7
Imunização utilizando o modelo de imunização estocástica

No capítulo anterior apresentamos e definimos uma série de novos conceitos em duração e em imunização. Todos estes conceitos teóricos servem de base para um entendimento completo do modelo que apresentaremos nesta parte. Primeiro um resumo do modelo apresentado será feito. Em seguida, veremos um exemplo de imunização utilizando esta nova teoria.

7.1.
Resumo do modelo

Neste capítulo iremos, assim como feito na primeira aplicação, apresentar um exemplo básico com o intuito de clarificar todo o mecanismo do modelo. Antes, um breve resumo do modelo será descrito.

Seja $P(\bar{i})$ uma função preço, a estrutura a termo se comporta da seguinte forma:

$$i_0 \to i_0 + \overline{\Delta} i \qquad \textbf{(7.1)}$$

Onde $\overline{\Delta} i = (\Delta i_1, ..., \Delta i_m)$

Vimos ainda que podemos escrever o valor esperado e a variância do retorno dos choques nas taxas de juros como sendo:

$$E\left[R\left(\overline{\Delta} i\right)\right] = 1 - \overline{D}\left(\overline{\Delta} i\right)^T \qquad (7.2)$$

$$Var\left[R\left(\overline{\Delta} i\right)\right] = \overline{D}\,\overline{K}\,\overline{D}^T \qquad (7.3)$$

Seguindo a idéia de Markowitz, utilizaremos como medida de risco a variância, adicionando a ela uma limitação a pontos fora da curva (outlier risk). Logo, nossa medida de risco será:

$$RM = wVar\left[R\left(\overline{\Delta} i\right)\right] + (1-w)\left|\overline{D}\right|^2 = \overline{D}\,\overline{K}_w\,\overline{D}^T \qquad (7.4)$$

Onde, o parâmetro de peso é escolhido respeitando a restrição: $\mathbf{0} \le w \le \mathbf{1}$ e $\overline{K}_w = w\overline{K} + (1-w)\bar{I}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

As restrições do problema que iremos utilizar são as seguintes:

Duração direcional, $D(\bar{i}_0)_N$, pode ser restringida em uma ou em varias direções, pois: $D_N(\bar{i}_0) = \overline{D} \cdot \overline{N}$

Retorno esperado do período, r', também serve como restrição deste tipo, pois:

$$E[R(\overline{\Delta i})] = 1 + r' = 1 - \overline{D} \cdot \overline{N}\text{, onde } \overline{N} = E[\overline{\Delta i}] \qquad (7.5)$$

Um conjunto de ativos limitado. Onde temos que resolver o seguinte sistema de equações:

$$\overline{A}^T \overline{N} = 0 \qquad (7.6)$$

$$\text{Onde } \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{D}_1 - \overline{D}_n \\ \vdots \\ \overline{D}_{n-1} - \overline{D}_n \end{bmatrix}^T \qquad (7.7)$$

Então, dado o conjunto de n ativos, a restrição do problema fica:

$\overline{D} \cdot \overline{N}_j = \overline{D}(\bar{i}_0) \cdot \overline{N}_j$, onde $\overline{N}_j$ são as soluções independentes de (7.6).

Logo, nosso problema geral se torna o seguinte:

$$Min \quad \overline{D}\,\overline{K}_w\,\overline{D}^T \qquad (7.8)$$

$$Sujeito\ a \quad \overline{D} \cdot \overline{N}_j = r_j, \qquad j = 1, \ldots, p \qquad (7.9)$$

Apenas como simplificação de notação, chamaremos $\overline{B}$ a matriz formada pelos vetores $\overline{N}_j$ como colunas e $\bar{r}$ o vetor coluna dos valores de r_j.

Chamando de $\overline{D}_o^T$ a solução para o problema de minimização, temos:

$$\overline{D}_0^T = \overline{K}_w^{-1}\overline{B}\left(\overline{B}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{B}\right)^{-1} \bar{r} \qquad (7.10)$$

O valor da medida de risco minimizada será:

$$RM_0(w) = \bar{r}^T \left(\overline{B}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{B}\right)^{-1} \bar{r} \qquad (7.11)$$

Por fim, para calcularmos as operações necessárias para se alcançar o vetor de duração desejado, considerando que as operações serão neutras de caixa (não será necessário mais capital, nem haverá sobra de capital), devemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\overline{A}\bar{a}' = P(\bar{i}_0)[\overline{D}_0 - \overline{D}]^T \qquad (7.12)$$

Onde:

$$\bar{a}' = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (7.13)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

Para garantirmos que as operações efetuadas são neutras de caixa, a seguinte equações deve ser respeitada.

$$a_n = -\sum_{j=1}^{n-1} a_j \qquad (7.14)$$

Temos então, um modelo de imunização expresso de forma compacta e simples de ser entendido. A seguir, apresentaremos um exemplo básico com o intuito de testar o modelo.

7.2. Exemplo

Para ilustrarmos a teoria previamente apresentada iremos utilizar um exemplo bem simples. Primeiramente, precisamos definir a curva de juros que iremos utilizar. Utilizaremos a mesma série histórica utilizada no caso de ACP (de 1/10/2001 até 19/12/2002), com a diferença que na ACP utilizamos 9 vértices para a curva e neste caso utilizaremos apenas 4 vértices. Quando for preciso outros pontos que não estes 4, utilizaremos interpolação linear.

Assim como no outro método de imunização, escolhemos a data de 18/11/2002 como data inicial, data na qual imunizaremos a carteira e os 23 dias seguintes para teste da imunização.

A estratégia de imunização será feita da seguinte forma: primeiro iremos simplesmente minimizar o risco de uma carteira fictícia mantendo a duração do excesso desta carteira constante. Depois, abandonaremos a restrição de duração e utilizaremos a restrição de um conjunto limitado de ativos entre os quais podemos operar. Em seguida, veremos como fazer para obtermos o vetor de duração alvo para o caso de poucos ativos e muitos ativos. Por fim, iremos comparar a evolução da carteira imunizada pela técnica de restrição de ativos com a carteira não-imunizada com a carteira imunizada sem restrição de ativos limitados (os cálculos com mais detalhes se encontram no apêndice B).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

7.2.1. Dados iniciais

Série histórica da curva de juros

	30	360	1080	1800
1/10/2001	20,15%	26,36%	34,60%	38,08%
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
18/11/2002				
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
19/12/2002	25,36%	28,45%	35,79%	40,10%

Tabela 7.1: Estrutra a termo da curva de juros brasileira (4 vértices)

Carteira inicial:

Ativo

	Valor Futuro	Cupom	Vcto (anos)
Longo (AL)	80	11% a.s.	5
Curto (AC)	20	0%	0,5

Tabela 7.2: Fluxo de ativos a ser imunizado

Passivo

	Valor Futuro	Cupom	Vcto (anos)
Passivo (P)	100	0%	2

Tabela 7.3: Fluxo de passivo a ser imunizado

Carteira graficamente:

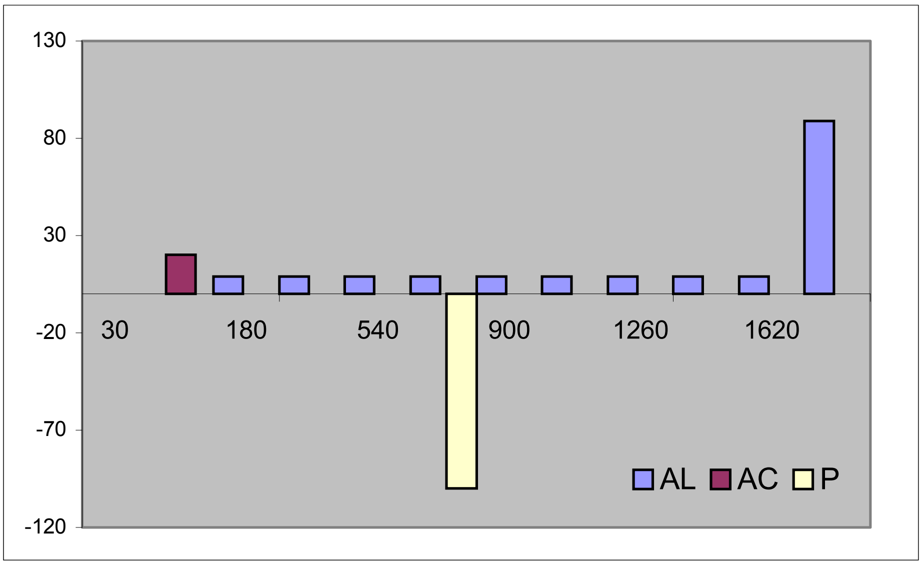

Ilustração 7.1: Fluxo de caixa da carteira inicial

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

Cálculos iniciais

Utilizando a tabela de ativos e de passivos (tabelas 7.2 e 7.3), podemos calcular o valor presente destes títulos, lembrando que as taxas necessárias para este cálculo serão interpoladas utilizando-se o método de interpolação linear. Para se efetuar o cálculo das durações parciais utilizamos o método de diferenças finitas apresentado anteriormente. Para este cálculo utilizamos como valor de ε 0,0001. Os resultados encontram-se a seguir:

	AL	**AC**	**P**	**Excesso (S)**
Valor Presente	42,25	18,80	47,45	13,60
D1	0,050	0,205	0,000	0,437
D2	0,478	0,045	1,000	-1,940
D3	0,685	0,000	1,000	-1,361
D4	1,210	0,000	0,000	3,758
D	2,422	0,250	2,000	0,893

Tabela 7.4: Características da carteira inicial que será imunizada

Usando o histórico da estrutura a termo até um dia antes da data de imunização (14/11/2002) podemos encontrar a matriz $\overline{E}$ (valor esperado) e a matriz $\overline{K}$ (de covariancias). São elas:

$\overline{E}$	**30**	**360**	**1080**	**1800**
	0,0001	0,0002	0,0003	0,0003

Tabela 7.5: Valor esperado da variação da taxa de juros em cada vértice

$\overline{K}$	**30**	**360**	**1080**	**1800**
30	1,30E-05	1,28E-05	1,24E-05	1,01E-05
360	1,28E-05	4,18E-05	4,81E-05	4,81E-05
1080	1,24E-05	4,81E-05	7,21E-05	7,21E-05
1800	1,01E-05	4,81E-05	7,21E-05	8,83E-05

Tabela 7.6: Matriz de covariâncias das variações nos vértices da curva de juros

Logo, o valor do excesso (S) que temos neste caso será:

Excesso (S) = 13,60

Vetor de duração total do excesso:

DS1	**DS2**	**DS3**	**DS4**
0,4368	-1,940	-1,361	3,7576

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

Tabela 7.7: Vetor de duração da carteira inicial

E o retorno esperado do retorno da carteira, sua respectiva variância e o comprimento do vetor de duração são (para $w = 1$):

$$E\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right] = 1 - \overline{D} \cdot \overline{N} = 1 - \overline{D} \cdot E\left[\overline{\Delta i}\right] = 0{,}9996$$

$$Var\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right] = \overline{D}\overline{K}\overline{D}^T = 0{,}0003522 = 0{,}0353\%$$

$$\left|\overline{D}\right| = 4{,}4640$$

No caso onde $w = 0{,}99999$, a medida de risco será a seguinte:

$$RM(w) = 0{,}0551\%$$

7.2.2. Minimizando com restrição de duração

Dado a carteira inicial, conseguimos calcular seu vetor de duração total, seu retorno esperado e sua variância. Nesta etapa, nosso objetivo é apenas minimizar a variância da carteira, sem alterar a duração do excesso. Ou seja, queremos encontrar um novo vetor de duração total do excesso que tenha a mesma duração inicial do excesso. Dividiremos em dois casos: o primeiro considerando apenas a variância ($w = 1$) e o outro considerando a outra medida de risco, que devido a diferença de escala entre a matriz $\overline{K}$ e $\overline{I}$ usaremos $w = 0{,}99999$.

7.2.2.1. Caso 1 (w=1

7.2.2.2.)

Como dito, iremos apenas minimizar o risco da carteira sujeito a restrição de que a duração corrente do excesso seja mantida. Ou seja, queremos que a duração total da carteira permaneça em 0,8930. Nossa restrição então será:

$\overline{D} \cdot \overline{N} = 0{,}893$, onde $\overline{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A matriz $\overline{B}$ e $\overline{r}$, neste caso, pode ser escrita como sendo:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \overline{r} = 0{,}8930$$

Efetuando-se os cálculos necessários (utilizando as fórmulas (7.10) e (7.11)), chegamos ao seguinte resultado:

$$\overline{D}_o^T = \begin{bmatrix} 0{,}9023 \\ -0{,}0324 \\ -0{,}1090 \\ 0{,}1321 \end{bmatrix}, \; RM_0(w=1) = 0{,}0010\% \text{ e } \left|\overline{D}_0\right| = 0{,}9190$$

Percebemos que esse novo vetor de duração, com risco minimizado, apresenta uma volatilidade de 0,0032, o que representa uma redução de 83,06% com relação a volatilidade original de 0,0188. Como havíamos dito, o comprimento do vetor de duração também pode ser considerado como uma medida de risco, logo, percebemos que seu valor diminuiu consideravelmente.

7.2.2.3. Caso 2 (w=0.9999)

Agora, seguiremos exatamente os mesmos passos do caso anterior, só que no problema de minimização, levaremos em consideração o comprimento do vetor de duração. Vale lembrar que, neste caso, a matriz de covariâncias é multiplicada pelo fator de peso w e a matriz identidade por 1 menos este fator. Efetuando-se os cálculos chegamos a:

$$\overline{D}_o^T = \begin{bmatrix} 0{,}7076 \\ 0{,}1445 \\ -0{,}0168 \\ 0{,}0577 \end{bmatrix}, \; RM_0(w=0{,}99999) = 0{,}0017\% \text{ e } \left|\overline{D}_0\right| = 0{,}7247$$

Novamente, o que percebemos é uma drástica redução de todas as medidas de risco.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

7.2.3.
Minimizando com restrição de duração possível de ser atingida

Até então, vimos que existe alguma combinação de ativos e passivos teórica que diminui o risco de uma carteira. Conseguimos diminuir consideravelmente nossa medida de risco da carteira hipotética mantendo a duração total do excesso constante. A pergunta que surge a seguir é: como alterarmos a carteira inicial de forma que esta se torne imunizada contra variações na taxa de juros? Isto é o que veremos agora. Por simplificação, suponha que exista no mercado 5 títulos disponíveis, com as seguintes características:

	Valor Futuro	Cupom	Vcto (anos)
AT1	100	0%	0,25
AT2	100	9% a.s.	2
AT3	100	11% a.s.	5
AT4	100	7% a.s.	1
AT5	100	0%	5

Tabela 7.8: Ativos selecionados para imunizar a carteira inicial

O valor presente, durações parciais e duração total se apresentam na tabela 7.9.

	AT1	AT2	AT3	AT4	AT5
Valor Presente	94,02	71,45	52,82	83,62	9,61
D1	0,20	0,03	0,05	0,02	0,00
D2	0,05	0,92	0,48	0,94	0,00
D3	0,00	0,75	0,68	0,00	0,00
D4	0,00	0,00	1,21	0,00	5,00
D	0,25	1,71	2,42	0,96	5,00

Tabela 7.9: Duração dos ativos selecionados para imunizar a carteira inicial

Queremos operar com estes títulos de modo a atingirmos o vetor de duração desejado. Dividiremos em duas partes: na primeira estudaremos um caso com poucos ativos (2 ativos). Depois, iremos para um mundo com muitos ativos (5 ativos). No primeiro caso, precisaremos usar o modelo para encontrar um vetor de duração minimizado, dado apenas dois ativos,e então efetuar as devidas transações necessárias para atingir este vetor. No segundo caso, como mostrado na teoria, esta minimização não é necessária. Pode-se utilizar o modelo anterior para minimizar e depois fazer as operações necessárias, ou simplesmente escolher um

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

vetor de duração alvo e então efetuar as negociações propostas pelo modelo. Por fim, iremos comparar as duas estratégias de imunização.

7.2.3.1. Minimização com restrição de poucos ativos

Nesta etapa, estamos num mercado com poucos ativos, no caso apenas 2. Então, isto significa que temos uma restrição de ativos, logo, nem todos os vetores de duração alvo poderão ser atingidos. Por isso, precisamos utilizar o método previamente mostrado para encontrarmos um vetor de duração minimizado que posso ser atingido com apenas este dois ativos. Os ativos que serão utilizados neste exemplo serão: AT2 e AT3.

Primeiramente escreveremos a matriz $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \left[\overline{D}_{AT3} - \overline{D}_{AT2}\right]^T = \begin{bmatrix} 0{,}0196 \\ -{,}04461 \\ -0{,}0672 \\ 1{,}2097 \end{bmatrix}$$

Percebemos claramente que o posto da matriz $\overline{A}$ é igual a 1. Como sua dimensão é 4, sabemos que seu espaço de nulidade será 3. Logo, teremos 3 vetores linearmente independentes que são solução para o sistema abaixo:

$$\overline{A}^T \overline{N} = 0$$

Calculando-se chega-se a:

$$\overline{N}_1 = (1 \quad 0{,}044 \quad 0 \quad 0)$$
$$\overline{N}_2 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad -0{,}016)$$
$$\overline{N}_3 = (0 \quad -0{,}151 \quad 1 \quad 0)$$

Usando-se estes valores juntamente com o valor da duração inicia da carteira, podemos obter as restrições para o problema de minimização. São elas:

$$\overline{D} \cdot \overline{N}_1 = 0{,}3516$$
$$\overline{D} \cdot \overline{N}_2 = 0{,}3759$$
$$\overline{D} \cdot \overline{N}_3 = -1{,}0690$$

Usando estas restrições no problema de otimização, obtivemos as seguintes soluções:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

$$\overline{D}_o^T = \begin{bmatrix} 0{,}3984 \\ -1{,}0651 \\ -1{,}2296 \\ 1{,}3849 \end{bmatrix} \text{ e } RM_0(w=1) = 0{,}0054\%$$

Neste ponto, como espera, percebemos que a variância encontrada é superior a variância encontrada nos casos de minimização anteriores, devido ao fato de que anteriormente não tínhamos restrição de ativos. Porém, o valor encontrado é bem inferior ao valor da variância da carteira inicial, de 0,0353%.

7.2.3.2.
Cálculo das operações necessárias para se atingir a duração alvo

De posse do vetor alvo de duração, podemos seguir o modelo para encontrarmos as operações que devem ser feita de modo a conseguirmos este vetor. Para tal, o que precisamos fazer é resolver o sistema de equações abaixo:

$$\overline{A}\overline{a}' = P(\bar{i}_0)\left[\overline{D}_0 - \overline{D}\right]^T$$

Vale ressaltar que neste caso, $\overline{a}' = (a_{AT3})$ e $a_{AT2} = -a_{AT3}$ (operações neutras de caixa). Efetuando-se os cálculos chegamos ao seguinte resultado:

$$a_{AT3} = -26{,}68$$

Ou seja, deve-se vender, em valor presente, 26,68 do título AT3 e comprar 26,68 do AT2, para que juntamente com a carteira original obtenhamos o vetor de duração alvo. Neste caso, percebemos que o ativo AT3 tem exatamente as mesmas características do ativo AL. Logo, ao invés de precisarmos vender este ativo curto, simplesmente deduziremos o valor necessário ao já existente. Com isso, nossa nova carteira ficou a seguinte:

Carteira imunizada com 2 ativos:

Ativo

	Valor Futuro	**Valor Presente**
Longo (AL)	29,55	15,61
Curto (AC)	20,00	18,80
AT2	37,29	26,64

Tabela 7.10: Carteira imunizada com dois ativos (Ativo)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

Passivo

	Valor Futuro	Valor Presente
Passivo (P)	100	47,45

Tabela 7.11: Carteira imunizada com dois ativos (Passivo)

Excesso (S) = 13,60

Vetor de duração total do excesso:

DS1	DS2	DS3	DS4
0,398	-1,065	-1,230	1,385

Tabela 7.12: Vetor de duração da carteira imunizada

Como esperado também, o valor do excesso não se alterou devido a restrição de caixa neutro e o vetor de duração da carteira imunizada é igual ao vetor alvo. No entanto, a duração da carteira se alterou de 0,893 para -0,510.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

7.2.3.3. Cálculo das operações necessárias para se atingir o vetor de duração com muitos ativos.

Como vimos na teoria, nos casos onde a matriz $\overline{A}$, tenha posto maior ou igual a m, estamos num mundo onde os ativos não servem mais como restrição. Logo, qualquer vetor de duração pode ser atingido. Para que a matriz $\overline{A}$ tenha posto maior do que m, é necessário que o número de ativos que estamos considerando, seja $n \geq m+1$. Como nossa curva de juros é baseada em 4 vértices, precisamos de 5 ativos para conseguirmos qualquer vetor de duração. Por isso, consideraremos que os 5 ativos previamente apresentados estão disponíveis. E como dissemos, o vetor de duração alvo pode ser qualquer um. Por simplicidade escolheremos como vetor de duração o vetor zero. A matriz $\overline{A}$ então será a seguinte:

$$\overline{A} = \left[\overline{D}_{ATj} - \overline{D}_{AT5}\right]^T \qquad j = 1,\ldots,4$$

Ou seja:

$\overline{A}$				
	0,2045	0,0300	0,0496	0,0199
	0,0455	0,9243	0,4783	0,9435
	0,0000	0,7520	0,6848	0,0000

-4,9988	-4,9988	-3,7890	-4,9988

Tabela 7.13: Matriz de diferença de durações

Substituindo-se o vetor de duração alvo pelo vetor nulo, utilizando o vetor de duração inicial da carteira e resolvendo o sistema $\overline{A}\overline{a}' = P(\bar{i}_0)[\overline{D}_0 - \overline{D}]^T$ temos:

$$\overline{a}' = \begin{pmatrix} a_{AT1} \\ a_{AT2} \\ a_{AT3} \\ a_{AT4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54{,}40 \\ -106{,}66 \\ 144{,}18 \\ 62{,}00 \end{pmatrix}$$

Como requeremos que as operações não tenham efeito de caixa:

$$a_{AT5} = -\sum a_{ATj} = -45{,}12$$

Para atingirmos o vetor de duração desejado, sem alterar o valor de excesso da carteira, basta efetuarmos as operações acima.

7.3. Comparação entre as estratégias de imunização

Para ilustrarmos a eficácia deste modelo de imunização, iremos acompanhar a carteira após feita a imunização por 23 dias. Primeiramente, mostraremos como a carteira se comportaria caso nada tivesse sido feito. Depois, veremos como se comporta a carteira que foi imunizada com apenas dois ativos (restrição de ativos). Em seguida, veremos como se comporta a carteira imunizada sem restrição de ativos (com 5 ativos).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

A carteira não imunizada e as carteiras imunizadas evoluíram da seguinte forma:

Data	Sem Imunização	Imunização 2	Imunização 5
18-nov-02	13,60	13,60	13,60
19-nov-02	14,59	13,81	13,59
20-nov-02	14,52	13,66	13,60
21-nov-02	14,17	13,48	13,62
22-nov-02	13,81	13,34	13,63
25-nov-02	13,71	13,29	13,63
26-nov-02	13,76	13,32	13,64
27-nov-02	13,93	13,37	13,64
28-nov-02	14,40	13,60	13,64
29-nov-02	14,19	13,46	13,64
02-dez-02	14,95	13,69	13,65
03-dez-02	14,94	13,69	13,65
04-dez-02	14,70	13,65	13,65
05-dez-02	14,69	13,73	13,64
06-dez-02	14,56	13,66	13,63
09-dez-02	14,32	13,63	13,62
10-dez-02	13,58	13,44	13,62
11-dez-02	14,26	13,60	13,61
12-dez-02	13,05	13,07	13,62
13-dez-02	14,48	13,53	13,65
16-dez-02	14,64	13,49	13,66
17-dez-02	14,87	13,28	13,73
18-dez-02	15,08	13,13	13,78
19-dez-02	15,28	13,27	13,76

Tabela 7.14: Evolução das carteiras com e sem imunização

7.4. Comentários

Novamente, o resultado obtido foi bastante satisfatório. A carteira após a imunização (com 2 e 5 ativos) se comportou de maneira estável. Quando comparada com a evolução da carteira não imunizada (ilustração 7.2), percebemos mais ainda essa estabilidade. Como era de se esperar, a imunização utilizando 5 ativos é mais eficaz do que a utilizando 2. Isto pois, como no caso de 5 ativos podemos atingir qualquer vetor de duração, a minimização pode ser feita de modo mais eficiente. O que pode ser visto também no gráfico a seguir.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA

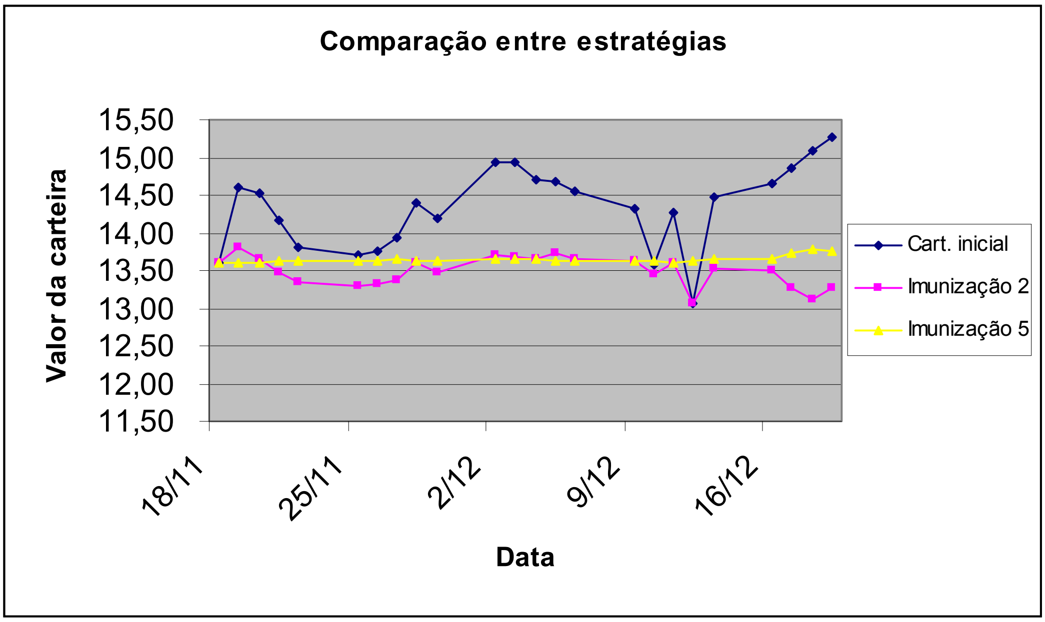

Ilustração 7.2: Evolução gráfica das carteiras imunizadas e não imunizadas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116492/CA