem ser representadas por uma superfície em três dimensões ( $S \times S^{Max / Min} \times t$ ).

Abaixo testamos o modelo em relação ao tipo de regressão utilizado na precificação de uma *call lookback floating strike*. Notamos a necessidade de utilizarmos uma regressão linear com 21 bases (10 bases correspondentes às variáveis  $S$  e  $S^{Min}$  até o quinto grau e 10 corresponde aos termos cruzados).

**Tabela 9.5-** Valores de opções americanas *call lookback floating strike* para diversos preços iniciais e tipos de regressão. Notamos que o valor estimado da opção quando utilizamos um polinômio linear com 21 bases na regressão permanece próximo do *benchmark* (Babbs). Caso base: *lookback floating strike* estilo americano,  $X_0^{Min} = 75$ ,  $r = .06/ano$ ,  $q = .03/ano$ ,  $\sigma = .20/ano$ ,  $T = 1$  ano; Dados da simulação:  $N_1 = 35$  (instantes de exercício antecipado),  $N_2 = 350$  (discretizações) e  $n = 50.000$  (Sobol).

$S_0$	75	80	85	90
Babbs	<b>11.4900</b>	<b>13.0000</b>	<b>15.5800</b>	<b>18.9650</b>
Linear <sub>21</sub>	<b>11.4624</b>	<b>12.9718</b>	<b>15.5298</b>	<b>18.9066</b>
Linear <sub>10</sub>	11.2967	12.7868	15.2990	18.6355
Hermite <sub>10</sub>	-	-	15.2990	18.6196
Legendre <sub>10</sub>	-	-	-	18.6355

## 9.5. Opções Dependentes de Múltiplos Ativos

Nesta seção estenderemos o algoritmo LSM para o caso de opções americanas dependentes de múltiplos ativos. Focaremos nossos resultados em opções baseadas no mínimo e máximo de dois e três ativos correlacionados. Existem quatro tipos básicos de opções com *payoff's* dependentes do máximo-mínimo de um grupo com  $n$  ativos.

3. *payoff* em função do máximo de  $n$  ativos:

a. *call*:  $Max [0, \max (S_{1,t}, S_{2,t}, \dots, S_{n,t}) - X];$

b. *put*:  $Max [0, X - \max (S_{1,t}, S_{2,t}, \dots, S_{n,t})];$

4. *payoff* em função do mínimo de  $n$  ativos:

a. *call*:  $Max [0, \min (S_{1,t}, S_{2,t}, \dots, S_{n,t}) - X];$

b. *put*:  $Max [0, X - \min (S_{1,t}, S_{2,t}, \dots, S_{n,t})].$

Observamos que os modelos baseados em árvores e DF podem ser aplicados na precificação de opções dependentes de no máximo três ativos. No entanto, acima de três dimensões, a aplicação destes métodos torna-se impraticável, restando unicamente os modelos baseados em simulação.

Assim como no caso de opções asiáticas e *lookback*, a função do valor de continuação nas opções do tipo máximo-mínimo depende de múltiplas variáveis. De modo a facilitarmos nossa abordagem, optamos pelas mesmas bases para a avaliação de opções sujeitas a dois e três ativos correlacionados. No caso de opções sujeitas aos preços de três ativos, os termos  $S_1$  e  $S_2$  correspondem aos dois maiores valores do grupo de ativos. Essa idéia tem por objetivo reduzir o número de bases nas regressões e conseqüentemente acelerar o tempo computacional. As bases escolhidas são:

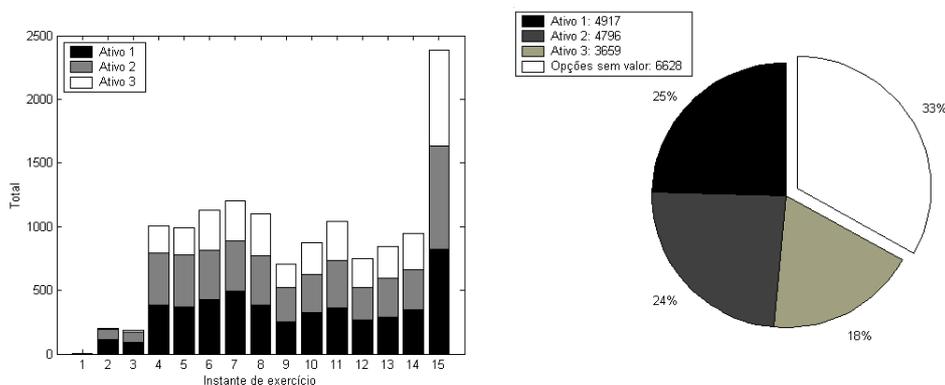
$$\begin{array}{ccccc}
 S_1 & S_1^2 & S_1^3 & S_1^4 & S_1^5 \\
 S_2 & S_2^2 & S_2^3 & S_2^4 & S_2^5 \\
 S_1 S_2 & S_1 S_2^2 & S_1 S_2^3 & S_1 S_2^4 & \\
 S_1^2 S_2 & S_1^2 S_2^2 & S_1^2 S_2^3 & & \\
 S_1^2 S_2^2 & S_1^3 S_2^2 & & & \\
 S_1^4 S_2 & & & & \\
 1 & & & & 
 \end{array}$$

**Tabela 9.6-** Valores de opções *put* americanas baseadas no valor mínimo dentre dois ativos não correlacionados para diversos preços de exercício (35, 40 e 45). Notamos que o valor estimado pelo modelo LSM permanece próximo do *benchmark* (árvore trinomial de Boyle). Caso base: opção americana descrita no item (2.b) acima,  $S_1 = S_2 = 40$ ,  $\sigma_1 = .20/ano$ ,  $\sigma_2 = .30/ano$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $r = .05/ano$ ,  $q_1 = q_2 = 0/ano$ ,  $T = .583 anos$  (7 meses); Dados da simulação: Modelo LSM (Sobol),  $N = 25$ ,  $n = 30.000$  simulações e polinômio com as bases descritas acima

Strike (X)	$PUT_{LSM}$	Trinomial
35	1.4218	1.4230
40	3.8807	3.8920
45	7.6799	7.6890

**Tabela 9.7-** Valores de opções *call* americanas baseadas no valor máximo dentre três ativos correlacionados para diversas datas de exercício antecipado. Caso base: opção americana descrita no item (1.a) acima,  $S_1 = S_2 = S_3 = 100$ ,  $X = 100$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = .20/ano$ ,  $\rho_{1,2} = -0.25$ ,  $\rho_{1,3} = 0.25$ ,  $\rho_{2,3} = 0.3$ ,  $r = .05/ano$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = .10/ano$ ,  $T = 3 anos$ ; Dados da simulação: Modelo LSM (Sobol),  $n = 30.000$  simulações e polinômio com as bases descritas acima.

CALL	Datas de exercício antecipado		
	10	15	30
LSM	17.8278	17.9389	18.0845
DF	17.8440	17.9690	18.0820



**Figura 9.7-** Estratégia de exercício antecipado para o caso base descrito na tabela acima. Os gráficos representam a quantidade de exercícios dos ativo em cada instante de exercício e o percentual total de exercícios de cada ativo. Dados da simulação: Modelo LSM (Sobol),  $N = 15$  e  $n = 20.000$  simulações.

## 9.6. Opções com Taxas de Juros Variáveis

Nesta seção consideraremos a aplicação do modelo LSM na avaliação de opções americanas sujeitas a taxas de juros variáveis, isto é: taxas definidas por processos estocásticos ou funções dependentes do tempo. Esse problema, embora de grande importância prática, ainda é um assunto pouco estudado pela literatura financeira.

Assim como nas seções anteriores suporemos que o preço do ativo segue um movimento geométrico browniano. Assim, supondo taxas de juros variáveis temos:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \left(r(w,t) - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dZ_1 \quad \therefore \quad dZ_1 = \varepsilon\sqrt{dt}$$

A precificação de uma *put* americana pode ser representada como

$$PUT_{AMER} = \underset{t_i}{Max} E \left[ \exp\left(-\int_0^{t_i} r(w,t)\right) \cdot \max\{X - S(t_i)\} \right];$$

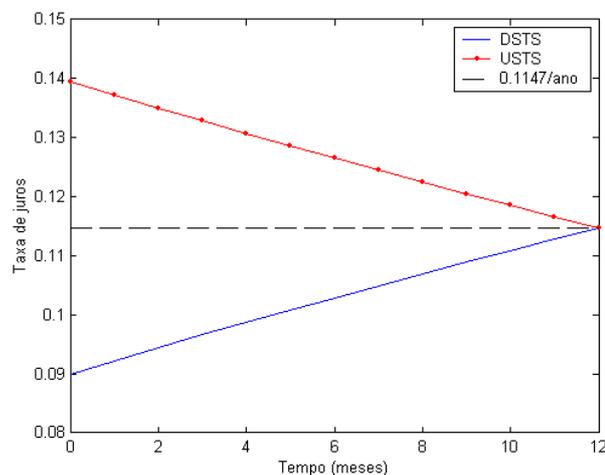
- ∴
- $t$  → instante de exercício:  $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{L-1} \leq t_L = T$ ;
  - $S(t)$  → preço da ação no instante  $t_i$ ;
  - $X$  → preço de *strike*;
  - $r(w,t)$  → taxa de juros associada a cada simulação ( $w$ ) e instante de tempo ( $t$ ). No caso de uma opção americana com taxas de juros variáveis:  $\exp\left(-\int_0^{t_i} r(w,t)\right) \neq e^{-r \cdot t_i}$  (taxa de desconto);

A seguir suporemos valores distintos para a variação da taxa de juros no tempo e os respectivos efeitos no preço de opções do tipo *put* americanas : (1) suporemos a taxa de juros como sendo uma função dependente do tempo (crescente e decrescente); (2) modelo Cox, Ingersoll e Ross (CIR).

### 9.6.1. Taxa de juros em função do tempo

Nesta subseção consideraremos a influência de diferentes curvas de juros no preço de opções americanas. Consideraremos três tipos de curvas:  $r(t) = 0.24 - 0.15 e^{-0.18t}$  (*upward sloping*, USTS),  $r(t) = -0.0106 + 0.15 e^{-0.18t}$  (*downward sloping*, DSTS) e  $r(t) = 0.1147$ . Para as curvas de juros estabelecidas, os preços de opções européias permanecem inalterados para as três curvas, visto

apresentarem taxas de juros iguais a 11.47% ao final de um ano. No entanto, quando na avaliação de opções americanas a possibilidade de exercício antecipado acaba por gerar diferenças nos preços das opções.



**Figura 9.8-** Representação das curvas de juros USTS e DSTS citadas anteriormente.

No caso de considerarmos a taxa de juros como função do tempo, e não estocástica, as simulações envolvem apenas uma variável de estado. Assim, as regressões podem ser efetuadas diretamente como no caso de opções americanas tradicionais (*vanilla*), usando-se apenas os valores correspondentes ao preço da ação ( $S(t)$ ).

**Tabela 9.8-** Valor de opções americanas com juros variáveis. Caso base: *put*,  $S_0 = 40$ ,  $r_0 = 0.1147/ano$ ,  $q = 0/ano$ ,  $T = 1ano$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação: 25 possibilidades de exercício antecipado e 50000 simulações (Sobol).

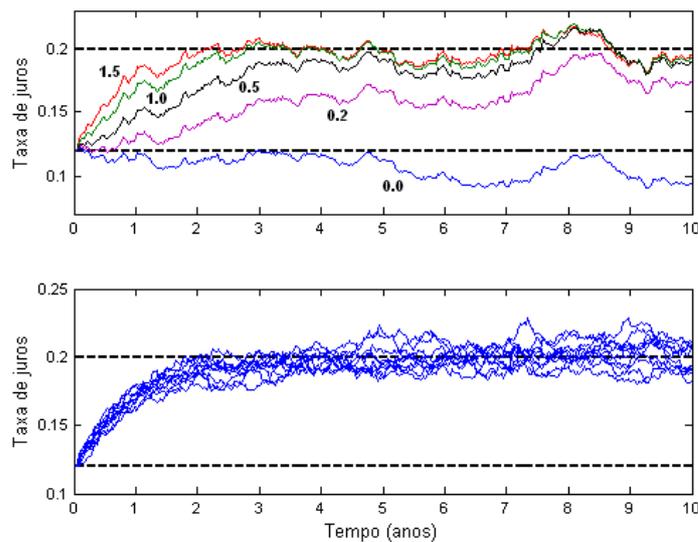
$X$	$\sigma$	$r = 11.47\%$	USTS	DSTS
35	0.25	0.8654	0.9464	0.7908
40		2.4593	2.6220	2.3133
45		5.3875	5.5562	5.2440
35	0.35	1.9186	2.0315	1.8094
40		3.8717	4.0513	3.6969
45		6.6679	6.8899	6.4602

### 9.6.2. Taxas de Juros estocásticas: Modelo CIR

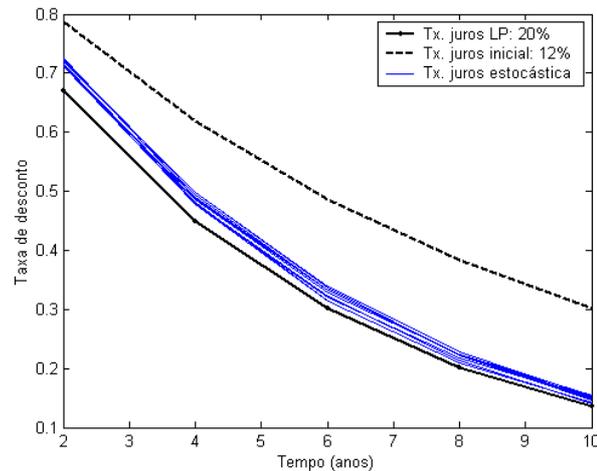
Em seu artigo original Cox, Ingersoll e Ross (1985) supõem o seguinte processo estocástico para a taxa de juros:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \rho\sqrt{r_t}dZ_2 \quad \therefore \quad dZ_1 = \varepsilon\sqrt{dt}$$

onde  $\gamma$  é o valor da taxa de juros de longo prazo,  $\alpha$  representa a velocidade de ajustamento à taxa de longo prazo e  $\rho$  é uma constante. Notamos que esse modelo representa um processo de reversão a média com volatilidade estocástica e taxas de juros sempre positivas. Observamos ainda que  $Z_1$  e  $Z_2$  são dois processos de Wiener geralmente correlacionados negativamente ( $\theta < 0$ ), visto que o aumento da taxa de juros tem efeito depreciativo no valor dos ativos.



**Figura 9.9-** O primeiro gráfico apresenta diferentes trajetórias de taxas de juros segundo o modelo CIR para vários valores de  $\alpha$ . Já o segundo apresenta os resultados de simulações segundo o caso base descrito a seguir. Caso base:  $r_0 = 0.12/ano$ ,  $T = 10$  anos,  $\alpha = 1.0$ ,  $\gamma = 0.20$ ,  $\rho = 0.025$ ,  $\sigma = .35/ano$  e  $\theta = 0$ . Dados da simulação: 350 intervalos de tempo.



**Figura 9.10-** Taxas de desconto considerando juros constantes (12% e 20% ao ano) e estocástico. Caso base:  $r_0 = 0.12/ano$ ,  $T = 10$  anos,  $\alpha = 1.0$ ,  $\gamma = 0.20$ ,  $\rho = 0.025$ ,  $\sigma = .35/ano$  e  $\theta = 0$ . Dados da simulação: 350 intervalos de tempo, 5 possibilidades de exercício antecipado.

**Tabela 9.9-** A tabela abaixo apresenta os resultados da precificação de opções do tipo *put* americanas considerando juros constantes e estocásticos, segundo o Modelo LSM. Os resultados demonstram uma desvalorização do preço das opções quando comparadas com os juros presentes e valorização em relação aos de longo prazo. Observamos que associado ao aumento das taxas de desconto em relação aos juros presentes, temos um aumento da volatilidade geral do preço do ativo devido à volatilidade da taxa de juros. Este aumento na volatilidade total acaba por reduzir os efeitos das taxas de desconto mais elevadas. Notamos também que a existência de qualquer correlação entre o ativo e a taxa de juros tem um efeito maior nas opções *out of the money*, sendo que: correlações negativas tendem a desvalorizar o preço das opções enquanto as positivas tendem a valoriza-las. Caso base:  $S_0 = 40$ ,  $r_0 = 0.12/ano$ ,  $q = 0/ano$ ,  $T = 1$  ano,  $\gamma = 0.20/ano$ ,  $\rho = 0.025$ ,  $\sigma = .35/ano$ . Dados da simulação: 250 intervalos de tempo, 25 possibilidades de exercício antecipado e 50000 simulações (Sobol).

$X$	PUT		Estocástico: $\rho = 0.025$			
	$r = 12\%$	$r = 20\%$	$Put_{\alpha=0.5/\theta=0}$	$Put_{\alpha=1.0/\theta=0}$	$Put_{\alpha=1.0/\theta=-0.5}$	$Put_{\alpha=1.0/\theta=+0.5}$
35	1.8812	1.3718	1.7792	1.7124	1.7029	1.7239
40	3.8109	3.0704	3.6857	3.5942	3.5938	3.6004
45	6.6236	5.8369	6.5053	6.4126	6.4126	6.4112

## 9.7. Opções com Volatilidade Estocástica

Apresentaremos a seguir os resultados obtidos com a extensão do modelo LSM na avaliação de opções americanas sobre ativos com volatilidade estocástica. Até o momento, a volatilidade do ativo seguia as suposições feitas por Black e Scholes, ou seja, era constante ao longo do tempo.

Desde sua introdução por Engle (1982), os processos do tipo GARCH têm sido apontados como um dos mais indicados para a previsão da volatilidade de ativos financeiros. Assim, optamos por incorporar um processo de volatilidade estocástica do tipo GARCH ao modelo LSM de modo a precificarmos opções americanas. No entanto, observamos que qualquer processo estocástico alternativo para a volatilidade poderia ser igualmente utilizado sem complicações adicionais.

Devido à inexistência de soluções analíticas, utilizaremos como benchmark dois modelos propostos por Duan e Simonato, o primeiro baseado em cadeias de Markov (2001) e o outro num modelo modificado de árvore conhecido por binomial de Edgeworth (2003).

Restringiremos nossa abordagem ao processo NGARCH(1,1) proposto por Engle e Ng (1993). Estudos sugerem a melhor performance deste modelo quando comparado ao GARCH(1,1).

Assumindo que a volatilidade segue um processo do tipo NGARCH(1,1) e supondo um intervalo de um período ( $\Delta t = 1$  dia), temos:

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = \left[ \left( r - q - \frac{h_{t+1}}{2} \right) + \sqrt{h_{t+1}} \cdot Z_{t+1} \right], \quad Z_{t+1} \sim N(0,1)$$

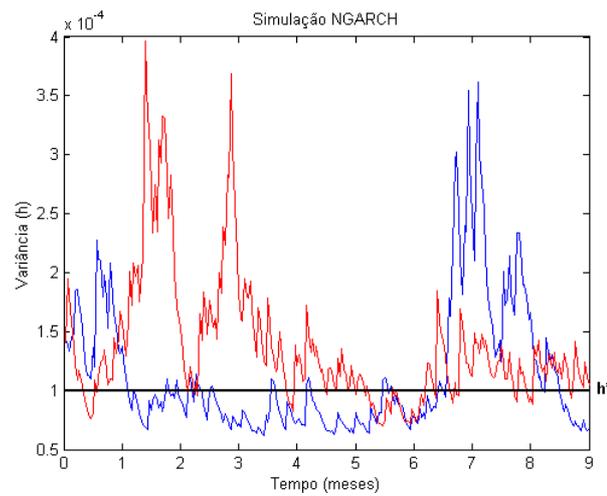
$$\begin{aligned} \therefore \quad h_{t+1} &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \cdot h_t \cdot (Z_t - \theta - \lambda)^2 \\ h^* &= \beta_0 \cdot \left\{ 1 - \beta_1 - \beta_2 \cdot \left[ 1 + (\theta + \lambda)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (\text{variância estacionária}) \end{aligned}$$

onde  $\beta_0 > 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$ ,  $\lambda$  e  $\theta$  são os parâmetros de entrada do modelo NGARCH obtidos pela análise da série histórica de preços do ativo. Para maiores detalhes sobre o modelo sugerimos como referência Engle e Ng. (1993).

No que se refere à regressão a ser utilizada no modelo, testes realizados sugeriram que a utilização de dez bases envolvendo os termos independentes e

cruzados do preço da ação ( $S_t$ ) e variância ( $h_t$ ) seriam suficientes para obtermos uma boa aproximação do valor da opção.

$$\begin{array}{ccc}
 S & S^2 & S^3 \\
 h & h^2 & h^3 \\
 S \cdot h & S^2 \cdot h & \\
 S \cdot h^2 & & \\
 1 & & 
 \end{array}$$



**Figura 9.11-** Simulação de duas trajetórias para a variância segundo o modelo NGARCH com parâmetros  $\beta_0 = 0.00001$ ,  $\beta_1 = 0.80$ ,  $\beta_2 = 0.10$ ,  $\lambda + \theta = 0.50$ .

**Tabela 9.10-** Precificação de opções americanas com volatilidade estocástica segundo o processo NGARCH para diferentes vencimentos e preços de exercício. Utilizamos como benchmark os modelos de Cadeias de Markov e Binomial de Edgeworth desenvolvidos por Duan e Simonato. Caso base: put americana,  $S_0 = 50$ ,  $r_0 = 0.05/ano$ ,  $q = 0.0/ano$ ,  $\beta_0 = 0.00001$ ,  $\beta_1 = 0.80$ ,  $\beta_2 = 0.10$ ,  $\lambda + \theta = 0.50$ . Dados da simulação: possibilidade de exercício diário,  $\Delta t = 1$  dia e 70000 simulações (LHC).

$X/S_0$	T = 1 mês			3 meses			9 meses		
	1.10	1.00	0.90	1.10	1.00	0.90	1.10	1.00	0.90
Markov	5.0000	1.1026	0.0742	5.1861	1.8737	0.4142	5.9800	3.0463	1.2524
Edgeworth	5.0000	1.0900	0.0900	5.1700	1.8700	0.4500	5.9500	3.0500	1.2900
<b>LSM</b>	<b>4.9989</b>	<b>1.1404</b>	<b>0.0912</b>	<b>5.1815</b>	<b>1.8929</b>	<b>0.4412</b>	<b>5.9903</b>	<b>3.0500</b>	<b>1.2764</b>

## Capítulo 10:

# CONCLUSÃO

No presente trabalho apresentamos e comparamos os vários modelos de precificação de opções do estilo americano assim como as técnicas usualmente utilizadas para melhorar aspectos relativos a velocidade de convergência e precisão. Abordamos as principais características de cada metodologia, desde os métodos tradicionais baseados em árvores binomiais e diferenças finitas àqueles mais recentes, baseados em simulação de Monte Carlo e Quase Monte Carlo. *Lato sensu*, pretendemos comprovar a aplicabilidade e versatilidade dos modelos baseados em simulação na avaliação de opções americanas tradicionais ou complexas, assim como desenvolver ferramentas gerenciais que permitam a melhor análise e compreensão das opções abordadas. Nossa análise baseia-se, sobretudo na ilustração de exemplos práticos, dando especial ênfase à implementação computacional e precisão dos modelos.

No que se refere às técnicas de redução de variância associadas ao modelo de Simulação de Monte Carlo, demonstramos que todos os métodos são eficazes na redução do desvio padrão da simulação, que resulta numa redução também no número de simulações necessárias para uma boa aproximação do preço da opção. Gráficos de convergência sugeriram que os métodos propostos são mais precisos e convergem mais rapidamente que os modelos tradicionais. Das cinco técnicas abordadas, o modelo *Latin Hipercube* apresentou uma performance bastante superior diante aos demais.

Baseamos a ilustração das propriedades da simulação de Quase-Monte Carlo através de exemplos gráficos. Através da análise destes gráficos fica evidente que a utilização de seqüências de baixa discrepância tende a melhorar consideravelmente a convergência e precisão da simulação. Notamos que para todas as três seqüências utilizadas, QMC apresentou convergência notavelmente mais rápida e suave que as observadas nas técnicas de redução de variância, sendo *Latin Hipercube* a única exceção.

No que se refere ao capítulo destinado ao modelo de árvores binomiais, três métodos de aceleração de convergência foram analisados: Método dos Valores Médios (MVM), Método Binomial Black Scholes (BBS) e Método BBS com Extrapolação de Richardson. Gráficos de convergência sugeriram que os métodos propostos são mais precisos e convergem mais rapidamente que os modelos tradicionais. Observamos que dentre os três métodos abordados, o método BBS com Extrapolação de Richardson sugere uma melhor performance.

A precificação de opções americanas através do Modelo de Diferenças Finitas Implícito e Crank-Nicholson apresentam uma complicação adicional resolvida pela implementação de um processo iterativo na solução do sistema de equações. Já o Modelo Explícito não apresenta complicação adicional, o que torna sua implementação mais direta e simples. A análise do gráfico de convergência sugere uma precisão equivalente para os métodos de diferenças finitas estudados, não comprovando a afirmativa de alguns autores que sugerem a maior precisão do método de Crank-Nicholson frente aos demais. A vantagem do modelo de diferenças finitas reside, sobretudo na facilidade de obtenção de algumas “gregas”, baseadas na simples leitura do *grid*. No entanto, assim como no modelo de árvores, este modelo não é recomendado na análise de opções mais complexas, devido a processos estocásticos mais complicados, particularidades no exercício antecipado ou a múltiplas variáveis de estado.

Finalmente, através da análise de dois modelos, demonstramos como podemos incorporar a característica de exercício antecipado ao método de precificação por Simulação de Monte Carlo de modo a avaliarmos opções americanas. Dos dois modelos estudados, constatamos a superioridade do LSM sobre o GVW no que se refere à velocidade de processamento e facilidade de implementação. No que se refere à precisão dos modelos, ambos apresentaram resultados bastante satisfatórios para simulações envolvendo 50.000 trajetórias de preços. Observamos que a complexidade dos modelos LSM e GVW crescem à medida que aumentamos os fatores de incerteza devido às regressões envolverem múltiplas variáveis de estado e a curva de gatilho (condição de contorno livre) possuir dimensão igual ao número de variáveis, dificultando assim sua determinação.

Na parte final sugerimos o Modelo dos Mínimos Quadrados como a solução mais adequada no tratamento de opções americanas complexas. As diversas

ilustrações sugerem a possibilidade de obtermos diversas informações do processo de simulação, como: curvas de gatilho (condição de contorno livre), probabilidade de exercício em cada instante e risco da opção expirar sem valor.

Os capítulos referentes ao estudo dos modelos GVW e LSM apresentam-se como as contribuições mais importantes deste trabalho. Por apresentarem uma estrutura bastante flexível, esses modelos apresentam-se como a melhor resposta na avaliação de opções americanas complexas para as quais não existem soluções analíticas, dificilmente precificadas pelos modelos de árvores ou diferenças finitas. Com o desenvolvimento de processadores mais velozes e aplicação de técnicas de redução de variância, esperamos termos demonstrado aplicabilidade destes modelos, antes considerados computacionalmente muito caros. Com o desenvolvimento dos programas e interfaces computacionais apresentados no apêndice, pretendemos demonstrar a aplicabilidade real destes algoritmos na avaliação de opções por bancos e empresas.