

3 Teoria de imunização

Como foi visto, o ALM é um gerenciamento conjunto de ativos e passivos como o intuito de diminuir ou até eliminar os riscos enfrentados pelas instituições financeiras. Destes riscos, o risco de taxa de juros representa uma das principais fontes de perda para as instituições financeiras (este risco será melhor detalhado mais a frente).

Sabemos que ao se gerenciar os ativos e passivos de um banco, de um fundo de pensão, o administrador pode adotar duas formas de gerenciamento: a administração ativa ou a administração passiva. A administração ativa é um tipo de estratégia na qual o gestor está sempre operando, buscando obter uma rentabilidade superior a um índice de referencia preestabelecido. Já a administração passiva busca acompanhar este índice preestabelecido, ou ainda, no caso de um fundo de pensão, busca construir um portfólio de custo mínimo que tenha a capacidade de honrar todos os compromissos e obrigações futuras.

Na área de estratégia passiva, no gerenciamento de carteiras de renda fixa, os métodos mais conhecidos e difundidos para se controlar risco de taxa de juros são: o modelo de imunização e o modelo de carteira dedicada. Apesar de ambos terem como objetivo proteger a carteira de uma instituição contra flutuações nas taxas de juros (fazer com que a instituição seja capaz de cumprir todas suas obrigações no caso de um fundo de pensão; proteger um excesso de caixa no caso de um banco), a aproximação de cada estratégia é bem diferente. No caso de imunização, o risco de taxa de juros é controlado combinando-se a duração dos ativos e passivos, de forma que quando as taxas se movimentam, ambos os lados do balanço sejam afetados da mesma maneira, mantendo o valor presente inalterado. Já no caso da dedicação, os fluxos de caixa são “casados”, de modo que sempre haja caixa disponível para cumprir as obrigações.

Qual estratégia um investidor deve escolher? A resposta tradicional é que uma carteira imunizada é mais arriscada do que uma carteira dedicada, logo, prometendo um retorno mais alto. Caso o investidor esteja disposto a aceitar

algum risco, ele deve optar pelo portfólio imunizado, caso contrário, optar pelo dedicado. No entanto, esta resposta nos leva a questões adicionais, como, por exemplo, quais riscos são assumidos na estratégia de imunização e quão grandes estes riscos são.

Por isso, é necessário se entender mais explicitamente como funciona a estratégia de imunização e quais os riscos incorridos.

As necessidades de imunização variam dependendo do tipo de instituição. Por exemplo, um banco está interessado em imunizar seu valor de mercado contra essas flutuações, já um fundo de pensão está interessado em honrar pagamentos a seus pensionistas. Embora tenham enfoques diferentes, todos estão interessados em métodos para se controlar risco de taxa de juros, risco esse que pode comprometer o valor da empresa e a capacidade de pagamento de obrigações futuras.

Vale ressaltar que para um bom entendimento das estratégias de imunização é preciso ter um bom conhecimento de como os instrumentos de renda fixa se comportam em relação a variações nas taxas de juros. Mais especificamente, precisamos conhecer bem o conceito de duração e convexidade. Tanto os conceitos básicos quanto os mais avançados e também suas limitações. Para tal, dedicaremos uma seção para as definições e teorias existentes sobre estrutura a termo, duração e convexidade.

3.1. A estratégia de imunização

O termo imunização foi usado em finanças, pela primeira vez, por F.M. Redington em seu artigo publicado em 1952 (Review of the Principles of Life-Office Valuations), significando o investimento em ativos de forma que o portfólio existente seja imune a uma mudança geral nas taxas de juros. A idéia surgiu de uma preocupação dele em assegurar a solvência de companhias seguradoras (seguro de vida). Até então, o termo utilizado para este tipo de estratégia era *matching of investments*, casamento, combinação de investimentos. Redington dizia que a palavra *matching* (estar compatível, adaptar; ser um rival do mesmo nível, comparar, comparar-se a, unir-se, casar-se, verificar a identidade entre os detalhes dos dados) tem uma conotação muito ampla e geral de forma que

se tornava necessário se adotar um novo termo com uma significância mais precisa. De posse desta nova definição, podemos dizer que a imunização é uma forma particular de combinação de investimentos.

Redington mostrou que se a duração dos ativos e passivos são iguais e que se a dispersão dos fluxos de caixa do ativo em torno da duração fosse superior à dispersão dos fluxos do passivo, o portfólio está protegido contra uma variação local (infinitesimal) paralela na curva de juros, ou seja, mostrou que a combinação de duração garante que o valor do portfólio, como uma função de sua taxa de retorno, é um mínimo local quando avaliado na curva de mercado corrente. Duas décadas depois de publicado o trabalho de Redington, a estratégia de imunização não sofreu significativas alterações. A partir daí, com o aumento da volatilidade nas taxas de juros, principalmente na década de 70, muitos pesquisadores examinaram e vêm examinando o problema de imunização de um portfólio de títulos.

A técnica de imunização está intimamente ligada à definição de duração, por isso, muitos trabalhos em imunização foram baseados na definição de duração de Macaulay (1938), que supõe uma curva de juros plana e variações paralelas. Mantendo ainda a hipótese de variações paralelas, mas relaxando a suposição de curva plana, Fisher e Weil (1971) desenvolveram um novo conceito de duração e mostraram que é possível imunizar globalmente um portfólio com um único passivo (ou com fluxo de caixa negativo) contra choques paralelos na curva de juros spot por combinação de duração (*duration matching*).

A hipótese de que a curva de juros só pode variar paralelamente tem preocupado muitos pesquisadores, pois esta suposição não é percebida na prática. Esta preocupação vem levando os pesquisadores a desenvolverem estratégias de imunização e conseqüentemente definições mais complexas de duração e convexidade, para variações não-paralelas e a examinar os riscos associados com mudanças não-paralelas. Recentemente, Reitano (1991, 1993, 1996) desenvolveu uma estratégia de imunização local para variações na curva de juros não-paralela e Barber e Cooper (1996) desenvolveram uma estratégia de imunização direcional se utilizando da técnica de análise de componentes principais. Ambas as estratégias serão estudadas mais a fundo neste trabalho. Além destas, muitas outras estratégias de imunização global para variações não-paralelas particulares foram desenvolvidas por Bierwag (1977 e 1978), Bierwag, Kaufman, e A. Toevs

(1983), Khang (1979) e Cooper (1977). Fong e Vasicek (1984) examinaram o efeito de uma variação arbitrária na carteira imunizada contra choques paralelos. Eles concluíram que a imunização clássica tem fronteira inferior que depende de dois fatores: da magnitude da mudança nas taxas e da estrutura do portfólio. E argumentaram que o segundo fator, chamado de M-quadrado, mede o risco de imunização. Mais especificamente, o M-quadrado mede o risco de imunização de um portfólio que foi imunizado contra variações paralelas nas taxas. Como dito, a estratégia de imunização está totalmente baseada no conceito de duração, logo, vale ressaltar que estas novas técnicas trazem consigo novos conceitos de duração e convexidade, como a duração de Fisher-Weil, a duração direcional, a duração parcial a duração nos vértices. Muitos destes conceitos serão amplamente utilizados ao longo do trabalho e estão apresentados detalhadamente no apêndice.

O processo de imunização pode ser dividido em três fases:

- Fase de planejamento
- Fase de implementação
- Fase de monitoramento

Na fase de planejamento deve-se clarificar os objetivos da imunização. Deve-se estabelecer as metas, por exemplo, se o objetivo é eliminar risco ou simplesmente estruturar um portfólio que diminua o risco existente. Se o objetivo é garantir o retorno de um excesso de caixa ou garantir que haja fundos suficientes para cobrir todas as obrigações futuras. Além disso, deve-se determinar qualquer restrição de caráter legal, de agências regulatórias, que possam impactar a fase de implementação (por exemplo, a resolução 2829 do Banco Central do Brasil que aprova regulamento estabelecendo as diretrizes pertinentes à aplicação dos recursos das entidades fechadas de previdência privada).

Durante a fase de implementação devemos escolher o tipo de modelo que será utilizado. Se for utilizado um modelo mais básico, baseado na duração de Macaulay ou se será utilizado um modelo mais avançado, baseado em simulação, em otimização. Além disso, deve-se determinar o universo de ativos (baseado em critérios como: qualidade de crédito, liquidez, etc.) que possam formar a carteira imunizada. Definir margens apropriadas para outros riscos existentes e definir horizontes para rebalanceamentos automáticos na carteira e gatilhos que indiquem revisões antecipadas devido a grandes movimentações nos níveis de taxa de juros.

A partir do momento em que a implementação é concluída, imediatamente, entra em cena a fase de monitoramento. É importante estar sempre monitorando para se garantir que a imunização continua agindo de forma apropriada. É preciso estar atento a mudanças no nível da curva de juros, na duração e convexidade do portfólio, em variações demográficas (caso de fundos de pensão), em mudanças nos regulamentos aos quais a carteira está sujeita, em mudanças na qualidade dos títulos que compõem o portfólio, etc.

Embora em teoria a estratégia de imunização permita que um investidor obtenha uma rentabilidade esperada, não está isenta de críticas e limitações. Uma crítica que teve grande difusão foi aquela efetuada por Ingersoll et al (1978). Eles disseram que, dados alguns processos estocásticos que governam o comportamento das taxas de juro, podem surgir oportunidades de arbitragem lucrativas sem risco entre passivo com cupom de valor diferente e passivo zero cupom. Para se livrar de algumas limitações, processos estocásticos, teorias de otimização e matemática avançada são cada vez mais utilizados. Mas, sabemos que ao passo que medidas, técnicas mais complexas são adicionadas, o poder de explicação aumenta, mas a uma taxa decrescente. Logo, é preciso um balanceamento entre parcimoniosidade e poder de explicação.

Como dito acima, a imunização foi um termo criado para melhor definir combinações dos fluxos de ativos e passivos. No entanto, existem outras formas de se fazer esta combinação, por exemplo a técnica de carteira dedicada. Apesar destes modelos não serem o foco da dissertação, iremos apresentá-los de forma simplificada.

3.2. Imunização de um único passivo

Um conceito importante em imunização é o período de planejamento ou horizonte de investimento. Pode ser definido como o horizonte de tempo no qual o investimento está ativo. Ou seja, é o tempo no qual a estratégia de imunização está baseada. Para se compreender melhor o conceito de imunização, primeiro apresentaremos um exemplo básico e depois apresentaremos os conceitos matemáticos que suportam a teoria.

3.2.1. Exemplo

Para que seja melhor compreendida a idéia de imunização, começaremos esta seção com um exemplo básico retirado de Fabozzi (2000).

Para compreendermos os princípios básicos da imunização de um portfólio contra variações nas taxas de juros, considere a situação a seguir. Uma companhia de seguros vende um papel (*GIC* – papel que garante a taxa a cada seis meses) com as seguintes características:

Preço de venda	\$ 8.820.262
Cupom	6,25% a.s.
Vencimento	5,5 anos

Tabela 3.1: Exemplo de imunização de um *GIC*

O valor futuro que a seguradora terá de pagar será: \$ 17.183.033. Iremos estudar as seguintes possibilidades que o gestor do fundo pode usar para tentar imunizar o título acima:

1. Comprar um título no valor de \$ 8.820.262 que está a venda ao par com 12,5% de yield-to-maturity com vencimento em 5,5 anos.
2. Comprar um título no valor de \$ 8.820.262 a venda ao par com 12,5% de yield-to-maturity com vencimento em 15 anos e carregá-lo até os 5,5 anos.
3. Comprar um título no valor de \$ 8.820.262 vendendo ao par com 12,5% de yield-to-maturity com vencimento em 0,5 anos e aplicar o valor futuro dele no yield de mercado.
4. Comprar um título de 8 anos com cupom de 10,125% vendendo ao preço de 88,20262 ao yield 12,5%. Compraremos 10.000.000 deste papel, formando o valor de 8.820.262.

Veremos agora, quais seriam as conseqüências caso cada uma das possibilidades acima fosse efetuada (todos os cálculos estão apresentados no apêndice B).

1. Se o yield não mudar e os cupons puderem ser reinvestidos a 12,5% ao ano, o valor acumulado será igual ao do *GIC*. Se as taxas subirem, o valor alcançado será maior e se caírem, será menor.

Logo, investir num papel com a taxa interna de retorno igual não garante que o valor alvo será atingido.

2. De novo se o yield não mudar o valor alvo é atingido. Mas, se as taxas subirem, o valor alcançado será menor e se caírem, será maior.
3. O valor alvo será alcançado somente se as taxas permanecerem a 12,5% ou subirem.
4. Neste caso, o valor alvo é alcançado independente do que ocorre com as taxas. Para entender-se porque isto acontece vamos calcular a duração dos títulos utilizados acima.

Duração dos títulos:

Título	Duração (em anos)
1	4,14
2	7,12
3	0,50
4	5,50

Tabela 3.2: Duração de diferentes títulos candidatos a imunizar um *G/C*

Percebemos que o papel que garante, no mínimo, o valor alvo, independente de flutuações nas taxas, tem a duração igual ao horizonte de investimento do passivo da seguradora. Este é o ponto-chave. Para se imunizar um portfólio contra variações nas taxas de juros, deve-se investir num título com as seguintes características:

- A duração de Macaulay igual ao horizonte de investimento.
- O valor presente do fluxo de caixa do título igual ao valor presente do passivo futuro.

Na seção seguinte veremos estas características mais formalmente.

3.2.2.

Condições para imunização de um único passivo

Antes de iniciarmos, é importante sabermos como se comporta a relação entre preço de um título e sua taxa (*yield*). Sabemos que uma propriedade importante é que o preço de um título varia na direção oposta da mudança na taxa requerida. Isto ocorre devido ao fato de que o preço de um título, ou seu valor presente, é o valor de seus fluxos de caixa futuros descontados a esta taxa. Logo, quando esta taxa subir, o preço cairá e quando a taxa cair, seu valor presente será

maior. A ilustração 3.1 mostra a relação preço-taxa para um título qualquer sem opções. Percebemos que o gráfico tem um formato convexo.

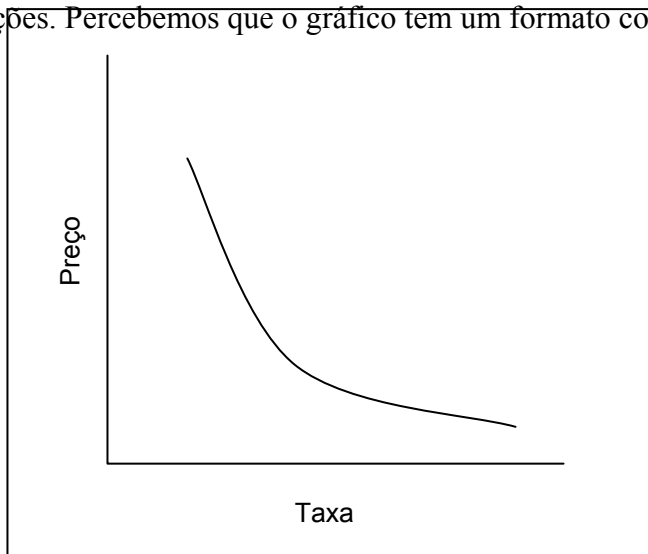


Ilustração 3.1: Relação Preço-Yield

Assuma que existe um único período de planejamento. Seja $V_k(y)$ o valor de uma carteira de ativos no período k com taxa interna de retorno y (y é a taxa na qual todos os ativos da carteira são precificados). Suponha ainda que a taxa interna de retorno inicial seja y^* , então o valor da carteira inicial será:

$$V_0^* = V_0(y^*) \quad (3.1)$$

Se não houver mudança na taxa durante o período de planejamento, após K períodos o investimento atingirá o valor de:

$$V_0^* (1 + y^*)^K \quad (3.2)$$

Suponha agora que a taxa mude instantaneamente após a formação da carteira para $\hat{y}$, onde $\hat{y} \neq y^*$. Então:

- Se $\hat{y} > y^*$, teremos uma diminuição imediata do valor do investimento.

$$\text{Perda de capital} = V_0(\hat{y}) - V_0^*$$

- Se $\hat{y} < y^*$ teremos um aumento imediato neste valor.

$$\text{Ganho de capital} = V_0^* - V_0(\hat{y})$$

Veja a figura abaixo.

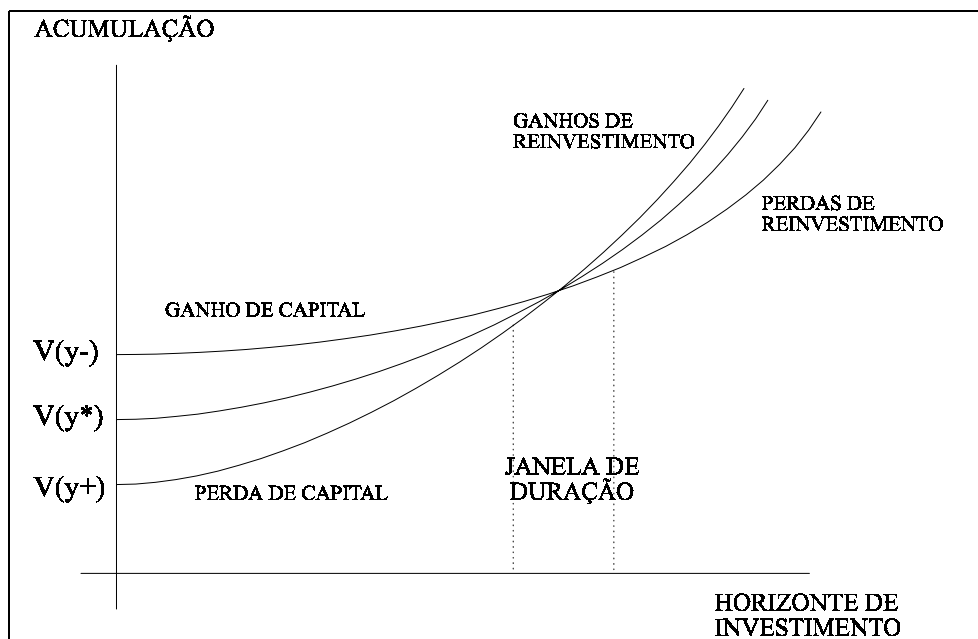


Ilustração 3.2: Variação do valor de uma carteira quando a taxa muda

Seja V_K o novo valor do investimento no período K devido à mudança ocorrida na taxa para $\hat{y}$ no início do período.

$$\hat{V}_K = V_K(\hat{y}) = \hat{V}_0(\hat{y})(1 + \hat{y})^K \quad (3.3)$$

Vimos no exemplo de imunização, que se uma carteira de ativos é selecionada de forma que sua duração seja exatamente igual ao período de planejamento, o portfólio está imune a variações nas taxas, de modo que o retorno nunca poderá cair abaixo da taxa interna de retorno inicial.

Se a duração da carteira exceder o horizonte de planejamento, o investidor pode ser tomado como *going long* e os ganhos ou perdas de capital resultantes de variações nas taxas dominarão o retorno de reinvestimentos durante o período de planejamento (estará exposto ao risco de preço).

Já se a duração da carteira for menor do que o período de planejamento, o retorno de reinvestimento irá dominar qualquer ganho ou perda de capital resultante de mudanças nas taxas. O investidor é conhecido como *going short* (exposto ao risco de reinvestimento).

O que precisamos mostrar é que dada uma carteira inicial com taxa interna de retorno y^* e com duração de Macaulay D^* :

$$V_D(\hat{y}) \geq V_D(y^*) \quad (3.4)$$

para qualquer mudança na taxa $\hat{y}$. Logo, o valor da carteira não poderá cair abaixo do nível $V_D(y^*)$.

Esta prova envolve 3 passos.

1. Mostrar que $V_K(\hat{y})$ é uma função estritamente convexa de $\hat{y}$
2. Dado que a curva é convexa, ela terá um ponto de mínimo
3. Provar que $V_D(\hat{y})$ tem seu mínimo quando $\hat{y} = y^*$

Assumindo que a carteira gera fluxos de caixa A_t , $t = 1, 2, \dots$, seu valor presente e sua duração a uma taxa arbitrária y são:

$$V_0(y) = \sum_t A_t (1+y)^{-t} \quad (3.5)$$

$$D = \frac{1}{V_0} \sum_t t A_t (1+y)^{-t} \quad (3.6)$$

O valor do investimento após K períodos será:

$$V_K(y) = (1+y)^K V_0(y) \quad (3.7)$$

Substituindo a equação (3.5) na equação acima nesta temos que:

$$V_K(y) = \sum_t A_t (1+y)^{K-t} \quad (3.8)$$

Condição de primeira ordem para minimização de (3.7):

$$\frac{dV_K(y)}{dy} = \sum_t A_t (K-t) (1+y)^{K-t-1} \quad (3.9)$$

Condição de segunda ordem para minimização de (3.7):

$$\frac{d^2 V_K(y)}{dy^2} = \sum_t A_t (K-t)(K-t-1) (1+y)^{K-t-2} \quad (3.10)$$

Daí podemos concluir que:

- Quando $t < K-1$, então $(K-t)(K-t-1)$ é o produto de dois números positivos, logo é positivo.
- Quando $t \geq K+1$, então $(K-t)(K-t-1)$ é o produto de 2 números negativos, logo é positivo.
- Quando $t = K$ ou $t = K-1$, então $(K-t)(K-t-1)$ será igual a zero. Isto faz a expressão da derivada segunda igual a zero apenas se os fluxos de caixa estiverem concentrados nas datas $K-1$, K ou ambas. Iremos ignorar estes casos.

Conseqüentemente, $\frac{d^2 V_K(y)}{dy^2} > 0$ e $V_K(y)$ é estritamente convexa, com

ponto de mínimo dado por:

$$\frac{dV_K(y)}{dy} = 0 \quad (3.11)$$

Ou seja,

$$K = \frac{1}{V_0(y)} \sum_t t A_t (1+y)^{-t} \quad (3.12)$$

Se $y = y^*$, então $K = D$, segue que $V_K(y)$ atinge o mínimo em y^* .

Desta demonstração podemos concluir que, supondo que exista apenas um único passivo de valor P_k no tempo k , as condições necessárias e suficientes para se construir um portfólio imunizado são:

$$\sum_t A_t (1+y)^{-t} = P_k (1+y)^{-k} \quad (3.13)$$

$$\sum_t t A_t (1+y)^{-t} = k P_k (1+y)^{-k} \quad (3.14)$$

Ou seja, a primeira condição implica que o valor presente dos ativos seja igual ao valor presente do passivo. E a segunda condição iguala o valor da duração monetária dos ativos e passivos.

3.3. Imunização de múltiplos passivos (teoria de imunização de Redington)

Como definido por Redington em 1952, a palavra *matching* tem uma conotação muito geral, o que fez com que ele adotasse o termo imunização para se referir ao problema de investir em ativos de forma que um dado negócio ficasse protegido contra uma mudanças nas taxas de juros. Para iniciar a análise, ele assume que em um dado momento do tempo é possível se obter ativos a uma taxa uniforme independente da data de vencimento do ativo e que todo o capital é investido em ativos de renda fixa que sejam resgatáveis ou não numa data fixa. Veremos em seguida a teoria proposta por Redington.

Seja A_t o fluxo de caixa de ativos esperado na data t . Por exemplo, juros recebidos, dividendos, aluguéis, vencimento de papéis, repagamentos e pré-pagamentos que se esperam ocorrer neste tempo.

Seja L_t o fluxo de caixa dos passivos (seguros) esperados na data t . Por exemplo, pagamento de apólices, empréstimos, dividendos, gastos, taxas que se esperam ocorrer neste tempo.

Para uma dada taxa de juros y , o valor presente dos ativos, passivos e excesso (surplus - ativo menos passivo) são dados pelas equações abaixo:

$$A = \sum_t \frac{A_t}{(1+y)^t} \quad (3.15)$$

$$P = \sum_t \frac{P_t}{(1+y)^t} \quad (3.16)$$

$$S = A - P = S(y) = \sum_t \frac{(A_t - P_t)}{(1+y)^t} = \sum_t (A_t - P_t)(1+y)^{-t} \quad (3.17)$$

Redington assume ainda que o valor presente dos ativos e passivos são idênticos (qualquer excesso de ativo seria considerado investimento livre podendo ser investido separadamente), ou seja:

$$A = P$$

Suponha agora que a taxa de juros y sofra um choque e mude para $y + \varepsilon$. Neste caso, o valor presente dos ativos e passivos mudará respectivamente para A_ε e P_ε . Conseqüentemente, o valor do excesso após o choque, S_ε será:

$$S_\varepsilon = A_\varepsilon - P_\varepsilon = (A - P) + \varepsilon \frac{d(A - P)}{d\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d^2(A - P)}{d\varepsilon^2} + \dots \quad (3.18)$$

Claramente percebe-se que o primeiro termo da equação acima desaparece devido a hipótese de que $A = P$. Queremos que o valor do excesso não se altere devido a uma variação nas taxas de juros, ou seja, para qualquer variação queremos que não haja ganho nem perda. Para isso, todas as derivadas subsequentes deverão ser nulas. Na prática, para pequenas variações na taxa de juros, a primeira derivada é a mais importante, então Redington diz que uma carteira pode ser considerada imunizada se os ativos forem investidos de forma que:

$$\frac{d(A - P)}{d\varepsilon} = 0 \quad (3.19)$$

Além disso, é interessante que a segunda derivada seja sempre positiva, pois, desta forma, como o coeficiente $\varepsilon^2/2!$ é positivo independente do sinal da variação na taxa de juros, uma pequena variação ε resultará em receita para a

instituição (caso a variação não seja pequena, os termos seguintes deverão ser levados em consideração).

Contudo, uma política satisfatória de imunização, segundo Redington, pode ser expressa em duas equações básicas:

$$\frac{d(A-P)}{d\varepsilon} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{d^2(A-P)}{d\varepsilon^2} > 0 \quad (3.21)$$

Em palavras, a primeira equação diz que a duração dos ativos deve ser igual a duração dos passivos. A segunda diz que a dispersão dos ativos em torno da média deve ser maior do que a dispersão do passivo.

Então, podemos cair em 3 situações distintas:

- As obrigações são ditas totalmente fundadas se $A \geq P$ ou $S \geq 0$. Ou seja, o valor dos ativos é suficiente para pagar os passivos instantaneamente.
- Diremos que a carteira é sem fundos se $A < P$ ou $S < 0$.
- Exatamente com fundos se $A = P$ ou $S = 0$.

3.3.1.

Condições para imunização (caso exatamente fundado)

As condições necessárias e suficientes são:

1. O valor presente dos ativos deve ser igual ao valor presente dos passivos

$$A = P \text{ (critério de combinação do valor presente)}$$

2. A duração dos ativos deve ser igual à duração dos passivos

$$D_A = D_P \text{ (critério de combinação de duração)}$$

$$\text{Condição equivalente: } A'(y) = P'(y) \Rightarrow S'(y) = 0$$

Onde

$$D_A = \sum_t \frac{tA_t(1+y)^{-t}}{A} \text{ e } D_P = \sum_t \frac{tP_t(1+y)^{-t}}{P}$$

$$S'(y) = \frac{dS(y)}{dy} = \sum_t t(P_t - A_t)(1+y)^{-t-1} = \frac{1}{1+y}(D_P P - D_A A)$$

Logo, se tivermos $A = P$, então $S'(y) = 0$ quando $D_A = D_P$.

3. O fluxo de caixa dos ativos deve ser mais disperso do que o fluxo dos passivos. Equivalentemente $S''(y) \geq 0$ (critério de dispersão)

Desenvolvendo a segunda derivada de S , temos:

$$S''(y) = \frac{d^2 S(y)}{dy^2}$$

$$S''(y) = \sum_t t(t+1)(P_t - A_t)(1+y)^{-t-2}$$

$$S''(y) = \frac{1}{(1+y)^2} \left[\sum_t t^2 (A_t - P_t)(1+y)^{-t} + \sum_t t(A_t - P_t)(1+y)^{-t} \right]$$

$$S''(y) = \frac{1}{(1+y)^2} \left[\sum_t t^2 (A_t - P_t)(1+y)^{-t} + (D_P P - D_A A) \right]$$

Como $D_A = D_P$ e $A = P$ a expressão acima fica:

$$S''(y) = \frac{1}{(1+y)^2} \left[\sum_t t^2 (A_t - P_t)(1+y)^{-t} \right]$$

Então, junto com as condições 1 e 2, a condição 3 implica que:

$$\sum_t \frac{t^2 A_t}{(1+y)^t} \geq \sum_t \frac{t^2 P_t}{(1+y)^t} \quad (3.22)$$

3.3.2.

Risco de imunização (M-quadrado)

Embora a estratégia de imunização, teoricamente, nos permita proteger o valor final de um investimento, isto só acontece caso uma série de hipóteses sejam respeitadas. Uma destas hipóteses, a identificação a priori do tipo de choque sobre a estrutura a termo, é crítica para se aplicar a imunização. Caso esta identificação seja incorreta, a carteira passa a não estar imunizada e estamos diante do risco conhecido como risco de imunização. Para tentar quantificar este tipo de risco, Fong e Vasicek (1984) apresentaram uma abordagem alternativa, que permite minimizar este risco, para tal, definindo o conceito de M-quadrado (M^2), que é uma medida de dispersão dos fluxos de caixa em torno do horizonte de investimento.

O M^2 é uma característica do portfólio que determina a exposição da carteira a uma alteração arbitrária das taxas de juros. Neste sentido, pode ser entendido como uma medida de risco de imunização. Então, deve ser minimizado

de forma a se constituir carteiras que tenham menor vulnerabilidade a movimentos nas taxas.

O modelo M^2 apresenta duas vantagens principais:

- É um parâmetro que o investidor pode controlar, estruturando a carteira adequadamente.
- Não é necessário assumir hipóteses quanto ao processo estocástico que governa o comportamento das taxas de juros.

Seja a terceira condição de imunização. E sejam os pesos:

$$w_t^A = \frac{A_t(1+y)^{-t}}{A} \quad (3.23)$$

$$w_t^P = \frac{P_t(1+y)^{-t}}{P} \quad (3.24)$$

Se os pesos w_t^A e w_t^P forem interpretados como probabilidades (já que $0 \leq w_t \leq 1$ e $\sum w_t = 1$), então a condição de dispersão pode ser interpretada como uma condição de variância. Para entendermos melhor, note que D_A e D_P se tornam médias ou valores esperados de t . Por definição, variâncias são dadas por:

$$M_A^2 = \sum_t w_t^A (t - D_A)^2 \quad (3.25)$$

e

$$M_P^2 = \sum_t w_t^P (t - D_P)^2 \quad (3.26)$$

Então a condição de dispersão (condição 3) é equivalente a:

$$M_A^2 \geq M_P^2 \quad (3.27)$$

A condição de dispersão é automaticamente satisfeita quando só temos um único fluxo de passivo. Neste caso, $M_P^2 = 0$ pois $w_K^P = 1$ e $w_t^P = 0$ para $t \neq K$, e $D_P = K = \text{timing do fluxo de caixa do passivo}$. Como M_A^2 não pode ser negativo, temos que:

$$M_A^2 \geq M_P^2 = 0. \quad (3.28)$$

M_A^2 pode ser pensado como uma medida de risco de reinvestimento. Como veremos mais a frente, numa visão de otimização, nosso objetivo poderia ser minimizar M_A^2 sujeito a $M_A^2 \geq M_P^2$.

O risco de imunização é definido como a potencial dispersão do retorno em torno do retorno alvo.

Se $A_t = P_t$, para todo t , ou seja, as obrigações do passivo estão perfeitamente combinadas com o fluxo de caixa de ativos, então $S''(y) = 0$. Esta estratégia é conhecida como combinação de fluxo de caixa (portfólio de dedicação) e tem risco de imunização zero. Este tipo de estratégia será melhor detalhado ao final deste capítulo.

Seja a definição de m-quadrado, então podemos mostrar algumas propriedades:

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{A} \sum_t (t - D)^2 \exp(-rt) A_t \\ &= \frac{1}{A} \sum_t (t^2 - 2tD + D^2) \exp(-rt) A_t \\ &= \frac{1}{A} \sum_t t^2 \exp(-rt) A_t - 2D \sum_t t \exp(-rt) A_t + D^2 \\ &= \frac{1}{A} \sum_t t^2 \exp(-rt) A_t - 2D^2 + D^2 = C - D^2 \end{aligned}$$

Onde $C = \frac{1}{A} \sum_t t^2 \exp(-rt) A_t$ é a convexidade do ativo.

$$\text{Sendo } A' = \frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(A) = \frac{d}{dr} \left(\sum_t A_t \exp(-rt) \right) = \sum_t t A_t \exp(-rt)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dr} &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{A'}{A} \right) \\ &= -\frac{A''A - (A')^2}{A^2} \\ &= -\frac{A''}{A} - \left(\frac{A'}{A} \right)^2 \\ &= -(C - D^2) = -M^2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

3.3.3.

Condições para imunização (caso totalmente com fundos)

1. $S = A - P > 0$
2. $S'(y) = 0 \Leftrightarrow \sum_t t A_t (1+y)^{-t} = \sum_t t P_t (1+y)^{-t}$

Escrito de outra maneira: $D_A A = D_P P$

$$3. \quad S''(y) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_t \frac{t^2 A_t}{(1+y)^t} \geq \sum_t \frac{t^2 P_t}{(1+y)^t}$$

$$\text{Escrito de outra forma: } A(M_A^2 + D_A^2) \geq P(M_P^2 + D_P^2)$$

3.3.4. Observações

A teoria de Redington se baseia em algumas hipóteses, são elas:

- A estrutura a termo é plana
- Os choques na curva de juros ocorrem de forma paralela
- O fluxo de caixa não depende do nível da taxa de juros
- A mesma taxa de desconto se aplica a ativos e passivos
- O portfólio é imunizado apenas para uma pequena variação em torno da taxa inicial

3.4. Generalização da teoria de Redington

Até então, mostramos de forma detalhada a matemática por trás da teoria de Redington. Mas, como dito, esta teoria se baseia em hipóteses que não são observadas na prática, como por exemplo uma curva de juros plana. Por isso, uma generalização desta teoria, abrangendo hipóteses mais realistas, será feita.

Seja N_t a diferença entre ativos e passivos (para evitar problemas de notação, utilizaremos a letra L para representar o passivo) no tempo t , e seu valor presente S (valor do excedente hoje). Ou seja:

$$N_t = A_t - L_t \quad (3.30)$$

$$S = \sum_{t>0} N_t P(0, t) \quad (3.31)$$

Onde $P(0, t)$ é o preço no tempo 0 de um título sem opções, zero-cupom, e sem risco de calote vencendo no tempo t com valor de face 1, $t > 0$.

Considere um choque instantâneo na estrutura a termo das taxas de juros, o qual muda o preço do título de $P(0, t)$ para $P^*(0, t)$, $t > 0$. Então o valor do novo excesso será

$$S^* = \sum_{t>0} N_t P^*(0, t) \quad (3.32)$$

Vale lembrar que estamos assumindo que os fluxos de caixa são independentes das flutuações nas taxas de juros, ou seja, após o choque na curva de juros os valores de N_t permanecem os mesmos.

Como já vimos, imunizar uma carteira é fazer com que ela seja imune às variações nas taxas de juros. Logo, o objetivo da imunização é garantir que após choques na estrutura a termo o valor final permaneça maior ou igual ao valor imunizado. Ou seja, queremos garantir que $S^* \geq S$ sempre.

Pelo princípio da não-arbitragem, a condição acima é válida para todos os choques nas taxas somente se $S^* = S$ para todos os choques. Caso contrário, teríamos uma oportunidade de arbitragem.

É importante observar que se o excesso permanecer inalterado para todos os possíveis choques significa que o fluxo de caixa líquido é zero, ou seja:

$$N_t = 0 \Leftrightarrow A_t = L_t, \text{ para todo } t > 0. \text{ Igual ao caso do portfólio dedicado.}$$

Considerando que ocorreu um choque, podemos escrever a mudança no excesso:

$$S^* - S = \sum_{t>0} N_t [P^*(0, t) - P(0, t)] \quad (3.33)$$

$$S^* - S = \sum_{t>0} N_t P(0, t) \left[\frac{P^*(0, t)}{P(0, t)} - 1 \right] \quad (3.34)$$

$$S^* - S = \sum_{t>0} n_t g(t) \quad (3.35)$$

Onde

$$n_t = N_t P(0, t) \quad (3.36)$$

$$g(t) = \frac{P^*(0, t)}{P(0, t)} - 1 \quad (3.37)$$

$$g(0) = \frac{1}{1} - 1 = 0 \quad (3.38)$$

3.4.1.

Teorema do resíduo de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Onde

$$R_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} & \varepsilon \in (x, c) \\ \frac{1}{n!} \int_c^x (x-w)^n f^{(n+1)}(w) dw & \end{cases} \quad (3.40)$$

Assumindo que a função g é duas vezes diferenciável. Pela fórmula de Taylor com resíduo integral,

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \int_0^t (t-w)g''(w)dw \quad (3.41)$$

Então, a variação no excesso é:

$$S^* - S = \sum n_t g(t) \quad (3.42)$$

$$S^* - S = g'(0) \sum_{t>0} t n_t + \sum_{t>0} n_t \int_0^t (t-w)g''(w)dw \quad (3.43)$$

Para facilitar a mudança de ordem entre o somatório e a integral, seja

$$x^+ = \max(x, 0)$$

Então,

$$\sum_{t>0} n_t \int_0^t (t-w)^+ g''(w)dw = \sum_{t>0} n_t \int_0^\infty (t-w)^+ g''(w)dw \quad (3.44)$$

$$\sum_{t>0} n_t \int_0^t (t-w)^+ g''(w)dw = \int_0^\infty \left[\sum_{t>0} n_t (t-w)^+ g''(w) \right] dw \quad (3.45)$$

3.4.2.

Teorema geral do valor médio para integrais

Se f e h são funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e h não muda de sinal neste intervalo, então existe um número ε em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = f(\varepsilon) \int_a^b h(x)dx$$

Então se o fluxo de caixa líquido N_t satisfizer:

$$\sum_{t>0} n_t (t-w)^+ \geq 0, \text{ para todo } w \text{ positivo} \quad (3.46)$$

ou

$$\sum_{t>0} n_t (t-w)^+ \leq 0, \text{ para todo } w \text{ negativo} \quad (3.47)$$

Então, pelo teorema do valor médio ponderado para integrais, deve existir um número positivo ξ tal que

$$\int_0^\infty \left[\sum_{t>0} n_t (t-w)^+ g''(w) \right] dw = g''(\xi) \int_0^\infty \left[\sum_{t>0} n_t (t-w)^+ \right] dw \quad (3.48)$$

Revertendo a ordem da integral e do somatório temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\sum_{t>0} n_t (t-w)^+ \right] dw &= \sum_{t>0} n_t \int_0^\infty (t-w)^+ dw \\ &= \sum_{t>0} n_t \int_0^t (t-w) dw \\ &= \sum_{t>0} n_t \frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Temos uma fórmula mais simples para a variação no excesso devido a choques instantâneos nas taxas de juros:

$$S^* - S = g'(0) \sum_{t>0} t n_t + \frac{1}{2} g''(\xi) \sum_{t>0} t^2 n_t \quad (3.50)$$

Ainda, se o primeiro momento dos valores presentes do fluxo de caixa líquido é zero (ou seja, se o fluxo de ativos e passivos possa ser estruturado de forma que seja zero),

$$\sum_{t>0} t n_t = 0 \quad (3.51)$$

Equivalentemente:

$$\sum_{t>0} t A_t P(0, t) = \sum_{t>0} t L_t P(0, t) \quad (3.52)$$

Com isto podemos simplificar a equação do excesso para:

$$S^* - S = \frac{1}{2} g''(\xi) \sum_{t>0} t^2 n_t \quad (3.53)$$

O modelo de Redington pode ser visto como um caso especial de mudanças paralelas nas taxas de curva.

Aqui

$$P^*(0, t) = e^{ct} P(0, t) \quad (3.54)$$

ou

$$g(t) = e^{ct} - 1 \quad (3.55)$$

onde a constante c , a qual pode ser positiva ou negativa, denota a quantidade da mudança nas taxas de juros. Então a equação (3.53) fica:

$$S^* - S = \frac{1}{2} c^2 e^{c\xi} \sum_{t>0} t^2 n_t \quad (3.56)$$

Então, se as condições impostas pelas eq. (3.46) e eq. (3.51) valerem, teremos:

$$S^* \geq S \quad (3.57)$$

para qualquer variação paralela na curva de juros (para qualquer valor de c , grande ou pequenos). Note que a equação (3.57) não é válida para todos os tipos de choque nas taxas. Este modelo, mais geral, diferente do modelo de Redington, é consistente a este respeito.

3.5. Rebalanceando uma carteira imunizada

Nos casos básicos que mostramos, os princípios de imunização assumem uma mudança instantânea na taxa de mercado. Na prática, a taxa de mercado irá flutuar durante o horizonte de investimento. Como resultado disso, a duração de Macaulay do portfólio irá mudar quando a taxa de mercado mudar. E, além disso, a duração irá mudar simplesmente devido à passagem do tempo. Se a duração de uma carteira no início do período for D , ela poderá não ser $(D-1)$ no final do período. Isto pode acontecer por duas razões:

- Se as taxas mudam, a duração muda. Isto pode forçar a duração inicial para cima ou para baixo dependendo da direção da mudança nas taxas.
- Mesmo se as taxas não mudam, à medida em que a data de vencimento dos títulos se aproxima, a duração não irá diminuir tanto quanto a diminuição no horizonte de investimento. A inclinação de todas as curvas de duração é menor do que 1 (exceto para os títulos zero cupom – mesmo para títulos zero cupom, a duração irá variar na mesma taxa do horizonte de tempo apenas se a estrutura a termo for plana).

Com isso, mesmo diante de uma mudanças nas taxas de mercado, um portfólio pode ser imunizado se ele for rebalanceado de forma que a duração seja igual ao tempo restante do horizonte de investimento, por exemplo, se o horizonte de investimento inicial é de 10 anos, a carteira inicial deve ter uma duração de

Macaulay de 10 anos. Seis meses após efetuada a imunização, o horizonte de investimento se reduz para 9,5 anos mas, provavelmente a duração da carteira será diferente de 9,5. Logo, a carteira deve ser rebalanceada (a imunização deverá ser feita novamente, levando-se em conta o novo horizonte de investimento e as novas taxas de mercado) de forma que sua duração seja 9,5. Seis meses depois a carteira deverá ser rebalanceada novamente de forma que a carteira tenha duração de 9 anos. E assim em diante. Percebemos claramente que estamos diante de um dilema: com qual frequência a carteira deve ser rebalanceada?

Sabemos que quanto mais freqüente se rebalanceia, aumentam os custos de transação, mas diminuem as chances de se desviar da taxa alvo. Por outro lado, quanto menos se rebalanceia, distancia-se da duração desejada. Então, o gestor do portfólio se encontra numa encruzilhada: algumas transações devem ser aceitas para se ajustar a duração, mas alguns outros ajustes da duração devem ser deixados de lado para que os custos de transação não se tornem altos.

Neste momento, a fase de monitoramento torna-se uma técnica indispensável, pois o monitoramento adequado ajudará a definir quando se faz necessário rebalancear a carteira. O monitoramento definirá se rebalanceamentos pré-programados devem ou não ser feitos ou se outros rebalanceamentos não-programados devem ser efetuados de forma a garantir sempre que o retorno alvo será atingido.

3.6. Considerações de implementação

Ao se implementar a técnica de imunização, deve-se levar em consideração alguns fatores importantes que podem fazer com que a imunização não funcione na prática. Entre estes fatores os mais importantes são:

- Controle rigoroso do risco de crédito: quanto menor a qualidade de crédito dos títulos considerados, maior o risco potencial e maior o retorno. A teoria de imunização assume que não existe o risco de default e que os títulos somente variam de acordo com as variações nas taxas de mercado, ou seja, nenhum outro fator externo afeta o valor do ativo.

- Presença de opções: toda a teoria estudada considera que os títulos são sem opção. Na prática sabemos que estas opções estão muitas vezes presentes, logo, deve-se fazer uma adaptação na teoria para tal fato.
- Liquidez: na teoria de imunização também consideramos que todos os títulos em questão são totalmente líquidos, ou seja, podemos sempre comprar ou vender qualquer quantidade de um certo título. Isto não é verdade na prática, esse é um dos motivos pelos quais a carteira deve ser rebalanceada durante o horizonte de investimento.
- Custos de transação: todo o tipo de operação de compra e venda envolve custo de transação. Então, sempre antes de se efetuar uma mudança na carteira, deve-se pesar se o custo de transação será compensado de alguma forma com aquela mudança.

Novamente percebemos a importância da fase de monitoramento. Ela deve estar sempre atenta não somente à duração da carteira, mas também, à qualidade de crédito dos títulos que compõem a carteira, à qualidade de crédito de outros títulos que fazem parte do universo de títulos que possam vir a compor a carteira, à liquidez dos títulos (garantindo que sempre que um título da carteira precisar ser vendido para cobrir obrigações exista um comprador).

3.7. Imunização contingencial

As estratégias de imunização discutidas até então são passivas ou semi-ativas. Mas também é possível se ter uma estratégia de gerenciamento ativa conhecida como imunização contingencial. A imunização contingencial é uma estratégia que consiste em se identificar tanto um valor ou retorno alvo que se deseja imunizar, quanto um nível mínimo de retorno no qual o investidor estaria minimamente satisfeito. O gestor terá uma postura ativa até que o nível mínimo seja atingido. A partir daí, o gestor é obrigado a imunizar o portfólio completamente e se manter neste nível para garantir que a performance mínima aceitável será realizada.

Para ilustrarmos este tipo de estratégia, utilizaremos os gráficos abaixo. No primeiro gráfico (ilustração 3.3), percebemos que a curva de gatilho está abaixo

do valor de um portfólio fictício até o ponto t^* . Neste ponto a técnica de imunização é ativada e a partir daí, a carteira caminha na curva de imunização até o final do horizonte de planejamento. No segundo gráfico (ilustração 3.4), percebemos que em nenhum momento do horizonte de investimento o portfólio atinge a curva de gatilho. Logo, a imunização não é ativada. Percebemos que esta é uma técnica interessante, que permite que o investidor tenha a chance de obter um retorno mais alto, através de uma carteira mais arriscada, sem correr o risco de não atingir seu retorno mínimo desejado.

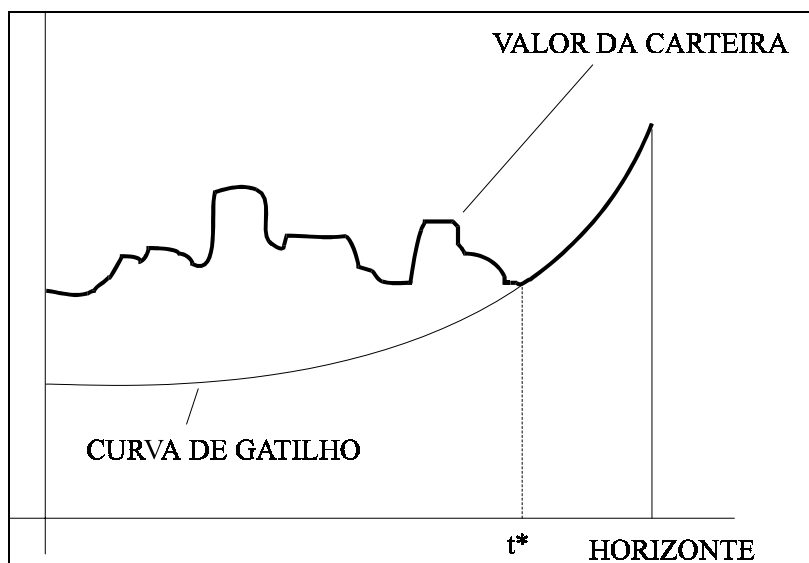


Ilustração 3.3: Curva de Gatilho para imunização contingencial

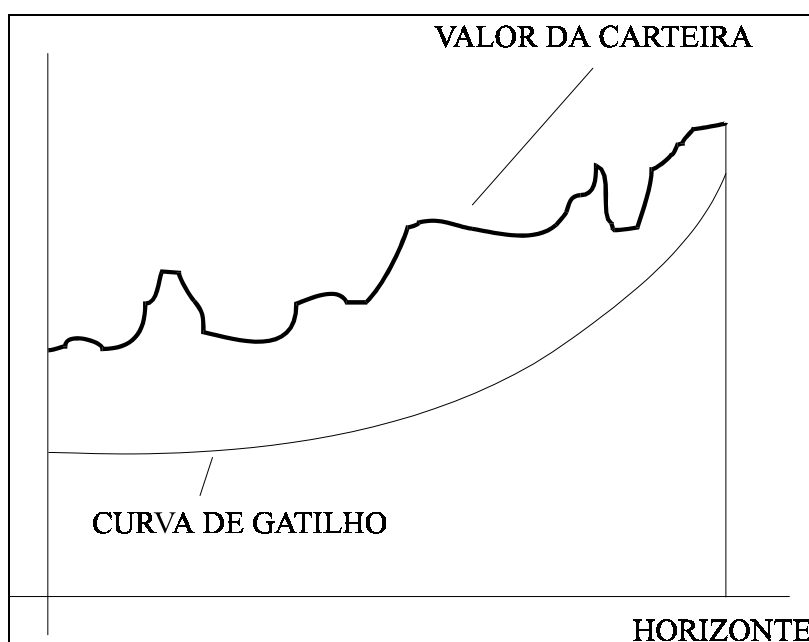


Ilustração 3.4: Curva de Gatilho para imunização contingencial

Alguns considerações importantes na implementação da imunização contingencial são:

1. Estabelecer uma imunização precisa dos retornos iniciais e em andamento disponíveis: isto determinará quais níveis de imunização estão disponíveis durante o período de planejamento; e qual será a margem de segurança utilizada para o retorno mínimo desejado a ser imunizado.
2. Estabelecer uma margem de segurança plausível: uma margem de segurança muito pequena.
3. Desenvolver um procedimento efetivo de monitoramento para garantir que o nível mínimo não tenha sido violado.
4. O horizonte de planejamento: quanto maior o horizonte, maior será a oportunidade de se gerenciar a carteira ativamente.
5. Outras considerações como: qualidade de crédito, restrições, custos de transação, etc.
6. O nível mínimo satisfatório pode não ser alcançado por duas razões: esta técnica assume que a taxa de mercado varia gradualmente. No evento de uma variação brusca das taxas, pode não haver tempo suficiente para mudar a estratégia para o modo de imunização que atinja o valor mínimo requerido; se a imunização se torna operacional, não existe garantia que a taxa de imunização será atingida mesmo se a carteira for reconstruída na taxa requerida.

3.8. Implementação da técnica de imunização (modelos de otimização)

Como já vimos, imunização é a busca de uma carteira que seja insensível a variações na taxa de juros, uma carteira cujo valor presente dos ativos seja igual ao valor presente do passivo. Usualmente, outros requerimentos podem ser impostos como: a carteira deve ter a maior taxa de retorno possível; ou o retorno total da carteira deve ser o maior possível; ou o custo para se formar a carteira deve ser o mínimo possível. Devido ao enorme número de títulos disponíveis para se imunizar uma carteira, podemos formular esta busca por um portfólio

imunizado como um problema de otimização, como um problema de alocação ótima de ativos.

Em geral, um problema de otimização é expresso da seguinte forma:

$$\text{Min } f$$

Sujeito a RESTRIÇÕES

Ou

$$\text{Max } f$$

Sujeito a RESTRIÇÕES

As funções objetivo f mais utilizadas na prática são:

- Minimizar o custo inicial do portfólio
- Maximizar a taxa de retorno do portfólio
- Minimizar o M_A^2 (M-quadrado dos ativos)

Veremos mais detalhadamente a formulação do problema de otimização. Para que isto seja feito, precisamos primeiramente definir as variáveis que serão utilizadas no problema. Seguiremos os modelos propostos por Zenios (1999) e adotaremos a mesma notação dele. Seja:

x_i : quantidade do título i

c_i : custo de adquirir o título i

VP_i : o valor presente do título i

C_{it} : o fluxo de caixa do ativo i no tempo t

$U = \{1, 2, \dots, I\}$: o universo de títulos

$i \in U$: indica um título do universo de títulos

k_i : duração monetária do título i

r_i : a taxa de desconto do título i

li_i : limite mínimo que se pode ter do título i

ls_i : limite máximo que se pode ter do instrumento i

Com as definições das variáveis, podemos calcular valor presente do título i :

$$VP_i = \sum_t C_{it} (1 + r_i)^{-t} \quad (3.58)$$

Derivando em respeito a taxa r , encontramos a duração monetária (*modified duration*) do título i :

$$k_i = -\sum_t tC_{it}(1+r_i)^{-(t+1)} \quad (3.59)$$

Sabemos que a duração é aditiva. Logo, a duração monetária de uma carteira de título será dada por:

$$k_A = \sum_i k_i x_i \quad (3.60)$$

Usando esta notação e dado que o valor presente do passivo é VP_p e sua duração monetária é k_p , as duas condições básicas de imunização podem ser escritas como:

$$\sum_i VP_i x_i = VP_p \quad (3.61)$$

$$\sum_i k_i x_i = k_p \quad (3.62)$$

Então, a formulação do primeiro problema de imunização – minimizar o custo inicial do portfólio – pode ser representado pelo seguinte problema de programação linear:

Encontrar x_i de forma que:

$$\text{Min } \sum_i c_i x_i \quad (\text{objetivo minimizar o custo})$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a } \quad & \sum_i VP_i x_i = VP_p \\ & \sum_i k_i x_i = k_p \quad (\text{combinação de valor presente e duração}) \\ & li_i \leq x_i \leq ls_i \end{aligned}$$

A terceira restrição pode ser utilizada caso exista algum limite de posicionamento para um dado título que compõe o universo de ativos.

Como no segundo problema, nosso objetivo é maximizar a taxa de retorno de uma carteira. Para isso, precisamos definir, com base nesta notação, a taxa de retorno de um carteira de títulos. A taxa de retorno é dada implicitamente pela equação de valor presente. No entanto, uma aproximação de primeira ordem para esta taxa é a média ponderada da duração monetária de cada título que compõe o portfólio:

$$r \approx \frac{\sum_i k_i r_i x_i}{\sum_i k_i x_i} \quad (3.63)$$

Percebemos que o denominador desta expressão, pela restrição de duração, deve ser igual a k_p (uma constante). Logo, maximizar a taxa de retorno se reduz a maximizar apenas o numerador. Nosso problema fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_i k_i r_i x_i \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_i VP_i x_i = VP_p \\ & \sum_i k_i x_i = k_p \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

O terceiro caso, de minimização do risco de imunização, pode ser formulado como a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & M_A^2 \\ \text{Sujeito a} \quad & M_A^2 \geq M_p^2 \end{aligned}$$

Como já vimos, o M^2 pode ser visto como uma medida de risco de imunização.

As modelagens vistas até então são as formas mais básicas conhecida e as mais utilizadas na prática. Entretanto, existem outras centenas de modelagens. Entre elas iremos ver algumas outras mais complexas seguindo a generalização da teoria de Redington.

Ao desenvolvermos a generalização da teoria, mostramos que a variação do excesso de uma carteira após um choque na curva pode ser expressa da seguinte forma:

$$S^* - S = \frac{1}{2} g''(\xi) \sum_{t>0} t^2 n_t \quad (3.64)$$

Logo, nosso objetivo é estruturar o fluxo de ativos e passivos de forma que a quantidade

$$g''(\xi) \sum_{t>0} t^2 n_t \quad (3.65)$$

seja sempre a maior possível para que se maximize o valor do novo excesso S^* . No entanto, o fator $g''(\xi)$ depende dos choques nas taxas, os quais ninguém pode prever. Como a quantidade $g''(\xi)$ pode ser positiva ou negativa, uma estratégia mais prudente é estruturar o fluxo de caixa de forma que o valor absoluto da duração monetária de Fisher-Weil do excesso da carteira,

$$\left| \sum_{t>0} t^2 n_t \right| \quad (3.66)$$

seja a menor possível, enquanto sujeita às condições previamente utilizadas no decorrer do desenvolvimento da generalização que suportam a expressão (3.64) (eq. (3.46) ou eq. (3.47) e eq. (3.51)).

Por simplicidade, suponha que os fluxos de caixa ocorram somente no final de cada período. Seja $A_{j,t}$ o fluxo de caixa no final do período t para um investimento inicial de 1,00 no ativo j . Assuma ainda que o título não contém opções e que não existe risco de crédito. Para cada j temos:

$$1 = \sum_{t>0} A_{j,t} P(0,t), \text{ onde } P(0,t) \text{ segue a mesma definição anterior.}$$

Seja x_j a quantidade de dinheiro a ser investida no ativo j . Logo, o fluxo de caixa agregado do ativo no tempo t será:

$$A_t = \sum_j x_j A_{j,t} \quad (3.67)$$

O problema de alocação de ativos é, para um dado fluxo de passivo P_t e valor de excesso S , determinar os valores ótimos de x_j .

Suponha que a expressão (3.46) seja verdade. Então, o problema de programação linear fica:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_j t^2 n_t \\ \text{Sujeito a} \quad & n_t = (A_t - L_t) P(0,t) \\ & A_t = \sum_j x_j A_{j,t} \\ & S = \sum_{t \geq 1} n_t \\ & \sum_{t \geq 1} t n_t = 0 \\ & \sum_{t \geq 1} (t - k) n_t \geq 0 \\ & x_j \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Como supomos que a equação (3.46) é satisfeita, então, $\sum t^2 n_t$ é não negativo. Logo, minimizar (3.66) é equivalente a minimizar a convexidade monetária (*dollar convexity*) de Fisher-Weil $\sum t^2 A_t P(0,t)$, pois os fluxos de caixa do passivo, L_t são, por hipótese, fixos. Podemos escrever uma outra programação linear:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_j x_j C_j \\
\text{Sujeito a} \quad & C_j = \sum_{t \geq 1} t^2 A_{j,t} P(0,t) \\
& n_t = \left(\sum_j x_j A_{j,t} - L_t \right) P(0,t) \\
& S = \sum_{t \geq 1} n_t \\
& \sum_{t \geq 1} t n_t = 0 \\
& \sum_{t > k} (t - k) n_t \geq 0 \\
& x_j \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Por outro lado, se tivéssemos que a equação (3.47) fosse satisfeita, então o problema de otimização seria o seguinte:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \sum_j x_j C_j \\
\text{Sujeito a} \quad & C_j = \sum_{t \geq 1} t^2 A_{j,t} P(0,t) \\
& n_t = \left(\sum_j x_j A_{j,t} - L_t \right) P(0,t) \\
& S = \sum_{t \geq 1} n_t \\
& \sum_{t \geq 1} t n_t = 0 \\
& \sum_{t > k} (t - k) n_t \leq 0 \\
& x_j \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

3.9.

Risco de taxa de juros

Risco de taxa de juros é a exposição de uma instituição financeira a movimentos adversos nas taxas de juros de mercado. O risco de taxa de juro representa uma das principais fontes de perda potencial para uma instituição financeira. Tal risco configura-se na possibilidade de que ocorram variações inesperadas na taxa de juros e de que estas conduzam a reduções no ativo líquido das instituições, e à incapacidade de pagamento de suas obrigações.

A função principal das instituições financeiras é de ser a intermediária entre duas partes, tomando assim, os riscos de intermediação. Hoje, o risco de intermediação primário está relacionado às taxas de juros, e uma das grandes razões para tal é a grande magnitude e frequência das oscilações percebidas nas

taxas de juros. A aceitação deste risco é parte do dia-a-dia destas instituições e pode, no caso de bancos por exemplo, ser uma fonte importante de lucratividade. No entanto, um excessivo risco de taxa de juros pode significar uma ameaça às receitas e, no caso de um fundo de pensão, um perigo que suas obrigações não sejam cumpridas (pagamento de seus pensionistas). Mudanças nas taxas de juros afetam o valor dos ativos, passivos e instrumentos fora do balanço, pois, o valor presente dos fluxos de caixa futuros (e algumas vezes o próprio fluxo de caixa) muda quando as taxas se alteram.

Por isso, um processo efetivo de gerenciamento de risco que mantenha o risco de taxa de juros em níveis prudentes é essencial para a segurança e a estabilidade de instituições financeiras.

Para entendermos melhor este tipo de risco, precisamos identificar as fontes existentes de risco de taxa de juros. Entre elas podemos citar: o risco de reprecificação, risco de preço, risco de curva de juros, risco de opção, etc. Dentre estes, focar-nos-emos mais nos dois primeiros.

Risco de preço é o risco que o preço de um título flutue devido a flutuações nas taxas de juros de mercado. Como sabemos, a relação entre preço e taxa é inversa, isto é, quando um aumenta o outro diminui. Logo, o risco de preço é o risco de que haja um aumento nas taxas de juros, o que faria com que o preço de um título diminuísse.

Risco de reinvestimento é o risco de que os pagamentos de cupom não serão reinvestidos na taxa interna de retorno prometida ou esperada. Quando se compra um título, supõe-se que os fluxos intermediários serão reinvestidos a uma taxa interna de retorno. Mas, se ocorrer uma variação nas taxas de juros, a taxa de reinvestimento irá se alterar, podendo provocar aumentos ou diminuições no retorno do título. Logo, o risco de reinvestimento é o risco de que haja uma queda nas taxas de juros.

Por último, o risco de curva de juros é o risco de erros na modelagem do formato da curva, ou em previsões de variações inconsistentes com a realidade. Este risco está relacionado ao risco de imunização previamente discutido.

Ambos os riscos de preço e o de reprecificação estão relacionados com duração do portfólio.

3.10. Outras formas de combinação de fluxos

Existem diferentes interpretações a respeito do que se constitui um *match*. A mais comum é a combinação de fluxos de caixa (ou portfólio dedicados). Alguns autores consideram a combinação de duração (assim como na estratégia de imunização de múltiplos passivos) como uma estratégia de dedicação.

3.10.1. Portfólios de dedicação

Alternativamente à imunização, o analista financeiro de um fundo de pensão, por exemplo, poderia construir um portfólio de títulos que gerasse fluxos intermediários idênticos aos fluxos do passivo. O saldo líquido seria sempre nulo, independentemente das alterações na curva de juros. Neste caso, o risco da taxa de juros estaria totalmente mitigado (risco de reinvestimento igual a zero). Comparada à estratégia de imunização, a carteira dedicada possui ainda a vantagem de não necessitar de procedimentos de rebalanceamento. Entretanto, apesar da simplicidade, existem efeitos negativos. Como não existe no mercado um ativo que case perfeitamente com o fluxo de passivo, o investidor terá que gastar mais, comprando vários títulos, para conseguir cobrir no prazo e em valor todos os fluxos do passivo. Ou seja, o custo será maior do que na estratégia de imunização. Logo, se o objetivo, do fundo de pensão é o de proporcionar a seus participantes uma renda futura com o menor custo presente associado, dado um risco aceitável, o procedimento de imunização se caracterizará, normalmente, como uma estratégia mais eficiente.

Em outras palavras, um portfólio de dedicação é uma técnica de investimento na qual um conjunto particular de títulos é casado com um conjunto de passivos a serem pagos no futuro. Os títulos são escolhidos de forma que o fluxo de caixa do portfólio de ativos (principal + cupom) se iguale ao fluxo de passivos tanto no timing quanto no valor.

Assim como feito na imunização, apresentaremos um exemplo bem simples com o objetivo de clarificar as idéias por trás desta técnica.

Suponha que desejamos aplicar a técnica de carteira dedicada ao seguinte fluxo de passivo:

Vencimento	Fluxo
Ano 1	(1.500.000,00)
Ano 2	(2.500.000,00)
Ano 3	(4.000.000,00)

Tabela 3.3: Exemplo de um fluxo para aplicação da técnica de carteira dedicada

Suponha ainda que os ativos disponíveis para casar os fluxos são os seguintes:

Ativos	Preço	Valor de face	Cupom	Vencimento
x	1010	1000	10% a.a.	Ano 1
y	1100	1000	12% a.a.	Ano 2
z	950	1000	10% a.a.	Ano 3

Tabela 3.4: Ativos disponíveis para aplicação da técnica de carteira dedicada

Queremos montar uma carteira de ativos de forma que o fluxo em cada ano seja igual a zero. Matematicamente queremos que a matriz de fluxo de caixa (A) vezes o vetor de quantidades (q) que devemos comprar de cada ativo seja igual ao vetor de fluxo de passivo (P), ou seja:

$$Aq = P$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1100 & 120 & 100 \\ 0 & 1120 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Ano 1} \\ \text{Ano 2} \\ \text{Ano 3} \end{matrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} (1500000) \\ (2500000) \\ (4000000) \end{bmatrix}$$

$$q = A^{-1}P$$

Efetuada-se os cálculos, chegamos aos resultados:

$$q = \begin{bmatrix} 824,97 \\ 1907,47 \\ 3636,36 \end{bmatrix} \text{ unidades de cada papel.}$$

Logo, o custo de aquisição da carteira de ativos é:

$$Custo = 824,97(1010) + 1907,47(1100) + 3636,36(950) = 6.385.979,93$$

Pode-se comprovar que adquirindo esta carteira, o fluxo de caixa nos anos 1, 2 e 3 será igual a zero.

Assim como na estratégia de imunização, técnicas de programação linear podem ser empregadas para se construir um portfólio de custo mínimo que “case” com o fluxo de passivos de um universo aceitável de títulos.

Assim como visto no modelo de imunização, seja $A_{j,t}$ o fluxo de caixa no final do período t para um investimento inicial de 1 no título de renda fixa j . Então para cada j temos:

$$1 = \sum_{t \geq 1} A_{j,t} P(0, t) \quad (3.68)$$

Seja x_j a quantidade de dinheiro investida do ativo j de forma que o fluxo de caixa agregado no tempo t seja:

$$A_t = \sum_j x_j A_{j,t} \quad (3.69)$$

O problema de alocação ótima de ativos pode ser formulado como o problema de programação linear a seguir:

$$\underset{x_j \geq 0}{\text{Min}} \sum_t A_t P(0, t) = \underset{x_j \geq 0}{\text{Min}} \sum_j x_j$$

Sujeito a

$$A_t \geq L_t \quad t = 1, 2, \dots$$

Em palavras, a função objetivo é minimizar o custo do portfólio com um amplo universo de títulos enquanto a restrição garante que haverá caixa suficiente quando o passivo vencer.

Para formularmos um modelo mais complexo para carteiras de dedicação, utilizaremos a seguinte notação (Zenios (1999)):

τ : índice de data de pagamento do passivo

$\Delta \tau$: intervalo de tempo entre os pagamentos de passivo na data $\tau - 1$ e τ

P_τ : valor do pagamento do passivo no tempo τ

s_τ : excesso de caixa no tempo τ

ρ : taxa de reinvestimento

$D_{i\tau}$: valor reinvestido dos fluxos de caixa entre as datas de passivo $\tau - 1$

e τ .

O número total de datas de pagamento pode ser muito grande, por isso, ao invés de olharmos para cada data, consideraremos somente as datas do fluxo de passivo. Utilizando a notação, podemos calcular o valor do fluxo de caixa de um título reinvestido entre as datas de vencimento de passivo:

$$D_{i\tau} = \sum_t C_{it} (1 + \rho)^{\tau-t} \quad (3.70)$$

Depois balanceamos os fluxos de caixa em cada data de passivo. Na data de vencimento de passivo, os fluxos reinvestidos e os fluxos que vencem são recebidos, o passivo é pago e um possível excesso é carregado até o próximo vencimento de passivo à taxa de reinvestimento, logo:

$$\sum_i D_{i\tau} x_i + s_{\tau-1} (1 + \rho)^{\Delta\tau} = P_{\tau} + s_{\tau} \quad (3.71)$$

Temos ainda que impor uma restrição de não-negatividade no excesso e o modelo estará pronto. A função objetivo apropriada é minimizar o custo inicial a carteira (custo de compra de títulos e dinheiro inicial em caixa). Sendo $\tau = 0$ a data de liquidação, o modelo de otimização de dedicação se torna o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_i VP_i x_i + s_o \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_i D_{i\tau} x_i + s_{\tau-1} (1 + \rho)^{\Delta\tau} = P_{\tau} + s_{\tau} \\ & s_{\tau} \geq 0 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

3.10.2.

Portfólio de dedicação versus imunização

A estratégia de dedicação apresenta algumas vantagens e algumas desvantagens quando comparado com a estratégia de imunização. A estratégia de dedicação é muito fácil de ser compreendida e, como vimos, quando os fluxos estão totalmente casados, não há risco de reinvestimento. Por isso, não é necessário se fazer rebalanceamento. No entanto, esta é uma estratégia mais custosa quando comparada com a imunização pois, temos que assumir que uma taxa de retorno conservativa do curto prazo será utilizada durante todo o horizonte de investimento. Além disso, conseguir uma combinação perfeita é muito difícil, tornando a estratégia inflexível pois, teremos que escolher títulos pelas suas características de vencimento e não pela sua atratividade de investimento.

3.10.3.

Combinação de duração e combinação de fluxos

Neste modelo, combina-se as duas técnicas acima (dedicação e imunização). Esta estratégia cria um portfólio que casa a duração dos ativos e passivos e adiciona a restrição de que o fluxo de caixa seja casado nos primeiros anos, usualmente cinco anos.

Esta estratégia tem algumas vantagens. Comparada com a imunização, as necessidades de liquidez são fornecidas nos primeiros períodos onde os fluxos estão casados. Além disso, a maioria das mudanças (curvatura, translação, etc.) no formato da curva de juros tende a acontecer nos primeiros anos. Então, casando a primeira parte do fluxo, reduz-se o risco de reinvestimento e o risco associado com variações na curva de juros não-paralelas. A desvantagem desta abordagem é que, comparada à imunização, o custo é muito maior.

A modelagem matemática neste caso é a seguinte (Zenios (1999)):

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_i VP_i x_i + s_0 \\
 \text{Sujeito a} \quad & \sum_i D_{it} x_i + s_{t-1} (1 + \rho)^{\Delta t} = P_t + s_t \\
 & \frac{\sum_i VP_i x_i + s_0}{\sum_i k_i x_i} = \frac{VP_P}{k_P} \\
 & s_t \geq 0 \\
 & x_i \geq 0
 \end{aligned}$$

3.11.

As limitações do modelo tradicional

A duração e a convexidade tradicionais são conceitos extremamente simples, o que favoreceu sua grande expansão durante anos. Sem dúvida, esta grande simplicidade existe, principalmente, devido às grandes suposições nas quais a teoria se baseia.

Em particular, o conceito de duração de Macaulay supõe uma curva de juros plana que se movimenta paralelamente e que usa a taxa interna de retorno como a taxa de desconto dos fluxos de caixa e como fator de risco que se deseja gerenciar. O modelo de Fisher-Weil, mesmo eliminando a suposição de curva plana, segue

considerando que os choques são de mesma magnitude (deslocamentos paralelos). Além disso, ambas as abordagens consideram que as mudanças na curva são instantâneas, ou seja, uma mudança afeta instantaneamente toda a carteira.

A clara irrerealidade destas hipóteses, sobretudo a suposição de que a curva se movimenta como um todo, motivou e tem motivado o desenvolvimento na literatura financeira de fórmulas alternativas que buscam analisar com maior eficácia o risco de taxa de juros contido em carteiras de renda fixa.

Entretanto, muitas destas novas definições existem apenas no plano teórico e o conceito de duração tradicional, apesar de suas limitações, continua sendo considerado um instrumento básico na gestão de carteiras. Sem dúvida, o êxito que os modelos mais simples apresentaram em estudos empíricos durante a década de 80, promoveu sua grande difusão. No entanto, seus resultados devem ser analisados com cautela.

3.12. Outros modelos de duração

Outros tipos de modelos de duração foram propostos na literatura financeira com o intuito de solucionar alguns dos problemas contidos no modelo tradicional. Por exemplo, modelo de duração paramétrica; as durações direcionais; as durações parciais; as durações estocásticas. Alguns destes serão detalhados mais à frente.