5
Exemplo de imunização utilizando o modelo de ACP

Neste capítulo iremos apresentar exemplos da teoria apresentada no capítulo anterior com o intuito de clarificar todas as definições e técnicas utilizadas para se chegar ao modelo de imunização de Barber e Cooper. Nesta etapa os exemplo serão descritos passo a passo de forma que tudo fique bem entendido.

O primeiro exemplo será utilizando-se o modelo de direção única e o segundo usando o modelo de direção múltipla. Após isto, adaptaremos a teoria de Barber para que possamos utilizar papeis com cupom para a técnica de imunização. Para todos os casos utilizaremos a estrutura a termo das taxas pré de juros brasileiras no período de 01 de Outubro de 2001 até 19 de Dezembro de 2002.

Em primeiro lugar será feita a análise de componentes principais da estrutura das taxas de juros. Para tal, utilizaremos apenas os dados da curva de juros até o dia 14 de Novembro de 2002. De posse dos autovetores, iremos imunizar em 18 de Novembro de 2002 um fluxo de passivos utilizando o modelo de duração previamente mostrado. Por fim, acompanharemos o comportamento da carteira imunizada até o último dia da série.

5.1.
Análise de componentes principais da estrutura a termo

Como dito, utilizaremos os dados até o dia 14 de novembro de 2002 para efetuarmos a análise de componentes principais. A evolução da estrutura a termo (Apêndice B) se encontra da seguinte forma: uma matriz de 279 linhas (datas da curva) por 9 colunas (vértices da curva). Usando a notação previamente introduzida, x_{ti} representa a diferença entre a taxa na data t e na data t-1 no vértice i. Efetuando as subtrações necessárias chegamos a matriz X , que será uma matriz de dimensão $(278\ x\ 9)$.

Da análise de componentes principais, sabemos que:

$$\left(X'X\right)u_1 = \lambda_1\left(u_1\right) \qquad \textbf{(5.1)}$$

Logo, para chegarmos ao primeiro componente principal, precisamos encontrar o maior autovalor possível para a matriz $\left(X'X\right)$. Para se encontrar o segundo componente precisamos do segundo maior autovalor e assim em diante.

Efetuando-se os cálculos chegamos a seguinte matriz de autovalores e a seus correspondentes autovetores:

Matriz de autovalor Λ:

0.0914	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0114	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0032	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.0016	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0006	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.0003	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0001	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000

Tabela 5.1: Matriz de autovalores (ACP da curva de juros brasileira)

Matriz de autovetor U:

	u1	u2	u3	U4	u5	u6	u7	u8	u9
30	0.105	0.408	-0.301	0.329	0.55	-0.344	0.391	0.154	-0.161
60	0.143	0.457	-0.3	0.161	0.023	0.172	-0.37	-0.555	0.424
90	0.184	0.438	-0.222	0.003	-0.34	0.283	-0.323	0.474	-0.448
180	0.265	0.346	0.041	-0.377	-0.444	-0.013	0.646	-0.063	0.221
360	0.341	0.156	0.318	-0.413	0.123	-0.507	-0.316	-0.293	-0.362
540	0.385	0.054	0.311	-0.095	0.292	0.028	-0.204	0.539	0.57
720	0.416	-0.067	0.334	0.149	0.29	0.637	0.22	-0.249	-0.297
1080	0.452	-0.217	0.116	0.659	-0.439	-0.328	-0.011	-0.028	0.025
1800	0.472	-0.485	-0.668	-0.297	0.09	0.018	-5E-04	0.001	-0.006

Tabela 5.2: Matriz de autovetores (ACP da curva de juros brasileira)

Sabemos que a matriz de componentes principais pode ser escrita da forma:

$$Z = XU \qquad (5.2)$$

Somente como conferencia, pode-se verificar que:

$$Z'Z = \Lambda \text{, } u_i^{'}u_i = 1 \text{ e } u_i^{'}u_j = 0 \text{, } i \neq j \qquad (5.3)$$

Nosso próximo passo é descobrir quanto cada componente explica o modelo. Para isto, precisamos calcular a soma de todos os autovalores (traço da matriz Λ) e dividir cada um dos autovalores por este somatório. O resumo esta na tabela abaixo.

Componente	Autovalor	Proporção	Acumulado	Soma
1	0.091363	84.02%	84.02%	0.091363
2	0.011383	10.47%	94.49%	0.102746
3	0.003165	2.91%	97.40%	0.105911
4	0.001605	1.48%	98.87%	0.107515
5	0.000636	0.58%	99.46%	0.108151
6	0.000322	0.30%	99.75%	0.108473
7	0.000164	0.15%	99.90%	0.108637
8	5.78E-05	0.05%	99.96%	0.108695
9	4.81E-05	0.04%	100.00%	0.1087

Tabela 5.3: Componentes principais (curva de juros brasileira)

Percebemos que os autovalores decrescem rapidamente, o que indica que temos uma boa aproximação de X mesmo com um número pequeno de direções fundamentais.

No primeiro exemplo, caso de direção única, utilizaremos apenas o primeiro autovetor como componente para se imunizar a carteira. Já no segundo exemplo, a mesma base de dados será utilizada, logo a mesma análise de componentes principais. A diferença é que, no primeiro exemplo, utilizamos apenas o primeiro componente, e neste caso, iremos utilizar mais de um componente. A quantidade de componentes que se deve utilizar não é uma regra geral. Quando adicionamos mais direções ao modelo, aumentamos o poder de explicação do modelo mas a uma taxa decrescente. Então, deve pesar até onde é importante se aumentar o número de direções, dado que cada direção adicionada representa uma nova restrição ao problema, o que não só aumenta a complexidade do problema mas, também diminui o conjunto de soluções. Para este exemplo, pegaremos os autovalores que representem no mínimo 97% da variância total (neste caso os 3 primeiros componentes). Os 3 primeiros componentes (autovetores) estão apresentados no gráfico a seguir.

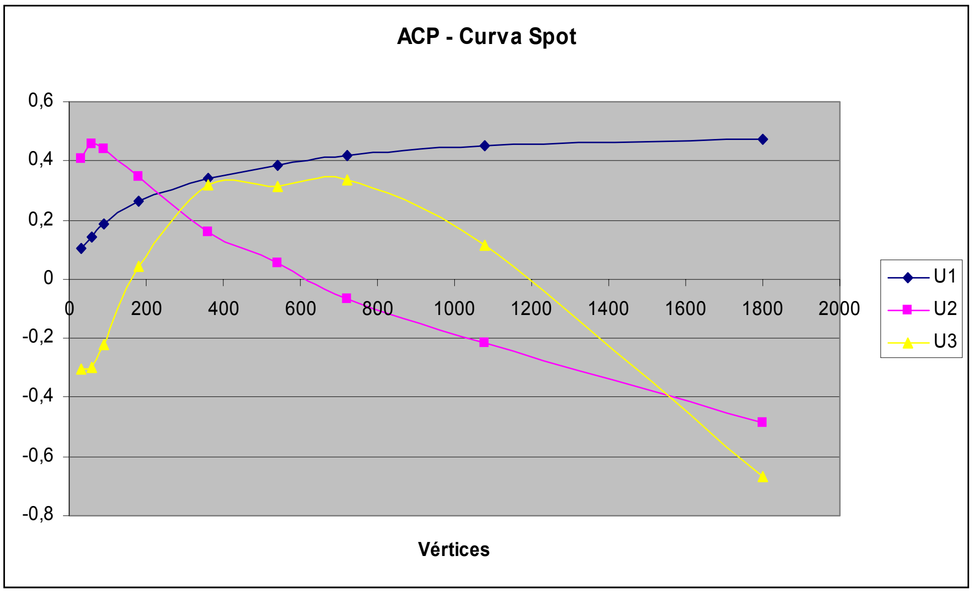

Ilustração 5.1: Gráfico dos 3 primeiros componentes

5.2. Imunizando em uma única direção

Feita a análise de componentes principais, temos um método para selecionar a melhor direção para se imunizar um portfólio. Iremos definir ainda a duração do excesso D_S como:

$$D_S = \frac{\sqrt{N}}{S(0)} \sum_{i=1}^{n} P_i(0) C_i u_1(t_i) t_i \tag{5.4}$$

O propósito da multiplicação da duração por raiz de N é para que, caso todos os componentes do autovetor normalizado sejam iguais, obtenhamos a duração de Fisher-Weil. Demonstraremos isto a seguir.

Seja um vetor ortonormal x de dimensão $(j\ x\ 1)$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_j \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Sabemos das propriedades de um vetor ortonormal que:

$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = 1$, onde $x \cdot x$ representa o produto escalar do vetor x pelo vetor x. Ou seja:

$$x \cdot x = x_1 x_1 + \cdots + x_j x_j \tag{5.6}$$

Logo,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_j^2} = 1 \qquad (5.7)$$

Se todos os elementos de x forem iguais a uma constante k, teremos:

$$\|x\| = \sqrt{k^2 + \cdots + k^2} = \sqrt{jk^2} = k\sqrt{j} \qquad (5.8)$$

Para que o vetor permaneça ortogonal, é necessário que k seja:

$$\|x\| = k\sqrt{j} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{j}} \qquad (5.9)$$

Substituindo na nossa fórmula de duração:

$$D = \frac{\sqrt{N}}{S}\sum_{i=1}^{n} P_i(0)C_i \frac{1}{\sqrt{j}} t_i = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} P_i(0)C_i t_i = D_{FW} \qquad (5.10)$$

Nosso objetivo é imunizar um fluxo de passivo contra flutuações na taxa de juros na direção do primeiro componente. Para isso, é necessário que:

$$D_S = 0 \qquad (5.11)$$

Como exemplo, suponha que o fluxo de passivos que queremos imunizar seja o seguinte:

	Vencimento	Valor de Face
P1	60	150.000,00
P2	180	300.000,00
P3	360	80.000,00
P4	540	140.000,00

Tabela 5.4: Fluxo de passivo ao ser imunizado utilizando a ACP

Assuma que iremos imunizar este fluxo no dia 18 de Novembro de 2002, logo, as taxas utilizadas para se descontar este fluxo serão as da curva do dia 18. Caso a data de vencimento não coincida com o vértice da curva de juros, o procedimento seguido será a interpolação linear (o que não é o caso).

Baseado nesta estrutura, calculamos o valor presente dos ativos, tal como a duração, segundo o modelo acima, na direção do primeiro componente.

	Valor Presente
P1	144.152,05
P2	261.238,16
P3	57.952,67
P4	81.645,97
	544.988,84

Tabela 5.5: Valor presente do fluxo a ser imunizado utilizando a ACP

E a duração $D_P^{U1} = \mathbf{0{,}5778}$.

As condições de imunização requerem que o valor presente dos ativos, A e o valor presente do passivo, P sejam iguais assim como suas respectivas durações:

$$A = P \qquad (5.12)$$

$$D_A^1 = D_P^1 \qquad (5.13)$$

Uma solução para este sistema de duas equações lineares existirá sempre que tivermos dois títulos com fluxos de caixa linearmente independentes. Então, por simplicidade, iremos supor que existam apenas dois papéis (zero cupom) disponíveis: um com vencimento em 90 dias e outro com vencimento em 720 dias.

	Vencimento
A1	90
A2	720

Tabela 5.6: Vencimento dos ativos que irão imunizar o fluxo de passivo

O valor presente e a duração do ativo são:

$$A = A_1 + A_2 \qquad (5.14)$$

$$D_A = \frac{\sqrt{N}}{A}\left(A_1 t_{A1} u_1(t_{A1}) + A_2 t_{A2} u_1(t_{A2})\right) \qquad (5.15)$$

Logo, o sistema de equação que queremos resolver é o seguinte:

$$P = A_1 + A_2 \qquad (5.16)$$

$$D_P = \frac{\sqrt{N}}{A}\left(A_1 t_{A1} u_1(90) + A_2 t_{A2} u_1(720)\right) \qquad (5.17)$$

Arrumando as equações e escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \left(D_P - u_1(90) t_{A1}\sqrt{N}\right) & \left(D_P - u_1(90) t_{A2}\sqrt{N}\right) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \qquad (5.18)$$

As únicas variáveis são A_1 e A_2. Resolvendo o sistema acima chegamos aos valores abaixo:

	Data de Vencimento	Valor de Face	Valor Presente
A1	90	471.673,68	443.362,36
A2	720	220.722,05	101.626,49
			544.988,84

Tabela 5.7: Resultado do modelo utilizando a ACP (única direção)

Com estes valores podemos calcular a duração do ativo: 0,5778.

Como o valor presente e a duração são iguais, dizemos que a carteira está imunizada na direção do primeiro componente.

Após a imunização, acompanhamos a evolução da carteira por 9 dias de acordo com os últimos dias da estrutura a termo. O resultado obtido foi o seguinte:

Data	Carteira	Carteira / Ativos
18/nov/02	0,00	0,00%
19/nov/02	(187,73)	-0,03%
20/nov/02	69,81	0,01%
21/nov/02	454,23	0,08%
22/nov/02	659,48	0,12%
25/nov/02	1.001,85	0,18%
26/nov/02	1.361,72	0,25%
27/nov/02	1.748,49	0,32%
28/nov/02	1.714,78	0,31%
29/nov/02	1.586,97	0,29%
2/dez/02	2.334,05	0,42%
3/dez/02	2.306,81	0,42%
4/dez/02	2.361,03	0,43%
5/dez/02	2.619,66	0,47%
6/dez/02	1.932,64	0,35%
9/dez/02	2.003,88	0,36%
10/dez/02	1.908,59	0,35%
11/dez/02	911,27	0,16%
12/dez/02	1.579,85	0,28%
13/dez/02	1.779,98	0,32%
16/dez/02	2.101,59	0,38%
17/dez/02	2.431,30	0,43%
18/dez/02	2.349,84	0,41%
19/dez/02	2.682,23	0,47%

Tabela 5.8: Evolução da carteira imunizada pela técnica de ACP

5.3.
Imunizando em múltiplas direções

Como dissemos, para este caso utilizaremos os 3 primeiros componentes para se imunizar o fluxo de passivo. Teoricamente, a incorporação destas duas novas direções ao modelo promete uma imunização mais precisa. (twist+short volatile). Devemos estender a definição de duração do excesso de um único fator para este modelos de múltiplos fatores. Para cada direção $k = 1,...,K$ teremos:

$$D_S^k = \frac{\sqrt{N}}{S(0)} \sum_{i=1}^{n} P_i(0) C_i u_k(t_i) t_i \qquad (5.19)$$

As condições de imunização requerem, assim como no modelo de direção única, que o valor presente dos ativos seja igual ao valor presente dos passivos e que a duração do excesso em cada direção fundamental seja igual a zero.

Como exemplo, suponha que o fluxo de passivos que queremos imunizar seja o mesmo utilizado no exemplo anterior:

	Vencimento	**Valor de Face**
P1	60	150.000,00
P2	180	300.000,00
P3	360	80.000,00
P4	540	140.000,00

Tabela 5.9: Fluxo de passivo ao ser imunizado utilizando a ACP

Novamente, assuma que iremos imunizar este fluxo no dia 18 de Novembro de 2002. E testá-lo após este dia.

Baseado na estrutura a termo para o dia 18 de Novembro de 2002 e nos autovetores, calculamos o valor presente dos ativos, tal como a duração nas 3 direções, segundo o modelo acima:

	Valor Presente
P1	144.152,05
P2	261.238,16
P3	57.952,67
P4	81.645,97
	544.988,84

Tabela 5.10: Valor presente do fluxo a ser imunizado utilizando a ACP

Durações:

$D_P^{\mathbf{1}} = \mathbf{0{,}5778}$

$D_P^{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}3952}$

$D_P^{\mathbf{3}} = \mathbf{0{,}3011}$

As condições de imunização requerem que o valor presente dos ativos, A e o valor presente do passivo, P sejam iguais assim como suas respectivas durações em cada direção:

$$A = P \tag{5.20}$$

$$D_A^1 = D_P^1 \tag{5.21}$$

$$D_A^2 = D_P^2 \tag{5.22}$$

$$D_A^3 = D_P^3 \tag{5.23}$$

Uma solução para este sistema de quatro equações lineares existirá sempre que tivermos quatro títulos com fluxos de caixa linearmente independentes. Então, por simplicidade, iremos supor que existam apenas 4 papéis (zero cupom) disponíveis: um com vencimento em 90 dias e outro com vencimento em 720 dias.

	Vencimento
A1	30
A2	90
A3	180
A4	720

Tabela 5.11: Ativos selecionados para imunizar o fluxo

O valor presente e a duração em cada direção do ativo são:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \tag{5.24}$$

$$D_A^1 = \frac{\sqrt{N}}{A}\left[A_1 u_1(t_{A1})t_{A1} + A_2 u_1(t_{A2})t_{A2} + A_3 u_1(t_{A3})t_{A3} + A_4 u_1(t_{A4})t_{A4}\right] \tag{5.25}$$

$$D_A^2 = \frac{\sqrt{N}}{A}\left[A_1 u_2(t_{A1})t_{A1} + A_2 u_2(t_{A2})t_{A2} + A_3 u_2(t_{A3})t_{A3} + A_4 u_2(t_{A4})t_{A4}\right] \tag{5.26}$$

$$D_A^3 = \frac{\sqrt{N}}{A}\left[A_1 u_3(t_{A1})t_{A1} + A_2 u_3(t_{A2})t_{A2} + A_3 u_3(t_{A3})t_{A3} + A_4 u_3(t_{A4})t_{A4}\right] \tag{5.27}$$

Logo, o sistema de equação que queremos resolver escrito na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} D_P^1 - u_1(t_{A1})t_{A1}\sqrt{N} & D_P^1 - u_1(t_{A2})t_{A2}\sqrt{N} & D_P^1 - u_1(t_{A3})t_{A3}\sqrt{N} & D_P^1 - u_1(t_{A4})t_{A4}\sqrt{N} \\ D_P^2 - u_2(t_{A1})t_{A1}\sqrt{N} & D_P^2 - u_2(t_{A2})t_{A2}\sqrt{N} & D_P^2 - u_2(t_{A3})t_{A3}\sqrt{N} & D_P^2 - u_2(t_{A4})t_{A4}\sqrt{N} \\ D_P^3 - u_3(t_{A1})t_{A1}\sqrt{N} & D_P^3 - u_3(t_{A2})t_{A2}\sqrt{N} & D_P^3 - u_3(t_{A3})t_{A3}\sqrt{N} & D_P^3 - u_3(t_{A4})t_{A4}\sqrt{N} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Neste sistema de equações as variáveis são A_1, A_2, A_3 e A_4. Resolvendo o sistema acima chegamos aos seguintes valores:

	Data de Vencimento	**Valor de Face**	**Valor Presente**
A1	30	213.052,48	209.014,83
A2	90	(339.035,98)	(318.685,98)
A3	180	700.830,87	610.279,22
A4	720	96.390,39	44.380,78
Total			**544.988,84**

Tabela 5.12: Resultado do modelo de imunização com ACP

De posse dos valores de face dos ativos, podemos calcular as durações para conferirmos se os cálculos foram feitos corretos.

$D_A^{\mathbf{1}} = \mathbf{0{,}5778}$

$D_A^{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}3952}$

$D_A^{\mathbf{3}} = \mathbf{0{,}3011}$

Conforme pode-se ver, tanto o valor presente quanto a duração em cada uma das 3 direções são as mesmas para os ativos e passivos. Podemos então dizer que esta carteira está imunizada na direção dos três primeiros componentes.

Assim como feito no exemplo anterior, após a imunização, acompanhamos a evolução da carteira por 9 dias de acordo com os últimos dias da estrutura a termo. O resultado obtido foi o seguinte:

Data	Carteira	Carteira / Ativos
18/nov/02	0,00	0,00%
19/nov/02	170,43	0,03%
20/nov/02	18,16	0,00%
21/nov/02	(130,30)	-0,02%
22/nov/02	(441,72)	-0,08%
25/nov/02	(544,07)	-0,10%
26/nov/02	(285,77)	-0,05%
27/nov/02	(178,32)	-0,03%
28/nov/02	(293,84)	-0,05%
29/nov/02	(475,09)	-0,09%
2/dez/02	(421,33)	-0,08%
3/dez/02	(893,09)	-0,16%
4/dez/02	(730,56)	-0,13%
5/dez/02	(631,11)	-0,11%
6/dez/02	(659,03)	-0,12%
9/dez/02	(787,65)	-0,14%
10/dez/02	(634,22)	-0,12%
11/dez/02	(616,41)	-0,11%
12/dez/02	(689,90)	-0,12%
13/dez/02	(708,38)	-0,13%
16/dez/02	(857,84)	-0,15%
17/dez/02	(948,76)	-0,17%
18/dez/02	(1.466,84)	-0,26%
19/dez/02	(1.378,75)	-0,24%

Tabela 5.13: Evolução da carteira após imuniuzação - ACP (múltiplas direções)

5.4.
Imunizando em uma única direção utilizando títulos com cupom

Vimos, um exemplo de imunização em uma única direção com ativos zero cupom. O que facilitou muito os cálculos, visto que tínhamos duas equações e duas incógnitas, que eram os únicos fluxos de cada um dos ativos. Na pratica, percebemos que muitos ativos possuem cupons periódicos dependentes do fluxo de caixa final, mais conhecido como valor de face do papel. Neste caso, podemos escrever cada cupom em termos do valor de face do ativo, tendo assim, para cada fluxo com cupom, apenas uma incógnita.

Considere a ACP feita, o mesmo fluxo de passivo do caso anterior e a mesma equação que define a duração do excesso. Conseqüentemente, a duração do passivo e seu valor presente será idêntico ao caso inicial.

Novamente, queremos imunizar o fluxo de passivo contra variações na curva de juros, utilizando somente o primeiro componente. Ou seja, queremos:

$$D_S = 0 \tag{5.29}$$

A diferença agora é que cada um dos dois ativos que iremos utilizar tem mais de um fluxo. Por simplificação, consideraremos apenas dois fluxos para cada um dos ativos. Os ativos disponíveis são os seguintes:

	Cupom	Vencimento
A1	30 (10% VF)	90
A2	360 (12% VF)	720

Tabela 5.14: Seleção de ativos com cupom para a imunização utilizando ACP

Queremos resolver o seguinte sistema:

$$A = P \tag{5.30}$$

$$D_A^1 = D_P^1 \tag{5.31}$$

Neste caso encontrar o valor de A na é tão trivial, por isso, diferentemente do caso anterior, trabalharemos com os valores futuros ao invés de utilizarmos valores presentes. Seja a_j o valor de face do ativo j e a_{cj} o valor do cupom do ativo j. Então podemos escrever A como:

$$A = A_1 + A_2 + A_{c1} + A_{c2} \tag{5.32}$$

Onde A_j e o valor presente do fluxo final do ativo j e A_{cj} o valor presente do cupom do ativo j. Utilizando capitalização contínua e chamando de c_j a taxa de cupom do papel j temos:

$$\begin{aligned} A = {} & [a_1 \exp(-r_1 t_1) + a_{c1} \exp(-r_{c1} t_{c1})] + \\ & [a_2 \exp(-r_2 t_2) + a_{c2} \exp(-r_{c2} t_{c2})] \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned} A = {} & a_1 [\exp(-r_1 t_1) + c_1 \exp(-r_{c1} t_{c1})] + \\ & a_2 [\exp(-r_2 t_2) + c_2 \exp(-r_{c2} t_{c2})] \end{aligned} \tag{5.34}$$

Substituindo os devidos valores na equação de duração, podemos encontrar a duração de A:

$$D_A = \frac{\sqrt{N}}{A} \begin{pmatrix} a_1 [\exp(-r_1 t_1) t_1 u_1(t_1) + 0{,}1 \exp(-r_{c1} t_{c1}) t_{c1} u_1(t_{c1})] \\ + a_2 [\exp(-r_2 t_2) t_2 u_1(t_2) + \exp(-r_{c2} t_{c2}) t_{c2} u_1(t_{c2})] \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

Nossa primeira equação só sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$A = P \Rightarrow a_1\left[\exp(-r_1 t_1) + c_1 \exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right)\right] + a_2\left[\exp\left(-r_2 t_2\right) + c_2 \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right)\right] = P \quad (5.36)$$

A segunda equação pode ser feita da seguinte forma:

$$\frac{\sqrt{N}}{A}\begin{pmatrix} a_1\left[\exp(-r_1 t_1) t_1 u_1(t_1) + 0{,}1\exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right) t_{c1} u_1(t_{c1})\right] \\ + a_2\left[\exp\left(-r_2 t_2\right) t_2 u_1(t_2) + \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right) t_{c2} u_1(t_{c2})\right]\end{pmatrix} = D_P \quad (5.37)$$

Rearrumando temos:

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix} a_1\left[\exp(-r_1 t_1) t_1 u_1(t_1) + 0{,}1\exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right) t_{c1} u_1(t_{c1})\right] \\ + a_2\left[\exp\left(-r_2 t_2\right) t_2 u_1(t_2) + \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right) t_{c2} u_1(t_{c2})\right]\end{pmatrix} = D_P A \quad (5.38)$$

Substituindo A ficamos com:

$$D_P\begin{pmatrix} a_1\left[\exp(-r_1 t_1) + c_1 \exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right)\right] \\ + a_2\left[\exp\left(-r_2 t_2\right) + c_2 \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right)\right]\end{pmatrix} = \sqrt{N}\begin{pmatrix} a_1\left[\exp(-r_1 t_1) t_1 u_1(t_1) + 0{,}1\exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right) t_{c1} u_1(t_{c1})\right] \\ + a_2\left[\exp\left(-r_2 t_2\right) t_2 u_1(t_2) + \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right) t_{c2} u_1(t_{c2})\right]\end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Por fim chegamos a:

$$a_1\left\{D_P\left[\exp(-r_1 t_1) + c_1 \exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right)\right] - \sqrt{N}\begin{bmatrix}\exp(-r_1 t_1) t_1 u_1(t_1) + \\ 0{,}1\exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right) t_{c1} u_1(t_{c1})\end{bmatrix}\right\} + a_2\left\{D_P\left[\exp\left(-r_2 t_2\right) + c_2 \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right)\right] - \sqrt{N}\begin{bmatrix}\exp\left(-r_2 t_2\right) t_2 u_1(t_2) + \\ \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right) t_{c2} u_1(t_{c2})\end{bmatrix}\right\} = 0 \quad (5.40)$$

Somente por simplificação da notação, chamaremos o multiplicador de a_1 de Q e o multiplicador de a_2 de E.

Escrevendo em forma matricial, nosso sistema de equação fica:

$$\begin{bmatrix} Q & E \\ \left[\exp(-r_1 t_1) + c_1 \exp\left(-r_{c1} t_{c1}\right)\right] & \left[\exp\left(-r_2 t_2\right) + c_2 \exp\left(-r_{c2} t_{c2}\right)\right]\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Resolvendo o sistema para os dados acima, temos:

	Data de Vencimento	Valor Futuro	Valor Presente
AC1	30	41.426,10	40.641,01
A1	90	414.260,98	389.395,74
AC2	360	25.201,59	18.256,24
A2	720	210.013,21	96.695,85
			544.988,84

Tabela 5.15: Resposta do modelo de imunização

Com os valores dos fluxos, podemos calcular a duração do ativo. Que será:

$D_A = \mathbf{0{,}57736}$

Logo, como a duração e o valor presente de ativos e passivos são iguais, dizemos que a carteira esta imunizada.

Abaixo segue a evolução da carteira imunizada:

Data	Carteira	Carteira / Ativos
18/nov/02	0,00	0,00%
19/nov/02	(187,73)	-0,03%
20/nov/02	69,81	0,01%
21/nov/02	454,23	0,08%
22/nov/02	659,48	0,12%
25/nov/02	1.001,85	0,18%
26/nov/02	1.361,72	0,25%
27/nov/02	1.748,49	0,32%
28/nov/02	1.714,78	0,31%
29/nov/02	1.586,97	0,29%
2/dez/02	2.334,05	0,42%
3/dez/02	2.306,81	0,42%
4/dez/02	2.361,03	0,43%
5/dez/02	2.619,66	0,47%
6/dez/02	1.932,64	0,35%
9/dez/02	2.003,88	0,36%
10/dez/02	1.908,59	0,35%
11/dez/02	911,27	0,16%
12/dez/02	1.579,85	0,28%
13/dez/02	1.779,98	0,32%
16/dez/02	2.101,59	0,38%
17/dez/02	2.431,30	0,43%
18/dez/02	2.349,84	0,41%
19/dez/02	2.682,23	0,47%

Tabela 5.16: Evolução da carteira imunizada com ativos com cupom

Quando comparamos o resultado obtido acima e o de títulos zero-cupom (tebela 5.8), percebemos que, em termos de imunização, a adição do cupom ao problema pouco melhora a resposta do modelo. Para comprovar ainda mais este resultado, está apresentado no apêndice um gráfico com a evolução de diversas carteiras com diferentes percentuais de cupom (apêndice B).

5.5. Comentários

Pudemos perceber que todos os exemplos de imunização apresentaram um corpotamento bem estável, ou seja, após efetuada a imunização, o valor da carteira se alterou muito pouco. Além disso, pode-se notar que o modelo de imunização utilizando análise de componentes principais é uma ferramenta de imunização mais poderosa do que os modelos de imunização para variações paralelas. O que já era esperado, visto que a curva de juros não se movimenta em paralelo. Isto pode ser visto pelo gráfico que segue (ilustração 5.2). Percebemos que a estratégia de imunização utilizando apenas o primeiro componente é superior a estratégia para variações paralelas e por sua vez, a estratégia utilizando 3 componentes é mais eficaz do que as outras duas.

Como dissemos na seção 5.5, a utilização de títulos com cupom aumentam muito a dificuldade de cálculo e pouco agrega ao modelo de imunização. Por este motivo, na aplicação que será feita mais a frente com este modelo, utilizaremos apenas títulos zero-cupom.

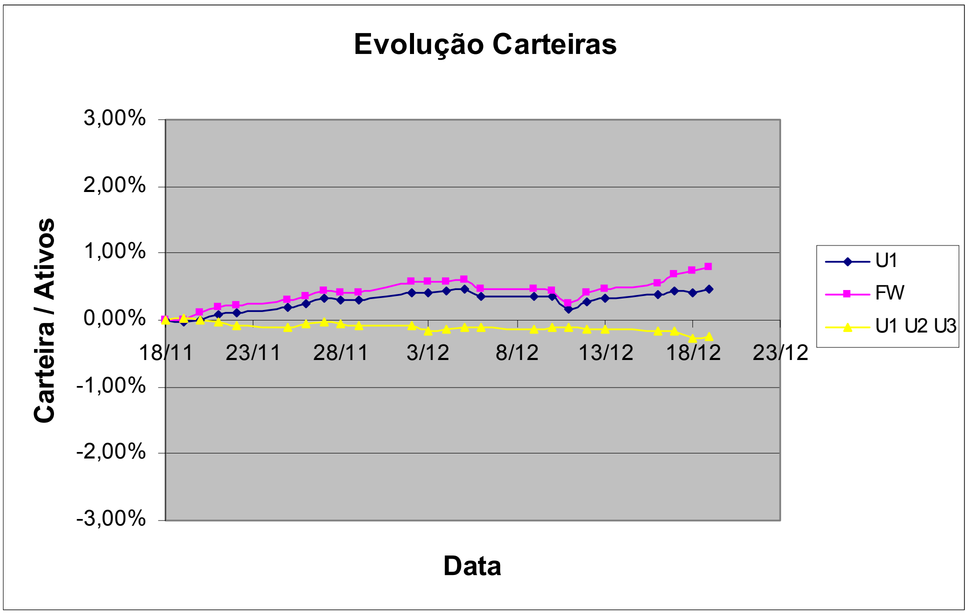

Ilustração 5.2: Comparação entre as diferentes estratégias de imunização