

Bibliografia

- [1] ABDELGHANI, M.; VERHAEGEN, M.; OVERSCHEE, P. V. ; MOOR, B. D.. **Comparison study of subspace identification methods applied to flexible structures.** *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(5):679–692, 1998.
- [2] AGUIRRE, L. A.. **Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais.** Editora UMFG, Minas Gerais, Brasil, 2000.
- [3] ALIAGA, J. W.. **Identificação de estruturas mecânicas e aplicações.** Master's thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, RJ, Brazil, 2000.
- [4] ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L.. **Modal parameter estimation.** Experimental modal analysis and dynamic component synthesis, USAF technical report, Contract No.F33615-83-C-3218, AFWAL-TR-87-3069, 3, 1987.
- [5] ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L.. **A unified matrix polynomial approach to modal identification.** *Journal of Sound and Vibration*, 211(3):301–322, 1998.
- [6] AVITABILE, P.. **Experimental modal analysis – a simple non-mathematical presentation.** *Sound & Vibration Magazine*, 2001.
- [7] BALMÈS, E.. **Structural Dynamics Toolbox - for use with MATLAB.** Scientific Software Group, Sèvres, France, 1995.
- [8] BAZÁN, F. S. V.. **Desenvolvimento de técnicas de identificação paramétrica em sistemas mecânicos no domínio do tempo.** PhD thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, FEM/UNICAMP, Campinas, SP, Brazil, 1993.
- [9] BAZÁN, F. S. V.; BAVASTRI, C. A.. **An optimised pseudo-inverse algorithm (opia) for multi-input multi-output modal para-**

- meter identification.** *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4):365–380, 1996.
- [10] BROWN, D. L.; ALLEMANG, R. J.; ZIMMERMAN, R. D. ; MERGEAY, M.. **Parameter estimation techniques for modal analysis.** SAE Paper No.790221, SAE Transactions, 1979.
- [11] CHÁVEZ, A. E.. **Concepção de uma bancada para análise de fenômenos rotativos.** Master's thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, RJ, Brazil, 1999.
- [12] CHEN, C.-T.. **Linear System Theory and Design.** CBS College Publishing, N.Y. USA, 1984.
- [13] DIMARAGONAS, A. D.. **Vibration Engineering.** West Publishing Co., USA, 1976.
- [14] EWINS, D. J.. **Modal Testing: Theory and Practice.** Research Studies Press Ltd., Taunton, Somerset, England, 1984.
- [15] HAYKIN, S.. **Adaptive Filter Theory.** Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N. J., 1996.
- [16] HAYES, M. H.. **Statistical Digital Signal Processing and Modeling.** Jhon Wiley & Sons, Inc., N. J., USA, 1996.
- [17] IBRAHIM, S. R.; MIKULCIK, E. C.. **A method for the direct identification of vibration parameters from the free response.** *The Shock and Vibration Bulletin*, 47, 1977.
- [18] INMAN, D. J.. **Engineering Vibration.** Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J. USA, 1996.
- [19] JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S.. **An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction.** *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 8:620–627, 1985.
- [20] JUANG, J.-N.; COOPER, J. E. ; WRIGHT, J. R.. **An eigensystem realization algorithm using data correlations (era/dc) for modal parameter identification.** *Control Theory and Advanced Technology*, 4:5–14, 1988.
- [21] JUANG, J.-N.; PHAN, M.; HORTA, L. ; LONGMAN, R. W.. **Identification of observer/kalman filter markov parameters: Theory and experiments.** *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 16, 1993.

- [22] JUANG, J.-N.. **Applied System Identification**. PTR Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. USA, 1994.
- [23] JUANG, J.-N.. **Unification of several system realization algorithms**. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 20, 1997.
- [24] KAILATH, T.. **Linear Systems**. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. USA, 1980.
- [25] KING, A. M.; DESAI, U. B. ; SKELETON, R. E.. **A generalized approach to q-markov covariance equivalent realizations for discrete systems**. *Automatica*, 24:507–515, 1988.
- [26] KO, W. J.; HUNG, C. F.. **Extraction of structural system matrices from an identified state-space system using the combined measurements of dva**. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5):955–970, 2002.
- [27] LEW, J.-S.; JUANG, J.-N. ; LONGMAN, R. W.. **Comparison of several system identification methods for flexible structures**. *Journal of Sound and Vibration*, 167(3):461–480, 1993.
- [28] LIU, K.. **Identification of multi-input and multi-output systems by observability range space extraction**. In: 31ST IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, p. 915–920, Tucson, AZ, 1992.
- [29] LIU, K.; MILLER, D. W.. **Time domain state space identification of structural systems**. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 117:608–618, 1995.
- [30] LIU, K.; SUN, X.. **System identification and model reduction for a single-link flexible manipulator**. *Journal of Sound and Vibration*, 242(5):867–891, 2001.
- [31] LJUNG, L.. **System Identification: Theory for the User**. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. USA, 1980.
- [32] LONGMAN, R. W.; JUANG, J.-N.. **A recursive form of the eigensystem realization algorithm**. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 12:647–652, 1988.
- [33] MEIROVITCH, L.. **Elements of Vibration Analysis**. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokio, Japan, 1975.

- [34] PETSOUNIS, K. A.; FASSOIS, S. D.. **Parametric time-domain methods for the identification of vibrating structures – a critical comparison and assessment**. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(6):1031–1060, 2001.
- [35] PHAN, M.; HORTA, L. G.; JUANG, J.-N. ; LONGMAN, R. W.. **Linear system identification via an asymptotically stable observer**. NASA Technical Paper 3164, 1992.
- [36] SCHOUKENS, J.; PINTELON, R.. **Identification of Linear Systems**. Pergamon Press plc, Oxford, England, 1991.
- [37] SUN, Y. Q.; DHANASEKAR, M.. **A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system**. *International Journal of Solids and Structures*, 39:1337–1359, 2002.
- [38] OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. D.. **N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems**. *Automatica*, 30:75–93, 1994.
- [39] VENERO, G.; SAMPAIO, R.. **Estudo da robustez na presença de ruído do eigensystem realization algorithm (era) para identificação de parâmetros modais**. XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), Nova Friburgo, Rio de Janeiro, 2002.
- [40] VENERO, G.; SAMPAIO, R.. **Behavior of era and its variants in the presence of noise as function of the damping and flexibility of a structure**. 17th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2003, São Paulo, Brasil, 2003.
- [41] VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P.. **Subspace model identification: Part 1. the output-error state-space model identification class of algorithms**. *International Journal of Control*, 56:1187–1210, 1992.
- [42] VIBERG, M.. **Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems**. *Automatica*, 31(12):1835–1851, 1995.
- [43] VOLD, H.; KUNDRAT, J.; ROCKLIN, T. ; RUSSELL, R.. **A multi-input modal estimation algorithm for mini computers**. *SAE Transactions*, 91(1):815–821, 1982.
- [44] YANG, Q. J.; ZHANG, P. Q.; LI, C. Q. ; WU, X. P.. **A system theory approach to multi-input multi-output modal parameters**

identification methods. Mechanical Systems and Signal Processing, 8(2):159–174, 1994.

- [45] ZHANG, L.-M.; YAO, Y.-X. ; LU, M.-F.. **An improved time domain polyreference method for modal identification.** Mechanical Systems and Signal Processing, 1(4), 1987.
- [46] ZHANG, L.-M.; BRINCKER, R. ; ANDERSEN, P.. **An unified approach for two-stage time domain modal identification.** In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL DYNAMICS MODELLING, Funchal, Madeira, Portugal, 2002.

A**Matrizes do sistema em espaço de estados da estrutura
Mini-Mast**

$$\mathbf{A}_c = \begin{array}{c} \text{Colunas } 1 - 6 \rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc} -0.0892 & -0.0001 & -5.0354 & 0.0000 & 0.0009 & -0.0015 \\ 0.0001 & -0.0891 & -0.0001 & 5.0316 & 0.0131 & 0.0153 \\ 5.0354 & 0.0002 & -0.0921 & -0.0001 & -0.0014 & 0.0012 \\ 0.0000 & -5.0316 & 0.0001 & -0.0920 & -0.0154 & -0.0141 \\ -0.0032 & -0.0021 & 0.0035 & 0.0074 & -0.3251 & -27.4201 \\ 0.0040 & -0.0076 & -0.0040 & 0.0027 & 27.4201 & -0.3330 \\ 0.0247 & -0.0954 & -0.0269 & -0.1040 & 0.0015 & 0.0028 \\ -0.0958 & -0.0251 & 0.1042 & -0.0275 & 0.0038 & -0.0132 \\ 0.0266 & -0.1015 & -0.0262 & -0.0997 & -0.0033 & -0.0028 \\ -0.1020 & -0.0263 & 0.1005 & -0.0257 & 0.0149 & -0.0027 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Colunas } 7 - 10 \rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccc} 0.0055 & -0.0200 & -0.0099 & 0.0374 \\ -0.0211 & -0.0061 & 0.0386 & 0.0108 \\ 0.0101 & -0.0377 & -0.0055 & 0.0205 \\ 0.0388 & 0.0108 & -0.0218 & -0.0065 \\ -0.0094 & 0.0177 & 0.0111 & -0.0252 \\ -0.0099 & 0.0224 & 0.0112 & -0.0212 \\ -0.3762 & 0.5972 & 38.3637 & -0.1010 \\ -0.5956 & -0.3790 & -0.0466 & 38.6603 \\ -38.3637 & 0.0464 & -0.3912 & -0.5969 \\ 0.1011 & -38.6603 & 0.5986 & -0.3943 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0.00235 & -0.00200 \\ -0.00201 & -0.00236 \\ -0.00235 & 0.00200 \\ -0.00201 & -0.00236 \\ -0.00011 & -0.00025 \\ 0.00011 & 0.00025 \\ 0.00167 & 0.00095 \\ -0.00091 & 0.00155 \\ 0.00163 & 0.00092 \\ -0.00089 & 0.00151 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \text{Colunas } 1 - 6 \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 0.01119 & 0.00402 & 0.01122 & -0.00402 & -0.00917 & -0.00918 \\ -0.00911 & 0.00762 & -0.00914 & -0.00764 & -0.00931 & -0.00933 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Colunas } 7 - 10 \rightarrow \\ \begin{bmatrix} -0.00043 & -0.00245 & 0.00047 & 0.00239 \\ -0.00243 & 0.00196 & 0.00242 & -0.00199 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B

Equações de movimento do modelo de um quarto de suspensão de vagão do trem

Na Fig. B.1 mostrasse o modelo simplificado do sistema mecânico de um quarto da suspensão de um vagão do trem. A dinâmica do sistema será deduzida através das equações de Lagrange, as quais garantem que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{w}}_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}_i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{w}}_i} = \mathbf{f}_i; \quad \mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{V} \quad (\text{B-1})$$

sendo \mathbf{T} e \mathbf{V} a energia cinética e energia potencial do sistema respectivamente, \mathbf{D} é a energia dissipada nos amortecimentos e \mathbf{f}_i são as forças externas generalizadas associadas com os graus de liberdade \mathbf{w}_i . O modelo em estudo tem 3 g.d.l. contidos no vetor deslocamento $\mathbf{w}^T = [w_v \ w_p \ w_r]$ e o vetor de forças externas associadas é $\mathbf{f}^T = [f_v \ f_p \ f_r]$.

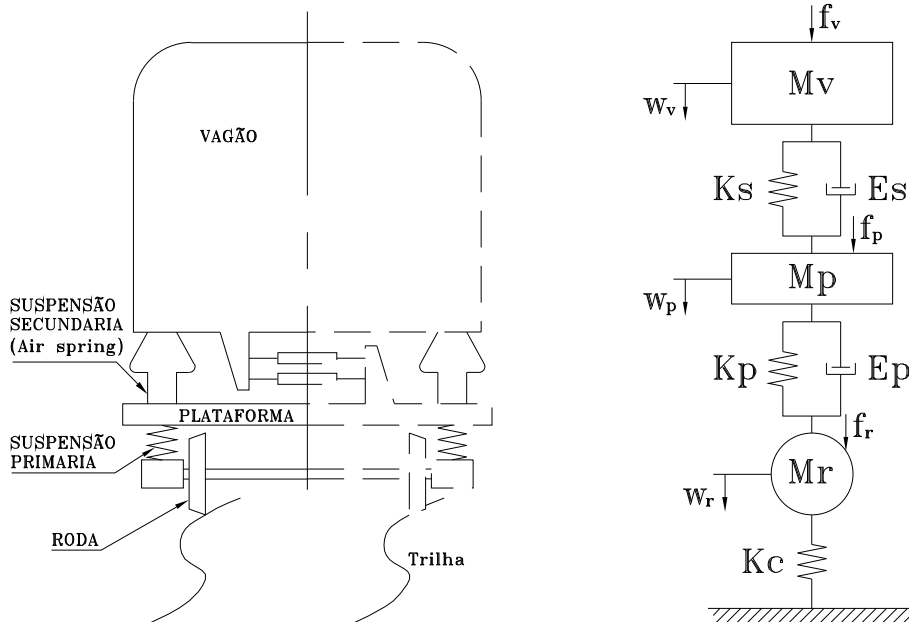


Figura B.1: Modelo de um quarto da suspensão de um vagão do trem.

Energia cinética do sistema:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}M_v\dot{w}_v^2 + \frac{1}{2}M_p\dot{w}_p^2 + \frac{1}{2}M_r\dot{w}_r^2 \quad (\text{B-2})$$

Energia potencial do sistema:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}K_s(w_v - w_p)^2 + \frac{1}{2}K_p(w_p - w_r)^2 + \frac{1}{2}K_cw_r^2 \quad (\text{B-3})$$

Energia dissipada nos amortecedores:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}E_s(\dot{w}_v - \dot{w}_p)^2 + \frac{1}{2}E_p(\dot{w}_p - \dot{w}_r)^2 \quad (\text{B-4})$$

Usando a equação de Lagrange para o g.d.l. w_v :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{w}_v} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial w_v} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{w}_v} = f_v$$

$$\Rightarrow M_v\ddot{w}_v + K_s(w_v - w_p) + E_s(\dot{w}_v - \dot{w}_p) = f_v \quad (\text{B-5})$$

analogamente para o g.d.l. w_p :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{w}_p} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial w_p} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{w}_p} = f_p$$

\Rightarrow

$$M_p\ddot{w}_p - K_s(w_v - w_p) + K_p(w_p - w_r) - E_s(\dot{w}_v - \dot{w}_p) + E_p(\dot{w}_p - \dot{w}_r) = f_p \quad (\text{B-6})$$

e para o g.d.l. w_r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{w}_r} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial w_r} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{w}_r} = f_r$$

$$\Rightarrow M_r\ddot{w}_r - K_p(w_p - w_r) + K_cw_r - E_p(\dot{w}_p - \dot{w}_r) = f_r \quad (\text{B-7})$$

Então, na forma matricial, a dinâmica do sistema é:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_v & 0 & 0 \\ 0 & M_p & 0 \\ 0 & 0 & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_v \\ \ddot{w}_p \\ \ddot{w}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_s & -E_s & 0 \\ -E_s & (E_s + E_p) & -E_p \\ 0 & -E_p & E_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_v \\ \dot{w}_p \\ \dot{w}_r \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} K_s & -K_s & 0 \\ -K_s & (K_s + K_p) & -K_p \\ 0 & -K_p & (K_p + K_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_v \\ w_p \\ w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_v \\ f_p \\ f_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

C

Descrição teórica do modelo dinâmico do rotor estudado no capítulo 7

Um sistema rotativo apresenta uma quantidade de movimento angular em torno do seu eixo de rotação igual ao produto de sua inércia axial (ou polar) pela sua velocidade angular (Ω) de rotação em torno deste eixo. A Lei de Newton-Euler diz que a taxa de variação desta quantidade de movimento angular no tempo (\mathbf{H}_I), medida em um referencial inercial, é igual ao momento externo aplicado ao sistema (\mathbf{M}_I):

$$\mathbf{M}_I = \frac{d\mathbf{H}_I}{dt} \quad (\text{C-1})$$

Logo, se existe um momento aplicado e se a quantidade de movimento angular praticamente não varia em módulo (Ω elevado e quase constante), esta deve mudar de direção, começando a girar em um sentido dado por este momento aplicado. Isto significa que as coordenadas que descrevem as vibrações na presença de movimento rotativo, por exemplo as duas deflexões ortogonais do eixo, são acopladas, isto é, um momento aplicado em uma direção produz uma velocidade na outra e viceversa. As equações de movimento que incluem estes efeitos chamados giroscópicos devem necessariamente descrever o movimento em um espaço tridimensional.

Em sistemas mecânicos rotativos que apresentam efeitos giroscópicos, tanto os autovalores (frequências naturais e fatores de amortecimento) quanto os autovetores (modos de vibração) dependem da velocidade de rotação Ω .

Em geral, o comportamento vibratório em torno de um ponto de equilíbrio dos sistemas mecânicos rotativos é descrito pela seguinte equação diferencial linear:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + (\mathbf{E} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (\text{C-2})$$

sendo:

- \mathbf{M} , a matriz de massa ou inércia, simétrica, positiva-definida.
- \mathbf{E} , a matriz de amortecimento, simétrica, positiva-semidefinida.
- \mathbf{G} , a matriz giroscópica, anti-simétrica.

- \mathbf{K} , a matriz de rigidez, simétrica, positiva-definida.
- $\mathbf{w}(t)$, o vetor com os graus de liberdade que descrevem o movimento em um dado sistema referencial.
- $\mathbf{f}(t)$, o vetor com as excitações externas.

O sistema mecânico rotativo usado no experimento (Capítulo 7) é composto de um eixo elástico de massa desprezível montado sobre mancais rígidos (Ver Figuras C.1 e C.2). O eixo porta um disco rígido numa posição não simétrica com respeito dos mancais.

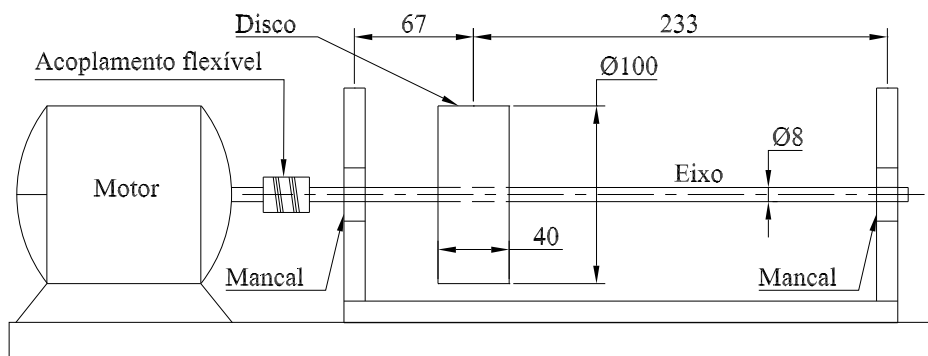


Figura C.1: Esquema da bancada de provas (todas as dimensões em milímetros).

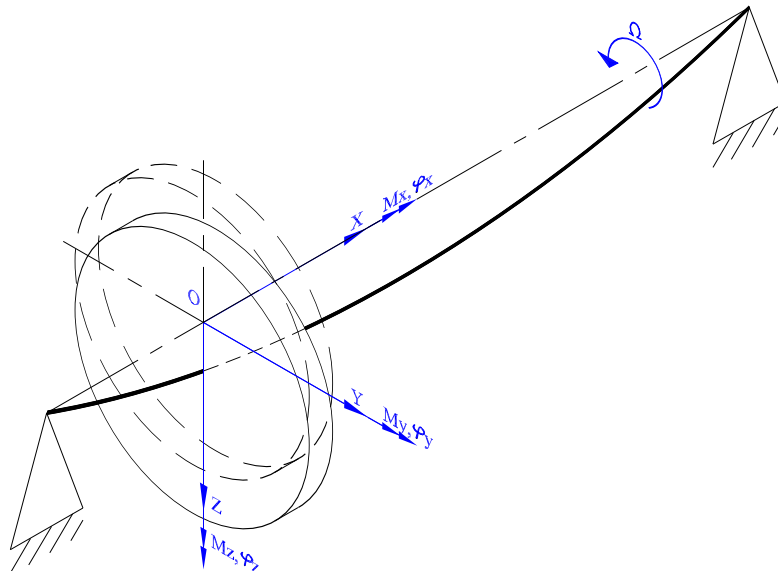


Figura C.2: Modelo do rotor e sistema de coordenadas.

Este sistema mecânico pode ser modelado através de um sistema com quatro graus de liberdade, a saber, os dois deslocamentos do centro de massa

do rotor e as duas rotações ortogonais à velocidade de rotação Ω ; assim, a equação (C-2) pode-se escrever como:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{\varphi}_z(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \ddot{\varphi}_y(t) \end{bmatrix} + \\
 & + \left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{11} & -E_{12} \\ 0 & 0 & -E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_a\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_a\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{\varphi}_z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{\varphi}_y(t) \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11} & -K_{12} \\ 0 & 0 & -K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \varphi_z(t) \\ z(t) \\ \varphi_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{C-3}$$

sendo:

- $y(t)$ e $z(t)$, os dois deslocamentos lineares do centro de massa do rotor.
- $\varphi_y(t)$ e $\varphi_z(t)$, as duas rotações do rotor em torno dos eixos Y e Z respectivamente.
- M , a massa total do rotor.
- I_t , o momento de inércia, transversal, de massa; e calcula-se como $I_t = \frac{MD^2}{8} + \frac{Me^2}{12}$, sendo e a espessura do disco e D o diâmetro do disco.
- I_a , o momento de inércia, axial ou polar, de massa; e calcula-se como $I_a = \frac{MD^2}{8}$.
- K_{11} , a rigidez linear nas direções Y e Z; e para um rotor simplesmente apoiado nos extremos do eixo calcula-se como $K_{11} = 3EI l \left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 b^3} \right)$, [13]. E é o módulo de elasticidade do material do eixo ($E = 235$ GPa), I é o momento de inércia transversal de área do eixo ($I = \frac{\pi d^4}{64}$), l é o comprimento do eixo e, a e b são as distâncias do disco com respeito dos mancais (ver Fig. C.1).
- $K_{12} = K_{21}$, as constantes de rigidez que acoplam os movimentos em Y e Z com as rotações em torno de Z e Y, respectivamente; calcula-se como $K_{12} = 3EI l \left(\frac{a-b}{a^2 b^2} \right)$.
- K_{22} , a rigidez angular das direções Y e Z; e calcula-se como $K_{22} = 3EI l \left(\frac{1}{ab} \right)$.

– E_{ij} , os elementos da matriz de amortecimento que serão identificados.

Para o rotor estudado, a matriz de massa, matriz giroscópica e matriz de rigidez valem:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.002 \end{bmatrix} \quad (\text{C-4})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00334\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00334\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C-5})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 482503 & -28966 & 0 & 0 \\ -28966 & 2724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 482503 & 28966 \\ 0 & 0 & 28966 & 2724 \end{bmatrix} \quad (\text{C-6})$$

A equação de estado para o sistema mecânico homogêneo com efeito giroscópico da equação (C-3) é:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \ddot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{G}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{C-7})$$

sendo $\mathbf{w}(t) = [\ddot{y}(t) \quad \ddot{\varphi}_z(t) \quad \ddot{z}(t) \quad \ddot{\varphi}_y(t)]^T$, $\mathbf{0}$ é a matriz nula e \mathbf{I} a matriz identidade.

A equação (C-7) pode ser reescrita em uma forma mais compacta como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (\text{C-8})$$

sendo $\dot{\mathbf{x}}(t)$ o vetor de estado e \mathbf{A} é a matriz de estado do sistema.