

## 2

# Fundamentos de Sistemas Lineares e Representação Modal

### 2.1

#### Introdução

Neste capítulo é apresentada a teoria básica de sistemas lineares invariantes no tempo e as equações matemáticas que descrevem tais sistemas. É usada a definição de estado para representar a dinâmica de sistemas mecânicos no modelo em espaço de estados, o qual é o modelo dinâmico base usado pelos algoritmos de subespaço para identificação de parâmetros modais de sistemas MIMO no domínio do tempo. São definidos os parâmetros modais e parâmetros de Markov e sua relação com a dinâmica do sistema, especialmente com o modelo discreto em espaço de estados. Por último os conceitos de controlabilidade e observabilidade são utilizados para definir uma realização mínima em espaço de estados.

### 2.2

#### Relação entrada-saída de sistemas lineares

A relação entrada-saída representa a relação matemática entre a entrada  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r]$  e a saída  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]$  de um sistema, como se mostra na Fig.(2.1).

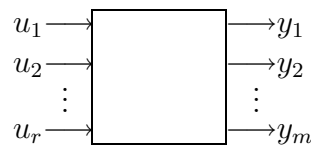


Figura 2.1: Sistema com  $r$  entradas e  $m$  saídas

Neste trabalho, o sistema não é considerado uma caixa preta, o que quer dizer que a estrutura interna (modelo) do sistema não é suposta completamente desconhecido, porém o principal acesso ao sistema é pelos sinais de entrada e saída.

Para facilitar a análise da resposta de um sistema linear devido a uma entrada ou excitação arbitrária é necessário representar a resposta como combinação de funções mais “simples”. Consideremos um sistema linear excitado por uma função delta de Dirac, ou impulso unitário, como entrada aplicada num instante  $\tau$ ,  $\delta(t - \tau)$ , e representemos a resposta no instante  $t$  por  $\mathbf{g}(t, \tau)$ .

Assim, a resposta  $\mathbf{y}(t)$ , no instante  $t$ , para uma entrada arbitrária  $\mathbf{u}(\cdot)$ , definido no intervalo de tempo  $(-\infty, \infty)$ , de um sistema que satisfaz a propriedade de linearidade [24], [12], pode ser representada pela equação

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2-1)$$

Se as entrada e saída possuem a propriedade de causalidade, a eq.(2-1) pode ser reduzida para

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (2-2)$$

além disso, se o sistema está relaxado no tempo  $t_0$ , ou seja por definição, que a saída  $\mathbf{y}_{[t_0, \infty)}$  é só e unicamente excitado pela entrada  $\mathbf{u}_{[t_0, \infty)}$ , a eq.(2-2) pode ser reduzida para

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{g}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2-3)$$

Se as características do sistema não mudam com o tempo, se diz que o sistema é invariante no tempo, fixo ou estacionário. Então, a função  $\mathbf{g}(t, \tau)$  depende só da diferença entre  $t$  e  $\tau$ ,  $\mathbf{g}(t, \tau) = \mathbf{g}(t - \tau, 0) = \mathbf{g}(t - \tau) \forall \{t, \tau\}$ , e a eq.(2-3) pode ser reduzida para a equação

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{g}(\tau) \mathbf{u}(t - \tau) d\tau \quad (2-4)$$

a qual representa a relação entrada-saída de um sistema linear, causal, invariante no tempo, relaxado no tempo  $t_0 = 0$ .

### 2.2.1

#### Função de transferência

Usando a transformada de Laplace, é possível transformar a relação entrada-saída no domínio do tempo em uma equação algébrica no domínio

da frequência [24], [12],

$$\mathbf{Y}(s) \triangleq \mathcal{L}[\mathbf{y}(t)] \triangleq \int_0^{\infty} \mathbf{y}(t)e^{-st} dt,$$

$$\mathbf{Y}(s) \triangleq \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \quad (2-5)$$

sendo,  $\mathbf{G}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{g}(t)e^{-st} dt$ , a transformada de Laplace da função de resposta ao impulso unitário, conhecida como a matriz função de transferência (FT) do sistema.

### 2.3

#### Representação de sistemas mecânicos em espaço de estados

As equações de movimento para um sistema mecânico linear elástico com amortecimento viscoso, invariante no tempo, com  $q$  graus de liberdade (g.d.l) pode ser expressado na forma matricial como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{E}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{f}(t) = \mathbf{B}_o\mathbf{u}(t) \quad (2-6)$$

sendo  $t$  o tempo contínuo,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{q \times 1}$  o vetor deslocamento, e os pontos superpostos indicam derivada com respeito ao tempo;  $\mathbf{f}(t)$  é a força, sendo  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  o vetor excitação e  $\mathbf{B}_o \in \mathbb{R}^{q \times r}$  é a matriz de distribuição de atuadores e descreve a influência do vetor força de excitação nos pontos de medição das entradas;  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  é a matriz positiva-definida de massa do sistema,  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  é a matriz positiva semi-definida de amortecimento e  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  é a matriz positiva semi-definida de rigidez. Na identificação experimental das características dinâmicas de estruturas, só podem ser observados alguns graus de liberdade, então, existe um sistema de medição com  $m$  sensores adequadamente distribuídos para a medição das respostas dinâmicas da estrutura. Se sensores de deslocamento, velocidade e aceleração são usados simultaneamente para medir as respostas dinâmicas em diferentes pontos da estrutura, então a equação das medições combinadas nas saídas do sistema estrutural pode ser escrito como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_d\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}_v\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}_a\ddot{\mathbf{w}}(t) \quad (2-7)$$

sendo,  $\mathbf{C}_d$ ,  $\mathbf{C}_v$ ,  $\mathbf{C}_a \in \mathbb{R}^{m \times q}$  as matrizes que descrevem a influência dos vetores de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, nos pontos de medição das saídas.

Definindo o vetor de estado na forma  $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{w}(t); \dot{\mathbf{w}}(t)\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , com  $n = 2q$ , as equações de movimento de segunda ordem do modelo físico definido na equação (2-6) pode ser transformado na seguinte equação de estado de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (2-8)$$

sendo,  $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz do sistema e,  $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{n \times r}$  a matriz de entradas, definidas como

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_o \end{bmatrix}. \quad (2-9)$$

Usando a mesma definição do vetor de estado, a equação de medição (2-7) pode ser transformada em

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (2-10)$$

sendo,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a matriz de influência na saída do vetor de estado  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  a matriz de transmissão direta, definidas como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_o. \quad (2-11)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  pode desaparecer da equação (2-10) quando não são usados acelerômetros para as medições nas saídas.

Assim, as equações (2-8) e (2-10) constituem o modelo em espaço de estados no tempo contínuo para um sistema mecânico linear, invariante no tempo, com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, na sigla em inglês). Por conveniência, costuma-se usar o conjunto de matrizes ( $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ) para referir-se ao modelo em espaço de estados em tempo contínuo.

### 2.3.1

#### Função de transferência

Tomando a transformada de Laplace das equações (2-8, 2-10) e supondo  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , obtemos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}_c \mathbf{X}(s) + \mathbf{B}_c \mathbf{U}(s) \quad (2-12)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s); \quad (2-13)$$

se as condições iniciais são zero,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , as equações (2-12, 2-13) podem ser reduzidas, obtendo a relação entrada-saída seguinte

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s). \quad (2-14)$$

Comparando esta equação com (2-5) obtém-se a F.T. do sistema mecânico linear invariante no tempo e sua representação dinâmica em espaço de estados  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , dada por

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}. \quad (2-15)$$

## 2.4

### Modelo em espaço de estados equivalente no tempo discreto

Na análise modal experimental [18], os sinais precisam ser convertidos de analógico em digital para o processamento em equipamentos como analisadores e computadores digitais; assim, as entradas ou excitações são geradas usando séries de sinais discretas e a aquisição de dados é feito em instantes de tempo discretos; em consequência um modelo da dinâmica do sistema no tempo discreto é necessário.

O modelo em espaço de estados no tempo discreto para um sistema estrutural MIMO, análogo ao modelo no tempo contínuo, com tempo de amostragem  $\Delta t$  é definido por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2-16)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2-17)$$

sendo o inteiro  $k$  o índice do tempo discreto no instante de tempo  $t = k\Delta t$ ,  $\mathbf{x}(k)$  é o vetor de estado no instante  $k$ ,  $\mathbf{u}(k)$  e  $\mathbf{y}(k)$  são o vetor força e o vetor de medição nas saídas para o tempo discreto  $k$ , respectivamente.  $\mathbf{A}$  é a matriz do sistema na equação para o estado discreto  $\mathbf{x}(k)$ , e  $\mathbf{B}$  é a matriz discreta de entradas. A matriz de saída  $\mathbf{C}$  e a matriz de transmissão direta  $\mathbf{D}$  não são modificadas na conversão do tempo contínuo para o tempo discreto.

No caso do sistema discreto resultar da discretização de um sistema contínuo, a quádrupla de matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  no tempo discreto pode ser obtida da quádrupla  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  no tempo contínuo [22], usando as

seguintes equações

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \\ \mathbf{B} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau'} d\tau' \mathbf{B}_c; \quad \tau' = (k+1)\Delta t - \tau \\ \text{se } \mathbf{A}_c &\text{ é assintoticamente estável:} \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c. \end{aligned} \quad (2-18)$$

As dimensões das matrizes no sistema discreto são as mesmas que as do sistema contínuo.

### 2.4.1

#### Função de transferência

Seja  $\mathbf{X}(z)$ , a transformada- $z$  do vetor de estado no tempo discreto,  $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ , definido como

$$\mathbf{X}(z) \triangleq \mathcal{Z}[\mathbf{x}(k)] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k)z^{-k}$$

então, similar que no tempo contínuo, podem-se obter a relação entrada-saída no domínio da frequência e a matriz função de transferência  $\mathbf{G}(z)$  no tempo discreto, sendo

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(z) \quad (2-19)$$

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (2-20)$$

## 2.5

### Parâmetros de Markov e sua relação com a dinâmica do sistema

A solução das equações de estado de um sistema linear invariante no tempo, dadas por (2-8, 2-10), para condições iniciais  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  diferentes de zero, é

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)}\mathbf{B}_c\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2-21)$$

e a equação de medição (2-10), pode ser escrita como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c\tau}\mathbf{B}_c\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2-22)$$

supondo  $t_0 = 0$ , e  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , temos que

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t [\mathbf{C}e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}\delta(t-\tau)]\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2-23)$$

sendo  $\delta(t)$  a função delta de Dirac. Comparando a eq.(2-23) (com delta de Dirac aplicado no  $\tau = 0$ ) com a eq.(2-4) achamos a relação entre a função de resposta ao impulso (FRI),  $\mathbf{g}(t)$  e a equação dinâmica do sistema em espaço de estados dada por

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}_c t}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}\delta(t) \quad (2-24)$$

A FRI caracteriza a dinâmica de um sistema no domínio do tempo e é independente das forças de excitação e das respostas para um sistema mecânico ou estrutural elástico, linear invariante no tempo.

Sendo que,

$$e^{\mathbf{A}_c t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} \mathbf{A}_c^{k-1},$$

a FRI pode se expressar como expansão por séries de potência da seguinte maneira

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{g}_k}{(k-1)!} t^{k-1} + \mathbf{g}_0 \delta(t) \quad (2-25)$$

sendo  $\mathbf{g}_k \in \mathbb{R}^{m \times r}$ , o  $k$ -ésimo coeficiente matricial da expansão por séries de potência da FRI, definido como

$$\mathbf{g}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_c^{k-1}\mathbf{B}_c, & k \geq 1. \end{cases} \quad (2-26)$$

A coleção dos coeficientes matriciais,  $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots\}$ , é conhecida como a sequência de parâmetros de Markov no tempo contínuo, os quais são matrizes com  $m$  linhas (igual ao número de sensores) e  $r$  colunas (igual ao número de atuadores). Os parâmetros de Markov dependem das características do sistema estrutural, ou seja, a massa, o amortecimento e a rigidez.

## 2.5.1

### Parâmetros de Markov no tempo discreto

Num teste experimental para identificação, as excitações são séries de sinais discretas conhecidas como funções pulso, como resultado as respostas

medidas que gera o sistema são amostras de funções resposta ao pulso (*sampled pulse response*).

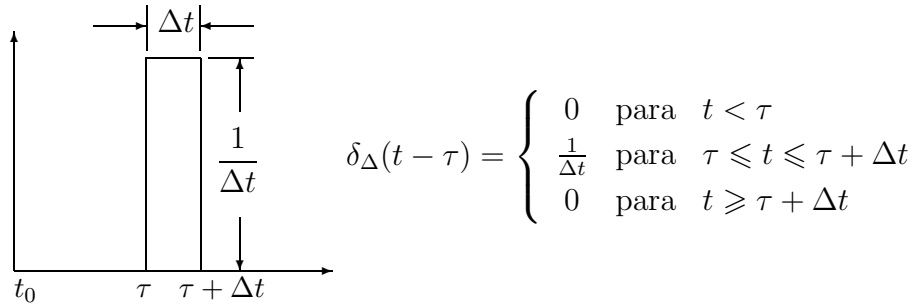


Figura 2.2: Função pulso  $\delta_{\Delta}(t - \tau)$ .

Seja  $\delta_{\Delta}(t - \tau)$ , a função pulso definida na fig.(2.2). Considerando uma função pulso constante de magnitude unitária e duração  $\Delta t$  como força de excitação aplicada no tempo inicial  $t_0 = 0$ , o vetor de entrada  $\mathbf{u}(t)$  conterá os elementos  $u_i(t) = \Delta t \delta_{\Delta}(t - 0)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Substituindo  $\mathbf{u}(t)$  na eq.(2-22) para cada intervalo de tempo contínuo  $\Delta t$ , obtém-se a seqüência de funções resposta ao pulso seguinte

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\delta_{\Delta}}(0) &= \mathbf{D}, \\ \mathbf{Y}_{\delta_{\Delta}}(t) &= \mathbf{C} \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c d\tau \quad (\text{para } t \geq \Delta t) \\ &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}_c(t-\Delta t)} \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau'} \mathbf{B}_c d\tau' \quad (\tau' = \Delta t - \tau) \\ &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}_c(t-\Delta t)} \mathbf{B} \quad (\text{usando eq.(2-18)}) \end{aligned}$$

se  $\mathbf{Y}_{\delta_{\Delta}}(t)$  é medido, também com período de amostragem  $\Delta t$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_{\delta_{\Delta}}(k\Delta t) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}_c(k\Delta t - \Delta t)} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}_c \Delta t(k-1)} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \quad (\text{usando eq.(2-18)}) \end{aligned}$$

esta seqüência de amostras de funções resposta ao pulso são os chamados parâmetros de Markov no tempo discreto, em resumo

$$\mathbf{Y}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & k = 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}, & k \geq 1. \end{cases} \quad (2-27)$$

## 2.6

### Parâmetros modais e sua relação com a FRI

Parâmetros modais (modos, freqüências naturais e fatores de amortecimento modais) são as características naturais de um sistema mecânico,



ou estrutura, que descrevem suas propriedades dinâmicas. A teoria e matemática da análise modal é examinado por muitos autores [18, 33, 14, 6], e com o objetivo da identificação de parâmetros modais a partir de medições experimentais a relação entre a função resposta ao impulso e os parâmetros modais foi estabelecida [22, 44, 9, 5]. A FRI  $\mathbf{g}(t)$  do sistema mecânico vibratório linear invariante no tempo cuja dinâmica é descrita pela equação de movimento (2-6) pode expressar-se em função dos parâmetros modais do sistema como

$$\mathbf{g}(t) = \Phi e^{\Lambda_c t} \Gamma^T \quad (2-28)$$

e a matriz FT é

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{g}(t)] = \Phi [s\mathbf{I} - \Lambda_c]^{-1} \Gamma^T \quad (2-29)$$

sendo  $\Phi$  a matriz modal definida como

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_q, \phi_1^*, \dots, \phi_q^*]_{q \times 2q}$$

no qual,  $\phi_i$ , de dimensão  $(q \times 1)$ , é o  $i$ -ésimo vetor modal do sistema (\* indica complexo conjugado). A matriz diagonal  $(2q \times 2q)$ ,

$$\Lambda_c = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \lambda_1^*, \dots, \lambda_q^*),$$

contêm os  $\lambda_i$  (a  $i$ -ésima raiz característica do sistema) os quais contêm a informação das frequências naturais  $\omega_i$ , e fatores de amortecimento modais  $\zeta_i$  do sistema, sendo

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -\alpha_i + j\beta_i = -\zeta_i \omega_i + j\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \\ \lambda_i^* &= -\alpha_i - j\beta_i = -\zeta_i \omega_i - j\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \end{aligned} \quad (2-30)$$

A matriz

$$\Gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q, \gamma_1^*, \dots, \gamma_q^*]_{q \times 2q}$$

contêm os vetores de participação modal do sistema,  $\gamma_i$  ( $q \times 1$ ), o qual é um parâmetro modal num sentido global da estrutura incluindo os sensores e atuadores, pois ele indica quanto uma específica entrada excita um específico modo.

A eq.(2-28) também pode-se escrever como

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^q (\phi_i \gamma_i^T e^{\lambda_i t} + \phi_i^* \gamma_i^{*T} e^{\lambda_i^* t}) = \sum_{i=1}^q (\mathbf{R}_i e^{\lambda_i t} + \mathbf{R}_i^* e^{\lambda_i^* t}) \quad (2-31)$$

sendo  $\mathbf{R}_i$  a  $i$ -ésima matriz de resíduos.

Na prática os sinais dinâmicos são discretos e as medições de todas as respostas e excitações é difícil e demorada. Como o número de modos do sistema real é ilimitado e só é possível representar um número finito deles, as equações acima descritas terão suas dimensões reduzidas. Se só  $m$  respostas e  $r$  excitações estão disponíveis, e consideramos só  $\bar{q}$  modos, as equações equivalentes das equações (2-28, 2-31) no tempo discreto são

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}(k)]_{m \times r} &= [\mathbf{g}(k\Delta t)]_{m \times r} = [\Phi]_{m \times 2\bar{q}} [e^{\Lambda_c k \Delta t}]_{2\bar{q} \times 2\bar{q}} [\Gamma^T]_{2\bar{q} \times r} \\ &\Rightarrow [\mathbf{g}(k)]_{m \times r} = [\Phi]_{m \times 2\bar{q}} [\Lambda^k]_{2\bar{q} \times 2\bar{q}} [\Gamma^T]_{2\bar{q} \times r} \end{aligned} \quad (2-32)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}(k)]_{m \times r} &= \sum_{i=1}^{\bar{q}} \left( [\phi_i]_{m \times 1} [\gamma_i^T]_{1 \times r} e^{\lambda_i k \Delta t} + [\phi_i^*]_{m \times 1} [\gamma_i^{*T}]_{1 \times r} e^{\lambda_i^* k \Delta t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\bar{q}} \left( [\mathbf{R}_i]_{m \times r} z_i^k + [\mathbf{R}_i^*]_{m \times r} z_i^{*k} \right) \end{aligned} \quad (2-33)$$

sendo  $\Delta t$  o intervalo de amostragem,  $z_i = e^{\lambda_i \Delta t}$ , e

$$\Lambda = \text{diag} (z_1, \dots, z_{\bar{q}}, z_1^*, \dots, z_{\bar{q}}^*) = e^{\Lambda_c \Delta t}.$$

### 2.6.1

#### Modelo em espaço de estados nas coordenadas modais

Considerando o modelo em espaço de estados no tempo discreto, com  $r$  entradas e  $m$  saídas, descrito nas equações (2-16, 2-17); a matriz do sistema  $\mathbf{A}_{n \times n}$  ( $n = 2\bar{q}$ ) pode ser decomposta como

$$\mathbf{A} = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (2-34)$$

sendo  $\Psi$  a matriz de autovetores de  $\mathbf{A}$ . Fazendo a transformação linear

$$\mathbf{x}(k) = \Psi \bar{\mathbf{x}}$$

e substituindo  $\mathbf{x}(k)$  nas equações (2-16, 2-17) obtém-se o modelo discreto em espaço de estados nas coordenadas modais seguinte

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \Lambda \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) \quad (2-35)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (2-36)$$

sendo

$$\Lambda = \Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi, \quad \mathbf{B}_m = \Psi^{-1} \mathbf{B} \quad e \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{C} \Psi. \quad (2-37)$$

## 2.7

### Realização de sistemas lineares invariantes no tempo

Seja uma matriz função de transferência  $\mathbf{G}(s)$  prescrita, a equação dinâmica linear invariante no tempo que reproduz  $\mathbf{G}(s)$  é chamada de uma realização de  $\mathbf{G}(s)$ . Para cada  $\mathbf{G}(s)$  realizável, existe um número ilimitado de realizações. Por exemplo; seja  $\mathbf{G}(s)$  uma matriz racional própria de dimensão  $(m \times r)$ , dado  $\mathbf{G}(s) = \bar{\mathbf{G}}(s) + \mathbf{G}(\infty)$ , sendo  $\bar{\mathbf{G}}(s)$  estritamente própria definida como

$$\bar{\mathbf{G}}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{d}(s)} = \frac{\mathbf{N}_1 s^{\alpha-1} + \mathbf{N}_2 s^{\alpha-2} + \dots + \mathbf{N}_\alpha}{s^\alpha + d_1 s^{\alpha-1} + d_2 s^{\alpha-2} + \dots + d_\alpha} \quad (2-38)$$

sendo o polinômio mônico  $\mathbf{d}(s)$ , o denominador comum mínimo de  $\bar{\mathbf{G}}(s)$ , e sendo  $\mathbf{N}_i$  matrizes constantes  $(m \times r)$ ; duas importantes realizações de  $\mathbf{G}(s)$  em espaço de estados são a realização na forma canônica controlável e a realização na forma canônica observável.

#### 2.7.1

##### Controlabilidade

**Teorema 2.1** *A equação dinâmica linear invariante no tempo de dimensão  $n$ ,  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , definida nas equações (2-8, 2-10), é controlável se e só se qualquer das seguintes condições equivalentes é satisfeita:*

1. *Todas as filas de  $e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_c$  (e conseqüentemente de  $e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_c$ ) são linearmente independentes em  $[0, \infty) \in \mathbb{C}$ , o campo dos números complexos.*
2. *Todas as filas de  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$ .*
3. *O gramiano de controlabilidade,  $\mathbf{W}_{ct} \triangleq \int_0^t e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c \mathbf{B}_c^h e^{\mathbf{A}_c^h \tau} d\tau$ , é não singular para qualquer  $t > 0$ . ( $h$  indica o complexo conjugado transposto).*
4. *A matriz de controlabilidade, de dimensão  $(n \times nr)$*

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c^2 \mathbf{B}_c & \dots & \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

tem posto  $n$ .

5. *Teste de Popov-Belevitch-Hautus:* Para cada autovalor  $\lambda$  de  $\mathbf{A}_c$  (e conseqüentemente para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), a matriz complexa de dimensão  $n \times (n+r)$ ,  $[(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) \ \mathbf{B}_c]$  tem posto  $n$ , ou equivalentemente,  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)$  e  $\mathbf{B}_c$  são coprima à esquerda.

Dados  $\mathbf{I}_r$  e  $\mathbf{0}_r$ , a matriz identidade e a matriz zero de dimensões  $(r \times r)$  respectivamente, a realização de  $\mathbf{G}(s)$  na forma canônica controlável é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_r & \cdots & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \cdots & \mathbf{0}_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \cdots & \mathbf{I}_r \\ -d_\alpha \mathbf{I}_r & -d_{\alpha-1} \mathbf{I}_r & -d_{\alpha-2} \mathbf{I}_r & \cdots & -d_1 \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r \\ \vdots \\ \mathbf{0}_r \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2-40)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{N}_{\alpha-1} & \mathbf{N}_{\alpha-2} & \cdots & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\infty) \mathbf{u}(t)$$

Usando o teorema (2.1) é fácil comprovar que a eq.(2-40) é sempre controlável, mas em geral é não observável. Se  $\mathbf{N}(s)$  e  $\mathbf{d}(s)$  são coprima, a realização no (2-40) é também observável.

### 2.7.2 Observabilidade

**Teorema 2.2** *A equação dinâmica linear invariante no tempo de dimensão  $n$ ,  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , definida nas equações (2-8, 2-10), é observável se e só se qualquer das seguintes condições equivalentes é satisfeita:*

1. *Todas as colunas de  $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}_c t}$  são linearmente independentes em  $[0, \infty) \in \mathbb{C}$ , o campo dos números complexos.*
2. *Todas as colunas de  $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$ .*
3. *O gramiano de observabilidade,  $\mathbf{W}_{ot} \triangleq \int_0^t e^{\mathbf{A}_c^h \tau} \mathbf{C}^h \mathbf{C} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau$ , é não singular para qualquer  $t > 0$ . ( $h$  indica o complexo conjugado transposto).*

4. A matriz de observabilidade, de dimensão  $(nm \times n)$

$$\mathcal{P}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}_c \\ \mathbf{CA}_c^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}_c^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

tem posto  $n$ .

5. Teste de Popov-Belevitch-Hautus: Para cada autovalor  $\lambda$  de  $\mathbf{A}_c$  (e conseqüentemente para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), a matriz complexa de dimensão  $(n+m) \times n$ ,

$$\begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_c \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

tem posto  $n$ , ou equivalentemente,  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)$  e  $\mathbf{C}$  são coprima à direita.

Dados  $\mathbf{I}_m$  e  $\mathbf{0}_m$ , a matriz identidade e a matriz zero de dimensões  $(m \times m)$  respectivamente, a realização de  $\mathbf{G}(s)$  na forma canônica observável é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -d_\alpha \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -d_{\alpha-1} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -d_{\alpha-2} \mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{I}_m & -d_1 \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\alpha \\ \mathbf{N}_{\alpha-1} \\ \mathbf{N}_{\alpha-2} \\ \vdots \\ \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2-42)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\infty) \mathbf{u}(t)$$

Usando o teorema (2.2) é fácil comprovar que a eq.(2-42) é sempre observável, mas em geral é não controlável. Se  $\mathbf{N}(s)$  e  $\mathbf{d}(s)$  são coprima, a realização no (2-42) é também controlável.

### 2.7.3 Realização mínima

Realização mínima, ou realização irredutível, significa uma equação dinâmica linear invariante no tempo (por exemplo o modelo em espaço de estados) com a menor dimensão possível, dentre todas as realizações que tenham as mesmas relações entrada-saída. Todas as realizações mínimas têm

o mesmo conjunto de autovalores, que contêm a informação dos parâmetros modais do sistema.

Usando transformações lineares, o sistema em espaço de estados, pode ser transformado na seguinte forma canônica

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)_{co} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t)_{co} \\ \bar{\mathbf{x}}(t)_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}(t)_{\bar{c}o} \\ \bar{\mathbf{x}}(t)_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{co} \\ \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2-43)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

nas equações, o sub-índice  $co$  representa a parte controlável e observável,  $c\bar{o}$  representa a parte controlável mas não-observável,  $\bar{c}o$  a parte não-controlável mas observável, e  $\bar{c}\bar{o}$  a parte não-controlável e não-observável. Essa equação pode ser resumida no esquema da Figura (2.3).

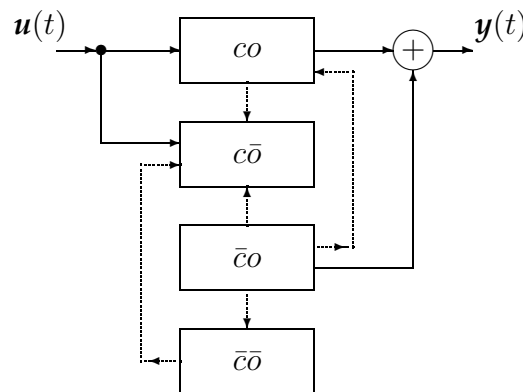


Figura 2.3: Decomposição canônica de uma equação dinâmica linear.

Observa-se que a função de transferência só dependerá da parte  $co$  (controlável e observável), então

$$\mathbf{G}(s) = \bar{\mathbf{C}}_{co} [s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{co}]^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{co}. \quad (2-44)$$

Assim, uma realização de  $\mathbf{G}(s)$  com a menor dimensão possível é uma equação dinâmica controlável e observável [12, 24].

## 2.8

### Características do sistema identificado em espaço de estados

Em geral, as matrizes da quádrupla identificada ( $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}$ ) no tempo discreto, não são as mesmas que do modelo físico em espaço de

estados  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ; elas relacionam-se mediante uma transformação de similaridade  $\mathbf{T}$ . De fato, as variáveis de estado podem ser transformadas num novo conjunto de variáveis de estado usando a transformação de coordenadas

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (2-45)$$

sendo  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  qualquer matriz não singular. Substituindo a eq.(2-45) nas equações (2-16) e (2-17), obtém-se a realização similar em espaço de estados

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \quad (2-46)$$

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (2-47)$$

sendo que

$$(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}) = (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{D}). \quad (2-48)$$

A quádrupla de matrizes identificadas  $(\hat{\mathbf{A}}_c, \hat{\mathbf{B}}_c, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}})$  no tempo contínuo pode ser estimada a partir da quádrupla de matrizes identificadas  $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}})$  no tempo discreto usando a computação inversa das equações (2-18), ou seja

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_c &< \frac{\ln(\hat{\mathbf{A}})}{\Delta t} \\ \hat{\mathbf{B}}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I})^{-1}\hat{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (2-49)$$

Se o sistema em espaço de estados é identificado ao partir de dados medidos usando um método suficientemente exato e efetivo, a quádrupla identificada é equivalente ao modelo físico do ponto de vista de ter os mesmos parâmetros de Markov.