

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Germaín Carlos Venero Lozano

**Identificação paramétrica de sistemas
mecânicos usando algoritmos de subespaço**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Rubens Sampaio

Rio de Janeiro
Maio de 2003



Germaín Carlos Venero Lozano

**Identificação paramétrica de sistemas
mecânicos usando algoritmos de subespaço**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Rubens Sampaio, Ph.D.

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

Prof. Hans Ingo Weber, Dr.-Ing.

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

Departamento de Engenharia Mecânica – COPPE-UFRJ

Prof. Edson Luiz Cataldo Ferreira, D.Sc.

Departamento de Matemática Aplicada – UFF

Prof. Ney Augusto Dumont

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 30 de Maio de 2003

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Germaín Carlos Venero Lozano

Graduou-se em Engenharia Mecânica-Elétrica na Universidad Nacional de Ingeniería (Lima, Perú). Trabalhou junto com a empresa Inspectra S.A. em desenho mecânico na indústria do petróleo, especializou-se em análise de flexibilidade de tubulações e cálculo de recipientes ASME e tanques API. Participou do projeto de sistemas contra incêndio em estações de bombeamento de petróleo e gas, com Transredes S.A.–Bolivia. Apresentou trabalhos junto com o seu orientador durante o Mestrado no XXV–CNMAC e no 17th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2003).

Ficha Catalográfica

Venero Lozano, Germaín Carlos

Identificação paramétrica de sistemas mecânicos usando algoritmos de subespaço/ Germaín Carlos Venero Lozano; orientador: Rubens Sampaio. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2003.

v., 124 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Identificação de Sistemas. 3. Análise Modal Experimental. 4. Parâmetros Modais. 5. Estruturas Flexíveis. 6. Vibrações. 7. Algoritmos de Subespaço. 8. Sistemas Lineares. I. Sampaio, Rubens. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

Aos meus pais, irmãos e seres queridos, pelo amor, confiança e apoio.

Ao meu orientador Professor Rubens Sampaio pelo apoio, incentivo para a realização deste trabalho, exemplo de vocação para a pesquisa e amizade.

Aos meus amigos e colegas da PUC-Rio, quem me fizeram sentir menos saudade de minha pátria.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos professores e pessoal do departamento de Engenharia Mecânica e do Laboratório de Vibrações que me ofereceram os seus conhecimentos, cooperação e ajuda.

Resumo

Venero Lozano, Germaín Carlos; Sampaio, Rubens. **Identificação paramétrica de sistemas mecânicos usando algoritmos de subespaço**. Rio de Janeiro, 2003. 124p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Identificação paramétrica de sistemas mecânicos é uma das principais aplicações das técnicas de identificação de sistemas na Engenharia Mecânica, especificamente para a identificação de parâmetros modais de estruturas flexíveis. Um dos principais problemas na identificação é a presença de ruído nas medições. Este trabalho apresenta uma análise na presença de ruído de alguns dos métodos no domínio do tempo aplicáveis na identificação de parâmetros modais de sistemas mecânicos lineares invariantes no tempo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), usando como base o modelo em espaço de estados tipicamente usado em Dinâmica e Vibrações. Os algoritmos de subespaço envolvidos neste estudo destacam-se pela utilização da decomposição em valores singulares (SVD) dos dados, obtendo subespaços ortogonais dos modos associados ao sistema e dos modos associados ao ruído. Outros complicadores no processo de identificação que serão explorados neste trabalho são: flexibilidade e baixo amortecimento. Comparam-se as técnicas usando o modelo no espaço de estado da estrutura Mini-mast desenvolvida pela NASA Langley Research Center e simulações são feitas variando o nível de ruído nos dados, o amortecimento e a flexibilidade da estrutura. O problema de identificação de parâmetros estruturais (matrizes de massa, rigidez e amortecimento) também é estudado, as características e limitações do algoritmo utilizado são analisados. Como exemplo de aplicação prática, um experimento foi realizado para identificar os parâmetros modais de um rotor flexível e os resultados são discutidos.

Palavras-chave

Identificação de Sistemas; Análise Modal Experimental; Parâmetros Modais; Estruturas Flexíveis; Vibrações; Algoritmos de Subespaço; Sistemas Lineares.

Abstract

Venero Lozano, Germaín Carlos; Sampaio, Rubens. **Parametric identification of mechanical systems using subspace algorithms**. Rio de Janeiro, 2003. 124p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Parametric identification of mechanical systems is one of the main applications of the system identification techniques in Mechanical Engineering, specifically for the identification of modal parameters of flexible structures. One of the main problems in the identification is the presence of noise in the measurements. This work presents an analysis in the presence of noise of some of the time domain methods applicable in modal parameters identification of linear time-invariant mechanical systems with multiple inputs and multiple outputs (MIMO), using as base the state-space model typically used in Dynamics and Vibrations. The subspace algorithms involved in this study are distinguished for the use of the singular values decomposition (SVD) of the data, obtaining orthogonal subspaces of the modes associates to the system and of the modes associates to the noise. Other complicators in the identification process that will be explored in this work are: flexibility and low damping. The techniques are compared using the state-space model of the Mini-mast structure developed for NASA Langley Research Center and simulations are made varying the level of noise in the data, the damping and the flexibility of the structure. The problem of identification of structural parameters (mass, stiffness and damping matrices) also is studied, the characteristics and limitations of the used algorithm is analyzed. As example of practical application, an experiment was made to identify the modal parameters of a flexible rotor and the results are discussed.

Keywords

System Identification; Experimental Modal Analysis; Modal Parameters; Flexible Structures; Vibrations; Subspace Algorithms; Linear Systems.

Conteúdo

1	Introdução	17
1.1	Objetivos do trabalho	17
1.2	Conceitos gerais	18
1.3	Revisão Bibliográfica	19
1.4	Organização do trabalho	21
2	Fundamentos de Sistemas Lineares e Representação Modal	22
2.1	Introdução	22
2.2	Relação entrada-saída de sistemas lineares	22
2.3	Representação de sistemas mecânicos em espaço de estados	24
2.4	Modelo em espaço de estados equivalente no tempo discreto	26
2.5	Parâmetros de Markov e sua relação com a dinâmica do sistema	27
2.6	Parâmetros modais e sua relação com a FRI	29
2.7	Realização de sistemas lineares invariantes no tempo	32
2.8	Características do sistema identificado em espaço de estados	35
3	Ruído	37
3.1	Introdução	37
3.2	Modelo estocástico em espaço de estados	37
3.3	Filtro de Kalman	38
3.4	Técnicas para diferenciar os modos associados ao sistema e os modos associados ao ruído	41
4	Métodos de identificação de subespaço	43
4.1	Introdução	43
4.2	Cálculo dos parâmetros de Markov	43
4.3	Eigensystem Realization Algorithm (ERA)	45
4.4	ERA com correlação de dados (ERA/DC)	47
4.5	Identificação com observador /filtro de Kalman (OKID)	50
5	Identificação de parâmetros modais: Análise de resultados	59
5.1	Introdução	59
5.2	Sistema mecânico estudado	59
5.3	Sistema com amortecimento médio	61
5.4	Sistema com grande amortecimento	66
5.5	Sistema com pouco amortecimento	69
5.6	Conclusões do capítulo	75
6	Identificação de parâmetros estruturais	77
6.1	Introdução	77
6.2	Formulação do método	77
6.3	Exemplo: Suspensão de um vagão do trem	80
6.4	Conclusões do capítulo	88

7	Experimento: Identificação dos parâmetros modais de um rotor	90
7.1	Introdução	90
7.2	Modelo suposto para o sistema estudado	91
7.3	Experiências com o rotor estático	92
7.4	Matriz de amortecimento identificada \hat{E}	100
7.5	Experiência com o rotor na velocidade de rotação de 16 Hz (960 rpm)	100
7.6	Experiência com o rotor na velocidade de rotação de 32 Hz (1920 rpm)	104
8	Conclusões gerais	109
	Bibliografia	112
	Anexos	117
A	Matrizes do sistema em espaço de estados da estrutura Mini-Mast	117
B	Equações de movimento do modelo de um quarto de suspensão de vagão do trem	119
C	Descrição teórica do modelo dinâmico do rotor estudado no capítulo 7	121

Lista de Figuras

2.1	Sistema com r entradas e m saídas	22
2.2	Função pulso $\delta_{\Delta}(t - \tau)$.	29
2.3	Decomposição canônica de uma equação dinâmica linear.	35
5.1	Estrutura Mini-Mast.	60
5.2	Mini-Mast $1\% < \zeta < 4\%$ – comparação dos métodos com 1% de ruído.	62
5.3	Mini-Mast $1\% < \zeta < 4\%$ – comparação dos métodos com 5% de ruído.	64
5.4	Mini-Mast $1\% < \zeta < 4\%$ – comparação dos métodos com 10% de ruído.	65
5.5	Mini-Mast $\zeta > 4\%$ – comparação dos métodos com 1% de ruído.	67
5.6	Mini-Mast $\zeta > 4\%$ – comparação dos métodos com 5% de ruído.	68
5.7	Mini-Mast $\zeta < 1\%$ – comparação dos métodos com 1% de ruído.	70
5.8	Mini-Mast $\zeta < 1\%$ – comparação dos métodos com 5% de ruído.	72
5.9	Mini-Mast $\zeta < 1\%$ – comparação dos métodos com 10% de ruído.	73
5.10	Mini-Mast $\zeta < 1\%$ – comparação dos métodos com 10% de ruído e $p=100$.	75
6.1	Modelo de um quarto da suspensão de um vagão do trem.	81
6.2	% erro relativo (e_r) das matrizes $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{K}}$, para diferentes numero de filas bloco (N_{fb}) da matriz de Toeplitz. ($p = 50$, 0% de ruído).	83
6.3	% erro relativo médio (\bar{e}_r) da matriz de massa $\hat{\mathbf{M}}$, para diferentes numero de parâmetros de Markov do observador (p) e diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%).	84
6.4	% erro relativo médio (\bar{e}_r) da matriz de amortecimento $\hat{\mathbf{E}}$, para diferentes numero de parâmetros de Markov do observador (p) e diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%).	85
6.5	% erro relativo médio (\bar{e}_r) da matriz de rigidez $\hat{\mathbf{K}}$, para diferentes numero de parâmetros de Markov do observador (p) e diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%).	86
6.6	% erro relativo médio (\bar{e}_r) das matrizes $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$, para diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%) com $p = 70$.	87
7.1	Vista geral da bancada de provas.	91
7.2	Esquema da bancada de provas (todas as dimensões em milímetros).	91
7.3	Modelo do rotor e sistema de coordenadas.	92
7.4	Teste com um sensor e excitação no plano vertical do rotor: (a) Configuração; (b) Dados medidos.	92
7.5	Teste com um sensor e excitação no plano horizontal do rotor: (a) Configuração; (b) Dados medidos.	93

7.6	Teste com dois sensores e excitação a 45° : (a) Configuração; (b) Dados medidos.	93
7.7	Teste com um sensor e excitação na direção axial do rotor: (a) Configuração; (b) Dados medidos.	94
7.8	Função resposta em frequência para cada teste com o rotor estático: (a) Teste no plano vertical; (b) Teste no plano horizontal; (c.1) Medição no plano vertical (excitação a 45°); (c.2) Medição no plano horizontal (excitação a 45°); (d) Teste na direção axial.	94
7.9	Teste no plano vertical com rotor estático - Comparação da FRF experimental e a FRF do sistema identificado.	96
7.10	Teste no plano horizontal com rotor estático - Comparação da FRF experimental e a FRF do sistema identificado.	97
7.11	Teste com excitação a 45° no rotor estático - Comparação da FRF experimental e a FRF do sistema identificado.	99
7.12	Teste com dois sensores e excitação a 45° , com o rotor na velocidade de rotação de 16Hz (960 rpm): (a) Configuração; (b) Dados medidos.	101
7.13	Densidade espectral das respostas medidas com o rotor na velocidade de rotação de 16Hz (960 rpm).	102
7.14	Comparação da FRF do sistema identificado e a FT experimental do rotor na velocidade de rotação de 16 Hz (960 rpm).	103
7.15	Teste com dois sensores, com o rotor na velocidade de rotação de 32 Hz (1920 rpm): (a) Configuração; (b) Dados medidos.	104
7.16	Densidade espectral das respostas medidas com o rotor na velocidade de rotação de 32 Hz (1920 rpm).	105
7.17	Comparação da FRF do sistema identificado e a FT experimental do rotor na velocidade de rotação de 32 Hz (1920 rpm).	107
7.18	Comparação dos diagramas de Campbell para os modos de flexão do rotor flexível estudado.	108
B.1	Modelo de um quarto da suspensão de um vagão do trem.	119
C.1	Esquema da bancada de provas (todas as dimensões em milímetros).	122
C.2	Modelo do rotor e sistema de coordenadas.	122

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros modais do modelo da estrutura Mini-Mast: frequências naturais (ω) e fatores de amortecimento modal (ζ).	60
5.2	Resultados da identificação com 1% de ruído para o sistema com amortecimento médio: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	62
5.3	Resultados da identificação com 1% de ruído para o sistema com amortecimento médio: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	62
5.4	Resultados da identificação com 5% de ruído para o sistema com amortecimento médio: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	63
5.5	Resultados da identificação com 5% de ruído para o sistema com amortecimento médio: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	63
5.6	Resultados da identificação com 10% de ruído para o sistema com amortecimento médio: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	64
5.7	Resultados da identificação com 10% de ruído para o sistema com amortecimento médio: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	65
5.8	Parâmetros modais do sistema com grande amortecimento: frequências naturais (ω) e fatores de amortecimento modal (ζ).	66
5.9	Resultados da identificação com 1% de ruído para o sistema com grande amortecimento: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	66
5.10	Resultados da identificação com 1% de ruído para o sistema com grande amortecimento: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	67
5.11	Resultados da identificação com 5% de ruído para o sistema com grande amortecimento: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	68
5.12	Resultados da identificação com 5% de ruído para o sistema com grande amortecimento: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	68
5.13	Parâmetros modais do sistema com pouco amortecimento: frequências naturais (ω) e fatores de amortecimento modal (ζ).	69
5.14	Resultados da identificação com 1% de ruído para o sistema com pouco amortecimento: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	69
5.15	Resultados da identificação com 1% de ruído para o sistema com pouco amortecimento: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	70

5.16	Resultados da identificação com 5% de ruído para o sistema com pouco amortecimento: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	71
5.17	Resultados da identificação com 5% de ruído para o sistema com pouco amortecimento: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	71
5.18	Resultados da identificação com 10% de ruído para o sistema com pouco amortecimento: frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	72
5.19	Resultados da identificação com 10% de ruído para o sistema com pouco amortecimento: fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	73
5.20	Resultados da identificação com 10% de ruído para o sistema com pouco amortecimento (com $p=100$): frequências naturais (ω_i , associado ao i -ésimo modo).	74
5.21	Resultados da identificação com 10% de ruído para o sistema com pouco amortecimento (com $p=100$): fatores de amortecimento modal (ζ_i , associado ao i -ésimo modo).	74
6.1	Parâmetros físicos do modelo de um quarto da suspensão de um vagão do trem. (Dados obtidos de [37])	81
6.2	Parâmetros modais do modelo da Figura 6.1.	82
6.3	% erro relativo (e_r) das matrizes $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{K}}$, para diferentes numero de filas bloco (N_{fb}) e numero de condição (κ) da matriz de Toeplitz. Eq.(6-18). ($p = 50$, 0% de ruído).	83
6.4	% erro relativo médio (\bar{e}_r) e desvio padrão (std) da matriz de massa $\hat{\mathbf{M}}$, para diferentes numero de parâmetros de Markov do observador (p) e diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%).	84
6.5	% erro relativo médio (\bar{e}_r) e desvio padrão (std) da matriz de amortecimento $\hat{\mathbf{E}}$, para diferentes numero de parâmetros de Markov do observador (p) e diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%).	85
6.6	% erro relativo médio (\bar{e}_r) e desvio padrão (std) da matriz de rigidez $\hat{\mathbf{K}}$, para diferentes numero de parâmetros de Markov do observador (p) e diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%).	86
6.7	Valor médio ($\bar{\omega}$) e desvio padrão (std) das frequências naturais identificadas para diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%) com $p = 70$ parâmetros de Markov do observador.	87
6.8	Valor médio ($\bar{\zeta}$) e desvio padrão (std) dos fatores de amortecimento identificados para diferentes níveis de ruído (0%, 1%, 5% e 10%) com $p = 70$ parâmetros de Markov do observador.	87
7.1	Seleção dos autovalores mais relevantes do sistema identificado (considerando a ordem do sistema igual a 4).	95
7.2	Teste no plano vertical com rotor estático - Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados.	96
7.3	Seleção dos autovalores mais relevantes do sistema identificado (considerando a ordem do sistema igual a 4).	97

7.4	Teste no plano horizontal com rotor estático - Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados.	97
7.5	Seleção dos autovalores mais relevantes do sistema identificado (considerando a ordem do sistema igual a 8).	98
7.6	Teste com excitação a 45° no rotor estático - Frequências naturais e fatores de amortecimento identificados.	98
7.7	Valor médio das frequências naturais e fatores de amortecimento identificados nos modos de interesse (rotor estático).	99
7.8	Seleção dos autovalores mais relevantes do sistema identificado com o rotor na velocidade de rotação de 16 Hz (960 rpm).	102
7.9	Teste com o rotor na velocidade de rotação de 16 Hz (960 rpm) - Autovalores identificados com as respectivas frequências identificadas.	103
7.10	Seleção dos autovalores mais relevantes do sistema identificado com o rotor na velocidade de rotação de 32 Hz (1920 rpm) (considerando a ordem do sistema igual a 6).	106
7.11	Teste com o rotor na velocidade de rotação de 32 Hz (1920 rpm) - Autovalores identificados com as respectivas frequências identificadas.	106

Lista de símbolos

$\mathbf{g}(t, \tau)$	Função resposta ao impulso unitário (FRI) aplicado num instante τ .
$\mathbf{G}(s)$	Matriz função de transferência (FT).
\mathbf{M}	Matriz positiva-definida de massa do sistema.
\mathbf{E}	Matriz positiva semi-definida de amortecimento do sistema.
\mathbf{K}	Matriz positiva semi-definida de rigidez do sistema.
\mathbf{B}_o	Matriz de distribuição de atuadores.
\mathbf{A}_c	Matriz do sistema em espaço de estados no tempo contínuo.
\mathbf{A}	Matriz do sistema em espaço de estados no tempo discreto.
$\hat{\mathbf{A}}_c, \hat{\mathbf{A}}$	Matriz do sistema identificada.
\mathbf{B}_c	Matriz de entradas em espaço de estados no tempo contínuo.
\mathbf{B}	Matriz de entradas em espaço de estados no tempo discreto.
$\hat{\mathbf{B}}_c, \hat{\mathbf{B}}$	Matriz de entradas identificada.
\mathbf{C}	Matriz de influência na saída do vetor de estado $\mathbf{x}(t)$.
$\hat{\mathbf{C}}$	Matriz de influência na saída identificada.
\mathbf{D}	Matriz de transmissão direta.
$\hat{\mathbf{D}}$	Matriz de transmissão direta identificada.
\mathbf{B}_m	Matriz de entradas em espaço de estados na base modal.
\mathbf{C}_m	Matriz de influência na saída na base modal.
\mathbf{g}_k	O k -ésimo parâmetro de Markov do sistema no tempo contínuo.
\mathbf{Y}_k	O k -ésimo parâmetro de Markov do sistema no tempo discreto.
$\tilde{\mathbf{Y}}_k$	O k -ésimo parâmetro de Markov do observador no tempo discreto.
$\mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_\beta$	Matriz de controlabilidade.
$\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_\alpha$	Matriz de observabilidade.
$\mathbf{H}(k-1)$	Matriz de Hankel generalizada ($k = 1, 2, \dots$).
$\mathcal{H}(k)$	Matriz Hankel de correlação em blocos ($k = 0, 1, \dots$).
$\mathcal{R}_{hh}(k)$	Matriz de correlação de dados.
\mathbf{K}	Ganho do filtro de Kalman em estado estável.
\mathbf{G}	Ganho do observador de estado.
$\tilde{\mathbf{G}}_k$	Matriz Toeplitz com k filas bloco.
\mathbf{G}	Matriz giroscópica, anti-simétrica.
q	Número de graus de liberdade do sistema.
n	A ordem do sistema em espaço de estados (número de estados).
m	Número de sensores (saídas).
r	Número de atuadores (entradas).
l	Número de amostras ou quantidade de dados medidos.
Φ	Matriz modal do sistema.
ϕ_i	O i -ésimo vetor modal do sistema.
Λ_c	Matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{A}_c .
λ_i	O i -ésimo autovalor de \mathbf{A}_c no tempo contínuo.
Γ	Matriz de participação modal do sistema.
γ_i	O i -ésimo vetor de participação modal do sistema.

Λ	Matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{A} .
z_i	O i -ésimo autovalor de \mathbf{A} no tempo discreto.
Ψ	Matriz de autovetores de \mathbf{A} .
ω_i	A i -ésima frequência natural do sistema.
ζ_i	O i -ésimo fator de amortecimento modal do sistema, associado a ω_i .
$\mu(k)$	Vetor de incertezas ou de ruído no processo.
$\nu(k)$	Vetor de incertezas ou de ruído nas medições.
Ω	Velocidade de rotação.
$\varphi_y(t), \varphi_z(t)$	Rotações do rotor em torno dos eixos Y e Z respectivamente.
\mathcal{L}	Transformada de Laplace.
\mathcal{Z}	Transformada- z .

A vitória vem de uma vontade de fazer tudo certo, do início ao fim, e de não se permitir errar, mas de dar de si o máximo absoluto.

Frase no monumento Ayrton Senna, Campinas, S.P., Brasil.