# 4
# Curvas Algébricas de gênero três em característica dois com muitos pontos de Weierstrass

Como vimos no capítulo anterior o peso de um ponto de Weierstrass é 1 ou maior que 2 se sua seqüência de ordens for 0,1,3 ou 0,1,4, respectivamente. No estudo de curvas com número máximo de pontos de Weierstrass, 24, estamos interessados na existência de pontos com seqüência de ordens 0,1,3; a normalizacão desta curva é feita na seção 4.1. Na seção 4.2 estudamos a curva genérica, e segundo o valor do invariante de Hasse-Witt damos as equações explícitas para o modelo plano e condições para que estas curvas atinjam o número máximo de pontos de Weierstrass. Na seção 4.3 a curva (4-1) é estudada em maiores detalhes, o que nos leva a estudar as curvas $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$. Como na seção anterior, para cada valor do invariante de Hasse-Witt são dadas as equações explícitas para o modelo plano das curvas e as condições para que elas atinjam o número máximo de pontos de Weierstrass.

## 4.1
## Normalização da curva

No capítulo anterior, nossa hipótese foi que a reta $Z = 0$ é uma bitangente à curva em um único ponto de Weierstrass com seqüência de ordens 0,1,4. A partir dessa hipótese encontramos uma normalização da curva, que utilizamos no estudo de poucos pontos de Weierstrass. Como estamos interessados em estudar curvas com muitos pontos de Weierstrass, devemos supor que a bitangente $Z = 0$ intersecta a curva em dois pontos distintos $P$ e $Q$.
Uma curva de gênero três é canonicamente imersa no espaço projetivo $\mathbb{P}^2$ como uma quártica suave

$$f(x,y) = \sum_{i+j\leq 4} a_{ij}x^iy^j = 0.$$

Normalizando, podemos supor que $P = (1 : 0 : 0)$ e $Q = (0 : 1 : 0)$. Como $P$ e $Q$ pertencem à curva temos que $a_{40} = a_{04} = 0$; a tangência nesses pontos implica que $a_{31} = a_{13} = 0$ e a não singularidade implica que $a_{30} \neq 0$ e $a_{03} \neq 0$. Para que $f$ tenha grau quatro é necessário que $a_{22} \neq 0$.
Por outro lado, a curva contém um ponto de Weierstrass, digamos $P_0$, que pode ser normalizado para a origem, isto é, $P_0 = (0 : 0 : 1)$. Nosso objetivo é estudar curvas que atinjam a cota máxima de pontos de Weierstrass, assim, devemos ter 0,1,3 como a seqüência de ordens do ponto $P_0$. Logo, a tangente à curva neste ponto deve intersectar a curva em algum outro ponto, digamos $R$.
Genericamente temos que $R \neq P$ e $R \neq Q$. Podemos supor que $R = (1 : 1 : 1)$, pela tangência e não singularidade da curva no ponto $P_0$ temos que $a_{10} = a_{01} \neq 0$. Como a seqüência de ordens de $P_0$ é 0,1,3 devemos ter que $a_{11} = a_{20} + a_{02}$. Também temos que $a_{00} = 0$ e $a_{22} = a_{30} + a_{21} + a_{12} + a_{03}$, pois a curva passa pelos pontos $P_0$ e $R$. Normalizando $a_{10} = a_{01} = 1$, temos que a equação da curva é dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & x + y + a_{20}x^2 + (a_{20} + a_{02})xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + \\ & a_{03}y^3 + (a_{30} + a_{21} + a_{12} + a_{03})x^2y^2, \end{aligned}$$

onde $a_{30} \neq 0$, $a_{03} \neq 0$ e $a_{30} + a_{21} + a_{12} + a_{03} \neq 0$. Obtendo seis módulos independentes, confirmando que a dimensão do espaço $\mathcal{M}_3$ é 6.
Uma situação particular de moduli é supor que $R = P$, neste caso como a reta tangente à curva em $P_0$ passa pelo ponto $P$ devemos ter $a_{10} = a_{20} = 0$. A não singularidade no ponto $P_0$ implica que $a_{01} \neq 0$ e como a curva passa pelo ponto $P_0$ temos que $a_{00} = 0$. Normalizando $a_{01} = 1$ temos que a equação da curva é dada por

$$f_1(x,y) = y + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{22}x^2y^2 \quad (4\text{-}1)$$

com $a_{22} \neq 0$, $a_{30} \neq 0$ e $a_{03} \neq 0$. Esta curva será estudada posteriormente.

## 4.2
## Estudo da curva genérica

Nesta seção determinaremos em que casos a curva genérica atinge a cota máxima de pontos de Weierstrass.

### 4.2.1
### Matriz e Invariante de Hasse-Witt da curva genérica

Vamos determinar o invariante de Hasse-Witt da curva genérica, assim como suas respectivas equações.
A matriz de Hasse-Witt da curva genérica é dada por

$$H = \begin{pmatrix} a_{20}+a_{02} & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{03} \\ 1 & a_{30} & a_{12} \end{pmatrix},$$

e o invariante de Hasse-Witt da curva genérica é dado pelo posto da matriz $M = H.H^{(2)}.H^{(4)}$ dada por:

$$M = \begin{pmatrix} (a_{20}+a_{02})^7 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
c_{21} &= (a_{20}^2+a_{02}^2+a_{21}+a_{03})(a_{20}+a_{02})^4+(a_{21}^3+a_{03}a_{30}^2)+(a_{21}a_{03}^2+a_{03}a_{12}^2),\\
c_{22} &= a_{21}^4(a_{21}^3+a_{03}a_{30}^2)+a_{30}^4(a_{21}a_{03}^2+a_{03}a_{12}^2),\\
c_{23} &= a_{03}^4(a_{21}^3+a_{03}a_{30}^2)+a_{12}^4(a_{21}a_{03}^2+a_{03}a_{12}^2),\\
c_{31} &= (a_{20}^2+a_{02}^2+a_{12}+a_{30})(a_{20}+a_{02})^4+(a_{30}a_{21}^2+a_{12}a_{30}^2)+(a_{30}a_{03}^2+a_{12}^3),\\
c_{32} &= a_{21}^4(a_{30}a_{21}^2+a_{12}a_{30}^2)+a_{30}^4(a_{30}a_{03}^2+a_{12}^3),\\
c_{33} &= a_{03}^4(a_{30}a_{21}^2+a_{12}a_{30}^2)+a_{12}^4(a_{30}a_{03}^2+a_{12}^3).
\end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_{20}+a_{02},\\
\beta &= a_{21}^3+a_{03}a_{30}^2,\\
\gamma &= a_{21}a_{03}^2+a_{03}a_{12}^2,\\
\theta &= a_{30}a_{03}^2+a_{12}^3,\\
\omega &= a_{30}a_{21}^2+a_{12}a_{30}^2,
\end{aligned}$$

então, podemos escrever a matriz $M$ como

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^7 & 0 & 0 \\ (\alpha^2 + a_{21} + a_{03})\alpha^4 + \beta + \gamma & a_{21}^4\beta + a_{30}^4\gamma & a_{12}^4\gamma + a_{03}^4\beta \\ (\alpha^2 + a_{12} + a_{30})\alpha^4 + \omega + \theta & a_{21}^4\omega + a_{30}^4\theta & a_{12}^4\theta + a_{03}^4\omega \end{pmatrix}.$$

### 4.2.2
### A curva genérica com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 3$

Temos que $\alpha \neq 0$, logo a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^4\beta + a_{30}^4\gamma & a_{12}^4\gamma + a_{03}^4\beta \\ 0 & a_{21}^4\omega + a_{30}^4\theta & a_{12}^4\theta + a_{03}^4\omega \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz $M$ tem posto três se, e somente se, $a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} \neq 0$. Logo, a equação da curva genérica é dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) = \quad & x + y + a_{20}x^2 + (a_{20} + a_{02})xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + \\ & a_{03}y^3 + (a_{03} + a_{30} + a_{12} + a_{21})x^2y^2, \end{aligned}$$

com $a_{03} \neq 0$, $a_{30} \neq 0$, $a_{02} \neq a_{20}$ e $a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} \neq 0$.
Neste caso temos sete bitangentes não canônicas, uma delas é a reta no infinito e as outras seis estão dadas pela seguinte equação

$$\xi_{ij} + \theta_i x + \theta_i \left( \frac{\theta_1 + a_{21} + a_{30}}{a_{30}} \right) = 0,$$

onde $\theta_i$ é raiz de

$$Z^3 + (a_{21}^2 + a_{30}a_{12})Z + a_{30}(a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03}) = 0$$

e $\xi_{ij}$ é raiz de

$$Z^2 + (a_{20} + a_{02})Z + \theta_i \left( \frac{\theta_1 + a_{21} + a_{30}}{a_{30}} \right) = 0.$$

As retas intersectam a curva em dois pontos se

$$(a_{21} + a_{30})\theta_i + a_{30}\xi_{ij}(a_{20} + a_{02}) \neq 0.$$

### 4.2.3
### A curva genérica com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 2$

Consideremos dois casos:

Caso $\alpha = 0$: Então $a_{02} = a_{20}$.

Se $a_{21} = 0$ a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & (a_{12}+a_{03})^4\gamma \\ \theta & \omega & (a_{12}+a_{03})^4\theta \end{pmatrix}.$$

Temos que a matriz tem posto dois se, e somente se, $a_{12}a_{21}+a_{30}a_{03} \neq 0$.
Se $a_{12} = 0$ a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & (a_{21}+a_{30})^4\beta & \gamma \\ \omega & (a_{21}+a_{30})^4\omega & \theta \end{pmatrix}.$$

Temos que a matriz tem posto dois se, e somente se, $a_{12}a_{21}+a_{30}a_{03} \neq 0$.
Se $a_{12} \neq 0$ e $a_{21} \neq 0$, neste caso a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta+\gamma & (a_{21}+a_{30})^4\beta & (a_{12}+a_{03})^4\gamma \\ \omega+\theta & (a_{21}+a_{30})^4\omega & (a_{12}+a_{03})^4\theta \end{pmatrix}.$$

Se $a_{21} + a_{30} = 0$, então a matriz $M$ tem posto dois se $a_{12} \neq a_{03}$ e $a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03} \neq 0$.
Se $a_{12} + a_{03} = 0$, então a matriz $M$ tem posto dois se $a_{21} + a_{30} \neq 0$ e $a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03} \neq 0$.
Se $a_{12} \neq a_{03}$ e $a_{21} + a_{30} \neq 0$, então a matriz $M$ tem posto dois se $a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03} \neq 0$.

Caso $\alpha \neq 0$: Neste caso a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^4\beta + a_{30}^4\gamma & a_{12}^4\gamma + a_{03}^4\beta \\ 0 & a_{21}^4\omega + a_{30}^4\theta & a_{12}^4\theta + a_{03}^4\omega \end{pmatrix}.$$

Se $a_{12} = 0$ ou $a_{21} = 0$ temos uma contradição. logo devemos ter que $a_{12} \neq 0$ e $a_{21} \neq 0$. A matriz $M$ tem posto dois se $a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03} = 0$ e se algumas das entradas da matriz for diferente de zero. Utilizando esta última igualdade, podemos escrever as entradas em termos de $\beta$. Primeiro observe que

$$\gamma = \frac{a_{03}^2}{a_{21}^2}\beta, \qquad \theta = \frac{a_{30}a_{03}^2}{a_{21}^3}\beta, \qquad \omega = \frac{a_{30}}{a_{21}}\beta.$$

Logo,

$$a_{21}^4\beta + a_{30}^4\gamma = (a_{21}^4 + a_{12}^2a_{30}^2)\beta$$

$$a_{12}^4\gamma + a_{03}^4\beta = \frac{a_{03}^2}{a_{21}^2}(a_{12}^4 + a_{21}^2a_{03}^2)\beta$$

$$a_{21}^4\omega + a_{30}^4\theta = \frac{a_{30}}{a_{21}}(a_{21}^4 + a_{12}^2a_{30}^2)\beta$$

$$a_{12}^4\theta + a_{03}^4\omega = \frac{a_{12}a_{03}}{a_{21}^2}(a_{12}^4 + a_{21}^2a_{03}^2)\beta.$$

Podemos escrever $\beta = a_{21}(a_{21}^2 + a_{12}a_{30})$. Por outro lado,

$$a_{12}^4 + a_{21}^2a_{03}^2 = \frac{a_{03}^2}{a_{21}^2}(a_{21}^4 + a_{12}^2a_{30}^2)$$

Assim, a matriz tem posto dois se $a_{12}a_{21}+a_{30}a_{03} = 0$ e $a_{21}^2+a_{12}a_{30} \neq 0$.

Em resumo, a curva genérica tem invariante de Hasse-Witt igual a dois, nos seguintes casos:

Caso 1: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + (a_{30} + a_{03} + a_{12})x^2y^2$,
com $a_{30} \neq 0$, $a_{03} \neq 0$ e $a_{30} + a_{03} + a_{12} \neq 0$.

Caso 2: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + (a_{30} + a_{03} + a_{21})x^2y^2$,
com $a_{30} \neq 0$, $a_{03} \neq 0$ e $a_{30} + a_{03} + a_{21} \neq 0$.

Caso 3: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{30}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + (a_{12} + a_{03})x^2y^2$,
com $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{12} \neq a_{03}$, $a_{21} = a_{30}$ e $a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} \neq 0$.

Caso 4: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{03}xy^2 + a_{03}y^3 + (a_{21} + a_{30})x^2y^2$,
com $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{21} \neq a_{30}$, $a_{12} = a_{03}$ e $a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} \neq 0$.

Caso 5: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + (a_{12} + a_{21} + a_{03} + a_{30})x^2y^2$,
com $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{30} \neq 0$, $a_{03} \neq 0$, $a_{12} \neq a_{03}$, $a_{21} \neq a_{30}$, $a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} \neq 0$ e $a_{12} + a_{21} + a_{03} + a_{30} \neq 0$.

Caso 6: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + (a_{20} + a_{02})xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + (a_{03} + a_{30} + a_{12} + a_{21})x^2y^2$,
com $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{30} \neq 0$, $a_{03} \neq 0$, $a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} = 0$ e $a_{21}^2 \neq a_{12}a_{30}$.

Consideremos a curva do caso 1, temos que ela é não singular se

$$(a_{12} + a_{20}a_{03})(a_{12} + a_{30}) + a_{03}(a_{30} + a_{03} + a_{20}a_{03}) \neq 0.$$

Neste caso devemos encontrar quatro bitangentes, a bitangente canônica é dada pela reta no infinito, as outras bitangentes são dadas pelas equações

$$\left(\frac{\theta_i^2 + a_{30}\theta_i}{a_{30}}\right)^{1/2} + \theta_i x + \frac{\theta_i^2}{a_{30}} y = 0,$$

onde $\theta_i$ é raiz de

$$Z^3 + a_{30}a_{12}Z + a_{30}^2 a_{03} = 0.$$

Como $\theta_i \neq 0$, temos que todas as bitangentes intersectam a curva em dois pontos distintos.

### 4.2.4
### A curva genérica com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 1$

Consideremos dois casos:

Caso $\alpha = 0$: Então $a_{02} = a_{20}$.
Se $a_{21} = 0$ a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & (a_{12} + a_{03})^4\gamma \\ \theta & \omega & (a_{12} + a_{03})^4\theta \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem posto 1 se, e somente se,

$$(a_{12} + a_{03})^4\gamma\omega + \beta\theta = (a_{12} + a_{03})^4(a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03})^3 = 0.$$

Como $a_{21} = 0$, temos que $\gamma\omega + \beta\theta = (a_{30}a_{03})^3 \neq 0$. Logo, a matriz tem posto 1 se, e somente se, $a_{12} = a_{03}$.
Se $a_{12} = 0$ a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & (a_{21} + a_{30})^4\beta & \gamma \\ \omega & (a_{21} + a_{30})^4\omega & \theta \end{pmatrix}.$$

Como no caso anterior, esta matriz tem posto 1 se, e somente se, $a_{21} = a_{30}$.

Se $a_{12} \neq 0$ e $a_{21} \neq 0$, neste caso a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta + \gamma & (a_{21} + a_{30})^4 \beta & (a_{12} + a_{03})^4 \gamma \\ \omega + \theta & (a_{21} + a_{30})^4 \omega & (a_{12} + a_{03})^4 \theta \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem posto 1 se, e somente se, $\gamma\omega + \beta\theta = (a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03})^3 = 0$ e pelo menos uma das entradas é diferente de zero. Observe que qualquer um dos seguintes casos $a_{21} + a_{30} = 0$ ou $a_{12} + a_{03} = 0$ nos leva a uma contradição, isto é, devemos ter que $a_{21} + a_{30} \neq 0$ e $a_{12} + a_{03} \neq 0$. Logo, a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \omega & \theta \end{pmatrix}.$$

Como $a_{12}a_{21} + a_{30}a_{03} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \theta &= \tfrac{a_{30}a_{03}^2}{a_{21}^3}\beta, \\ \gamma &= \tfrac{a_{30}a_{03}^3}{a_{12}a_{21}^3}\beta, \\ \omega &= \tfrac{a_{30}}{a_{21}}\beta. \end{aligned}$$

Então, a matriz tem posto 1 se, $a_{21} + a_{30} \neq 0$, $a_{12} + a_{03} \neq 0$ e $\beta = a_{21}^3 + a_{03}a_{30}^2 \neq 0$.

Caso $\alpha \neq 0$: Neste caso a matriz $M$ é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^4\beta + a_{30}^4\gamma & a_{12}^4\gamma + a_{03}^4\beta \\ 0 & a_{21}^4\omega + a_{30}^4\theta & a_{12}^4\theta + a_{03}^4\omega \end{pmatrix}.$$

A matriz tem posto um se

$$a_{21}^4\beta + a_{30}^4\gamma = 0,$$

$$a_{12}^4\gamma + a_{03}^4\beta = 0,$$

$$a_{21}^4\omega + a_{30}^4\theta = 0,$$

$$a_{12}^4\theta + a_{03}^4\omega = 0.$$

Se $a_{12} = 0$ ou $a_{21} = 0$ temos uma contradição. logo devemos ter que $a_{12} \neq 0$ e $a_{21} \neq 0$. Das igualdades acima, obtemos que

$$a_{21}^3 = a_{03}a_{30}^2,$$

e,

$$a_{12}^3 = a_{03}^2 a_{30}.$$

Portanto, a matriz tem posto um se $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{21}^3 = a_{03}a_{30}^2$ e $a_{12}^3 = a_{03}^2 a_{30}$.

Em resumo, a curva genérica tem invariante de Hasse-Witt igual a um, nos seguintes casos:

Caso 1: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{03}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{30}x^2y^2$, onde $a_{30} \neq 0$ e $a_{03} \neq 0$.

Caso 2: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{30}x^2y + a_{03}y^3 + a_{03}x^2y^2$, onde $a_{30} \neq 0$ e $a_{03} \neq 0$.

Caso 3: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + (a_{12} + a_{21} + a_{30} + a_{03})x^2y^2$,
com $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{30} \neq 0$, $a_{03} \neq 0$, $a_{21} \neq a_{30}$, $a_{12} \neq a_{03}$, $a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} = 0$ e $a_{21}^2 \neq a_{12}a_{30}$.

Caso 4: $f(x,y) = x + y + a_{20}x^2 + (a_{20} + a_{02})xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + (a_{03}a_{30}^2)^{1/3}x^2y + (a_{03}^2a_{30})^{1/3}xy^2 + a_{03}y^3 + (a_{30} + a_{03} + (a_{03}^2a_{30})^{1/3} + (a_{03}^2a_{30})^{1/3})x^2y^2$,
com $a_{30} \neq 0$, $a_{03} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{20} \neq a_{02}$ e $a_{30} \neq a_{03}$.

Consideremos a curva do caso 1, temos que ela é não singular se $a_{20} \neq 0$. Neste caso temos duas bitangentes, sendo que a reta no infinito é a bitangente canônica, e a bitangente não canônica é dada pela equação

$$(a_{03} + a_{30}a_{03}^{1/2}) + (a_{30}a_{03}^{3/2} + a_{30}^2a_{03})^{1/2}x + (a_{03}^{3/2} + a_{30}a_{03})y = 0.$$

Esta reta intersecta a curva em dois pontos distintos se

$$(a_{30}^2 + a_{03})^3 \left(a_{03}^8(a_{30}^2 + a_{03})(a_{30}^2 + a_{03} + 1) + a_{30}^2 a_{03}^6\right) \neq 0.$$

### 4.2.5
### A curva genérica com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 0$

Para que a matriz $M$ tenha posto zero devemos ter que $\alpha = 0$, e as outras entradas da matriz $M$ devem ser iguais a zero. Logo, devemos ter que $\beta = \gamma = 0$ e $\omega = \theta = 0$, pois o coeficiente de $x^2y^2$ é diferente de zero. Assim, temos que $a_{21} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{12}^2 = a_{21}a_{03}$, $a_{21}+a_{30} \neq 0$ e $a_{12}+a_{03} \neq 0$. Logo, a equação da curva genérica com invariante de Hasse-Witt igual a zero, é dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & x + y + a_{20}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + (a_{21}a_{03})^{1/2}xy^2 + \\ & a_{03}y^3 + (a_{30} + a_{21} + (a_{21}a_{03})^{1/2} + a_{03})x^2y^2 \end{aligned}$$

com $a_{21} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{21} + a_{30} \neq 0$, $a_{12} + a_{03} \neq 0$ e $a_{21} + a_{30} + a_{12} + a_{03} \neq 0$. Como a reta no infinito intersecta a curva em dois pontos distintos, temos que a curva tem 24 pontos de Weierstrass distintos.

## 4.3
## Caso Particular

Consideremos a curva (4-1)

$$f(x,y) = y + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{22}x^2y^2$$

com $a_{22} \neq 0$, $a_{30} \neq 0$ e $a_{03} \neq 0$. O Wronskiano desta curva é dado por

$$\mathcal{W}_{\mathcal{K}} = d_2 = \frac{a_{30}x + a_{21}y + a_{22}y^2 + a_{11}d_1 + (a_{02} + a_{12}x + a_{03}y + a_{22}x^2)d_1^2}{a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{03}y^2},$$

onde

$$d_1 = \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \frac{a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{12}y^2}{a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{03}y^2}.$$

Vejamos em que casos podemos encontrar um ponto de Weierstrass distinto de $P_0$, cuja reta tangente intersecta a curva no ponto $P$.
Seja $Q_0 = (\alpha : \beta : 1) \neq P_0$ ponto de Weierstrass da curva com seqüência de ordens 0,1,3, então os seguintes casos podem ocorrer

**(a)** $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ com $\beta$ raiz do polinômio $q(y) = a_{01} + a_{02}y + a_{03}y^2$.

**(b)** $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

A equação da reta tangente no ponto $Q_0$ é dada por

$$f_x(\alpha,\beta)(x+\alpha) + f_y(\alpha,\beta)(y+\beta) = 0$$

Esta reta intersecta a curva no ponto $P$ se, e somente se, $f_x(\alpha,\beta) = 0$. Logo, o ponto $Q_0$ satisfaz:

$$\begin{cases} f(\alpha,\beta) &= 0 \\ f_x(\alpha,\beta) &= 0 \\ \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\alpha,\beta) &= 0, \end{cases}$$

onde $\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(x,y)$ é o numerador do Wronskiano, ou equivalentemente

$$\begin{cases} a_{01}\beta + a_{11}\alpha\beta + a_{02}\beta^2 + a_{30}\alpha^3 + a_{21}\alpha^2\beta + a_{12}\alpha\beta^2 + a_{03}\beta^3 + a_{22}\alpha^2\beta^2 &= 0 \\ a_{11}\beta + a_{30}\alpha^2 + a_{12}\beta^2 &= 0 \\ a_{30}\alpha + a_{21}\beta + a_{22}\beta^2 &= 0. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$f(x,y) = xf_x(x,y) + x^2p(x,y) + a_{30}x^3 + a_{01}y + a_{02}y^2 + a_{03}y^3,$$

onde $p(x,y) = a_{30}x + a_{21}y + a_{22}y^2$ e, pelo mencionado acima, temos que $p(\alpha,\beta) = 0$. Podemos reduzir a expressão que corresponde a $f(\alpha,\beta) = 0$ pela expressão

$$a_{30}\alpha^3 + a_{01}\beta + a_{02}\beta^2 + a_{03}\beta^3 = 0.$$

Então, um ponto de Weierstrass $(\alpha,\beta)$ da curva distinto de $P_0$ com direção $P$ satisfaz

$$\begin{cases} a_{30}\alpha^3 + a_{01}\beta + a_{02}\beta^2 + a_{03}\beta^3 &= 0 \\ a_{11}\beta + a_{30}\alpha^2 + a_{12}\beta^2 &= 0 \\ a_{30}\alpha + a_{21}\beta + a_{22}\beta^2 &= 0. \end{cases}$$

Da última equação temos que

$$\alpha = \frac{a_{21}\beta + a_{22}\beta^2}{a_{30}}.$$

Substituindo o valor de $\alpha$ na primeira e segunda equação temos:

$$\begin{aligned} a_{22}^3\beta^5 + a_{22}^2a_{21}\beta^4 + a_{22}a_{21}^2\beta^3 + (a_{03}a_{30}^2 + a_{21}^3)\beta^2 + a_{02}a_{30}^2\beta + a_{01}a_{30}^2 &= 0 \\ a_{22}^2\beta^3 + (a_{21}^2 + a_{12}a_{30})\beta + a_{11}a_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Consideremos os polinômios:
$q_1(w) = a_{22}^3 w^5 + a_{22}^2 a_{21}^4 + a_{22} a_{21}^2 w^3 + (a_{03} a_{30}^2 + a_{21}^3) w^2 + a_{02} a_{30}^2 w + a_{01} a_{30}^2$,
$q_2(w) = a_{22}^2 w^3 + (a_{21}^2 + a_{12} a_{30}) w + a_{11} a_{30}$.
Pelo Algoritmo da Divisão, temos

$$\begin{aligned} q_1(w) &= q_2(w)\left(a_{22}w^2 + a_{21}w + \tfrac{a_{12}a_{30}}{a_{22}}\right) + \\ & (a_{30}a_{03} + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})a_{22}a_{30}w^2 + \\ & \tfrac{a_{30}}{a_{22}}(a_{30}a_{22}a_{02} + a_{30}a_{12}^2 + a_{22}a_{21}a_{11} + a_{21}^2a_{12})w + \\ & \tfrac{a_{30}^2}{a_{22}}(a_{01}a_{22} + a_{12}a_{11}). \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} c1 &= a_{30}a_{03} + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \\ c2 &= a_{30}a_{22}a_{02} + a_{30}a_{12}^2 + a_{22}a_{21}a_{11} + a_{21}^2a_{12} \\ c3 &= a_{01}a_{22} + a_{12}a_{11}. \end{aligned}$$

Podem acontecer os seguintes casos:

Caso $c1 = c2 = c3 = 0$: Neste caso, $q_1$ e $q_2$ tem três raízes comuns. Logo temos três pontos de Weierstrass, distintos de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Caso $c1 = c2 = 0$ e $c3 \neq 0$: Neste caso, $q_1$ e $q_2$ não tem raízes comuns e logo não temos outros pontos de Weierstrass distintos de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Caso $c1 = 0$, $c2 \neq 0$ e $c3 \neq 0$: Neste caso, temos somente uma única raiz comum, $w = c_3/c_2$. Logo, um ponto de Weierstrass, distinto de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Caso $c1 = 0$, $c2 \neq 0$ e $c3 = 0$: Neste caso, $q_1$ e $q_2$ não tem raízes comuns e logo não temos outros pontos de Weierstrass, distintos de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Caso $c1 \neq 0$ e $c2 = c3 = 0$: Neste caso, $q_1$ e $q_2$ não tem raízes comuns e logo não temos outros pontos de Weierstrass, distintos de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Caso $c1 \neq 0$, $c2 = 0$ e $c3 \neq 0$: Neste caso, $q_1$ e $q_2$ não tem raízes comuns e logo não temos outros pontos de Weierstrass, distintos de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Caso $c1 \neq 0$, $c2 \neq 0$ e $c3 = 0$: Neste caso, temos somente uma única raiz comum, $w = c_2/c_1$. Logo, um ponto de Weierstrass, distinto de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Caso $c1 \neq 0$, $c2 \neq 0$ e $c3 \neq 0$: Neste caso, temos duas raízes em comum, dadas pela equação $c_1w^2 + c_2w + c_3 = 0$. Logo temos dois pontos de Weierstrass, distintos de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.

Portanto, podemos encontrar no máximo 3 pontos de Weierstrass, distintos de $P_0$, cuja reta tangente passa pelo ponto $P$.
Vejamos alguns exemplos. A curva não singular dada por

$$y + (a^2 + b^2)y^2 + ax^3 + bx^2y + axy^2 + by^3 + x^2y^2 = 0,$$

com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a + b \neq 0$ satisfaz, $c1 = c2 = 0$ e $c3 \neq 0$. Logo, o único ponto de Weierstrass da curva cuja reta tangente passa pelo ponto $P$ é o ponto $(0, 0)$.
Considere a curva dada pela equação

$$y + \theta y^3 + (\theta + 1)x^3 + \theta x^2y + (\theta + 1)xy^2 + x^2y^2 = 0,$$

onde $\theta$ é raiz do polinômio $Z^2 + Z + 1$. Temos que $c1 = 0$, $c2 = \theta + 1 \neq 0$ e $c3 = 1$. Logo, temos dois pontos de Weierstrass cuja reta tangente passa pelo ponto $P$, os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.
A curva dada por

$$y + \omega y^2 + xy + \omega x^3 + (\omega + 1)x^2y + xy^2 + y^3 + x^2y^2 = 0,$$

onde $\omega$ é raiz do polinômio $Z^2 + Z + 1$. Temos que $c1 = c2 = c3 = 0$. Logo, temos três pontos de Weierstrass distintos do ponto $P_0$ cuja reta tangente passa pelo ponto $P$. Os pontos $(0 : 0 : 1)$ e $((\omega + 1)^2\xi + (\omega + 1)\xi^2 : \xi : 1)$, onde $\xi^3 = \omega$.

### 4.3.1
### A curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$

Suponhamos que um dos seguintes casos acontece:

$$\begin{array}{lll} c1 = 0 & c2 = 0 & c3 = 0 \\ c1 = 0 & c2 \neq 0 & c3 \neq 0 \\ c1 \neq 0 & c2 \neq 0 & c3 = 0 \\ c1 \neq 0 & c2 \neq 0 & c3 \neq 0. \end{array}$$

Pelo feito anteriormente, podemos supor a existência de um ponto de Weierstrass, digamos $P_1$, distinto de $P_0$ cuja reta tangente intersecta a curva no ponto $P$. Normalizando $P_1 = (1 : 1 : 1 :)$ e $a_{01} = 1$, obtemos os seguintes dados:

1. A passagem da curva implica $1+a_{11}+a_{02}+a_{30}+a_{21}+a_{12}+a_{03}+a_{22} = 0$.
2. A tangência no ponto (1:1:1) implica que $a_{11} + a_{30} + a_{12} = 0$.
3. Como a seqüência de ordens no ponto $P_1$ é 0,1,3, temos que $a_{21}+a_{22}+a_{30} = 0$, $a_{11} + a_{12} + a_{30} = 0$ e $a_{30} + a_{02} + a_{03} = 1$.

Assim temos, $a_{12} = a_{11} + a_{30}$, $a_{03} = 1 + a_{30} + a_{02}$ e $a_{22} = a_{30} + a_{21}$. Fazendo $a = a_{02}$, $b = a_{30}$, $c = a_{21}$ e $d = a_{11}$, encontramos a curva

$$\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}} : \quad y+dxy+ay^2+bx^3+cx^2y+(b+d)xy^2+(1+a+b)y^3+(b+c)x^2y^2 = 0, \tag{4-2}$$

com $b \neq 0$, $b + c \neq 0$ e $1 + a + b \neq 0$.

#### Matriz e Invariante de Hasse-Witt da curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$

Nesta seção, determinaremos a Matriz e o Invariante de Hasse-Witt da curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$.
Utilizamos [[11], p. 60] para obter a seguinte

**Proposição 4.1** *A reta no infinito é a bitangente canônica à curva* $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$ *se, e somente se,* $d = 0$.

A matriz de Hasse-Witt da curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$ é dada por

$$H_{a,b,c,d} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 1 & c & 1+a+b \\ 0 & b & b+d \end{pmatrix}$$

O invariante de Hasse-Witt é dado pelo posto da matriz
$M_{a,b,c,d} = H_{a,b,c,d} \cdot H^{(2)}_{a,b,c,d} \cdot H^{(4)}_{a,b,c,d}$, dada por

$$M_{a,b,c,d} = \begin{pmatrix} d^7 & 0 & 0 \\ d^4A + B & c^4B + b^4(1+a+b)E & (1+a+b)^4B + (1+a+b)(b+d)^4E \\ d^4b + bC & c^4bC + b^4D & (b+d)^4D + b(1+a+b)^4C \end{pmatrix},$$

onde $A = d^2 + c$, $B = c^3 + b^2(1+a+b)$, $C = c^2 + b(b+d)$, $D = (b+d)^3 + b(1+a+b)^2$ e $E = (b+d)^2 + c(1+a+b)$.
Trabalhando por colunas temos que

$$M_{a,b,c,d} \simeq \begin{pmatrix} d^7 & 0 & 0 \\ d^4A + B & c^4B + b^4(1+a+b)E & \frac{1}{b^4}((b+d)c + (1+a+b)b)^4B \\ d^4b + bC & c^4bC + b^4D & \frac{1}{b^3}((b+d)c + (1+a+b)b)^4C \end{pmatrix}.$$

Se $(b+d)c + (1+a+b)b = 0$ o posto da matriz é menor que três, logo

$$M_{a,b,c,d} \simeq \begin{pmatrix} d^7 & 0 & 0 \\ d^4A + B & c^4B + b^4(1+a+b)E & 0 \\ d^4b + bC & c^4bC + b^4D & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos também que $(b+d) \neq 0$ e $c \neq 0$. Logo,

Posto zero: A matriz $M_{a,b,c,d}$ tem posto zero se $d = 0$, $B = 0$, $bC = 0$, $c^4B + b^4(1+a+b)E = 0$ e $c^4bC + b^4D = 0$.
Isto é, $d = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ e $E = 0$.

Posto um: A matriz $M_{a,b,c,d}$ tem posto um nos seguintes casos:

Caso 1 $d \neq 0$, $c^4B + b^4(1+a+b)E = 0$ e $c^4bC + b^4D = 0$.
Podemos ver que as duas últimas equações são equivalentes, pois $(b+d)c + (1+a+b)b = 0$. O que nos leva a concluir que $B = C = D = E = 0$. Logo, $c^2 = b(b+d)$ e $(b+d)^2 = c(1+a+b)$.

Caso 2 $d = 0$ e pelo menos um dos termos $B, C, D, E$ é diferente de zero. Isto é possível, pois $C = (b+c)^2 \neq 0$.

Posto dois: A matriz $M_{a,b,c,d}$ tem posto dois se $d \neq 0$ e $c^4B + b^4(1+a+b)E \neq 0$ ou $c^4bC + b^4D \neq 0$.
Como $(b+d)c + (1+a+b)b = 0$, temos que as duas equações implicam que $C \neq 0$. Então, a matriz $M_{a,b,c,d}$ tem posto dois se $d \neq 0$ e $c^2 \neq (b+d)b$.
Observe que se $d = 0$ a matriz $M_{a,b,c,d}$ não pode ter posto dois pois teria duas colunas linearmente dependentes.

Se $(b+d)c+(1+a+b)b \neq 0$ temos que

$$M_{a,b,c,d} \simeq \begin{pmatrix} d^7 & 0 & 0 \\ d^4+a_{01}^4 B & c^4B+b^4(1+a+b)E & B \\ d^4b+bC & c^4bC+b^4D & bC \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} d^7 & 0 & 0 \\ d^4 & b^4(1+a+b)E & B \\ d^4b & b^4D & bC \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} d^7 & 0 & 0 \\ d^4 & (1+a+b)E & B \\ d^4b & D & bC \end{pmatrix}.$$

Como $(b+d)c+(1+a+b)b \neq 0$, temos que:

**(i)** Se $E=0$ então $D \neq 0$.

**(ii)** Se $C=0$ então $B \neq 0$.

**(iii)** $b(1+a+b)EC+BD = ((b+d)c+(1+a+b)b)^3 \neq 0$.

Pelo observado acima ou pelo corolário 2.1, temos que a matriz $M_{a,b,c,d}$ só pode ter posto maior ou igual a dois.

**(a)** A matriz $M_{a,b,c,d}$ tem posto dois se, e somente se, $d=0$.

**(b)** A matriz $M_{a,b,c,d}$ tem posto três se, e somente se, $d \neq 0$.

### Pontos de Weierstrass da curva $\mathsf{C}_{a,b,c,d}$ com invariante $\sigma = 3$

Neste caso a característica teta canônica não é representada por uma bitangente. Logo, pela proposição 4.1, temos que $d \neq 0$. Portanto, a curva $\mathsf{C}_{a,b,c,d}$ tem invariante $\sigma = 3$ se, e somente se, $(b+d)c+(1+a+b)b \neq 0$. A equação da curva é dada por

$$f(x,y) = y+dxy+ay^2+bx^3+cx^2y+(b+d)xy^2+(1+a+b)y^3+(b+c)x^2y^2,$$

com $d \neq 0$, $b \neq 0$, $1+a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$ e $(b+d)c+(1+a+b)b \neq 0$.
A matriz de Hasse-Witt é dada por

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 1 & c & 1+a+b \\ 0 & b & b+d \end{pmatrix}.$$

Neste caso a caracterśtica teta canônica não é representada por um divisor positivo e temos 7 características teta não canônicas. As bitangentes não canônicas são dadas pelos polinômios $p + qx + ry \neq 0$, cujos coeficientes satisfazem o sistema

$$\begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & 1+a+b & b+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} dp + q &= p^2 \\ cq + br &= q^2 \\ (1+a+b)q + (b+d)r &= r^2 \end{aligned}$$

Da segunda e terceira equações obtemos

$$q\left(q^3 + (c^2 + b(b+d))q + b((b+d)c + (1+a+b)b)\right) = 0.$$

Se $q = 0$, então $r = 0$ e da primeira equação temos $p = d \neq 0$. Logo, uma bitangente não canônica é a reta no infinito $Z = 0$.

O polinômio

$$q^3 + (c^2 + b(b+d))q + b((b+d)c + (1+a+b)b)$$

possui três raízes distintas, digamos $q_1$, $q_2$ e $q_3$. Da segunda equação e para cada $i \in \{1,2,3\}$ temos

$$r_i = \frac{q_i^2 + cq_i}{b}.$$

Também, da primeira equação, temos que o polinômio

$$p^2 + dp + q_i = 0$$

possui duas raízes distintas, digamos $p_{i1}$ e $p_{i2}$, pois $d \neq 0$. Portanto, as outras 6 bitangentes não canônicas são dadas pelas equações

$$p_{ij} + q_i x + r_i y = 0,$$

onde $i \in \{1,2,3\}$ e $j \in \{1,2\}$. A reta tangente intersecta a curva em dois pontos distintos se, e somente se,

$$dq_i^3 + (ab+dc)q_i^2 + (b+c)bp_{ij}^2 + b((b+d)c + (1+a+b)b)p_{ij} \neq 0. \quad \text{(4-3)}$$

Logo, se a condição (4-3) é satisfeita para todo $i, j$, então a curva tem 24 pontos de Weierstrass.

**Pontos de Weierstrass da curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$ com invariante $\sigma = 2$**

Neste caso, a característica teta é representada por uma bitangente. Suponhamos primeiro que a bitangente canônica é dada pela reta no infinito. Pela proposição 4.1, temos que $d = 0$. Logo, a curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$ tem invariante $\sigma = 2$ se, e somente se, $bc + (1 + a + b)b \neq 0$. Portanto, a equação da curva é dada por

$$f(x, y) = y + ay^2 + bx^3 + cx^2y + bxy^2 + (1 + a + b)y^3 + (b + c)x^2y^2,$$

com $b \neq 0$, $b + c \neq 0$ e $bc + (1 + a + b)b \neq 0$.
A matriz de Hasse-Witt é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1+a+b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}.$$

As características teta não canônicas são dadas pelos polinômios $a+bx+cy \neq 0$, cujos coeficientes satisfazem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & 1+a+b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} q &= p^2 \\ cq + br &= q^2 \\ (1 + a + b)q + br &= r^2. \end{aligned}$$

Da segunda e terceira equações, obtemos

$$q\left(q^3 + (c^2 + b^2)q + b(bc + (1 + a + b)b)\right) = 0.$$

É claro que $q \neq 0$, então $q$ satisfaz

$$q^3 + (c^2 + b^2)q + b(bc + (1 + a + b)b) = 0.$$

Este polinômio possui três raízes distintas, digamos, $q_1$, $q_2$ e $q_3$. Logo, as equações das bitangentes não canônicas estão dadas por

$$(q_i)^{1/2} + q_i x + \left(\frac{q_i^2 + cq_i}{b}\right) y = 0,$$

onde $i \in \{1, 2, 3\}$.
Cada bitangente canônica intersecta a curva em dois pontos distintos se, e somente se,

$$(a^2b^2c^2 + (b+c)^2b^2 + a^2b^4)q_i + b(bc + (1+a+b)b)^2 + a^2b^3(bc + (1+a+b)b) \neq 0,$$

para todo $i$. Assim, a curva tem 24 pontos de Weierstrass.
Se a bitangente canônica não é dada pela reta no infinito, então, pela proposição 4.1, temos que $d \neq 0$. Logo, a curva tem invariante $\sigma = 2$ se, e somente se,

$$(b+d)c + (1+a+b)b = 0 \qquad \text{e} \qquad c^2 \neq (b+d)b,$$

e assim a equação da curva é dada por

$$f(x,y) = y + dxy + ay^2 + bx^3 + cx^2y + (b+d)xy^2 + \frac{(b+d)c}{b}y^3 + (b+c)x^2y^2,$$

com $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b + d \neq 0$, $b + c \neq 0$ e $c^2 \neq (b+d)b$.
A matriz de Hasse-Witt é dada por

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 1 & c & \frac{(b+d)c}{b} \\ 0 & b & b+d \end{pmatrix}.$$

A característica teta canônica é dada pelo polinômio $a + bx + cy \neq 0$, cujos coeficientes satisfazem o sistema

$$\begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & \frac{(b+d)c}{b} & b+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} dp + q &= 0 \\ cq + br &= 0 \\ (b+d)cq + (b+d)br &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos a equação da bitangente canônica

$$b + dbx + cdy = 0,$$

que intersecta a curva em dois pontos distintos, se

$$cd^3 + abd^2 + (c^2 + (b+d)b)d + (b+c)b \neq 0. \tag{4-4}$$

As características teta não canônicas são dadas pelos polinômios $p + qx + ry \neq 0$, cujos coeficientes satisfazem o sistema

$$\begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & \frac{(b+d)c}{b} & b+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{array}{lcl} dp + q & = & p^2 \\ cq + br & = & q^2 \\ (b+d)cq + (b+d)br & = & br^2. \end{array}$$

Da segunda e terceira equações temos

$$r^2 \left( r^2 + \frac{(b+d)}{b}(c^2 + (b+d)b) \right) = 0.$$

Se $r = 0$, então $q = 0$. A primeira equação se reduz a $p^2 + dp = 0$. Logo, $p = d$. Uma bitangente não canônica é dada pela reta no infinito $Z = 0$.
Se $r = \left(\frac{(b+d)}{b}(c^2 + (b+d)b)\right)^{1/2} \neq 0$, temos, utilizando a terceira equação, que

$$q = \frac{(b+d)}{b} \left(c^2 + (b+d)b\right)^{1/2}.$$

E assim,

$$p^2 + dp + \frac{(b+d)}{d} \left(c^2 + (b+d)b\right)^{1/2} = 0.$$

Como $d \neq 0$ a equação possui duas raizes distintas, digamos $p_1$ e $p_2$. Logo as equações das outras bitangentes não canônicas são dadas por

$$p_1 + \frac{(b+d)}{b} \left(c^2 + (b+d)b\right)^{1/2} x + \left(\frac{(b+d)}{b}(c^2 + (b+d)b)\right)^{1/2} y = 0,$$

e

$$p_2 + \frac{(b+d)}{b} \left(c^2 + (b+d)b\right)^{1/2} x + \left(\frac{(b+d)}{b}(c^2 + (b+d)b)\right)^{1/2} y = 0,$$

que intersectam a curva em dois pontos distintos se, e somente se,

$$(b+d)b^4 + b^3c^2 + bc^2(b+d)^2 + c^4(b+d) \neq 0. \tag{4-5}$$

Logo, a curva possui 24 pontos de Weierstrass se, e somente se, as condicões (4-4) e (4-5) são satisfeitas.

**Pontos de Weierstrass da curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$ com invariante $\sigma = 1$**

Neste caso a curva tem duas bitangentes sendo que uma delas é a bitangente canônica.
Suponhamos que a bitangente canônica é a reta no infinito, pela proposição 4.1 temos que $d = 0$. Logo, a curva $\mathsf{C}_{\mathsf{a,b,c,d}}$ tem invariante $\sigma = 1$ se, e somente se, $bc + (1+a+b)b = 0$, $b^2 \neq c(1+a+b)$ e $c^2 \neq b^2$. Assim temos que a equação da curva é dada por

$$f(x,y) = y + ay^2 + bx^3 + cx^2y + bxy^2 + (1+a+b)y^3 + (b+c)x^2y^2,$$

com $c \neq 0$, $b \neq 0$, $1+a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$ e $b^2 \neq (1+a+b)c$.
A matriz de Hasse-Witt é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1+a+b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}.$$

A característica teta não canônica é dada pelo polinômio $p + qx + ry \neq 0$, cujos coeficientes satisfazem o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & 1+a+b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} q &= p^2 \\ cq + br &= q^2 \\ (1+a+b)q + br &= r^2. \end{aligned}$$

Da segunda e terceira equações, temos que $q = \left(\frac{c}{(1+a+b)}\right)^{1/2} r$. Substituindo este valor na terceira equação obtemos

$$r^2 + (b^2 + c(1+a+b))^{1/2} r = 0.$$

Se $r = 0$, então $q = p = 0$. Logo,

$$r = \big(b^2 + c(1+a+b)\big)^{1/2} \neq 0,$$

$$q = \left(\frac{c}{(1+a+b)}\right)^{1/2} \big(b^2 + c(1+a+b)\big)^{1/2} \neq 0$$

e

$$p = \left(\left(\frac{c}{(1+a+b)}\right)^{1/2} \big(b^2 + c(1+a+b)\big)^{1/2}\right)^{1/2} \neq 0.$$

Portanto a equação da bitangente não canônica é

$$\left(\frac{c}{(1+a+b)}\right)^{1/4} + \left(\frac{c}{(1+a+b)}\right)^{1/2} \big(b^2 + c(1+a+b)\big)^{1/4} x + \big(b^2 + c(1+a+b)\big)^{1/4} y = 0.$$

A interseção da bitangente com a curva é dada pela equação

$$\frac{(b+c)c}{(1+a+b)}x^4 + \frac{c^{1/2}(a^2cb^2 + a^2c^2(1+a+b) + (b+c)^2(1+a+b))^{1/2}}{(1+a+b)(b^2+c(1+a+b))^{1/2}}x^2 +$$

$$\frac{c^{1/4}(a^4cb^2 + a^4c^2(1+a+b) + b^4(1+a+b))^{1/4}}{(1+a+b)^{1/2}(b^2+c(1+a+b))^{3/4}} = 0.$$

A interseção é um único ponto se, e somente se,

$$a^2cb^2 + a^2c^2(1+a+b) + (b+c)^2(1+a+b) = 0.$$

Logo, a curva possui 24 pontos de Weiertrass se, e somente se,

$$a^2cb^2 + a^2c^2(1+a+b) + (b+c)^2(1+a+b) \neq 0.$$

Suponhamos que a bitangente canônica não é a reta no infinito. Pela proposição 4.1, temos que $d \neq 0$. Logo, a curva tem invariante $\sigma = 1$ se, e somente se, $(b+d)c + (1+a+b)b = 0$, $(b+d)^2 = c(1+a+b)$ e $c^2 = (b+d)b$. Assim temos que a equação da curva é dada por

$$f(x,y) = y + dxy + ay^2 + bx^3 + \frac{(b+d)^2}{(1+a+b)}x^2y + (b+d)xy^2 + (1+a+b)y^3 + \frac{(b+ab+d^2)}{(1+a+b)}x^2y^2,$$

com $d \neq 0$, $b \neq 0$, $b+d \neq 0$, $1+a+b \neq 0$ e $b+ab+d^2 \neq 0$.
A matriz de Hasse-Witt é dada por

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 1 & \frac{(b+d)^2}{(1+a+b)} & 1+a+b \\ 0 & b & b+d \end{pmatrix}.$$

A característica teta canônica é dada pelo polinômio $a + bx + cy \neq 0$, cujos coeficientes satisfazem o sistema

$$\begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ 0 & \frac{(b+d)^2}{(1+a+b)} & b \\ 0 & 1+a+b & b+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos as seguintes equações

$$\begin{array}{lcl} dp + q & = & 0 \\ \frac{(b+d)^2}{(1+a+b)} q + br & = & 0 \\ (1+a+b)q + (b+d)r & = & 0. \end{array}$$

Podemos observar que as segunda e terceira linhas são linearmente dependentes. Logo temos que

$$q = \frac{(b+d)}{(1+a+b)} r, \qquad q = \frac{(b+d)}{d(1+a+b)} r.$$

Portanto, a bitangente canônica é dada por

$$(b+d) + d(b+d)x + d(1+a+b)y = 0,$$

que intersecta a curva em um único ponto se, e somente se,

$$d^3(b+d)(1+a+b)^2 + (b+ab+d^2)(b+d)^2 + ad(b+d)^2(1+a+b) = 0.$$

Portanto, a curva tem 24 pontos de Weierstrass se, e somente se,

$$d^3(b+d)(1+a+b)^2 + (b+ab+d^2)(b+d)^2 + ad(b+d)^2(1+a+b) \neq 0.$$

### Pontos de Weierstrass da curva $\mathsf{C}_{a,b,c,d}$ com invariante $\sigma = 0$

Neste caso, só temos uma bitangente, que é a bitangente canônica e, pela proposição 4.1, temos que $d = 0$. Logo, a curva $\mathsf{C}_{a,b,c,d}$ tem invariante $\sigma = 0$ se, e somente se, $b^2 = c(1+a+b)$ e $c^2 = b^2$. Então, o coeficiente de grau quatro da curva (4-2) é igual a zero. Portanto, a curva $\mathsf{C}_{a,b,c,d}$ não tem invariante zero.