6
Modelo de imunização estocástica

Sabemos que, em geral, quanto mais complexa for a classe de variações que desejamos imunizar, mais restritivas se tornam as condições de imunização. Contrario a isso, quanto menor a classe, maior será a chance da estratégia falhar.

Por exemplo, como vimos, a teoria de imunização clássica baseia-se na teoria de duração de Macaulay, a qual supomos que a estrutura a termo na qual os papeis são precificados é considerada plana (todas as datas de vencimento tem a mesma taxa de mercado) e considera-se que seus deslocamentos ocorrem apenas de forma paralela (todos os pontos da curva se alteram por um mesmo valor). Neste caso, uma estratégia de imunização contra variações paralelas requer uma restrição na duração modificada dos ativos e passivos. Esta estratégias é simples de ser implementada porém, é altamente suscetível a falhas quando uma variação não antecipada na curva ocorrer.

Por outro lado, com o intuito de generalizar um pouco mais esta teoria, utilizamos uma técnica de imunização proposta por Barber e Cooper (1996) baseada na análise de componentes principais (o trabalho mais famoso nesta área é o de Litterman e Scheinkman (1991)). E através destes componentes imunizamos uma curva de juros não plana e com deslocamentos não paralelos (deslocamentos na direção dos componentes principais). Neste caso, um número maior de restrições tem que ser levado em consideração. Ainda assim, a técnica proposta por Barber et a não pode ser considerada muito geral, no sentido de que ela somente imuniza na direção dos autovetores e não aceita títulos com opção.

Por isso, estudaremos uma técnica mais geral de imunização proposta por Robert Reitano em seus vários artigos escritos em 1991, 1993, e 1996. Assim como feito no caso anterior, primeiramente apresentaremos um arcabouço teórico no qual a teoria toda se baseia. Em seguida, apresentaremos um exemplo simples com o intuito de condensar toda a teoria. Por fim, uma aplicação prática será feita utilizando-se dados reais.

Como dissemos, a teoria clássica de imunização pressupõe curva de juros plana e deslocamentos paralelos, ou seja, a teoria clássica estuda a sensibilidade do preço de ativos e passivos a taxa de juros utilizando funções de preço de uma única variável, conhecida como taxa interna de retorno. Neste capítulo, iremos mostrar o conceito desenvolvido por Reitano de uma análise multivariada da duração, imunização e da sensibilidade do preço que seja aplicável a qualquer modelo de variação da curva de juros. Outros exemplos de modelos multivariados podem ser encontrados em Bierwag (1977) e Thomas Ho (1992). Para tal, introduziremos novos conceitos de duração, convexidade e de suas relações e de imunização multivariada.

6.1. Análise de duração multivariada

Tanto a teoria que será apresentada (Multivariate Stochastic Immunization Theory) quanto as teorias multivariadas desenvolvidas por Bierwag (1977) e Ho (1992) utilizam uma representação discreta da curva de juros. Apesar de na teoria esta relação ser considerada contínua, na prática o que temos são apenas alguns pontos desta curva, os quais chamaremos de vértices da curva de juros. Por exemplo, podemos ter uma curva básica de juros gerada pelas observações das taxas de mercado nas datas de vencimento de 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20 e 30 anos. Dada estas taxas, o restante da curva é gerado através de interpolação (no presente trabalho utilizaremos apenas a interpolação linear, mas pode-se utilizar a que for mais conveniente). Conseqüentemente, estas outras taxas são dependentes das taxas dos vértices.

6.1.1. O modelo tradicional (de uma variável) e suas limitações

Sabemos que no modelo tradicional a função preço é definida somente para uma variável, a taxa interna de retorno (*yield-to-maturity*). Seja $P(i)$ uma função que atribui para cada valor de taxa de juros $i \geq 0$ o valor de uma dada carteira de fluxos de caixa futuros. A taxa i pode ser definida em qualquer sistema de unidades (dia, ano, semestre, etc.) e os fluxos de caixa futuros podem ser positivos ou negativos, fixos ou dependentes de i. Assuma ainda que $P(i)$ seja duas vezes diferenciavel e tenha segunda derivada contínua. Dada a função preço $P(i)$, sua função de duração modificada, $D(i)$ será definida para $P(i) \neq 0$ como sendo:

$$D(i) = -\frac{dP/di}{P(i)} \tag{6.1}$$

Usando a expansão de Taylor de primeira ordem, temos:

$$P(i) \approx P(i_0) + \frac{dP(i_0)}{di}\Delta i \tag{6.2}$$

Como $\frac{dP(i_0)}{di} = -D(i_0)P(i_0)$ então

$$\frac{P(i)}{P(i_0)} \approx 1 - D(i_0)\Delta i \tag{6.3}$$

Onde

$$\Delta i = i - i_0 \tag{6.4}$$

Dada a função preço $P(i)$, sua função de convexidade, $C(i)$ será definida para $P(i) \neq 0$ como sendo:

$$C(i) = \frac{d^2P/di^2}{P(i)} \tag{6.5}$$

Utilizando a aproximação de Taylor de segunda ordem teremos:

$$P(i) \approx P(i_0) + \frac{dP(i_0)}{di}\Delta i + \frac{1}{2!}\frac{d^2P(i_0)}{di^2}\Delta i^2 \tag{6.6}$$

Como $\frac{dP(i_0)}{di} = -D(i_0)P(i_0)$ e $\frac{d^2P(i_0)}{di^2} = C(i_0)P(i_0)$ temos:

$$\frac{P(i)}{P(i_0)} \approx 1 - D(i_0)\Delta i + \frac{1}{2}C(i_0)(\Delta i)^2 \tag{6.7}$$

Em aplicações, existem duas abordagens mais comuns para se utilizar este modelo. A abordagem de taxa interna de retorno e a abordagem de variações paralelas. Na primeira, a taxa i_0 (que não necessariamente será somente uma – sabemos que a taxa interna de retorno são as raízes de um polinômio) é o valor no qual $P(i_0)$ se iguala ao preço inicial. Logo, estamos num mundo onde a estrutura a termo é plana com valor igual a i_0. Definiremos $P(i_0 + \Delta i)$ o preço quando a taxa interna de retorno varia na quantidade Δi. Já a outra abordagem, de variações paralelas, tem a vantagem de permitir que o fluxo de caixa seja avaliado inicialmente na curva de juros atual (que pode ter qualquer formato), produzindo o valor $P(0)$. Então, $P(\Delta i)$ representa o preço quando a curva é paralelamente alterada pelo valor Δi, ou seja, quando cada ponto da curva inicial se deslocar pelo mesmo valor. Estas aproximações apesar de serem muito simples não valem nada caso suas limitações não sejam respeitadas. Veremos um exemplo proposto por Reitano (1991) a seguir.

Seja uma carteira simplificada composta por 3 fluxos de caixa fixos iguais a 20, -20 e 11 vencendo nas datas 0, 1 e 2 respectivamente. Seja a curva de juros spot com vértices 0,105 e 0,100 com vencimentos em 1 e 2 anos respectivamente. Com isso, podemos calcular o valor presente, duração e convexidade.

$$VP = 20 + \frac{-20}{(1{,}105)} + \frac{11}{(1{,}100)^2} = 10{,}99$$

Usando a técnica de yield-to-maturity, podemos modelar a função preço como:

$$P(i) = 20 - 20v + 11v^2, \quad v = (1+i)^{-1}$$

Igualando-se esta expressão ao valor presente calculado anteriormente extraímos as duas taxas interna de retorno do fluxo:

$$TIR_1 = 0{,}0045$$
$$TIR_2 = 0{,}2157$$

Usando cada uma das duas taxas internas podemos calcular a duração e a convexidade.

$$D^1 = 0{,}172 \quad D^2 = -0{,}117$$
$$C^1 = 2{,}308 \quad C^2 = 0{,}724$$

Seja a expansão de Taylor de segunda ordem :

$$\frac{P(i)}{P(TIR_j)} \approx 1 - D^j\left(i - TIR_j\right) + \frac{1}{2}C^j\left(i - TIR_j\right)^2 \qquad (6.8)$$

Usando esta expansão, Reitano (1991) mostra que mesmo para uma variação paralela, esta equação fornece uma aproximação ruim da verdadeira variação da carteira. E associa este erro a um problema de unidade. Além disso, outra limitação desta aproximação é que podemos ter fluxos que não tenham taxa interna de retorno.

Usando o modelo de variações paralelas podemos escrever a função de preço como sendo:

$$P(i) = 20 - 20v + 11w^2$$

Onde:

$$v = (1{,}105 + \Delta i)^{-1}$$
$$w = (1{,}100 + \Delta i)^{-1}$$

Calculando-se a duração e a convexidade chegamos a:

$$D = 0{,}0136$$
$$C = 1{,}404$$

Usando a expressão (3.6), a aproximação de primeira ordem fica:

$$\frac{P(\Delta i)}{P(0)} \approx 1 - 0{,}0136\Delta i$$

Novamente, Reitano mostra que a aproximação não é de todo precisa. Isto porque, a curva de juros, normalmente, não se movimenta em paralelo. Por este e pelos motivos acima, surge a necessidade de um modelo de duração mais completo, mais real, que possa explicar melhor a variação de uma carteira quando as taxas mudam. Apresentaremos dois modelos de duração: duração direcional e duração parcial.

6.1.2.
Modelos multivariados

Nesta seção iremos mostrar o características e propriedades de modelos de duração multivariados. Primeiro apresentaremos o conceito de duração e convexidade direcional. Depois entraremos no conceito de duração e convexidade parcial. Por fim, suas propriedades serão apresentadas (seção 6.4).

6.1.3.
Duração e convexidade direcional

Este conceito de duração e convexidade é muito importante para a teoria de imunização direcional, onde queremos imunizar uma carta carteira na direção de um dado vetor de mudanças. Um caso particular desta teoria é a análise de componentes principais, utilizada na primeira aplicação, onde os autovetores são os vetores de direção na qual queremos imunizar uma carteira e a duração na direção de cada componente nada mais é do que a duração direcional.

Como dito na introdução, utilizaremos o conceito de vértices da curva de juros. Seja $\bar{\mathrm{i}}_0 = (i_{01}, i_{02}, ..., i_{0m})$ o vetor que representa os m pontos (vértices) da curva de juros na qual o portfólio está valorado. Estes vértices da curva são as variáveis que definem a função preço, pois os outros valores são interpolados (logo, dependentes destes valores). Seja também, $\overline{\mathrm{N}} = (n_1, ..., n_m)$ o vetor de direção, onde $\overline{N} \neq 0$ e $\left|\overline{N}\right| = \left(\sum n_i^2\right)^{1/2}$ denota seu comprimento.

Considere $P(t) = P(\bar{i}_0 + t\overline{N})$, onde $P(\bar{i})$ é a função de preço multivariada, que iremos assumir que seja duas vezes diferenciavel. Esta função define o preço do portfólio quando a curva de juros inicial $\bar{i}_0$ é variada de t unidades na direção do vetor $\overline{N}$. Ou seja, i_{01} é acrescida de tn_1 unidades e assim por diante. Usando a expansão da serie de Taylor, podemos aproximar a função preço em primeira e segunda ordem.

$$P(t) \approx P(0) + P'(0)t \tag{6.9}$$

$$P(t) \approx P(0) + P'(0)t + \frac{1}{2}P''(0)t^2 \tag{6.10}$$

Para calcularmos as derivadas de $P(t)$, seja $P_j(\bar{i})$ a j-ésima derivada parcial de $P(\bar{i})$ e $P_{jk}(\bar{i})$ a derivada parcial cruzada de segunda ordem. Matematicamente temos:

$$P_j = \frac{\partial P}{\partial i_j} \tag{6.11}$$

$$P_{jk} = \frac{\partial^2 P}{\partial i_j \partial i_k} \tag{6.12}$$

Sabemos da teoria do cálculo que:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial i_1} di_1 + ... + \frac{\partial P}{\partial i_m} di_m = \sum \frac{\partial P}{\partial i_j} di_j \tag{6.13}$$

$$d^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial i_1 \partial i_1} di_1{}^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial i_1 \partial i_2} di_1 di_2 ... + \frac{\partial^2 P}{\partial i_m \partial i_m} di_m{}^2 = \sum \frac{\partial^2 P}{\partial i_j \partial i_k} di_j di_k \tag{6.14}$$

Sabemos ainda que:

$$\begin{aligned} di_1 &= n_1 dt \\ &\vdots \\ di_m &= n_m dt \end{aligned} \tag{6.15}$$

e

$$di_j di_k = n_j n_k dt^2 \qquad (6.16)$$

Substituindo (6.15) em (6.13) chegamos a:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial i_1} n_1 dt + \ldots + \frac{\partial P}{\partial i_m} n_m dt = \sum \frac{\partial P}{\partial i_j} n_j dt \qquad (6.17)$$

Logo:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial i_1} n_1 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial i_m} n_m = \sum \frac{\partial P}{\partial i_j} n_j \qquad (6.18)$$

$$P'(t) = \sum n_j P_j \left(\bar{i}_0 + t\overline{N}\right) \qquad (6.19)$$

Utilizando a mesma idéia podemos mostrar que:

$$P''(t) = \sum \sum n_j n_k P_{jk} \left(\bar{i}_0 + t\overline{N}\right) \qquad (6.20)$$

Estas expressões ((6.19) e (6.20)) avaliadas em $t = 0$, são as derivadas direcionais de primeira e segunda ordem da função preço $P(\bar{i})$ avaliada em $\bar{i}_0$.

$$P'(0) \equiv \left.\frac{\partial P}{\partial \overline{N}}\right|_{i_0} = \sum n_j P_j \left(\bar{i}_0\right) \qquad (6.21)$$

$$P''(0) \equiv \left.\frac{\partial^2 P}{\partial \overline{N}^2}\right|_{i_0} = \sum \sum n_j n_k P_{jk} \left(\bar{i}_0\right) \qquad (6.22)$$

Antes de continuarmos, faremos duas definições.

Seja $P(\bar{i})$ a função preço multivariada e $\overline{N} \neq 0$ o vetor de direção. A função de duração direcional na direção de $\overline{N}$, $D_N(\bar{i})$ e a função de convexidade direcional na direção de $\overline{N}$ $C_N(\bar{i})$, são definidas para $P(\bar{i}) \neq 0$ como sendo:

$$D_N(\bar{i}) = -\frac{\partial P / \partial \overline{N}}{P(\bar{i})} = -\frac{d_N P(\bar{i})}{P(\bar{i})} \qquad (6.23)$$

$$C_N(\bar{i}) = \frac{\partial^2 P / \partial \overline{N}^2}{P(\bar{i})} = \frac{d_N^2 P(\bar{i})}{P(\bar{i})} \qquad (6.24)$$

Substituindo a equação. (6.21) em (6.9) e a equação. (6.22) em (6.10) conseguimos:

$$\frac{P\left(\bar{i}_0 + \Delta i \overline{N}\right)}{P\left(\bar{i}_0\right)} \approx 1 - D_N\left(\bar{i}_0\right)\Delta i \qquad (6.25)$$

$$\frac{P\left(\bar{i}_0 + \Delta i \overline{N}\right)}{P\left(\bar{i}_0\right)} \approx 1 - D_N\left(\bar{i}_0\right)\Delta i + \frac{1}{2} C_N\left(\bar{i}_0\right)(\Delta i)^2 \qquad (6.26)$$

Como exemplo, considere a função preço utilizada anteriormente:

$$P(i_1, i_2) = 20 - 20v + 11w^2$$

Onde neste caso:

$$v = (1 + i_1)^{-1}$$
$$w = (1 + i_2)^{-1}$$

As derivadas parciais de $P(i_1, i_2)$ podem ser calculadas.

$$P_1(i_1, i_2) = 20v^2 \quad P_2(i_1, i_2) = -22w^3$$
$$P_{11}(i_1, i_2) = -40v^3 \quad P_{11}(i_1, i_2) = 66w^4$$
$$P_{12}(i_1, i_2) = P_{21}(i_1, i_2) \equiv 0$$

Avaliando estas equações na curva inicial e utilizando as equações acima, podemos calcular as durações e convexidades direcionais. Apenas como exemplo, calcularemos a duração e convexidade na direção dos seguintes vetores de direção N: $(1,1)$, $(1,3)$ e $(2,1)$. Chegamos ao seguinte resultado:

$$D_{(1,1)} = 0{,}0136 \quad C_{(1,1)} = 1{,}404$$
$$D_{(1,3)} = 3{,}0212 \quad C_{(1,3)} = 34{,}214$$
$$D_{(2,1)} = -1{,}4767 \quad C_{(2,1)} = -6{,}688$$

Neste ponto, é importante observarmos alguns aspectos importantes da duração e convexidade direcional. Notamos que:

Se $\overline{N} = (1,...,1)$, o vetor de mudança paralela, $D_N(\bar{i}_0)$ se iguala ao valor tradicional de $D(i_0)$, e $C_N(\bar{i}_0) = C(i_0)$, onde os valores sem índice são calculados utilizando a aproximação de variação paralela. Além disso, as equações (6.25) e (6.26) são consistentes apesar de que podemos expressar de muitas formas o vetor de direção $\overline{N}$. Muitos modelos requerem que o vetor de direção seja normalizado (caso da análise de componentes principais), ou seja, que $|\overline{N}| = 1$.

No caso anterior (ACP), uma análise de componentes principais foi feita em cima de um histórico de variações na curva de juros durante um dado período. Nesta análise, o primeiro componente principal, $\overline{N}_1$, é o vetor de variações o qual melhor aproxima os múltiplos das variações históricas, $t\overline{N}_1$, no sentido de mínimos quadrados. Os múltiplos do segundo componente principal, $\overline{N}_2$, melhor aproximam os resíduos deixados pelo primeiro componente, novamente no sentido de mínimos quadrados. E assim por diante.

Em outras palavras, esta análise decompõe as variações históricas, $\overline{\Delta i}_j$, numa combinação linear dos vetores de variação, $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \ldots, \overline{N}_m$, de modo que para cada $k = 1, \ldots, m-1$, a coleção dos resíduos:

$$\left\{ \overline{\Delta i}_j - \sum_{i=1}^{k} t_{ij} N_i \right\}, \quad j = 1,2,\ldots \tag{6.27}$$

seja a menor possível no sentido de soma de quadrados.

6.1.4.
Duração e convexidade parcial

Como pudemos ver, com a introdução da idéia de duração direcional, a teoria clássica de duração pode ser facialmente adaptada para absorver variações nas taxas que não sejam paralelas. Um método alternativo seria um que reconhecesse mais explicitamente a natureza multivariada das variações na estrutura a termo. Ou seja, um modelo que estime $P\left(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i}\right)$ diretamente, onde $\bar{i}_0$ é o vetor inicial da curva de juros e $\overline{\Delta i} = \left(\Delta i_1, \ldots, \Delta i_m\right)$ o vetor de variação na estrutura.

Considere a seguinte versão m dimensional da serie de Taylor de primeira e segunda ordem:

$$P\left(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i}\right) \approx P\left(\bar{i}_0\right) + \sum P_j\left(\bar{i}_0\right)\Delta i_j \tag{6.28}$$

$$P\left(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i}\right) \approx P\left(\bar{i}_0\right) + \sum P_j\left(\bar{i}_0\right)\Delta i_j + \frac{1}{2}\sum\sum P_{jk}\left(\bar{i}_0\right)\Delta i_j \Delta i_k \tag{6.29}$$

Estas aproximações naturalmente motivam algumas definições. Dada a função multivariada de preço $P\left(\bar{i}\right)$, a j-ésima função de duração e de convexidade parcial, que chamaremos de $D_j\left(\bar{i}\right)$ e $C_{jk}\left(\bar{i}\right)$ são definidas para $P\left(\bar{i}\right) \neq 0$ como sendo:

$$D_j\left(\bar{i}\right) = -\frac{P_j\left(\bar{i}\right)}{P\left(\bar{i}\right)} \quad j = 1, \ldots, m \tag{6.30}$$

$$C_{jk}\left(\bar{i}\right) = \frac{P_{jk}\left(\bar{i}\right)}{P\left(\bar{i}\right)} \quad j, k = 1, \ldots, m \tag{6.31}$$

Onde

$$P_j = \frac{\partial P}{\partial i_j} \text{ e } P_{jk} = \frac{\partial^2 P}{\partial i_j \partial i_k} \quad (6.32)$$

Dado as definições acima, podemos definir o vetor de duração total, que chamaremos de $\overline{D}(\bar{i})$ e a matriz de convexidade, que chamaremos de $\overline{C}(\bar{i})$.

$$\mathbf{D}(i) = (D_1(i),...,D_m(i)) \quad (6.33)$$

$$\overline{C}(i) = \begin{pmatrix} C_{11}(\bar{i}) & ... & C_{1m}(\bar{i}) \\ ... & ... & ... \\ C_{m1}(\bar{i}) & ... & C_{mm}(\bar{i}) \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Podemos utilizar estas definições nas equações de expansão de Taylor de primeira e segunda ordem. Substituindo temos:

$$\frac{P(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i})}{P(\bar{i}_0)} \approx 1 - \overline{D}(\bar{i}_0) \cdot \overline{\Delta i} \quad (6.35)$$

$$\frac{P(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i})}{P(\bar{i}_0)} \approx 1 - \overline{D}(\bar{i}_0) \cdot \overline{\Delta i} + \frac{1}{2}(\overline{\Delta i})^T \overline{C}(\bar{i}_0)(\overline{\Delta i}) \quad (6.36)$$

Para simplificar a notação na equação acima, utilizaremos o conceito de produto escalar. Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são vetores de dimensão m, $\bar{x} \cdot \bar{y}$ é definido como:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum x_j y_j \quad (6.37)$$

Equivalentemente, isto significa a multiplicação da matriz linha $(1 \times m)$, $\overline{D}(\bar{i}_0)$,pelo vetor coluna $(m \times 1)$, $\overline{\Delta i}$. O ultimo termo da expressão (6.36) também é expresso na forma matricial.

$$\bar{x}^T \overline{C} \bar{x} = \sum \sum c_{jk} x_j x_k \quad (6.38)$$

$$C_{jk}(i) = C_{kj}(i) \quad (6.39)$$

$$\overline{C}(i) = \overline{C}(i)^T \quad (6.40)$$

Como veremos depois, na pratica, não é viável se calcular as derivadas parciais diretamente. Então, utilizamos métodos matemáticos (métodos como o de diferença central) para se calcular estas derivadas.

Intuitivamente, $D_j(\bar{i})$ reflete a sensibilidade de primeira ordem de $P(\bar{i})$ a movimentos no vértice j. Ou seja, se o vértice j mudar, isto irá não somente afetar a taxa do ano 10, mas como todas as taxas que dependem deste vértice, devido a interpolação. Similarmente, $C_{jk}(\bar{i})$ reflete a sensibilidade de segunda ordem de $P(\bar{i})$ a movimentos nos vértices j e k. Por exemplo, imagine que tivemos somente mudanças em i_j e em i_k , $j \neq k$. Então, $D_j(\bar{i})$ e $D_k(\bar{i})$ refletem a mudança de primeira ordem em $P(\bar{i})$ enquanto $C_{jk}(\bar{i})$ reflete o ajuste de segunda ordem. Usando a expressão (6.36) temos:

$$P(\bar{i} + \overline{\Delta i}) \approx P(\bar{i})\left[1 - D_j(\bar{i})\Delta i_j - D_k(\bar{i})\Delta i_k + C_{jk}(\bar{i})\Delta i_j \Delta i_k\right] \quad (6.41)$$

Voltando ao exemplo acima, utilizando as derivadas parciais previamente calculadas, podemos calcular as durações e convexidades parciais:

$$\begin{array}{ll} D_1 = -1{,}4902 & D_2 = 1{,}5038 \\ C_{11} = -2{,}697 & C_{22} = 4{,}101 \\ C_{12} = 0 & C_{21} = 0 \end{array}$$

Com este exemplo, pudemos perceber que as durações parciais somadas se equivalem a duração modificada. O mesmo se percebe no caso das convexidades. Ou seja:

$$D(\bar{i}_0) = \sum D_j(\bar{i}_0) \quad (6.42)$$

$$C(\bar{i}_0) = \sum \sum C_{jk}(\bar{i}_0) \quad (6.43)$$

Duração e convexidade apresentam, além desta, diversas outras relações e propriedades. Algumas delas estão apresentadas no final deste capítulo (seção 6.4).

6.1.5. Estimação prática da duração e convexidade parcial

Na pratica, não iremos calcular durações parciais para todos os pontos de fluxo de caixa. Num caso onde tivéssemos muitos fluxos isto seria um transtorno. Por isso, uma aproximação preferencial é de agrupar estas sensibilidades em um numero menor de pontos. Que pontos utilizar? Normalmente utilizamos os vértices que definem a curva de juros como pontos básicos onde a duração será calculada. Iremos nos referir a este tipo de duração como duração no vértice (*key rate duration* – veja apendice 11.2.9.2). Os vértice comumente utilizados na pratica são: 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20 e 30 anos. Destes pontos básicos outros valores necessários ao longo do problema são interpolados. A interpolação pode ser feita linear, exponencial, por *splines* cúbicas, etc. Para este trabalho o tipo de interpolação utilizada, por simplificação, foi a interpolação linear.

Usando um modelo de curva de juros deste tipo para modelar $P(\bar{i})$, $D_N(\bar{i}_0)$ e $C_N(\bar{i}_0)$ podem ser estimados utilizando-se as fórmulas discretas de diferença central:

$$D_N^{\varepsilon}(\bar{i}_0) = \frac{-\left[P(\bar{i}_0 + \varepsilon\,\overline{N}) - P(\bar{i}_0 - \varepsilon\,\overline{N})\right]}{2\varepsilon P(\bar{i}_0)} \qquad (6.44)$$

$$C_N^{\varepsilon}(\bar{i}_0) = \frac{\left[P(\bar{i}_0 + \varepsilon\,\overline{N}) - 2P(\bar{i}_0) + P(\bar{i}_0 - \varepsilon\,\overline{N})\right]}{\varepsilon^2 P(\bar{i}_0)} \qquad (6.45)$$

Na pratica, bons resultados são obtidos se utilizando ε igual a 5 a 10 pontos base, quando $|\overline{N}|$ se iguala ao comprimento do vetor de variações paralelas $(1,\ldots,1)$.

Para estimarmos a duração parcial e a convexidade parcial utilizamos as seguintes fórmulas:

$$D_j^{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\left[P(\bar{i}_0 + \bar{\varepsilon}_j) - P(\bar{i}_0 - \bar{\varepsilon}_j)\right]}{2\varepsilon_j P(\bar{i}_0)} \qquad (6.46)$$

$$C_{jk}^{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\left[P(\bar{i}_0 + \bar{\varepsilon}_j + \bar{\varepsilon}_k) - P(\bar{i}_0 - \bar{\varepsilon}_j + \bar{\varepsilon}_k)P(\bar{i}_0 + \bar{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon}_k)P(\bar{i}_0 - \bar{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon}_k)\right]}{4\varepsilon_j \varepsilon_k P(\bar{i}_0)} \qquad (6.47)$$

Neste caso $\bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j(0,\ldots,1,\ldots,0)$, onde ε_j é a j-ésima coordenada, e $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$.

6.2.
Teoria de imunização multivariada

Como já vimos na teoria clássica de imunização, os conceitos de duração e convexidade são básicos para seu desenvolvimento. No caso da imunização multivariada o mesmo é verdade. Precisamos primeiramente introduzir os conceitos de duração e convexidade multivariada para então desenvolvermos a imunização multivariada, que foi o que fizemos até então. De posse destes conceitos, podemos mostrar mais facilmente o que é e como se comporta a teoria de imunização multivariada.

6.2.1. Definições de imunização multivariada

Seja $P_k(\bar{i})$ o valor no futuro de um portfólio no tempo $k \geq 0$, avaliado na curva de juros $\bar{i}$, onde assumimos que nenhum título é adicionado ou retirado do portfólio durante este período. Assume-se ainda que o vetor da curva de juros varia de $\bar{i}_0$ para $\bar{i}$ instantaneamente após o tempo 0 e a partir daí evolui de acordo com a curva de juros a *forward*. Seja $Z_k(\bar{i})$ o preço de um título zero cupom de k períodos com valor de vencimento igual a 1.Logo, se investirmos 1 neste título teremos $\frac{1}{Z_k(\bar{i})}$ no tempo k. Conseqüentemente, um ativo com preço $P(\bar{i})$ hoje terá seu valor futuro igual a:

$$P_k(\bar{i}) = \frac{P(\bar{i})}{Z_k(\bar{i})} \tag{6.48}$$

Por exemplo, se $i_j = i$ para todo j, então $Z_k(i) = (1+i)^{-k}$ e $P_k(i) = (1+i)^k P(i)$.

Estendendo as noções clássicas já vistas de imunização, temos o seguinte:

A função preço $P(\bar{i})$ é dita localmente imunizada no tempo k no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$ se:

$$P_k(\bar{i}) \geq P_k(\bar{i}_0) \tag{6.49}$$

para $\bar{i}$ suficientemente próximo de $\bar{i}_0$. Ou seja, para $\left|\bar{i} - \bar{i}_0\right| < r$, onde $r > 0$ e $\left|\bar{i}\right| < r$ denote o norma euclidiana:

$$\left|\bar{i}\right|^2 = \sum i_j^2 \tag{6.50}$$

Similarmente, $P(\bar{i})$ é dito globalmente imunizado no tempo k no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$ se $P_k(\bar{i}) \geq P_k(\bar{i}_0)$ for satisfeita para todos os possíveis vetores de juros $\bar{i}$.

Analogamente definiremos imunização local e global direcional na direção do vetor $\overline{N}$ por:

$$P_k(\bar{i}_0 + t\overline{N}) \geq P_k(\bar{i}_0) \tag{6.51}$$

para todo t de forma que $|t| < r$ (local) e para todo t possível (global).

Para a imunização direcional, restringiremos nossa atenção para mudanças na curva de juros de um tipo fixo, $\overline{N}$, logo, somente o valor da variação t é variável.

Por exemplo, $\overline{N}$ pode refletir as clássicas variações paralelas, ou um vetor de mudança nível ou curvatura da curva, ou ainda uma mudança mais geral. No modelo de imunização não direcional, iremos considerar todos as possíveis variações da curva inicial $\bar{i}_0$.

Dada as definições acima, voltamos a definição de $P_k(\bar{i})$ e investigaremos em mais detalhes as implicações de imunização de $P(\bar{i})$ no tempo k.

Assuma que $P(\bar{i})$ possua apenas fluxos de caixa fixos, ou seja:

$$P(\bar{i}) = \sum c_t [1 + r(0,t)]^{-t} \tag{6.52}$$

onde $r(0,t)$ representa a taxa spot para t períodos, ou a taxa usada para se descontar fluxos do tempo t para o tempo 0. Claramente, nesta notação:

$$Z_k(\bar{i}) = [1 + r(0,t)]^{-t} \tag{6.53}$$

Seja $r(s,t)$ a taxa usada para descontar fluxos de caixa do tempo t para o tempo s, ou a taxa forward implícita de $(t-s)$-períodos no tempo s, onde $0 < s < t$, temos:

$$[1 + r(0,t)]^{-t} = [1 + r(0,s)]^{-s} \cdot [1 + r(s,t)]^{-(t-s)} \tag{6.54}$$

Logo, um simples cálculo produz:

$$P_k(\bar{i}) = \sum_{t<k} c_t [1 + r(t,k)]^{(k-t)} + \sum_{t\geq k} c_t [1 + r(k,t)]^{-(t-k)} \tag{6.55}$$

Logo, a imunização de $P(\bar{i})$ no tempo k em $\bar{i}_0$ garante que o valor acima não será menor do que $P_k(\bar{i}_0)$. Vale lembrar que a mudança da curva de $\bar{i}_0$ para $\bar{i}$ deve acontecer de forma instantânea (veja Reitano (1991)).

Das expressões (6.49) e (6.51) podemos perceber que para $P(\bar{i})$ ser imunizado no tempo k em $\bar{i}_0$, $\bar{i}_0$ precisa ser um mínimo relativo de $P_k(\bar{i})$, no caso de imunização local e um mínimo global no caso de imunização global. Para obtermos os resultados, utilizamos condições conhecidas para que um ponto seja mínimo. Por exemplo, a condição suficiente para que $\bar{x}_0$ seja um mínimo local de $f(\bar{x})$ na direção de $\overline{N}$ é que:

$$d_N f(\bar{x}_0) = 0 \tag{6.56}$$

e

$$d_N^2 f(\bar{x}_0) > 0 \tag{6.57}$$

A condição suficiente para que $\bar{x}_0$ seja um mínimo global é que (6.56) seja verdadeira e que (6.57) seja satisfeita para todo $\bar{x}$. Analogamente, a condição suficiente para que $\bar{x}_0$ seja um mínimo local de $f(\bar{x}_0)$ é que (6.69) e (6.70) valham para todo $\overline{N}$; ou seja:

$$d_j f(\bar{x}_0) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \tag{6.58}$$

e

$$d_{jk} f(\bar{x}_0) \qquad \text{seja positiva definida} \tag{6.59}$$

onde $\lfloor d_{jk} f(\bar{x}_0) \rfloor$ denota a matriz hessiana de $f(\bar{x})$. A condição suficiente para $\bar{x}_0$ ser um mínimo global é que (6.58) e (6.59) sejam satisfeitas para todo $\bar{x}$.

6.2.2. Imunização direcional

Nesta etapa, apresentaremos a teoria de imunização direcional. Mostraremos que para imunização local , é suficiente que $P(\bar{i})$ tenha a mesma duração direcional que $Z_k(\bar{i})$ e maior convexidade direcional. E para imunização global na direção de $\overline{N}$, requer-se uma restrição de convexidade em todos os possíveis vetores de curva de juros $\bar{i} = \bar{i}_0 + t\overline{N}$.

Considere as propriedades descritas ao final deste capítulo. Sejam $P(\bar{i}_0) > 0$, i_0 e $\overline{N} \neq 0$ dados. Vimos que:

$$P_k(\bar{i}) = \frac{P(\bar{i})}{Z_k(\bar{i})} \tag{6.60}$$

Usando a propriedade 8 temos que:

$$D_N(P_k) = D_N(P) - D_N(Z_k)$$

$$C_N(P_k) = C_N(P) - C_N(Z_k) + 2D_N(Z_k)[D_N(Z_k) - D_N(P)] \tag{6.61}$$

Usando as definições (6.23) e (6.24) chegamos a:

$$\frac{d_N(P_k)}{P_k} = \frac{d_N(P)}{P} - \frac{d_N(Z_k)}{Z_k} \tag{6.62}$$

$$\frac{d_N^2(P_k)}{P_k} = \frac{d_N^2(P)}{P} - \frac{d_N^2(Z_k)}{Z_k} - \frac{2d_N(Z_k)}{Z_k}\left[-\frac{d_N(Z_k)}{Z_k} + \frac{d_N(P)}{P}\right] \tag{6.63}$$

Para imunizarmos, sabemos que devemos respeitar as condições de minimização. Logo,

$$d_N(P_k)\Big|_{i_0} = 0 \Rightarrow D_N(P) = D_N(Z_k) \qquad (6.64)$$

$$d_N^2(P_k)\Big|_{i_0} > 0 \Rightarrow C_N(P) > C_N(Z_k) \qquad (6.65)$$

Então $P(\bar{i})$ é dito localmente imunizado no tempo k na direção de $\overline{N}$ no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$.

Ainda usando a propriedade 8, podemos mostrar as propriedades a seguir. Em $\bar{i}_0$

$$D_N(P) = D_N(Z_k) \qquad (6.66)$$

para todo possível vetor de curava de juros $\bar{i} = \bar{i}_0 + t\overline{N}$:

$$C_N(P) > C_N(Z_k) + 2D_N(Z_k)[D_N(P) - D_N(Z_k)] \qquad (6.67)$$

Então $P(\bar{i})$ é dito globalmente imunizado no tempo k na direção de $\overline{N}$ no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$.

Como vimos no capítulo 3 , no modelo clássico de Redington, onde $N = (1,...1)$ e a curva de juros $\bar{i}_0$ é plana, $i_j = i_0$ para todo j, as condições para imunização local se reduzem as preposições familiares. Neste caso, $Z_k(i_0) = v_0^k = (1+i_o)^{-k}$ e sua duração pode ser expressa como:

$$D(Z_k) = -\frac{1}{Z_k} d(Z_k) = -\frac{1}{v_0^k}\left(-k(v_0)^{k+1}\right) = kv_0 \qquad (6.68)$$

Substituindo na primeira condição de imunização temos:

$$D(P) = kv_0 \qquad (6.69)$$

da qual k é determinado, dado i_0, por:

$$k = \frac{D(P)}{v_0} \Rightarrow k = (1+i_0)D(P) = D^M(P) \qquad (6.70)$$

onde $D^M(P)$ denota a duração de Macaulay de $P(i)$ em i_0.

Similarmente, a restrição de convexidade pode ser escrita como:

$$C(P) > C(Z_k) \Rightarrow C(P) > \frac{1}{Z_k} d^2(Z_k) \qquad (6.71)$$

$$C(P) > \frac{1}{v_o^k} k(k+1)(1+i_0)^{-k-2} = \frac{1}{v_o^k} k(k+1)v_0^{k+2} \qquad (6.72)$$

$$C(P) > k(k+1)v_0^2 \qquad (6.73)$$

a qual é equivalente a

$$C(P) > D^M(P)\left[D^M(P)+1\right]v_0^2 \qquad (6.74)$$

Quando os fluxos de caixa de $P(i)$ são fixos e positivos, a equação (6.74) é sempre satisfeita e a imunização é garantida para k satisfazendo (6.70).

6.2.2.1.
Aplicação da teoria de imunização multivariada direcional no gerenciamento de ativos e passivos (ALM)

Nesta seção, iremos adaptar a metodologia de imunização multivariada apresentada acima e seus resultados ao gerenciamento de ativos e passivos (ALM – *Asset Liability Management*). A partir daqui, consideraremos 2 funções objetivo, são elas:

$$S(\bar{i}) = A(\bar{i}) - P(\bar{i}) \qquad (6.75)$$

$$R(\bar{i}) = \frac{\left[A(\bar{i}) - P(\bar{i})\right]}{A(\bar{i})} \qquad (6.76)$$

onde $A(\bar{i})$ e $P(\bar{i})$ denotam os valor de mercado dos ativos e passivos em consideração, $S(\bar{i})$ representa o valor de mercado do excesso e $R(\bar{i})$ o percentual de excesso em relação ao total de ativos. Imunização no contexto da 1a equação trás um limite inferior para o valor do excesso no tempo k, enquanto a 2a equação trás um limite inferior para a taxa de excesso dos ativos, ou percentual de excesso em relação aos ativos, ou simplesmente percentual de excesso.

6.2.2.1.1.
Imunização do excesso

Chamando r^s de percentual de excesso na curva de juros corrente $\bar{i}_0$, ou seja:

$$\text{Seja } r^s = R(\bar{i}_0) = \frac{\left[A(\bar{i}_0) - P(\bar{i}_0)\right]}{A(\bar{i}_0)} \qquad (6.77)$$

Considere primeiro o caso no qual $r^s > 0$. Pela primeira condição de imunização (6.64), requeremos em i_0 que:

$$D_N(S) = D_N(Z_k) \qquad (6.78)$$

Usando a propriedade 2 e as condições de imunização podemos escrever:

$$D_N(A) = (1 - r^s)D_N(P) + r^s D_N(Z_k) \tag{6.79}$$

$$C_N(A) > (1 - r^s)C_N(P) + r^s C_N(Z_k) \tag{6.80}$$

No caso de $r^s = 0$, trabalhamos diretamente co as derivadas direcionais de $S_k(\bar{i})$, com o objetivo de que as condições de minimização de primeira e de segunda ordem sejam satisfeitas. As condições resultantes nas derivadas direcionais de $A(\bar{i})$ e $P(\bar{i})$ são então equivalentes as condições (6.79) e (6.80) com $r^s = 0$.

Então podemos dizer que $S(\bar{i})$ é localmente imunizado no tempo k na direção de $\overline{N}$ no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$.

Quando $r^s = 0$, as condições (6.79) e (6.80) implicam que $S(\bar{i})$ é localmente imunizado em qualquer tempo $k \geq 0$ na direção de $\overline{N}$ no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$. Para $r^s > 0$, vemos que a duração direcional dos ativos requerida para imunização reflete tanto a duração direcional dos passivos quanto do título zero cupom $Z_k(i)$, correspondente ao horizonte de imunização k. Em algumas aplicações , k pode ser escolhido pequeno ou igual a zero , neste caso, teríamos uma imunização de curto prazo, como parte de uma estratégia ativa de gerenciamento (active management). Para $k = 0$, as condições de imunização acima tornam-se:

$$D_N(A) = (1 - r^s)D_N(P) \tag{6.81}$$

$$C_N(A) > (1 - r^s)C_N(P) \tag{6.82}$$

Geralmente, k pode ser escolhido de forma que seja consistente com o ciclo de planejamento da organização. Por exemplo, $k = 1$ poderia ser uma meta inicial de imunização consistente com a receita durante um período. Numa estratégia deste tipo, o valor de k seria decrescente durante o período. Similarmente, valores grandes de k podem ser usados para refletir um planejamento de vários anos de uma empresa ou ainda o período de vencimento do último fluxo de caixa do passivo.

6.2.2.1.2.
Imunização do percentual de excesso

Nesta parte investigaremos a imunização da do percentual do excesso em relação ao total de ativos, $R(\bar{i}) = [A(\bar{i}) - P(\bar{i})]/A(\bar{i})$. Como $R(\bar{i})$ não é uma função preço, seu valor no forward, no tempo k, $R_k(i)$ não será dado pela equação (6.60) Então temos:

$$R_k(\bar{i}) = [A_k(\bar{i}) - P_k(\bar{i})]/A_k(\bar{i}) = R(\bar{i}) \quad (6.83)$$

pois os valores *forward* de A e P satisfazem a equação (6.60). Conseqüentemente, imunizar $R(\bar{i})$ no tempo 0 garante sua imunização a qualquer tempo $k \geq 0$.

Para encontrarmos as condições de imunização, seguiremos os mesmos passos do caso anterior. Assuma que $R(\bar{i}) = r^s > 0$. Usando as propriedades 2 e 8 podemos escrever:

$$\begin{aligned} D_N(R) &= D_N(A-P) - D_N(A) \\ &= c[D_N(A) - D_N(P)] \end{aligned} \quad (6.84)$$

e

$$C_N(R) = c[C_N(A) - C_N(P)] - 2cD_N(A)[D_N(A) - D_N(P)] \quad (6.85)$$

onde $c = \dfrac{P(i_0)}{S(i_0)}$

Para $r^s = 0$, trabalhamos diretamente com as derivadas direcionais de , assim como feito anteriormente. Podemos então escrever as condições de imunização para este caso:

$$D_N(A) = D_N(P) \quad (6.86)$$

$$C_N(A) > C_N(P) \quad (6.87)$$

Então $R(\bar{i})$ é localmente imunizado em qualquer tempo $k \geq 0$ na direção de $\overline{N}$ no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$.

6.2.3.
Imunização não direcional

Iremos apresentar nesta etapa os resultados gerais da teoria de imunização não-direcional. Veremos que estes resultados são generalizações naturais da imunização direcional. No entanto, neste caso, as restrições serão expressas em termos de vetores de duração total e matrizes de convexidade.

Começaremos com uma definição. Sejam $\overline{A}$ e $\overline{B}$ matrizes quadradas. Dizemos que $\overline{A}$ é mais convexa do que $\overline{B}$ $\left(\overline{A} > \overline{B}\right)$, se $\left(\overline{A} - \overline{B}\right)$ for positiva definida. Ou seja:

$\overline{x}^T\left(\overline{A} - \overline{B}\right)\overline{x} > 0$, para todo $\overline{x} \neq 0$.

Novamente, considere as propriedades descritas ao final deste capítulo. Seja $P\left(\overline{i}\right)$ e $\overline{i}_0$ dados e assuma que exista $k \geq 0$ de forma que em $\overline{i}_0$:

$$\overline{D}(P) = \overline{D}(Z_k) \qquad (6.88)$$

$$\overline{C}(P) > \overline{C}(Z_k) \qquad (6.89)$$

Então, dizemos que $P\left(\overline{i}\right)$ é localmente imunizado no tempo k na curva $\overline{i}_0$.

Ainda, seja $P\left(\overline{i}\right)$ e $\overline{i}_0$ dados e assuma que exista $k \geq 0$ de forma que em $\overline{i}_0$:

$$\overline{D}(P) = \overline{D}(Z_k) \qquad (6.90)$$

e que para todo $\overline{i}$ possível:

$$\overline{C}(P) - \overline{C}(Z_k) > 2\overline{D}(Z_k)^T\left[\overline{D}(P) - \overline{D}(Z_k)\right] \qquad (6.91)$$

Então, dizemos que $P\left(\overline{i}\right)$ é globalmente imunizado no tempo k no vetor de curva de juros $\overline{i}_0$.

As provas foram suprimidas por serem análogas ao caso de imunização direcional.

6.2.3.1.
Aplicação da teoria de imunização multivariada não-direcional no gerenciamento de ativos e passivos (ALM)

Assim como os resultados obtidos acima, apenas apresentaremos os resultados, pois as provas são análogas ao caso de ALM direcional.

Seja $S\left(\overline{i}\right) = A\left(\overline{i}\right) - P\left(\overline{i}\right)$ e $\overline{i}_0$ dados. Assuma que exista $k \geq 0$ de forma que em $\overline{i}_0$:

$$\overline{D}(A) = \left(1 - r^s\right)\overline{D}(P) + r^s\overline{D}(Z_k) \qquad (6.92)$$

$$\overline{C}(A) > \left(1 - r^s\right)\overline{C}(P) + r^s\overline{C}(Z_k) \qquad (6.93)$$

Então $S(\bar{i})$ é localmente imunizado no tempo k no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$.

Seja $R(\bar{i})$ definido como anteriormente. Assuma que em $\bar{i}_0$:

$$\overline{D}(A)=\overline{D}(P) \qquad (6.94)$$

$$\overline{C}(A)>\overline{C}(P) \qquad (6.95)$$

Então, $R(\bar{i})$ é localmente imunizado em todos tempo $k \geq 0$ no vetor de curva de juros $\bar{i}_0$.

6.3. Teoria de imunização estocástica multivariada

Anteriormente, apresentamos uma extensão dos conceitos clássicos de duração e imunização para uma estrutura multivariada, a qual permite, teoricamente, sua aplicação a qualquer tipo de variação na curva de juros. Neste capítulo, utilizaremos os conceitos anteriores para mostrarmos um modelo de imunização desenvolvido por Robert Reitano em 1993. A teoria é chamada de "*Multivariate Stochastic Immunization Theory*", traduzindo, teoria de imunização estocástica multivariada. A abordagem é dita multivariada devido a sua capacidade de refletir o risco de toda curva de juros a variações não-paralelas (devido a modelagem da mesma como um vetor de vértices das taxas) e é estocástica no sentido de minimização do risco estocástico. Nesta nova teoria, a aproximação de risco utilizada segue a idéia de Markowitz (1959) de minimização da variância, mas sendo generalizada para refletir a medida de risco de pontos fora da curva (*outlier risk*).

Inicialmente, apresentaremos a teoria em detalhes. No capítulo seguinte, um resumo do modelo será apresentado e em seguida um exemplo básico será introduzido. No capítulo 8 uma aplicação prática, com dados reais, será feita utilizando-se este modelo.

6.3.1. O modelo da curva de juros

Para iniciarmos, precisamos definir como a curva de juros se comporta. Ou seja, como definiremos a curva hoje e como esta estrutura se movimentará ao longo do tempo. Para tal, definimos toda a curva de juros como um vetor, onde cada elemento deste vetor representa a taxa correspondente a sua respectiva data de vencimento.

Chamando de $\bar{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ o valor atual das taxas do vetor de curva de juros com m pontos de vértice. O primeiro modelo de variação na curva a ser utilizado será o modelo de variação direcional, onde um vetor de direção, $\overline{N} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$, é estabelecido e fixo anteriormente. Logo, o modelo de mudança na curva será da seguinte forma:

$$\bar{i}_0 \rightarrow \bar{i}_0 + t\overline{N} = (i_1 + tn_1, i_2 + tn_2, ..., i_m + tn_m) \tag{6.96}$$

Onde t representa a variável de magnitude da variação na direção de $\overline{N}$. Vale ressaltar que no modelo clássico de variações paralelas cada ponto da curva se movimenta na mesma direção, sentido e magnitude, logo o vetor de direção é escrito da seguinte forma: $\overline{N} = (1,1, \ldots, 1)$.

Um outro modelo para variação na curva é o modelo de mudança totalmente multivariada, onde o mesmo vetor inicial $\bar{i}_0$ varia de acordo com o vetor de variação em cada vértice $\overline{\Delta i} = (\Delta i_1, ..., \Delta i_m)$. Então, o modelo de variação na curva evolui segundo o seguinte:

$$\bar{i}_0 \rightarrow \bar{i}_0 + \overline{\Delta i} = (i_1 + \Delta i_1, ..., i_m + \Delta i_m) \tag{6.97}$$

Neste modelo, diferente do modelo direcional, não se assume nenhuma relação explícita entre os vários Δi_j. Em geral, esse tipo de modelo pode ser aplicado a qualquer tipo de curva (taxas spot, taxas de títulos, taxas *forward*, etc.) e utilizando qualquer tipo de capitalização (semestral, anual, contínua, etc.). Além disso, o modelo multivariado apresentado permite aplicação, teoricamente, a qualquer modelos dinâmico pelo qual a curva possa variar. A escolha do tipo a ser utilizado, devido da tratabilidade, precisão e facilidade de uso, recomendada em vários artigos publicados por Reitano é o modelo de diretores da curva de juros. Neste modelo, a curva é modelada em termos de taxas de mercado nos seus vencimentos ativamente negociados, por exemplo: ½, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 20 anos. Outras taxas necessárias são interpoladas da maneira usual.

6.3.2. Imunização estocástica com muitos ativos

Nesta parte iremos apresentar o modelo desenvolvido por Robert Reitano (1993) de imunização estocástica, num mundo onde existe um número muito grande de ativos, ou seja, um número suficiente para que qualquer duração possa ser atingida com os papéis negociados no mercado.

6.3.2.1. O modelo geral

Seja $P(\bar{i})$ a função preço definida nos m vértices do vetor de curva de juros, $\bar{i} = (i_1, ..., i_m)$, onde $\bar{i}_0$ representa o valor atual da curva. Por conveniência assumimos que $P(\bar{i}_0) \neq 0$ (esta restrição será relaxada mais tarde). Na prática, $P(\bar{i})$ pode ser considerada qualquer função preço, mas no caso de aplicações de imunização, usualmente denota-se de função de excesso, a qual representaremos por $S(\bar{i})$.

Utilizando a notação introduzida anteriormente, podemos escrever a função preço para o próximo período:

$$P(\bar{i}_0) \rightarrow P(\bar{i}) = P(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i}) \tag{6.98}$$

Chamando $R(\overline{\Delta i})$ de fator de retorno no período, ou seja:

$R(\overline{\Delta i}) = 1 + r = \dfrac{P(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i})}{P(\bar{i}_0)}$, onde r é a taxa de retorno no período.

Se ocorrer um choque $\overline{\Delta i}$, a função preço irá variar de acordo com a sensibilidade dela em relação a este choque. Seja a função de duração modificada, $\overline{D}(\bar{i})$:

$$\overline{D}(\bar{i}) = -\frac{dP/di}{P(\bar{i})} \tag{6.99}$$

Usando a expansão de Taylor de primeira ordem, temos:

$$P(\bar{i}) \approx P(\bar{i}_0) + \frac{dP(\bar{i}_0)}{di} \cdot \overline{\Delta i} \tag{6.100}$$

Como $\dfrac{dP(\bar{i}_0)}{di} = -\overline{D}(\bar{i}_0)P(\bar{i}_0)$ então

$$\frac{P(i)}{P(i_0)} \approx 1 - \overline{D}(i_0)\cdot \overline{\Delta i} \text{ ,onde } \overline{\Delta i} = \bar{i} - \bar{i}_0 \qquad (6.101)$$

Ou ainda:

$$R(\overline{\Delta i}) = 1 - \overline{D}(i_0)\cdot \overline{\Delta i} \qquad (6.102)$$

Escrevendo em forma de somatório:

$$R(\overline{\Delta i}) = 1 - \sum D_j(\bar{i}_0)\Delta i_j \qquad (6.103)$$

Onde $\overline{\Delta i}$ representa qualquer variação arbitrária na curva, $\overline{\Delta i} = (\Delta i_1, \ldots, \Delta i_m)$, $\overline{D}(\bar{i}_0) = [D_1(\bar{i}_0), \ldots, D_m(\bar{i}_0)]$ representa o vetor de duração total, ou vetor de durações parciais e $D_j(\bar{i}_0) = -\frac{d_j P(\bar{i}_0)}{P(\bar{i}_0)}$ representa as durações parciais de $P(\bar{i})$ avaliadas em $\bar{i}_0$. Nos cálculos matriciais, $\overline{D}(\bar{i}_0)$ é considerado um vetor linha, os outros vetores são tratados como vetores colunas.

Assuma que $\overline{\Delta i}$ tem uma dada função de densidade de probabilidade, $f(\overline{\Delta i})$, a qual pode depender de $\bar{i}_0$. Seja também $\overline{E}(\bar{i}_0)$ e $\overline{K}(\bar{i}_0)$ definidos como sendo o vetor de média de $\overline{\Delta i}$ e sua associada matriz de covariância. Ou seja:

$$E_j(\bar{i}_0) = E[\Delta i_j] \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (6.104)$$

$$K_{jk}(\bar{i}_0) = E[(\Delta i_j - E_j(\bar{i}_0))(\Delta i_k - E_k(\bar{i}_0))] \qquad j,k = 1, \ldots, m \qquad (6.105)$$

Onde E representa o operador esperança. Note ainda que $\overline{K}(\bar{i}_0)$ tem a importante propriedade de ser uma matriz positiva semi definida. Ou seja, $\bar{x}^T \overline{K}\bar{x} \geq 0$ para qualquer vetor $\bar{x}$. Reitano comenta que esta propriedade é importante, mas é em geral muito fraca para garantir que $\overline{K}(\bar{i}_0)$ seja inversível (propriedade necessária para o modelo). Por isso, assume que $\overline{K}(\bar{i}_0)$ é positiva definida. Esta suposição implica que nenhuma combinação linear de Δi_j é degenerada ou não-estocástica. Na prática, esta condição é virtualmente garantida. (algumas propriedades de uma matriz positiva definida encontra-se na seção 11.3.5)

6.3.2.2.
Medida de risco

Definimos ate então conceitos que servirão de base para o desenvolvimento da teoria. O próximo passo é definirmos uma medida de risco, medida esta a qual desejamos minimizar. Ou seja, queremos definir uma medida geral de risco para a função $P(\bar{i})$. Reitano (1993) sugere que utilizemos a medida de risco de Markovitz (1959). Seguindo Markowitz, é natural considerar a variância de $R(\overline{\Delta i})$, já que isto aproxima o risco total do retorno medido por $P(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i})/P(\bar{i}_0)$.

Dadas as definições, podemos calcular o valor esperado e a variância de $R(\overline{\Delta i})$. Sabemos que $R(\overline{\Delta i}) = 1 - \overline{D}(i_0) \cdot \overline{\Delta i}$. Logo, para se calcular o valor esperado, utilizamos a propriedade de linearidade do operador esperança:

$$E\left[R(\overline{\Delta i})\right] = E\left[1 - \overline{D}(i_0) \cdot \overline{\Delta i}\right] \tag{6.106}$$

$$E\left[R(\overline{\Delta i})\right] = 1 - \overline{D}(i_0) \cdot \overline{E}(\bar{i}_0) \tag{6.107}$$

Para se calcular a variância, utilizamos o operador esperança e suas propriedades.

$$\begin{aligned} Var\left[R\left[\overline{\Delta i}\right]\right] &= Var\left[\overline{D}(\bar{i}_0) \cdot \overline{\Delta i}\right] \\ &= E\left[\left(\overline{D}(\bar{i}_0) \cdot \left(\overline{\Delta i} - \overline{E}(\bar{i}_0)\right)\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum \sum D_j(\bar{i}_0) D_k(\bar{i}_0)\left(\Delta i_j - E_j(\bar{i}_0)\right)\left(\Delta i_k - E(\bar{i}_0)\right)\right] \\ &= \overline{D}(\bar{i}_0)\overline{K}(\bar{i}_0)\overline{D}^T(\bar{i}_0) \end{aligned} \tag{6.108}$$

Ainda, podemos limitar pontos fora da curva (*outlier risk*), limitar riscos de pontos longe do vetor aleatório $\overline{\Delta i}$, que podem não ser adequadamente refletidos na medida de variância devido ao seu baixo peso.

Como já visto, $E\left[R(\overline{\Delta i})\right] = 1 - \overline{D}(i_0) \cdot \overline{E}(\bar{i}_0)$. Rearrumando e aplicando o módulo de ambos os lados temos:

$$\left|E\left[R(\overline{\Delta i})\right] - 1\right| = \left|\overline{D}(i_0) \cdot \overline{E}(\bar{i}_0)\right| \tag{6.109}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz (A.56) sabemos que:

$$\left|\overline{D}(i_0) \cdot \overline{E}(i_0)\right| \le \left|\overline{D}(i_0)\right| \left|\overline{E}(i_0)\right| \tag{6.110}$$

Logo concluímos que:

$$\left|E\left[R(\overline{\Delta i})\right] - 1\right| \le \left|\overline{D}(i_0)\right| \left|\overline{E}(i_0)\right| \tag{6.111}$$

Similarmente temos que:

$$\left[\overline{D}(\bar{i}_0) \cdot \left(\overline{\Delta i} - \overline{E}(\bar{i}_0)\right)\right]^2 \le \left|\overline{D}(\bar{i}_0)\right|^2 \left|\overline{\Delta i} - \overline{E}(\bar{i}_0)\right|^2 \tag{6.112}$$

Donde chegamos que:

$$Var\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right] \leq \left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|^2 E\left[\left|\overline{\Delta i} - \overline{E}\left(\bar{i}_0\right)\right|^2\right] \text{ ou } Var\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right] \leq \left|D\left(\bar{i}_0\right)\right|^2 tr\left[\overline{K}\left(\bar{i}_0\right)\right] \quad (6.113)$$

Onde o operador tr significa o traço da matriz $\overline{K}$, ou seja, a soma dos elementos da diagonal desta matriz, e $|\bar{x}|$ é a normalização euclidiana usual, $|\bar{x}|^2 = \bar{x} \cdot \bar{x}$.

Das expressões (6.111) e (6.113) fica claro que $E\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right]$ será perto de 1 e $Var\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right]$ será perto de 0, se o comprimento do vetor de duração total, $\left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|$ for feito pequeno. Reitano mostrou em outros artigos (1989, 1990 e 1991) que este comprimento pode ser relacionado a uma medida de risco. Baseado nisto, diremos que $\left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|$ pode ser visto como uma medida de sensibilidade extrema da duração para $P(\bar{i})$. Ou seja, quando $\left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|$ for feito pequeno, a sensibilidade de primeira ordem de $P(\bar{i})$ será relativamente pequena.

Então, a seguir, utilizaremos duas medidas de risco de um portfólio, as quais desejamos minimizar. São elas: $Var\left(R\left(\overline{\Delta i}\right)\right)$ e $\left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|^2$. A razão de $\left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|$ ter sido elevado ao quadrado é para refletir segunda ordem, assim como a função de variância.

Logo, definiremos uma medida de risco, chamada de $RM(w)$, como sendo:

$$RM(w) = wVar\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right] + (1-w)\left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|^2 \quad (6.114)$$

Onde o parâmetro de peso w é escolhido como sendo: $0 \leq w \leq 1$. Intuitivamente, se tivermos w perto de 1, nossa medida de risco se reduz a variância. Para w perto de zero, estaremos minimizando o pior caso. Na prática, escolheremos w muito próximo de 1, caso contrário, o termo de pior caso dominará, devido a diferença de escala entre as unidades de $\overline{K}$ e da matriz identidade $\bar{I}$.

Usando a equação (6.108) e o fato de que:

$$\left|\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\right|^2 = \overline{D}\left(\bar{i}_0\right)\bar{I}\,\overline{D}\left(\bar{i}_0\right)^T \quad (6.115)$$

Onde $\bar{I}$ representa a matriz identidade. Seja a matriz positiva definida, $\overline{K}_w\left(\bar{i}_0\right)$:

$$\overline{K}_w\left(\bar{i}_0\right) = w\overline{K}\left(\bar{i}_0\right) + (1-w)\bar{I} \quad (6.116)$$

Para mostrarmos que $\overline{K}_w(\bar{i}_0)$ é positiva definida, assuma que $0 < w < 1$. Pois, os casos onde w se iguala a 1 ou a 0 são intuitivamente provados. Se existir um vetor $\bar{x}$ de forma que $\bar{x}^T \overline{K}_w(\bar{i}_0)\bar{x} \leq 0$, então temos por linearidade e pela definição de $\overline{K}_w(\bar{i}_0)$:

$$w\bar{x}^T \overline{K}_w(\bar{i}_0)\bar{x} \leq -(1-w)|\bar{x}|^2 \tag{6.117}$$

Como a matriz de covariância $\overline{K}(\bar{i}_0)$ é positiva definida, a desigualdade acima é satisfeita somente quando $\bar{x} = 0$.

Podemos, então, expressar nossa medida de risco de forma mais compacta, expressa em forma de produto matricial:

$$RM(w) = \overline{D}\overline{K}_w\overline{D}^T \tag{6.118}$$

Onde, por simplificação de notação, $\overline{D}$ representa o vetor de duração total, $\overline{K}_w$ a matriz ponderada de $\overline{K}$ (matriz de covariância de $\overline{\Delta i}$) e da matriz identidade.

6.3.2.3.
As restrições do problema

Como dissemos, no objetivo principal é minimizar o risco, minimizar nossa medida de risco $RM(w)$. Este problema torna-se trivial sem restrições em $\overline{D}$ pois, como pode-se facilmente notar, o valor mínimo de $RM(w)$ será zero, exatamente quando o vetor de duração total for igual a $\overline{0}$ (vetor zero). Neste caso, se a função preço refletir uma função de excesso, esta condição de vetor de duração zero implica que os ativos e os passivos têm suas durações parciais casadas. Logo, a única questão pendente é como manejar uma dada carteira de ativos de forma a atingirmos este vetor de duração total.

Utilizaremos, basicamente, três tipos de restrição. Primeiramente resolveremos o problema de otimização para a primeira restrição, depois para a segunda. A seguir resolveremos o problema para as duas restrições em conjunto. Em seguida, veremos como um conjunto limitado de ativos também pode ser considerado como um tipo de restrição.

Dois tipos de restrição são considerados neste problema. São elas:

$$\overline{D}(\bar{i}_0)\cdot \overline{N} = D \tag{6.119}$$

$$\overline{D}(\bar{i}_0)\cdot \overline{E}(\bar{i}_0) = r \tag{6.120}$$

Onde $\overline{N} \neq 0$ é um dado vetor de direção. A restrição (6.120) fixa o valor esperado de $R(\overline{\Delta i})$ igual a $1-r$ por (6.107), enquanto (6.119) restringe a duração direcional dada, $D_N(\bar{i}_0)$ igual a D. Quando $\overline{N} = (1,1,\ldots,1)$, a duração tradicional para variações paralelas (duração modificada) é restrita por (6.119).

Por simplicidade de notação, iremos freqüentemente suprimir a dependência da função de $\bar{i}_0$.

6.3.2.4. Minimização com restrição de duração direcional

Nesta etapa, queremos minimizar a medida de risco sujeito a restrição de duração direcional em uma ou várias direções. Ou seja, para dado $\overline{N} \neq 0$:

$$\begin{aligned} &Min \quad \overline{D}\overline{K}_w\overline{D}^T \\ &s.a. \quad \overline{D}\cdot\overline{N} = D \end{aligned} \tag{6.121}$$

Como $\overline{K}_w$ é uma matriz positiva definida, podemos aplicar a seção 6.3.4 diretamente. Neste caso, $\overline{C} = \overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}$ (será uma matriz de apenas um elemento). Substituindo este valor na equação (6.165) temos:

$\overline{C}\overline{\lambda} = \overline{D} \Rightarrow \overline{\lambda} = \dfrac{D}{\overline{C}}$, lembrando que $\overline{C}$ é uma matriz $(1\ x\ 1)$.

Substituindo em (6.164):

$$\overline{D}_o^T = \frac{D}{\overline{C}}\overline{K}_w^{-1}\overline{N} = \frac{D}{\overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}\overline{K}_w^{-1}\overline{N} \tag{6.122}$$

Substituindo na equação otimizada (medida de risco) e chamando esta medida minimizada de $RM_0(w)$ temos:

$$
\begin{aligned}
RM_0(w) &= \overline{D}_0\overline{K}_w\overline{D}_0{}^T = \left[\frac{D}{\overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}\overline{K}_w^{-1}\overline{N}\right]^T \overline{K}_w\left[\frac{D}{\overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}\overline{K}_w^{-1}\overline{N}\right] \\
&= \overline{N}^T\left(\overline{K}_w^{-1}\right)^T\left(\frac{D}{\overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}\right)^T \overline{K}_w \frac{D}{\overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}\overline{K}_w^{-1}\overline{N} = \\
&= \overline{N}^T\left(\overline{K}_w^{-1}\right)^T\left(\frac{D}{\overline{C}}\right)^T \overline{K}_w \frac{D}{\overline{C}}\overline{K}_w^{-1}\overline{N} = \left(\frac{D}{\overline{C}}\right)^2 \overline{N}\overline{K}_w^{-1}\overline{N} = \\
&= \frac{D^2}{\overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}
\end{aligned}
\qquad (6.123)
$$

Estas operações só foram possíveis pois, tanto D quanto a matriz $\overline{C}$ consistem de apenas um elemento. Além disso, usamos a propriedade de que a matriz $\overline{K}_w$, assim como sua inversa, são matrizes simétricas, sendo assim sua transposta igual a elas mesma.

Note que, como a matriz $\overline{K}_w$ é positiva definida, o vetor de duração solução (do problema de otimização) será o vetor zero se e somente se $\overline{D} = 0$. Além disso, o vetor total de duração solução produz o retorno esperado:

$$E\left[R\left(\overline{\Delta i}\right)\right] = 1 - r$$

Onde $r = \overline{D}_0 \cdot \overline{E}$. Lembrando que $\overline{D}_0$ é um vetor linha, $\overline{E}$ um vetor coluna e r é um escalar, podemos escrever r na forma matricial:

$$r = \overline{D}_0\overline{E} = \left(\overline{D}_0\overline{E}\right)^T = \overline{E}^T\overline{D}_o^T \qquad (6.124)$$

$$r = \frac{\overline{E}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}{\overline{N}^T\overline{K}_w^{-1}\overline{N}}D \qquad (6.125)$$

Percebemos que r varia proporcionalmente com D. E como $\overline{K}_w^{-1}$ é positiva definida, o denominador em (6.125) deve ser positivo, pois assumimos que $\overline{N} \neq 0$.

6.3.2.5.
Minimização com restrição de retorno esperado

Dado $\overline{E} \neq 0$, considere o seguinte problema de minimização: minimizar a medida de risco sujeito a restrição de um retorno esperado fixo. Matematicamente:

$$Min \quad \overline{D}\overline{K}_w\overline{D}^T \qquad (6.126)$$

Sujeito a $\overline{D} \cdot \overline{E} = r$ (6.127)

Usando novamente a seção 6.3.4 e seguindo a mesma idéia da seção anterior, podemos calcular o vetor de duração solução:

$$\overline{D}_0^T = \frac{r}{\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E}} \overline{K}_w^{-1} \overline{E} \qquad (6.128)$$

Logo, o valor mínimo em (6.126) é dado por:

$$\overline{D}_0 \overline{K}_w \overline{D}_o^T = \frac{r^2}{\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E}} \qquad (6.129)$$

6.3.2.6.
Minimização com ambas as restrições

Como dissemos, apresentamos o problema de otimização com dois tipos de restrição diferente. Agora, iremos resolver o mesmo problema de minimização utilizando simultaneamente as duas restrições. Antes de considerarmos o problema de minimização com duas restrições, note que estas restrições não precisam ser compatíveis. Por exemplo, se:

$\overline{N} = (1, \ldots, 1)$, e $\overline{E} = \overline{\Delta i} \overline{N}$ (6.130)

Percebemos claramente, neste caso, que o problema pode ser resolvido se e somente se $r = D\overline{\Delta i}$, pois caso contrário o conjunto de restrições é vazio. Nesse caso, apenas uma restrição pode ser formalmente usada.

Em geral, a compatibilidade é garantida se $\overline{E}$ e $\overline{N}$ não são proporcionais, ou seja, se eles são linearmente independentes.

Nosso problema de otimização é minimizar a medida de risco sujeito a restrição de duração direcional e de retorno esperado. Dado $\overline{N} \neq 0$, $\overline{E} \neq 0$ e $\overline{N}$ e $\overline{E}$ linearmente independentes, queremos:

Min $\overline{D} \overline{K}_w \overline{D}^T$ (6.131)

Sujeito a $\overline{D} \cdot \overline{N} = D$
$\overline{D} \cdot \overline{E} = r$ (6.132)

Novamente, usaremos os resultados da seção 6.3.4. Podemos claramente escrever a nossa matriz $\overline{C}$, que neste caso não será mais um escalar e sim uma matriz quadrada de dimensão 2.

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{N}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} & \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} \\ \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} & \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E} \end{pmatrix} \tag{6.133}$$

Escrevendo o sistema de equações do apêndice usando a notação do problema, temos:

$$\overline{C}\overline{\lambda} = \overline{r} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{N}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} & \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} \\ \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} & \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ r \end{pmatrix} \tag{6.134}$$

Resolvendo o sistema para λ_1 e λ_2 chegamos a:

$$\lambda_1 = \frac{\left(\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E}\right)D - \left(\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N}\right)r}{\left(\overline{N}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N}\right)\left(\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E}\right) - \left(\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N}\right)^2} \tag{6.135}$$

$$\lambda_2 = \frac{\left(\overline{N}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N}\right)r - \left(\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N}\right)D}{\left(\overline{N}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N}\right)\left(\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E}\right) - \left(\overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N}\right)^2} \tag{6.136}$$

Ainda usando a seção 6.3.4, podemos chegar ao vetor solução do problema de minimização:

$$\overline{D}_0^T = \lambda_1 \overline{K}_w^{-1} \overline{N} + \lambda_2 \overline{K}_w^{-1} \overline{E} \tag{6.137}$$

Substituindo este vetor em (6.108) conseguimos:

$$\overline{D}_0 \overline{K}_w \overline{D}_0^T = \lambda_1^2 \overline{N}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} + 2\lambda_1 \lambda_2 \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{N} + \lambda_2^2 \overline{E}^T \overline{K}_w^{-1} \overline{E} \tag{6.138}$$

Vale ressaltar, que estas preposições podem ser estendidas para refletir mais restrições, por exemplo, uma série de durações direcionais podem ser especificadas para vetores de durações independentes, junto de uma restrição de retorno, num dado período, constante.

6.3.2.7. Aplicações da teoria em imunização em ALM

Nesta seção aplicaremos os conceitos acima em imunização. Para tal, primeiramente iremos minimizar o risco de uma função de excesso, representada por $S(\bar{i})$. Ou seja, $P(\bar{i}) = S(\bar{i})$, onde $S(\bar{i}) = A(\bar{i}) - P(\bar{i})$ e $S(\bar{i}) \neq 0$. Chamando, novamente, $\overline{D}_0(\bar{i}_0)$ o vetor de duração total resultante da minimização, a estrutura da duração alvo dos ativos pode ser derivada da seguinte expressão:

$$\overline{D}_0^A(\bar{i}_0) = r^S \overline{D}_0(\bar{i}_0) + \left(1 - r^s\right)\overline{D}^P(\bar{i}_0) \tag{6.139}$$

Onde $r^S = \dfrac{S(\bar{i}_0)}{A(\bar{i}_0)}$ é a proporção de excesso em relação aos ativos e $\overline{D}^P(\bar{i}_0)$ é o vetor de duração total do passivo.

Apesar de parecer intuitivo estender a equação (6.139) para o caso em que $r^S = 0$ por simples substituição, pois neste caso teríamos $\overline{D}_0^A(\bar{i}_0) = \overline{D}^P(\bar{i}_0)$ como resultado, para tal, enfrentamos dois problemas:

$r^S \overline{D}_0(\bar{i}_0)$ não necessariamente é igual a zero, pois $\overline{D}_0(\bar{i}_0)$ não foi definido.

Como $\overline{D}_0(\bar{i}_0)$ não participa da solução, neste caso, a restrição original não necessariamente será satisfeita.

Para sairmos deste problema onde $S(\bar{i}_0) = 0$, consideraremos uma nova função:

$$R'(\overline{\Delta i}) = -\left(\overline{D}^A(\bar{i}_0) - \overline{D}^P(\bar{i}_0)\right) \cdot \overline{\Delta i} \qquad (6.140)$$

Esta equação é igual a aproximação de primeira ordem para a relação $S(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i}) / A(\bar{i}_0)$. A variância de $R'(\overline{\Delta i})$ é dada por (6.108) com $\overline{D} = \overline{D}^A - \overline{D}^P$. Conseqüentemente, as preposições podem ser aplicadas para se minimizar a variância média ponderada de $R'(\overline{\Delta i})$ e $\left|\overline{D}(\bar{i}_0)^A - \overline{D}(\bar{i}_0)^P\right|^2$ assim como em (6.114) sujeito a restrições em:

$$\left(\overline{D}^A(\bar{i}_0) - \overline{D}^P(\bar{i}_0)\right) \cdot \overline{N} \qquad (6.141)$$

a qual iguala a diferença entre as durações direcionais dos ativos e passivos na dada direção $\overline{N}$, e/ou:

$$-\left(\overline{D}^A(\bar{i}_0) - \overline{D}^P(\bar{i}_0)\right) \cdot \overline{E}(\bar{i}_0) \qquad (6.142)$$

a qual se iguala ao valor esperado de $S(\bar{i}_0 + \overline{\Delta i})$ como um percentual dos ativos correntes $A(\bar{i}_0)$. Assim como em (6.139), o vetor de duração total resultante, $\overline{D}_0(\bar{i}_0)$, então pode ser utilizado para encontrarmos uma expressão para a duração dos ativos:

$$D^A(i_0) = D_0(i_0) + D^P(i_0) \qquad (6.143)$$

6.3.2.8.
Operando a carteira para se atingir o vetor de duração alvo

Agora, consideraremos a questão de operarmos com ativos para atingirmos o vetor alvo de duração total. Assumimos que $P(\bar{i}_0)$ é dado com o vetor de duração $\overline{D}(\bar{i}_0)=(D_1(\bar{i}_0) \;\; \dots \;\; D_m(\bar{i}_0))$, e desejamos efetuar uma série de operações dentro de um conjunto de ativos, $P_1(\bar{i}),\dots,P_n(\bar{i})$ de forma que a nova função de preço, $P'(\bar{i})$, tenha vetor de duração total igual ao vetor resposta da minimização: $\overline{D}_0(\bar{i}_0)=(D_{10}(\bar{i}_0) \;\; \dots \;\; D_{m0}(\bar{i}_0))$.

Seja a_j a quantidade negociada do ativo com função de preço $P_j(\bar{i})$, de modo que $a_j > 0$ corresponde a uma compra e $a_j < 0$ a uma venda ou posição descoberta.

Baseado na propriedade da linearidade do vetor de duração total:

$$P'(\bar{i}_0)=P(\bar{i}_0)+\sum a_j \tag{6.144}$$

$$\overline{D'}(\bar{i}_0)=\frac{\left[P(\bar{i}_0)\overline{D}(\bar{i}_0)+\sum a_j\overline{D}_j(\bar{i}_0)\right]}{P'(\bar{i}_0)} \tag{6.145}$$

Onde $\overline{D}_j(\bar{i}_0)=(D_{j1}(\bar{i}_0) \;\; \dots \;\; D_{jm}(\bar{i}_0))$ denota o vetor de duração total de $P_j(\bar{i}_0)$.

Fazendo o vetor resultante de duração total em (6.145), $\overline{D'}(\bar{i}_0)$, igual ao vetor alvo $\overline{D}_0(\bar{i}_0)$, um sistema de equações para $\{a_j\}$ resulta e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum a_j\left[D_{jk}(\bar{i}_0)-D_{0k}(\bar{i}_0)\right]=P(\bar{i}_0)\left[D_{0k}(\bar{i}_0)-D_k(\bar{i}_0)\right] \tag{6.146}$$

onde $k=1,\dots,m$ e os somatórios variam de $j=1$ a $j=m$.

Em geral, (6.146) pode ser resolvida apenas se a coleção dos n vetores de duração total: $\{\overline{D}_j(\bar{i}_0)-\overline{D}_0(\bar{i}_0)\}$, que formam as colunas dos coeficientes da matriz, tiverem posto m. Esta imposição do posto implica que $n \geq m$. Ou seja, o número de ativos negociados n deve ser maior do que o número de vértices na curva de juros m. Se $n=m$, a solução para (6.146) é única. Caso $n>m$, teremos muitas soluções.

Se $(a_1 \quad \cdots \quad a_n)$ é solução de (6.146), iremos em geral ter $\sum a_j \neq 0$. Ou seja, recursos adicionais serão necessários se $\sum a_j > 0$, enquanto desinvestimento será necessário se $\sum a_j < 0$. Como requeremos que $n \geq m$ para resolvermos (6.146) no caso geral, é claro que restrições de operações de caixa neutro adicionais, $\sum a_j = 0$, pode ser adicionada a este sistema somente se $n \geq m+1$. Neste caso, obtemos o seguinte sistema:

$$\sum a_j D_{jk}(\bar{i}_0) = P(\bar{i}_0)[D_{0k}(\bar{i}_0) - D_k(\bar{i}_0)] \qquad k = 1, \ldots, m \qquad (6.147)$$

$$\sum a_j = 0 \qquad (6.148)$$

A restrição de caixa neutro em (6.148) pode ser explicitamente incorporada nas primeiras m equações ao fazendo-se $a_n = -\sum_{j=1}^{n-1} a_j$, por exemplo, produzindo:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j \left[D_{jk}(\bar{i}_0) - D_{nk}(\bar{i}_0)\right] = P(\bar{i}_0)[D_{0k}(\bar{i}_0) - D_k(\bar{i}_0)] \qquad (6.149)$$

onde $k = 1, \ldots, m$.

Esse sistema pode ser expresso em notação matricial:

$$\overline{A}\,\overline{a}' = P(\bar{i}_0)[\overline{D}_0(\bar{i}_0) - \overline{D}(\bar{i}_0)]^T \qquad (6.150)$$

onde $\overline{a}' = (a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1})$ é o vetor de operações truncado e $\overline{A}$ é a matriz $[m\,x(n-1)]$ com vetores coluna iguais a $[\overline{D}_j(\bar{i}_0) - \overline{D}_n(\bar{i}_0)]^T$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Enfim, vimos que, quando a matriz $\overline{A}$ tiver posto igual a m, é possível alcançarmos qualquer vetor de duração alvo.

Além disso, é importante comentarmos o que significa um valor negativo no vetor de operações. Primeiramente, mais direto, significa que o título deve ser vendido short (venda a descoberto). Caso seja impraticável ou não permitido por regulamentos, uma saída seria "criar" uma posição sintética, utilizando opções, *swaps*, etc. Por fim, um passivo que aproxime a estrutura de duração do ativo a ser vendido, poderia ser vendido.

6.3.3.
Imunização estocástica com poucos ativos

Novamente, nosso objetivo é minimizar risco. Só que agora, os ativos não existem mais em número e variedade ilimitada. Temos um número de ativos muito mais reduzido do que na parte anterior. Logo, nem todos os vetores de duração alvo poderão ser atingidos. Por isso, temos que adicionar outras restrições, que façam com que o vetor de duração solução do problema de otimização possa ser atingido com os ativos disponíveis. Naturalmente, essas novas limitações do problema, produzirão portfólio que serão sub-otimos, do ponto de vista dos resultados obtidos num mundo onde temos muitos ativos.

6.3.3.1. O modelo geral: mudança de variáveis

Assuma que existam $n \geq 2$ ativos, com respectivos vetores de duração total, $\overline{D}_1(\bar{i}_0),\ldots,\overline{D}_n(\bar{i}_0)$. Para uma negociação geral de a_j unidades do ativo j, representada pelo vetor $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, o vetor de duração resultante de (6.145) é satisfeito, onde $\overline{D}(\bar{i}_0)$ é o vetor total de duração do portfólio inicial.

Adicionaremos a restrição $\sum a_j = 0$. Conseqüentemente, o resultado do vetor de duração total em (6.145) pode ser expresso como:

$$D'(i_0) = D(i_0) + \sum a_j D_j(i_0) \tag{6.151}$$

onde apenas por simplificação de notação em (6.151) a_j é equivalente a $a_j / P(\bar{i}_0)$ em (6.145)

A restrição $\sum a_j = 0$ pode ser refletida na expressão (6.151) fazendo-se:

$$a_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \tag{6.152}$$

Logo:

$$\overline{D}'(\bar{i}_0) = \overline{D}(\bar{i}_0) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \left[\overline{D}_j(\bar{i}_0) - \overline{D}_n(\bar{i}_0)\right] \tag{6.153}$$

Como em (6.150), seja $\overline{A}$ a matriz de dimensão $[m\ x\ (n-1)]$, com colunas iguais aos vetores: $\left[\overline{D}_j(\bar{i}_0) - \overline{D}_n(\bar{i}_0)\right]^T$, $j = 1,\ldots,n-1$. O posto de $\overline{A}$, que chamaremos de $\rho(\overline{A})$, não poderá exceder o menor valor entre $n-1$ e m. Seja também, $\Re$ a coleção de vetores em (6.153) para todo $\bar{a}' = (a_1,\ldots,a_{n-1})$, o qual é visto ser um espaço afim em E^m, espaço euclidiano de dimensão m. Um espaço afim é um sub-espaço linear de E^m, traduzido por um vetor fixo (neste caso igual a $\overline{D}(\bar{i}_0)$).

Reitano (1993) mostra que se $\rho(\overline{A}) = m$, então $\Re = E^m$. Se $\rho(\overline{A}) = m - v < m$, então existem v vetores linearmente independentes em E^m, $\overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_v$, de forma que $\overline{A}^T \overline{N}_j = 0$, e:

$$\Re = \left\{ \overline{D} \middle| \overline{D} \cdot \overline{N}_j = \overline{D}(\bar{i}_0) \cdot \overline{N}_j, \quad j = 1, \ldots, v \right\} \tag{6.154}$$

Ou seja, $\Re$ se iguala a interseção de v hiperplanos.

Logo, o problema de minimização resultante é:

$$Min \quad \overline{D}\overline{K}_w \overline{D}^T \tag{6.155}$$

$$Sujeito\ a \quad \overline{D} \cdot \overline{N}_j = r_j \tag{6.156}$$

onde

$$r_j = \overline{D}(i_0) \cdot \overline{N}_j \tag{6.157}$$

para $j = 1, \ldots, v$. Claramente, se $v = 0$ (6.156) e (6.157) não fornecem algum tipo de restrição e este problema se reduz ao caso anterior (de muitos ativos). Neste caso, o posto da matriz $\overline{A}$ será igual a m e então, $n \geq m + 1$.

No caso mais geral, restrições adicionais em $\overline{D}$, como (6.119) e (6.120), podem ser adicionadas ao problema dependendo do tamanho de *v*, pois o número total de restrições não pode exceder m.

6.3.3.2. Minimização com dois ativos

Dado $n = 2$ ativos, a matriz $\overline{A}$ será o vetor coluna $(m\,x1)$: $\left[\overline{D}_1(\bar{i}_0) - \overline{D}_2(\bar{i}_0)\right]^T$, o qual tem posto igual a 1 para $\overline{D}_1(\bar{i}_0) \neq \overline{D}_2(\bar{i}_0)$. Conseqüentemente, como vimos na seção acima, existem $m-1$ vetores independentes: $\overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_{m-1}$, que podem ser usados em (6.156) para restringir o vetor de duração total alvo, $\overline{D}_0(\bar{i}_0)$, o qual será obtido ao negociarmos estes dois ativos.

Como visto acima, estes $m-1$ vetores estão no espaço nulo de $\overline{A}^T$, um vetor linha $(1\ x\ m)$. Ou seja, estamos procurando $m-1$ vetores que satisfaçam:

$$\left[\overline{D}_1(\bar{i}_0)-\overline{D}_2(\bar{i}_0)\right]\cdot \overline{N}_j = 0, \quad j=1,\ldots,m-1 \tag{6.158}$$

No problema associado de minimização com restrição, no máximo uma restrição pode ser adicionada em (6.156). Por exemplo, um retorno esperado pode ser usado como restrição se $\overline{E}(\bar{i}_0)$ for independente de $\overline{N}_j$, ou uma duração direcional pode ser restringida , novamente sujeito a este critério de independência.

6.3.3.3.
Minimização com múltiplos ativos

Ao aumentarmos o número de ativos n, em geral, o número de restrições v em (6.156) diminui. Por exemplo, dado 3 ativos pros quais $\overline{D}_1(\bar{i}_0)-\overline{D}_3(\bar{i}_0)$ e $\overline{D}_2(\bar{i}_0)-\overline{D}_3(\bar{i}_0)$ são linearmente independentes, o posto de $\overline{A}$ será igual a 2, e teremos $m-2$ restrições em (6.156), onde $\overline{N}_j$ satisfaz:

$$\left[\overline{D}_1(\bar{i}_0)-\overline{D}_3(\bar{i}_0)\right]\cdot \overline{N}_j = 0 \tag{6.159}$$

$$\left[\overline{D}_2(\bar{i}_0)-\overline{D}_3(\bar{i}_0)\right]\cdot \overline{N}_j = 0 \qquad \text{para } j=1,\ldots,m-2 \tag{6.160}$$

Dado $n=m+1$ ativos, de modo que os vetores $\overline{D}_j(\bar{i}_0)-\overline{D}_n(\bar{i}_0)$ sejam linearmente independentes para $j=1,\ldots,n-1$, a matriz $\overline{A}$ será quadrada e terá posto igual a m. Conseqüentemente, o sistema associado:

$$\overline{A}^T\overline{N} = 0 \tag{6.161}$$

será resolvido somente se $\overline{N}=0$, e as restrições em (6.156) serão sem efeito. Ou seja, a limitação de negócios não traz nenhuma restrição para o problema de minimização.

Em resumo, seja qualquer um dos problemas de minimização com restrição apresentados anteriormente, sempre podemos implementar uma estratégia de operação para atingirmos o vetor de duração $\overline{D}_0(\bar{i}_0)$. Ou seja, o sistema de equações (6.150) poderá sempre ser resolvido, pois o posto de $\overline{A}$ é igual a *m*.

6.3.4.
Resolução do problema geral de minimização com restrição

Seja $\overline{K}$ uma matriz $(m\ x\ m)$, simétrica, positiva definida e $\{\overline{B}_j\}$ uma coleção p de vetores independentes de dimensão m, de forma que $p \leq m$. Dado $\{r_j\}_{j=1}^{p}$, considere o seguinte problema de otimização:

$$Min \quad \overline{x}^T \overline{K}\overline{x} \tag{6.162}$$

$$Sujeito\ a \quad \overline{x}^T \overline{B}_j = r_j \quad j = 1, \ldots, p \tag{6.163}$$

Então, uma solução $\overline{x}_0$ existe e é dada por:

$$\overline{x}_0 = \sum \lambda_j \overline{K}^{-1} \overline{B}_j \tag{6.164}$$

Onde $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ é a única solução de:

$$\overline{C}\overline{\lambda} = \overline{r} \tag{6.165}$$

$$C_{jk} = \overline{B}_j^T \overline{K}^{-1} \overline{B}_k \text{ e } r = (r_1, \ldots, r_p) \tag{6.166}$$

6.4.
Relações e propriedades da duração e convexidade

6.4.1.
Propriedade 1

Seja $P(\overline{i}) = P_1(\overline{i}) + P_2(\overline{i})$. Seja d_j a diferenciação em respeito a i_j. Então:

$$d_j P = d_j P_1 + d_j P_2$$

$$d_{jk} P = d_{jk} P_1 + d_{jk} P_2$$

Dividindo ambas as expressões por $P(i)$, $P(\overline{i}) \neq 0$ temos:

$$\frac{d_j P}{P} = \frac{d_j P_1 + d_j P_2}{P} \Rightarrow \overline{D}(P) = \frac{1}{P}\frac{P_1}{P_1} d_j P_1 + \frac{1}{P}\frac{P_2}{P_2} d_j P_2$$

$$\frac{d_{jk} P}{P} = \frac{d_{jk} P_1 + d_{jk} P_2}{P} \Rightarrow \overline{C}(P) = \frac{1}{P}\frac{P_1}{P_1} d_{jk} P_1 + \frac{1}{P}\frac{P_2}{P_2} d_{jk} P_2$$

Podemos chegar as seguintes propriedades:

$$\overline{D}(P) = a_1 \overline{D}(P_1) + a_2 \overline{D}(P_2) \tag{P. 1}$$

$$\overline{C}(P) = a_1 \overline{C}(P_1) + a_2 \overline{C}(P_2) \tag{P. 2}$$

onde $a_j = \dfrac{P_j(\bar{i})}{P(\bar{i})}$

6.4.2. Propriedade 2

Analogamente, seja $P(\bar{i}) = P_1(\bar{i}) + P_2(\bar{i})$ e $\overline{N} \neq 0$ dados. Então para $P_1(\bar{i})$, $P_2(\bar{i})$ e $P(\bar{i}) \neq 0$:

$$\overline{D}_N(P) = a_1\overline{D}_N(P_1) + a_2\overline{D}_N(P_2) \qquad \text{(P. 3)}$$

$$\overline{C}_N(P) = a_1\overline{C}_N(P_1) + a_2\overline{C}_N(P_2) \qquad \text{(P. 4)}$$

onde $a_j = \dfrac{P_j(\bar{i})}{P(\bar{i})}$

6.4.3. Propriedade 3

Seja $P(i) = P_1(i)P_2(i)$ e $P(i) \neq 0$. Seja d_j definido como acima, então:

$$d_j P = P_1(d_j P_2) + (d_j P_1)P_2$$

$$d_{jk} P = (d_{jk} P_1)P_2 + P_1(d_{jk} P_2) + (d_j P_1)(d_k P_2) + (d_j P_2)(d_k P_1)$$

Dividindo ambas por P temos:

$$\frac{d_j P}{P} = \frac{P_1(d_j P_2)}{P_1 P_2} + \frac{(d_j P_1)P_2}{P_1 P_2} \Rightarrow D_j(P) = D_j(P_2) + D_j(P_1)$$

$$\frac{d_{jk} P}{P} = \frac{(d_{jk} P_1)P_2}{P_1 P_2} + \frac{P_1(d_{jk} P_2)}{P_1 P_2} + \frac{(d_j P_1)(d_k P_2)}{P_1 P_2} + \frac{(d_j P_2)(d_k P_1)}{P_1 P_2}$$

$$\Rightarrow C_{jk}(P) = C_{jk}(P_1) + C_{jk}(P_2) + D_j(P_1)D_k(P_2) + D_j(P_2)D_k(P_1)$$

Com isso, podemos chegar a nossa terceira propriedade:

$$\overline{D}(P) = \overline{D}(P_1) + \overline{D}(P_2) \qquad \text{(P. 5)}$$

$$\overline{C}(P) = \overline{C}(P_1) + \overline{C}(P_2) + \overline{D}(P_1)^T\,\overline{D}(P_2) + \overline{D}(P_2)^T\,\overline{D}(P_1) \qquad \text{(P. 6)}$$

onde $\overline{D}^T$ é a matriz coluna transposta da matriz linha $\overline{D}$.

6.4.4. Propriedade 4

Novamente, seja $P(i) = P_1(i)P_2(i)$ e $\overline{N} \neq 0$ dados. Então para $P(i) \neq 0$:

$$\overline{D}_N(P) = \overline{D}_N(P_1) + \overline{D}_N(P_2) \qquad \text{(P. 7)}$$

$$\overline{C}_N(P) = \overline{C}_N(P_1) + \overline{C}_N(P_2) + 2\overline{D}_N(P_1)\overline{D}_N(P_2) \qquad \text{(P. 8)}$$

6.4.5. Propriedade 5

Seja $P(\bar{i}) = \dfrac{1}{Q(\bar{i})}$ e $Q(\bar{i}) \neq 0$. Como feito acima:

$$d_j P = \frac{-d_j Q}{Q^2}$$

$$d_{jk} P = \frac{-d_{jk} Q}{Q^2} + \frac{2(d_j Q)(d_k Q)}{Q^3}$$

Logo,

$$\overline{D}(P) = -\overline{D}(Q) \qquad \text{(P. 9)}$$

$$\overline{C}(P) = -\overline{C}(Q) + 2\overline{D}(Q)^T\,\overline{D}(Q) \qquad \text{(P. 10)}$$

6.4.6. Propriedade 6

De novo, seja $P(\bar{i}) = \dfrac{1}{Q(\bar{i})}$, $Q(\bar{i}) \neq 0$ e $N \neq 0$. Então:

$$D_N(P) = -D_N(Q) \qquad \text{(P. 11)}$$

$$C_N(P) = -C_N(Q) + 2D_N^2(Q) \qquad \text{(P. 12)}$$

6.4.7. Propriedade 7

Seja $P(\bar{i}) = \dfrac{P_1(\bar{i})}{P_2(\bar{i})}$, $P_2(\bar{i}) \neq 0$. Combinando (P.2) e (P.3) temos:

$$\overline{D}(P) = \overline{D}(P_1) + \overline{D}\left(\frac{1}{P_2}\right) = \overline{D}(P_1) - \overline{D}(P_2)$$

$$\begin{aligned}\overline{C}(P) &= \overline{C}(P_1) - \overline{C}\left(\frac{1}{P_2}\right) + \overline{D}(P_1)^T \overline{D}\left(\frac{1}{P_2}\right) + \overline{D}\left(\frac{1}{P_2}\right)^T \overline{D}(P_1) \\ &= \overline{C}(P_1) - \overline{C}(P_2) + 2\overline{D}(P_2)^T \overline{D}(P_2) - \overline{D}(P_1)^T \overline{D}(P_2) - \overline{D}(P_2)^T \overline{D}(P_1)\end{aligned}$$

Então para $P(i) \neq 0$ temos:

$$\overline{D}(P) = \overline{D}(P_1) - \overline{D}(P_2) \tag{P. 13}$$

$$\begin{aligned}&\overline{C}(P) = \overline{C}(P_1) - \overline{C}(P_2) + \overline{D}(P_2)^T \left[\overline{D}(P_2) - \overline{D}(P_1)\right] \\ &+ \left[\overline{D}(P_2) - \overline{D}(P_1)\right]^T \overline{D}(P_2)\end{aligned} \tag{P. 14}$$

6.4.8.
Propriedade 8

Seja $P(\bar{i}) = \dfrac{P_1(\bar{i})}{P_2(\bar{i})}$, $P_2(\bar{i}) \neq 0$ e $\overline{N} \neq 0$. Então para $P(\bar{i}) \neq 0$:

$$D_N(P) = D_N(P_1) - D_N(P_2) \tag{P. 15}$$

$$C_N(P) = C_N(P_1) - C_N(P_2) + 2D_N(P_2)[D_N(P_2) - D_N(P_1)] \tag{P. 16}$$

6.4.9.
Propriedade 9

Seja $\bar{i}_0$ o vetor da curva de juros e $D(\bar{i}_0)$ e $C(\bar{i}_0)$ a duração e a convexidade utilizando-se a abordagem de variação paralela e $M = (1,\ldots,1)$ o vetor de direção da variações paralelas e defina a função de preço $P(\bar{i}) = P(\bar{i}_0 + i\overline{M})$. Então:

$$P'(i) = \sum P_j(\bar{i}_0 + i\overline{M})$$

$$P''(i) = \sum\sum P_{jk}(\bar{i}_0 + i\overline{M})$$

Avaliando em $i = 0$ e dividindo por $P(0) = P(\bar{i}_0)$ chegamos a:

$$D(\bar{i}_0) = \sum D_j(\bar{i}_0) \tag{P. 17}$$

$$C(\bar{i}_0) = \sum\sum C_{jk}(\bar{i}_0) \tag{P. 18}$$

6.4.10. Propriedade 10

Seja $P_1(\bar{i})$ e $P_2(\bar{i})$ funções preço com vetores de duração total correspondentes a $\overline{D}_1(\bar{i})$ e $\overline{D}_2(\bar{i})$ e matrizes de convexidade $\overline{C}_1(\bar{i})$ e $\overline{C}_2(\bar{i})$. E seja $P(\bar{i}) = P_1(\bar{i}) + P_2(\bar{i})$. Então, para $P(\bar{i}_0) \neq 0$, e diretamente da propriedade de aditividade chegamos a:

$$\overline{D}(\bar{i}_0) = \frac{\left[P_1(\bar{i}_0)\overline{D}_1(\bar{i}_0) + P_2(\bar{i}_0)\overline{D}_2(\bar{i}_0)\right]}{P(\bar{i}_0)} \tag{P. 19}$$

$$\overline{C}(\bar{i}_0) = \frac{\left[P_1(\bar{i}_0)\overline{C}_1(\bar{i}_0) + P_2(\bar{i}_0)\overline{C}_2(\bar{i}_0)\right]}{P(\bar{i}_0)} \tag{P. 20}$$

6.4.11. Propriedade 11

Seja $\overline{N} \neq 0$ o vetor de direção. Então,

$$D_N(\bar{i}_0) = \overline{N} \cdot \overline{D}(\bar{i}_0) = \sum n_j D_j(\bar{i}) \tag{P. 21}$$

$$C_N(\bar{i}_0) = \overline{N}^T \overline{C}(\bar{i}_0)\overline{N} = \sum\sum n_j n_k C_{jk}(\bar{i}) \tag{P. 22}$$

6.4.12. Propriedade 12

Seja $\overline{N} \neq 0$ o vetor de direção. Então,

$$\frac{d}{di} D(i_0) = D^2(i_0) - C(i_0) \tag{P. 23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{N}} D_N(\bar{i}_0) = D_N^2(\bar{i}_0) - C_N(\bar{i}_0) \tag{P. 24}$$

$$\frac{\partial}{\partial i_j} D_k(\bar{i}_0) = D_j(\bar{i}_0) D_k(\bar{i}_0) - C_{jk}(\bar{i}_0) \tag{P. 25}$$

$$\frac{\partial}{\partial i_j} D(\bar{i}_0) = D(\bar{i}_0) D_j(\bar{i}_0) - \sum_k C_{jk}(\bar{i}_0) \tag{P. 26}$$

6.4.13. Propriedade 13

Seja $P(\bar{i})$ a função preço e $\overline{D}(\bar{i}_0)$ o vetor de duração total avaliado em $\bar{i}_0$. Então para todos os vetores de direção $\overline{N}$,

$$-\left|\overline{D}(\bar{i}_0)\right| \cdot \left|\overline{N}\right| \leq D_N(\bar{i}_0) \leq \left|\overline{D}(\bar{i}_0)\right| \cdot \left|\overline{N}\right| \qquad \text{(P. 27)}$$

6.4.14. Propriedade 14

Seja $\mathbf{D}(i_0)$ o vetor de duração total associado a duração $D(i_0)$, então:

$$\left|\overline{D}(\bar{i}_0)\right| \geq \frac{\left|D(\bar{i}_0)\right|}{\sqrt{m}} \qquad \text{(P. 28)}$$

6.4.15. Propriedade 15

Seja $P(\bar{i})$ a função preço e $\overline{C}(\bar{i}_0)$ a matriz de convexidade total avaliada em $\bar{i}_0$, então:

$$\lambda_1\left|\overline{N}\right|^2 \leq C_N(i_0) \leq \lambda_m\left|\overline{N}\right|^2 \qquad \text{(P. 29)}$$

6.4.16. Propriedade 16

Dada uma função de duração direcional $D_N(i)$, a duração compound direcional, $D_N D_N(i)$ é definida para $D_N \neq 0$ como sendo:

$$D_N D_N(i) = \frac{-\dfrac{\partial D_N}{\partial N}}{D_N(i)} \qquad \text{(P. 30)}$$

Quando $N = (1,1,\ldots,1)$, o vetor de variação paralela, esta duração compound é chamada de duração da duração e representada por $DD(i)$.

6.4.17. Propriedade 17

Dada uma função de duração parcial $D_k(i)$, a jk-esima duração compound parcial, $D_j D_k(i)$ é definida para $D_k \neq 0$ como sendo:

$$D_j D_k(i) = \frac{-\frac{\partial D_k}{\partial i_j}}{D_k(i)} \qquad \text{(P. 31)}$$

Usando a propriedade 12 podemos chegar as seguintes equações:

$$DD(i) = \frac{C(i)}{D(i)} - D(i) \qquad \text{(P. 32)}$$

$$D_N D_N(i) = \frac{C_N(i)}{D_N(i)} - D_N(i) \qquad \text{(P. 33)}$$

$$D_j D_k(i) = \frac{C_{jk}(i)}{D_k(i)} - D_j(i) \qquad \text{(P. 34)}$$