3
Ruído

3.1
Introdução

O ruído está sempre presente nas medições reais e é o principal problema na identificação.

Para caracterizar estocásticamente incertezas, ou ruídos introduzidos no processo e ruído nas medições (nas saídas), uma maneira é descrevendo tais ruídos pelas suas covariâncias estatísticas e uma outra é especificando as equações do filtro de Kalman com o ganho de Kalman em estado estável, o qual é função das covariâncias dos ruídos do processo e das medições.

3.2
Modelo estocástico em espaço de estados

As equações (2-16, 2-17), são determinísticas. Um sistema linear invariante no tempo que considera as incertezas devido ao ruído pode ser descrito em forma matemática pelas seguintes equações

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}(k) + \mathbf{B}\boldsymbol{u}(k) + \mu(k) \tag{3-1}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \mathbf{C}\boldsymbol{x}(k) + \mathbf{D}\boldsymbol{u}(k) + \nu(k). \tag{3-2}$$

O vetor $\mu(k)$, que representa o ruído no processo devido às perturbações e inexatitudes do modelo dinâmico, é modelado como um ruído branco gaussiano com média zero e sua matriz de correlação é suposta conhecida e é definida como

$$E\left[\mu(k)\mu^T(j)\right] = \begin{cases} \mathbf{Q}, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases} \tag{3-3}$$

sendo $\mathbf{Q}$ a covariância de $\mu(k)$.

O vetor $\nu(k)$, que é chamado ruído de medição, é modelado como um ruído branco gaussiano com média zero e sua matriz de correlação é suposta conhecida e é definida como

$$E\left[\nu(k)\nu^T(j)\right] = \begin{cases} \mathbf{R}, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases} \tag{3-4}$$

sendo $\mathbf{R}$ a covariância de $\nu(k)$.

Também é suposto, que o valor do estado inicial $\boldsymbol{x}(0)$ não é correlacionado com os dois ruídos $\mu(k)$ e $\nu(k)$, para $k \geqslant 0$, e que $\mu(k)$ é estatísticamente independente de $\nu(k)$, ou seja $E\left[\mu(k)\nu^T(j)\right] = 0$ para todo k e j.

3.3 Filtro de Kalman

O problema de filtragem de Kalman [15, 16] é enunciado como: Dado a dinâmica, eq.(3-1) (mas desconhecido o estado inicial $\boldsymbol{x}(0)$), usar os dados observados, eq.(3-2), constituído pelos vetores $\boldsymbol{y}(1)$, $\boldsymbol{y}(2)$,..., $\boldsymbol{y}(j)$, para achar a melhor estimativa ou quadrado médio mínimo dos componentes do estado $\boldsymbol{x}(k)$, para cada $k \geqslant j \geqslant 1$. O problema é de filtragem se $k = j$ e de predição se $k > j$. Os dados disponíveis incluem o valor médio da condição inicial, $\bar{\boldsymbol{x}}(0)$; as entradas prévias $\boldsymbol{u}(j)$, $j < k$; e as conhecidas covariâncias $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{P}_x(0)$ (covariância do estado $\boldsymbol{x}(0)$).

Dados os vetores $\boldsymbol{y}(1)$, $\boldsymbol{y}(2)$,..., $\boldsymbol{y}(k)$ os quais expandem o espaço vectorial $\mathscr{Y}_k$, o vetor $\hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k)$ é a estimativa filtrada do estado $\boldsymbol{x}(k)$ e será chamado como o estado estimado. O erro do estado estimado é definido como

$$\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k). \tag{3-5}$$

Supondo que o estado estimado um passo adiante $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|\mathscr{Y}_k)$, pode predizer-se em forma recursiva como

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|\mathscr{Y}_k) = \boldsymbol{K}_2(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k) + \boldsymbol{K}_1(k)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{y}(k), \tag{3-6}$$

usando as equações (3-1, 3-2, 3-5 e 3-6), o erro do estado estimado um passo adiante, ou de predição, pode-se calcular como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(k+1) &= \boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|\mathscr{Y}_k) \\ &= [\mathbf{A} - \boldsymbol{K}_2(k) - \boldsymbol{K}(k)\mathbf{C}]\boldsymbol{x}(k) + [\mathbf{B} - \boldsymbol{K}_1(k) - \boldsymbol{K}(k)\mathbf{D}]\boldsymbol{u}(k) \\ &\quad + \boldsymbol{K}_2(k)\boldsymbol{e}(k) + \mu(k) - \boldsymbol{K}(k)\nu(k) \end{aligned}$$

sendo que o objetivo é obter um erro do estado estimado com média zero ($E[\boldsymbol{e}(k+1)] = 0$), mas dado que $E[\boldsymbol{e}(k)]$ não pode ser zero, o erro é mínimo quando os termos entre colchetes são iguais à zero, então

$$\boldsymbol{K}_2(k) = \mathbf{A} - \boldsymbol{K}(k)\mathbf{C} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{K}_1(k) = \mathbf{B} - \boldsymbol{K}(k)\mathbf{D} \tag{3-7}$$

logo, a equação do erro do estado estimado um passo adiante é reduzida a

$$\boldsymbol{e}(k+1) = [\mathbf{A} - \boldsymbol{K}(k)\mathbf{C}]\boldsymbol{e}(k) - \boldsymbol{K}(k)\nu(k) + \mu(k). \tag{3-8}$$

A equação anterior mostra que o erro no instante de tempo $(k+1)$ depende do erro prévio, $\boldsymbol{e}(k)$, e também dos ruídos $\mu(k)$ e $\nu(k)$ no instante prévio de tempo discreto k. O que significa que o erro $\boldsymbol{e}(k+1)$ é mutuamente correlacionado com o erro $\boldsymbol{e}(k)$ e os ruídos $\mu(k)$ e $\nu(k)$. Não obstante, o erro $\boldsymbol{e}(k)$ é independente de $\mu(k)$ e $\nu(k)$, ou seja

$$E\left[\boldsymbol{e}(k)\mu^T(k)\right] = 0 \quad \text{e} \quad E\left[\boldsymbol{e}(k)\nu^T(k)\right] = 0$$

Supondo que $E\left[\mu(k)\nu^T(k)\right] = 0$, a covariância do erro de predição pode ser obtida como

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= E\left[\boldsymbol{e}(k+1)\boldsymbol{e}^T(k+1)\right] \\ &= [\mathbf{A} - \boldsymbol{K}(k)\mathbf{C}]\,\mathbf{P}(k)\,[\mathbf{A} - \boldsymbol{K}(k)\mathbf{C}]^T + \boldsymbol{K}(k)\mathbf{R}\boldsymbol{K}^T(k) + \mathbf{Q}\end{aligned} \tag{3-9}$$

sendo $\mathbf{R} = E\left[\nu(k)\nu^T(k)\right]$ e $\mathbf{Q} = E\left[\mu(k)\mu^T(k)\right]$.

Uma maior covariância $\mathbf{P}(k)$ indica uma distribuição mais aberta da variável aleatória com respeito ao seu valor médio, ou seja, um maior grau de incerteza. O critério para a eleição de $\boldsymbol{K}(k)$ é minimizar o valor esperado da norma quadrada de $\boldsymbol{e}(k+1)$ definida por

$$J_k = E\left[\boldsymbol{e}^T(k+1)\boldsymbol{e}(k+1)\right] = \text{traça}\,E\left[\boldsymbol{e}(k+1)\boldsymbol{e}^T(k+1)\right] = \text{traça}\mathbf{P}(k+1)$$

então, fazendo $\dfrac{\partial[\text{traça}\mathbf{P}(k+1)]}{\partial\boldsymbol{K}(k)} = 0$, o valor de $\boldsymbol{K}(k)$ que minimiza (3-9) é

$$\boldsymbol{K}(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\right]^{-1} \tag{3-10}$$

o qual é conhecido como o ganho do filtro de Kalman.

Substituindo (3-10) em (3-9) obtém-se

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\right]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \tag{3-11}$$

a qual é conhecida como a equação algébrica discreta de Riccati.

Na maioria de sistemas mecânicos invariantes no tempo, a covariância $\mathbf{P}(k)$ aproxima num valor estável constante rapidamente, assim, a equação algébrica discreta de Riccati no estado estável é

$$\mathbf{P} = \mathbf{APA}^T - \mathbf{APC}^T \left[\mathbf{R} + \mathbf{CPC}^T\right]^{-1} \mathbf{CPA}^T + \mathbf{Q}. \tag{3-12}$$

Supondo que a estimativa filtrada da saída, $\hat{\boldsymbol{y}}(k|\mathscr{Y}_k)$, satisfaz a seguinte equação

$$\hat{\boldsymbol{y}}(k|\mathscr{Y}_k) = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k) + \mathbf{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{3-13}$$

o residual da saída é

$$\epsilon(k) = \boldsymbol{y}(k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k|\mathscr{Y}_k) = \mathbf{C}\boldsymbol{e}(k) + \nu(k). \tag{3-14}$$

O residual de saída tem média zero e é branco, cumprindo as seguintes propriedades de ortogonalidade

$$\begin{aligned} E\left[\epsilon(k)\epsilon^T(j)\right] &= \begin{cases} \mathbf{CPC}^T + \mathbf{R}, & k = j \\ \mathbf{0}, & k \neq j \end{cases} \\ E\left[\epsilon(k)\boldsymbol{y}^T(k-j)\right] &= \mathbf{0}; \quad j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ E\left[\epsilon(k)\boldsymbol{u}^T(k-j)\right] &= \mathbf{0}; \quad j = 0, 1, \ldots, k-1. \end{aligned} \tag{3-15}$$

Usando as equações (3-6, 3-7, 3-13 e 3-14), o filtro de Kalman em estado estável para as equações estocásticas (3-1) e (3-2) é dado pelo seguinte sistema invariante no tempo

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|\mathscr{Y}_k) = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k) + \mathbf{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{K}\left[\boldsymbol{y}(k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k|\mathscr{Y}_k)\right] \tag{3-16}$$

com o vetor de medição estimado satisfazendo

$$\hat{\boldsymbol{y}}(k|\mathscr{Y}_k) = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k) + \mathbf{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{3-17}$$

ou também pelas seguintes equações

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|\mathscr{Y}_k) = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k) + \mathbf{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{K}\epsilon(k) \tag{3-18}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k|\mathscr{Y}_k) + \mathbf{D}\boldsymbol{u}(k) + \epsilon(k). \tag{3-19}$$

3.4
Técnicas para diferenciar os modos associados ao sistema e os modos associados ao ruído

Os algoritmos de subespaço que serão estudados (o ERA, o ERA/DC, o OKID/ERA e o OKID/ERA/DC) usam a decomposição em valores singulares para obter modos associados ao sistema e modos associados ao ruído, cada valor singular estará associado a um modo; teoricamente deve-se obter n valores singulares diferentes de zero (para um sistema em espaço de estados de ordem n), mas devido a presença de ruído, existirão mais de n valores singulares diferente de zero contendo os modos do sistema e os modos associados ao ruído. A determinação dos modos estruturais, entre os modos identificados, que representem bem o sistema pode ser feito usando algumas técnicas da análise modal como o MAC (Modal Assurance Criterion [7]), também conhecido como Amplitude de Coerência Modal [22], e o MRM (Modal Response Magnitude).

3.4.1
Amplitude de coerência modal (MAC)

O valor do MAC para o i-ésimo autovalor é definido como a norma do produto escalar entre os vetores $\bar{\boldsymbol{q}}_i$ e $\hat{\boldsymbol{q}}_i$ (i=1, 2, ..., n)

$$\mathrm{MAC}_i = \frac{|\bar{\boldsymbol{q}}_i \hat{\boldsymbol{q}}_i^{\hbar}|}{|\bar{\boldsymbol{q}}_i \bar{\boldsymbol{q}}_i^{\hbar}|^{1/2} |\hat{\boldsymbol{q}}_i \hat{\boldsymbol{q}}_i^{\hbar}|^{1/2}} \ , \tag{3-20}$$

onde $\hbar$ indica complexo conjugado transposto; o vetor $\hat{\boldsymbol{q}}_i$ é a história no tempo das amplitudes modais identificadas para o i-ésimo modo, calculado com o i-ésimo autovalor identificado $\hat{\lambda}_i$ e a i-ésima linha da matriz $\hat{\mathbf{B}}_m$, $\hat{\boldsymbol{b}}_{m_i}$, da forma

$$\hat{\boldsymbol{q}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{b}}_{m_i} & \hat{\lambda}_i \hat{\boldsymbol{b}}_{m_i} & \hat{\lambda}_i^2 \hat{\boldsymbol{b}}_{m_i} \ \ldots \ \hat{\lambda}_i^{\beta-1} \hat{\boldsymbol{b}}_{m_i} \end{bmatrix} . \tag{3-21}$$

O vetor $\bar{\boldsymbol{q}}_i$ é a história no tempo das amplitudes modais calculadas a partir dos dados medidos (reais) usados na identificação, correspondente á i-ésima linha da matriz calculada como

$$\bar{\mathcal{Q}} = \Psi^{-1} \mathcal{Q}_\beta \tag{3-22}$$

sendo $\mathcal{Q}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$, a matriz de controlabilidade. Na prática, Ψ^{-1} é substituída pela matriz de autovetores estimados $\hat{\Psi}^{-1}$.

Os valores de MAC_i estão contidos no intervalo [0, 1]; se MAC_i está perto de 1 o correspondente modo i é considerado como estrutural, caso contrário não é considerado.

3.4.2
Magnitude da resposta modal (MRM)

A resposta do sistema é uma soma das respostas modais, ou seja

$$\bar{\boldsymbol{y}}(k) = \sum_{i=1,3}^{n-1} \bar{\boldsymbol{y}}_i(k) \tag{3-23}$$

sendo, $\bar{\boldsymbol{y}}_i(k) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ a resposta do i-ésimo modo. Para o i-ésimo modo complexo, $\bar{\boldsymbol{y}}_i(k)$ é calculado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_i(k+1) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_i^*(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_i & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_i(k) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_i^*(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{b}}_{m_i} \\ \hat{\boldsymbol{b}}_{m_i}^* \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(k) \\ \bar{\boldsymbol{y}}_i(k) &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{c}}_{m_i} & \hat{\boldsymbol{c}}_{m_i}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_i(k) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_i^*(k) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\boldsymbol{u}(k) \\ & i = 1,\, 3, \ldots,\, n-1 \end{aligned} \tag{3-24}$$

sendo $\bar{\boldsymbol{x}}_i(k)$ o i-ésimo estado na base modal, $\hat{\boldsymbol{b}}_{m_i}$ é a i-ésima linha da matriz $\hat{\mathbf{B}}_m$, e $\hat{\boldsymbol{c}}_{m_i}$ é a i-ésima coluna da matriz $\hat{\mathbf{C}}_m$ (* indica complexo conjugado).

A máxima contribuição do i-ésimo modo na resposta total pode ser calculada pela magnitude de resposta modal (MRM) definida como [30]

$$\mathrm{MRM}_i = \max\left(\sum_{k=1}^{l} |\bar{\boldsymbol{y}}_i(k)|/l\right); \quad i = 1,\, 3, \ldots,\, n-1 \tag{3-25}$$

sendo l, o número de amostras ou dados medidos. O MRM é o maior valor médio da resposta modal absoluta para a entrada $\boldsymbol{u}(k)$. Os modos com pequeno valor de MRM podem ser considerados não significantes.