3
Curvas Algébricas de gênero três em característica dois com poucos pontos de Weierstrass

Estudaremos neste capítulo curvas de gênero três em característica dois com o número de pontos de Weierstrass menor do que o máximo possível.

3.1
Normalização e Wronskiano da curva

Uma curva algébrica não singular completa e não hipereliptica de gênero três, utilizando o sistema linear canônico, pode ser mergulhada em $\mathbb{P}^2$, como o lugar dos zeros de uma quártica. Assim, podemos escrever a equação afim da curva como sendo

$$f(x,y) = \sum_{i+j\leq 4} c_{ij}x^i y^j.$$

Podemos supor que x é uma variável separante. Neste caso o Wronskiano é dado por

$$\mathcal{W}_{\mathcal{K}} = \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = d_2,$$

onde $d_i = D_x^{(i)}(y)$. Para Calcular este Wronskiano consideremos as expansões de Taylor genéricas

$$\mathcal{T}(x) = x + t$$
$$\mathcal{T}(y) = y + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + \cdots = \sum_{i\geq 0} d_i t^i.$$

O cálculo das derivadas se baseia em que

$$f(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \sum_{i,j} c_{ij}\mathcal{T}(x)^i \mathcal{T}(y)^j = 0.$$

Expandindo o lado esquerdo desta equação em t temos

$$\begin{aligned} f(\mathcal{T}(x),\mathcal{T}(y)) &= f(x,y)+t(\sum_{i,j} c_{ij}(ix^{i-1}y^j + jx^iy^{j-1}d_1))+ \\ & t^2(\sum_{i,j} c_{ij}(\binom{i}{2} x^{i-2}y^j + ijx^{i-1}y^{j-1}d_1 + jx^iy^{j-1}d_2 + \\ & \binom{j}{2} x^iy^{j-2}d_1^2)) + \cdots \end{aligned}$$

A igualdade dos coeficientes de t fornece

$$d_1 = \frac{f_x}{f_y} = \frac{\sum\limits_{i\equiv 1 \mod 2} c_{ij}x^{i-1}y^j}{\sum\limits_{j\equiv 1 \mod 2} c_{ij}x^iy^{j-1}},$$

e

$$d_2 = \frac{f_y^2 \sum\limits_{i\equiv 2,\,3 \mod 4} c_{ij}x^{i-2}y^j + f_xf_y \sum\limits_{i,\,j\equiv 1 \mod 2} c_{ij}x^{i-1}y^{j-1} + f_x^2 \sum\limits_{j\equiv 2,\,3 \mod 4} c_{ij}x^iy^{j-2}}{(\sum\limits_{j\equiv 1 \mod 2} c_{ij}x^iy^{j-1})^3}.$$

Logo, o Wronskiano da curva é dado por

$$\mathcal{W}_{\mathcal{K}} = \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{K}}}{f_y^3},$$

onde,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = f_y^2 \sum_{i\equiv 2,\,3 \mod 4} c_{ij}x^{i-2}y^j + f_xf_y \sum_{i,\,j\equiv 1 \mod 2} c_{ij}x^{i-1}y^{j-1} + f_x^2 \sum_{j\equiv 2,\,3 \mod 4} c_{ij}x^iy^{j-2}.$$

Como a curva é clássica(de [[5], Teo. 1, p. 379]) temos que a seqüência de ordens genérica é 0,1,2; os outros tipos de seqüência são 0,1,3 e 0,1,4. Seja $\mathcal{R}$ o divisor de Ramificação do morfismo canônico. Segue da seção 2.1 que $\deg \mathcal{R} = 24$ e que o peso dos pontos com seqüência de ordens 0,1,3 e 0,1,4 é igual a 1 e igual ou maior que 2, respectivamente.

Como estamos interessados em curvas que possuam um número de pontos de Weierstrass menor do que o máximo $g^3 - g = 24$, devemos ter pelo menos um ponto P com seqüência de ordens 0,1,4. Temos então que $4P$ é um divisor canônico que é o divisor de interseção da curva C com a reta tangente em P e esta tangente é na realidade uma bitangente com suporte no ponto P. Pelo teorema de Clifford existe uma característica teta que está

associada a uma bitangente. Normalizamos $P = P_\infty = (0:1:0)$.
Então, existem funções $x, y \in K$ tais que $x \in \mathcal{L}(3P_\infty)$ e $y \in \mathcal{L}(4P_\infty)$. Pelo Teorema de Riemann-Roch temos que $\dim \mathcal{L}(12P_\infty) = 10$, logo os 11 monômios da forma $x^i y^j$ com $3i + 4j \leq 12$ são linearmente dependentes. Daí, existem constantes $a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3$ tais que

$$a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + c_1xy + c_2xy^2 + c_3x^2y = 0.$$

Por causa do estudo de ordens temos que os coeficientes a_3 e b_4 são diferentes de zero. Assim, dividindo a equação dada acima por a_3 e associando obtemos

$$y^3 + (c_2x + a_2)y^2 + (c_3x^2 + c_1x + a_1)y + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0,$$

onde $b_4 \neq 0$. Escrevendo $A(x) = c_2x + a_2$, $B(x) = c_3x^2 + c_1x + a_1$ e $C(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, temos a equação:

$$y^3 + A(x)y^2 + B(x)y + C(x) = 0,$$

onde os graus de $A(x), B(x)$ e $C(x)$ são no máximo 1,2 e 4 respectivamente. Fazendo a mudança $y \longleftrightarrow y + A(x)$, que é válida porque y é escolhido como um elemento qualquer de $\mathcal{L}(4P_\infty) =< 1, x, y >$, temos

$$y^3 + (A(x)^2 + B(x))y + A(x)B(x) + C(x) = y^3 + a(x)y + b(x),$$

onde $a(x) = A(x)^2 + B(x)$ e $b(x) = A(x)B(x) + C(x)$.
Observemos que $a(x)$ tem no máximo grau 2 e que $b(x)$ tem grau 4. Logo, podemos escrever

$$y^3 + (c_0 + c_1x + c_2x^2)y + d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 = 0,$$

onde $d_4 = b_4 \neq 0$. Podemos normalizar $d_4 = 1$. Logo a nossa equação é da forma

$$y^3 + (c_0 + c_1x + c_2x^2)y + (d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + x^4) = 0.$$

Utilizando uma última transformação podemos supor que $d_0 = 0$ e assim obtemos

$$y^3 + (a_0 + a_1x + a_2x^2)y + (b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4) = 0. \qquad \text{(3-1)}$$

Observe que $(a_0, b_1) \neq (0,0)$, pois a curva é não singular.
Utilizando a fórmula do Wronskiano temos que

$$\mathcal{W}_{\mathcal{K}} = \frac{f_y^2(b_2 + b_3x + a_2y) + a_1 f_x f_y + y f_x^2}{f_y^3}.$$

Os pontos de Weierstrass canônicos são aqueles que estão no suporte do divisor de ramificação $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \operatorname{div}(D_x^{(2)}(y)) + 3\operatorname{div}(dx) + 12P_\infty \\ &= \operatorname{div}(\mathcal{N}_{\mathcal{K}}) + 24P_\infty,\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = y f_x^2 + a_1 f_x f_y + (a_2y + b_3x + b_2) f_y^2.$$

Como

$$v_{P_\infty}(f_y) = v_{P_\infty}(y^2 + a_0 + a_1x + a_2x^2) = -8,$$

e

$$v_{P_\infty}(f_x) = v_{P_\infty}(a_1y + b_3x^2 + b_1) = \begin{cases} -6, & \text{se} \quad b_3 \neq 0 \\ -4, & \text{se} \quad b_3 = 0 \neq a_1 \\ 0, & \text{se} \quad b_3 = a_1 = 0 \neq b_1, \end{cases}$$

temos que

$$v_{P_\infty}(\mathcal{N}_{\mathcal{K}}) = \begin{cases} -20, & \text{se} \quad a_2 \neq 0 \\ -19, & \text{se} \quad a_2 = 0 \neq b_3 \\ -16, & \text{se} \quad a_2 = b_3 = 0 \neq b_2 \\ -8, & \text{se} \quad a_2 = b_3 = b_2 = 0 \neq b_1,\ a_1 \neq 0 \\ -7, & \text{se} \quad a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0 \neq a_1 \\ -4, & \text{se} \quad a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = 0 \neq b_1. \end{cases}$$

Na quarta linha foi usado que para $a_2 = b_2 = b_3 = 0$,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = y f_x^2 + a_1 f_x f_y = (a_1^2 y^2 + b_1^2) y + a_1(a_1 y + b_1)(y^2 + a_0 + a_1 x) = a_1 b_1 y^2 + \cdots$$

Portanto,

$$v_{P_\infty}(\mathcal{R}) = \begin{cases} 4, \text{ se } a_2 \neq 0; \\ 5, \text{ se } a_2 = 0 \neq b_3; \\ 8, \text{ se } a_2 = b_3 = 0 \neq b_2; \\ 16, \text{ se } a_2 = b_3 = b_2 = 0 \neq b_1, \text{ e } a_1 \neq 0; \\ 17, \text{ se } a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0 \neq a_1; \\ 20, \text{ se } a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = 0 \neq b_1. \end{cases} \tag{3-2}$$

Nos outros casos a curva é singular.

3.2
Matriz e Invariante de Hasse-Witt

Como a equação canônica da curva é dada por

$$f(x,y) = y^3 + (a_0 + a_1x + a_2x^2)y + (b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4),$$

e como $\{\frac{dx}{f_y}, x\frac{dx}{f_y}, y\frac{dx}{f_y}\}$ é uma base de $\Omega_1(0)$ devemos calcular $\mathcal{C}(\frac{dx}{f_y}), \mathcal{C}(x\frac{dx}{f_y}), \mathcal{C}(y\frac{dx}{f_y})$. Pelo visto na seção 2.2, temos que

$$\mathcal{C}(h\frac{dx}{f_y}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(fh)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\mathcal{C}(\frac{dx}{f_y}) = a_1^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{f_y},$$

$$\mathcal{C}(x\frac{dx}{f_y}) = (a_0^{\frac{1}{2}} + a_2^{\frac{1}{2}}x + y)\frac{dx}{f_y},$$

$$\mathcal{C}(y\frac{dx}{f_y}) = (b_1^{\frac{1}{2}} + b_3^{\frac{1}{2}}x)\frac{dx}{f_y}.$$

Portanto, a matriz de Hasse-Witt para C é

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pela definição o invariante de Hasse-Witt é dado por

$$\sigma = \text{posto}(h_{ij})(h_{ij}^2)(h_{ij}^4),$$

ou seja,

$$\sigma = \text{posto}\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ a_0^2 & a_2^2 & 1 \\ b_1^2 & b_3^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^4 & 0 & 0 \\ a_0^4 & a_2^4 & 1 \\ b_1^4 & b_3^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo as contas temos

$$\sigma = \text{posto}\begin{pmatrix} a_1^7 & 0 & 0 \\ a_0a_1^6 + a_0^2a_1^4a_2 + a_2b_1^4 + a_1^4b_1^2 + a_0^4a_2^3 + a_0^4b_3^2 & a_2^7 + a_2b_3^4 + a_2^4b_3^2 & a_2^3 + b_3^2 \\ a_1^6b_1 + c_0^2a_1^4b_3 + b_1^4b_3 + a_0^4a_2^2b_3 & a_2^6b_3 + b_3^5 & a_2^2b_3 \end{pmatrix}.$$

Seja

$$B = \begin{pmatrix} a_1^7 & 0 & 0 \\ a_0a_1^6 + a_0^2a_1^4a_2 + a_2b_1^4 + a_1^4b_1^2 + a_0^4a_2^3 + a_0^4b_3^2 & a_2^7 + a_2b_3^4 + a_2^4b_3^2 & a_2^3 + b_3^2 \\ a_1^6b_1 + c_0^2a_1^4b_3 + b_1^4b_3 + a_0^4a_2^2b_3 & a_2^6b_3 + b_3^5 & a_2^2b_3 \end{pmatrix}.$$

Se somamos à segunda coluna a terceira coluna multiplicada por c_2^4 e à primeira coluna a terceira coluna multiplicada por c_0^4, temos que

$$\sigma = \text{posto de } B = \text{posto}\begin{pmatrix} a_1^7 & 0 & 0 \\ a_0a_1^6 + a_0^2a_1^4a_2 + a_2b_1^4 + a_1^4b_1^2 & a_2b_3^4 & a_2^3 + b_3^2 \\ a_1^6b_1 + a_0^2a_1^4b_3 + b_1^4b_3 & b_3^5 & a_2^2b_3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(B) = a_1^7b_3^7$, temos que:
$\sigma < 3$ se, e somente se, $a_1 = 0$ ou $b_3 = 0$.
Consideremos três casos:

(i) $a_1 = 0$ e $b_3 \neq 0$.

(ii) $a_1 \neq 0$ e $b_3 = 0$.

(iii) $a_1 = 0$ e $b_3 = 0$.

Caso (i): Neste caso temos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2b_1^4 & a_2b_3^4 & a_2^3 + b_3^2 \\ b_1^4b_3 & b_3^5 & a_2^2b_3 \end{pmatrix}.$$

Observemos que as duas primeiras colunas são linearmente dependentes e como o determinante

$$\begin{vmatrix} a_2b_3^4 & a_2^3 + b_3^2 \\ b_3^5 & a_2^2b_3 \end{vmatrix} = b_3^7 \neq 0,$$

temos que a matriz B tem posto 2.

Caso (ii): Neste caso

$$B = \begin{pmatrix} a_1^7 & 0 & 0 \\ a_0a_1^6 + a_0^2a_1^4a_2 + a_2b_1^4 + a_1^4b_1^2 & 0 & a_2^3 \\ a_1^6b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, B tem posto 2 ou 1 se, e somente se, $a_2 \neq 0$ ou $a_2 = 0$, respectivamente.

Caso (iii): Neste caso

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2b_1^4 & 0 & a_2^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim B tem posto 1 ou 0 se, e somente se, $a_2 \neq 0$ ou $a_2 = 0$, respectivamente.

Portanto, temos os seguintes resultados:

$\sigma = 0$:

$$f(x,y) = y^3 + a_0y + b_1x + b_2x^2 + x^4.$$

$\sigma = 1$:

$$f(x,y) = y^3 + (a_0 + a_1x)y + b_1x + b_2x^2 + x^4, \quad a_1 \neq 0,$$

ou,

$$f(x,y) = y^3 + (a_0 + a_2x^2)y + b_1x + b_2x^2 + x^4, \quad a_2 \neq 0.$$

$\sigma = 2$:

$$f(x,y) = y^3 + (a_0 + a_2x^2)y + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4, \quad b_3 \neq 0,$$

ou,

$$f(x,y) = y^3 + (a_0 + a_1x + a_2x^2)y + b_1x + b_2x^2 + x^4, \quad a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 \neq 0.$$

$\sigma = 3$:

$$f(x,y) = y^3 + (a_0 + a_1x + a_2x^2)y + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4, \quad a_1 \neq 0 \text{ e } b_3 \neq 0.$$

Utilizamos [[11], p. 60] para obter o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *A reta no infinito é a bitangente canônica à curva se, e somente se,* $a_1 = 0$.

3.3 Pontos de Weierstrass para curvas com Invariante de Hasse-Witt $\sigma = 3$

Neste caso a característica teta canônica não é representada por uma bitangente. Existem 7 bitangentes não canônicas, incluindo a reta no infinito. Como vimos anteriormente, a curva tem invariante de Hasse-Witt $\sigma = 3$, se e somente se, $a_1 \neq 0$ e $b_3 \neq 0$.
No caso do ponto $P_\infty = (0 : 1 : 0)$, temos que a sua seqüência de ordens é 0,1,4 e de (3-2) temos que, seu peso é 4 ou 5 conforme $a_2 \neq 0$ ou $a_2 = 0$, respectivamente. Se existir um ponto P de Weierstrass com seqüência de ordens 0,1,4 e peso 5 podemos normalizar a curva de forma tal que ele seja o ponto P_∞. Como conseqüência disto temos dois casos a considerar:

Caso 1: Todos os pontos com seqüência de ordens 0,1,4 têm peso 4, ou

Caso 2: Existe pelo menos um ponto com seqüência de ordens 0,1,4 com peso 5.

Antes de estudarmos cada caso utilizamos um último automorfismo para supor que $b_3 = 1$, logo a nossa curva se reduz a

$$f = y^3 + (a_2x^2 + a_1x + a_0)y + x^4 + x^3 + b_2x^2 + b_1x,$$

com $a_1 \neq 0$. Neste caso a matriz de Hasse-Witt é

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & 1 \\ b_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso 1: Neste caso o ponto P_∞ tem seqüência de ordens 0,1,4 e peso 4, então $a_2 \neq 0$.
De [[11], p. 60], temos que, as bitangentes são dadas pela reta no infinito e pelas retas

$$c^2x + cy + a = 0,$$

onde $c^3 + a_2c + 1 = 0$ e $a^2 + a_1a + a_0c^2 + b_1c = 0$. Como $a_2 \neq 0$, temos três valores diferentes para c e como $a_1 \neq 0$, para cada valor de c, temos dois valores diferentes para a. Em resumo, temos seis valores (c, a) diferentes e para cada par (c, a) temos associada uma bitangente dada pela equação acima.

Seja (c, a) como acima e $c^2x + cy + a = 0$ a bitangente correspondente. Então, a bitangente tem suporte em um único ponto quando $a(c^2 + a_2) + a_1c^2 + b_2c = 0$.
Seja $s_1(c) = c^3 + a_2c + 1$; de $s_1(c) = 0$ temos que $c^2 + a_2 \neq 0$. Logo para cada valor de c existe um valor de

$$a = \frac{a_1c^2 + b_2c}{c^2 + a_2},$$

tal que a bitangente $c^2x + cy + a = 0$ tem suporte em um único ponto. Substituindo o valor de a na equação $a^2 + a_1a + a_0c^2 + b_1c = 0$ temos o seguinte polinômio

$$s_2(c) = a_0c^5 + b_1c^4 + a_1b_2c^2 + (a_1^2a_2 + b_2^2 + a_0a_2^2)c + (a_1a_2b_2 + a_2^2b_1).$$

Neste caso, o número de pontos de Weierstrass é dado por

$$N_{\mathcal{W}} = 21 - 3i,$$

onde i é o número de raízes comuns de $s_1(c)$ e $s_2(c)$.
Genericamente $i = 0$. O fato de $i > 0$ depende do anulamento da resultante de s_1 e s_2:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(s_1, s_2) = \ & a_1^6a_2^3 + a_1^5a_2^4b_2 + (a_0a_2^4 + a_2^2b_2^2 + a_2^5b_1 + a_2^2b_1)a_1^4 + b_2^3a_1^3 + (a_2b_2^4 + \\ & a_2b_1b_2^2 + a_0b_2^2 + a_2b_1^2)a_1^2 + (a_2^2b_2^5 + a_0^2b_2)a_1 + b_1^3 + b_2^6 + a_2^3b_1b_2^4 + \\ & a_0^2a_2b_1 + b_1^2b_2^2 + b_1b_2^4 + a_0^3 + a_0a_2^2b_2^4.\end{aligned}$$

Afirmação: $i \neq 2$.
Pelo Algoritmo de Euclides, temos que

$$s_2(c) = (a_0c^2 + b_1c + a_0a_2)s_1(c) + (a_0 + a_1b_1 + a_2b_1)(c^2 + Dc + a_2),$$

onde

$$D = \frac{b_2^2 + a_1^2a_2 + b_1}{a_0 + a_1b_2 + a_2b_1}.$$

Suponha que temos um fator quadrático comum a s_1 e s_2, digamos $c^2 + Ac + B$, então

$$s_1(c) = (c + A)(c^2 + AC + B),$$

tal que $A^2 + B = a_2$ e $AB = 1$. E na equação dada acima temos que $c^2 + Dc + a_2 = 0$, se $a_0 + a_1b_1 + a_2b_1 \neq 0$. Assim sendo as raízes comuns de s_1 e s_2 devem ser raízes de $c^2 + Dc + a_2$. Logo $A = D$ e $B = a_2$.
Se $B = a_2$, então $A = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $i \neq 2$.
Os seguintes exemplos mostram que os valores 1 e 3 são possíveis para i:
No caso $i = 3$, consideremos a curva

$$y^3 + (x^2 + x + 1)y + x^4 + x^3 + x^2 = 0.$$

O numerador do Wronskiano desta curva é dado por

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = 1 + x + x^2y^2 + xy + xy^4 + y^4 + y^5 + x^5.$$

Logo, temos três pontos de Weierstrass colineares $(1 : \eta : 1)$ tal que $\eta^3 + \eta + 1 = 0$. Considerando o parâmetro local $t = 1 + x$, temos que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(t) = (1 + \eta^2)t^4 + (1 + \eta)t^5 + (1 + \eta^2)t^6 + \cdots$$

mostrando que os pontos mencionados acima têm peso 4 respectivamente.
No caso $i = 1$, consideremos a curva

$$y^3 + (x^2 + \tau x + 1)y + x^4 + x^3 + x^2 + x = 0,$$

onde τ é raiz do polinômio $z^3 + z^2 + 1$. O numerador do Wronskiano desta curva é dado por

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = 1+x+y+y^4+x^5+\tau^2xy+\tau^2y+\tau y^2x^2+\tau y^2+\tau^2x+\tau^2x^2+xy^4+\tau x^4+y^5+xy+x^4+\tau.$$

O único ponto de Weierstrass da curva é o ponto $(\tau^2 : \tau^4 : 1)$. Considerando o parâmetro local $t = \tau^2 + x$, temos que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(t) = (\tau + 1)t^4 + (\tau + 1)t^5 + \tau t^6 + \cdots$$

Mostrando que o peso do ponto de Weierstrass é 4.
Caso 2: Suponhamos que o ponto P_∞ tem peso 5. Como já foi visto anteriormente devemos ter $a_2 = 0$. Logo, a equação da curva é

$$y^3 + (a_1x + a_0)y + x^4 + x^3 + b_2x^2 + b_1x = 0.$$

Como no caso anterior as bitangentes são dadas pela reta no infinito e pelas retas $c^2x + cy + a = 0$, onde $c^3 + 1 = 0$ e $a^2 + a_1a + a_0c^2 + b_1c = 0$.
Também temos seis pares (c, a) diferentes dos quais somente três desses pares podem dar lugar a bitangentes com suporte em um único ponto. Isto só acontece quando

$$c(a + a_1) + b_2 = 0,$$

onde $c^3 + 1 = 0$ e $a = a_1 + b_2/c$.
Como no caso anterior, consideremos os polinômios:
$s_1(c) = c^3 + 1$,
$s_2(c) = a_0c^4 + b_1c^3 + a_1b_2c + b_2^2$,
e a resultante dada por

$$\mathrm{Res}(s_1, s_2) = \quad b_2^3a_1^3 + a_0b_2^2a_1^2 + a_0^2b_2a_1 + a_0^3 + b_2^6 + b_1b_2^4 + b_1^2b_2^2 + b_1^3.$$

Pelo algoritmo Euclidiano, temos que

$$s_2(c) = (a_0c + b_1)s_1(c) + (a_1b_2 + a_0)c + b_1 + b_2^2.$$

Logo, podemos ter os seguintes casos:

Caso 2.1: Se $a_1b_2 + a_0 = 0$ e $b_1 + b_2^2 = 0$, então existem 3 pontos finitos com ordens 0,1,4. Neste caso a equação da curva é dada por

$$y^3 + a_1(x + b_2)y + x^4 + x^3 + b_2x^2 + b_2^2x = 0,$$

com $a_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0, 1$.
As equações das bitangentes são dadas por $cx + y + c^2a = 0$, onde $c^3 = 1$ e $a = b_2c^2 + a_1$. Os pontos de Weierstrass finitos são as raízes de

$$\mathcal{N}_K = y(x + b_2)(x^4 + a_1^3 + b_2^3).$$

Se (α, β) é um ponto de Weierstrass da curva com ordens 0,1,4 ele satisfaz as equações

$$\begin{cases} \beta^3 + a_1(\alpha + b_2)\beta + \alpha^4 + \alpha^3 + b_2\alpha^2 + b_2^2\alpha &= 0 \\ c\alpha + \beta + c^2a &= 0 \\ \beta(\alpha + b_2)(\alpha^4 + a_1^3 + b_2^3) &= 0. \end{cases}$$

Então os pontos da forma $(\alpha, 0)$, com $\alpha \in \mathbb{F}_4$, são pontos de Weierstrass. Considerando $t = x + \alpha$ como parâmetro local temos

$$y = \frac{\alpha + b_2}{a_1}t + \frac{a_1^3 + (\alpha + b_2)^3}{a_1^4(\alpha + b_2)}t^3 + \frac{a_1^3 + (\alpha + b_2)^3 + a_1^3(\alpha + b_2)}{a_1^4(\alpha + b_2)^2}t^4 + \cdots$$

e,

$$\mathcal{N}_K(t) = a_1^2 + (\alpha + b_2)^2(\alpha^4 + a_1^3 + b_2^3)t + \cdots$$

logo, o peso dos pontos da forma $(\alpha, 0)$, com $\alpha \in \mathbb{F}_4$, é um.
Os pontos da forma (b_2, β), com β raiz do polinômio $y^3 + b_2^3(b_2+1) = 0$, também são pontos de Weierstrass da curva. Considerando $t = x + b_2$ como parâmetro local temos

$$\mathcal{N}_K(t) = \beta(a_1^3 + b_2^3(b_2 + 1))t + \cdots$$

logo, o peso dos pontos da forma (b_2, β), com $\beta^3 + b_2^3(b_2 + 1) = 0$, é um.
Por último, consideremos os pontos da forma (ω, δ), com ω raiz de $x^4 + a_1^3 + b_2^3 = 0$ e δ raiz de $y^3 + a_1(\omega + b_2)y + \omega^3 + b_2\omega^2 + b_2^2\omega + a_1^3 + b_2^3 = 0$. Observe que estes pontos possuem o mesmo peso. Em resumo, temos três tipos de pontos de Weierstrass, os pontos $(\alpha, 0)$ com $\alpha \in \mathbb{F}_4$; os pontos (b_2, β) com β raiz de $y^3 = b_2^3(b_2 + 1)$ e por último os pontos (ω, δ) com ω raiz de $x^4 + a_1^3 + b_2^3 = 0$ e δ raiz de $y^3 + a_1(\omega + b_2)y + \omega^3 + b_2\omega^2 + b_2^2\omega + a_1^3 + b_2^3 = 0$. Temos que os pontos de Weierstrass dos dois primeiros tipos são pontos de peso 1. Como a curva tem 24 pontos de Weierstrass temos que os três pontos restantes do último tipo, têm peso 4.

Caso 2.2: Se $a_1b_2 + a_0 = 0$ e $b_1 + b_2^2 \neq 0$, então não existe ponto finito com seqüência de ordens 0,1,4.

Caso 2.3: Se $a_1b_2 + a_0 \neq 0$ e $b_1 + b_2^2 = 0$, então, sendo θ uma raiz comum de s_1 e s_2, temos que $(a_1b_2 + a_0)\theta = 0$. Segue que $\theta = 0$. Mas $\theta^3 + 1 = 0$ o que é uma contradição. Assim, não existe ponto finito com seqüência 0,1,4.

Caso 2.4: Se $a_1b_2 + a_0 \neq 0$ e $b_1 + b_2^2 \neq 0$, então, temos no máximo uma raiz comum

$$c = \frac{b_1 + b_2^2}{a_1b_2 + a_0},$$

que deve satisfazer $c^3 + 1 = 0$, ou equivalentemente,

$$b_1^3 + b_1^2b_2^2 + b_1b_2^4 + b_2^6 + a_1^3b_2^3 + a_1^2b_2^2a_0 + a_1b_2a_0^2 + a_0^3 = 0.$$

Neste caso, o ponto finito de Weierstrass com seqüência de ordens 0,1,4 pode ter peso 4 ou 5, como mostra o seguinte exemplo:
Consideremos a curva dada pela equação:

$$y^3 + (bx + a)y + x^4 + x^3 + bx^2 + ax = 0,$$

onde $a \neq 0$. O numerador do Wronskiano é dado por

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = ab^2x + ab^2y + abx^2 + b^3xy + bx^2y^2 + aby^2 + x^4y + a^2y + a^2x + by^4 + b^3x^2 + xy^4.$$

A origem $(0 : 0 : 1)$, que é o ponto de interseção da reta $x = y$ e a curva, é um ponto finito de Weierstrass com seqüência de ordens 0,1,4. A curva é não singular neste ponto, pois $f_x(0,0) = f_y(0,0) = a \neq 0$, logo podemos considerar $t = x$ como parâmetro local. Assim,

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = (a + b^2)t^4 + bt^5 + t^6 + \cdots$$

Portanto, o peso da origem é 4 ou 5, se $a \neq b^2$ ou $a = b^2$, respectivamente.

Assim, temos o seguinte:

Teorema 3.1 *Uma curva C algébrica não singular completa e não hiperelítica de gênero três definida sobre um corpo algebricamente fechado de característica dois e com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 3$ é isomorfa à curva dada por*

$$y^3 + (a_2x^2 + a_1x + a_0)y + (x^4 + x^3 + b_2x^2 + b_1x) = 0,$$

com $a_1 \neq 0$.
O número j de pontos de Weierstrass com ordens 0,1,4 é j=1,2,4 com peso 4 ou 5. Se todos os pontos de Weierstrass com ordens 0,1,4 têm peso 4, então, o número de pontos de Weierstrass é

$$N_C = 24 - 3j.$$

Se um daqueles pesos é 5, então a curva é isomorfa à curva dada por

$$y^3 + (a_1x + a_0)y + x^4 + x^3 + b_2x^2 + b_1x = 0,$$

com $a_1 \neq 0$. Nesta curva o ponto no infinito tem peso 5. O número de pontos *de Weierstrass é*

$$N_C = \begin{cases} 11, & \textit{se} \quad a_0 + a_1 b_2 = 0 = b_1 + b_2^2. \\ & \qquad \textit{Neste caso existem 3 pontos finitos com seqüência de ordens 0,1,4.} \\ 16, & \textit{se} \quad b_1^3 + b_1^2 b_2^2 + b_1 b_2^4 + b_2^6 = a_0^3 + a_0^2 b_1 b_2 + a_0 b_1^2 b_2^2 + b_1^3 b_2^3 \neq 0. \\ & \qquad \textit{Neste caso existe um ponto finito com seqüência de ordens 0,1,4 e peso 5.} \\ 17, & \textit{se} \quad b_1^3 + b_1^2 b_2^2 + b_1 b_2^4 + b_2^6 = a_0^3 + a_0^2 b_1 b_2 + a_0 b_1^2 b_2^2 + b_1^3 b_2^3 \neq 0. \\ & \qquad \textit{Neste caso existe um ponto finito com seqüência de ordens 0,1,4 e peso 4.} \\ 20, & \qquad \textit{nos outros casos,} \\ & \qquad \textit{Neste caso não existem pontos finitos com seqüência de ordens 0,1,4.} \end{cases}$$

3.4
Pontos de Weierstrass para curvas com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 2$

Quando o invariante de Hasse-Witt é menor que 3 a característica teta canônica é representada por uma bitangente. Como vimos anteriormente a curva tem invariante $\sigma = 2$ se, e somente se, $a_1 = 0$ e $b_3 \neq 0$, ou, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_3 = 0$.
O seguinte resultado será muito útil na contagem de pontos de Weierstrass.

Proposição 3.2 *Seja C curva algébrica não singular completa definida sobre um corpo algebricamente fechado de característica dois e gênero três com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 2$. Então, para qualquer bitangente não canônica, o peso de ponto de Weierstrass correspondente é 4.*

Demonstração: Podemos supor que a bitangente não canônica é a reta no infinito e que o correspondente ponto de Weierstrass é o ponto P_∞. Podemos obter uma normalização da curva como em (3-1).
Pela proposição 3.1, temos que $a_1 \neq 0$ e nesse caso temos que o invariante de Hasse-Witt é 2 se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} a_2 b_3^4 & a_2^3 + b_3^2 \\ b_3^5 & a_2^2 b_3 \end{pmatrix} = b_3^7 = 0,$$

e $a_2 \neq 0$. De (3-2), temos que o peso do ponto de Weierstrass P_∞ é 4. $\square$
Os dois casos a tratar estão relacionados com o fato da reta no infinito ser a bitangente canônica.
Suponhamos que a reta no infinito é a bitangente canônica, isto é, $a_1 = 0$ e seu correspondente ponto de Weierstrass é P_∞. Como $b_3 \neq 0$, podemos normalizar a equação da curva e supor $b_3 = 1$.
De (3-2), temos que o peso de P_∞ é 4 ou 5, se $a_2 \neq 0$ ou $a_2 = 0$, respectivamente. A curva dada pela equação

$$y^3 + (a_2x^2 + a_0)y + x^4 + x^3 + b_2x^2 + b_1x = 0,$$

é não singular, se $b_1^2 \neq b_1b_2$. Em particular $b_1 \neq 0$. Para esta curva a matriz de Hasse-Witt é dada por

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & 1 \\ b_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As características teta não canônicas são dadas pelos divisores de interseção da curva com as retas

$$L_r: \;\; r^2x + ry + (r^2a_0 + rb_1)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

onde

$$r^3 + a_2r + 1 = 0.$$

A interseção de L_r com a curva é um único ponto se

$$r^3(r^2a_0 + rb_1)^{\frac{1}{2}} + b_2r^2 + a_2r(r^2a_0 + rb_1)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Utilizando o fato $r^3 + a_2r + 1 = 0$, temos que

$$(a_0 + a_2b_2^2)r + (b_1 + b_2^2) = 0.$$

Se $b_1 + b_2^2 \neq 0$ e $a_0 + a_2b_2^2 = 0$, ou, $b_1 + b_2^2 = 0$ e $a_0 + a_2b_2^2 \neq 0$, não existe um valor para r, e assim não temos pontos de Weierstrass finitos com seqüência de ordens 0,1,4.
Se $b_1 + b_2^2 \neq 0$ e $a_0 + a_2b_2^2 \neq 0$ temos um único valor para r, e assim temos um único ponto de Weierstrass finito com seqüência de ordens 0,1,4; mas isto só é possível se

$$b_1^3 + b_1^2b_2^2 + b_1b_2^4 + b_2^6 + a_2b_1a_0^2 + b_1a_2^3b_2^4 + b_2^4a_0a_2^2 + a_0^3 = 0.$$

Por último, se $b_1 + b_2^2 = 0$ e $a_0 + a_2b_2^2 = 0$ existem três valores para r, ou seja, 3 pontos de Weierstrass finitos com seqüência de ordens 0,1,4.
Pela proposição 3.2 todos os pontos de Weierstrass mencionados acima têm peso 4.
Verifiquemos o resultado da proposição 3.2 no caso $b_1+b_2^2 = 0$ e $a_0+a_2b_2^2 = 0$.
Para cada r, o ponto de interseção da curva com a reta L_r é

$$\alpha = \frac{b_1^{\frac{1}{4}}(a_0r^2 + b_1r)^{\frac{1}{8}}}{r^{\frac{1}{2}}},$$

e,

$$\beta = r\alpha + \frac{(a_0r^2 + b_1r)^{\frac{1}{2}}}{r}.$$

Como $a_0 + a_2 b_2^2 = 0$, temos

$$\begin{aligned}\beta + r\alpha &= \tfrac{(a_0 r^2 + b_1 r)^{\frac{1}{2}}}{r} \\ &= \tfrac{(a_2 b_2^2 r^2 + b_2^2 r)^{\frac{1}{2}}}{r} \\ &= b_2 r.\end{aligned}$$

Utilizando esta última igualdade, temos que $f_y(\alpha, \beta) \neq 0$. Logo, podemos considerar $t = x + \alpha$ como parâmetro local, e assim

$$y = \beta + rt + \frac{1}{\beta^2 + a_2\alpha^2 + a_0} t^4 + \cdots$$

e

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = (r^2 + a_2)^2(\alpha^2 + b_1)t^4 + \cdots$$

Logo, o peso do ponto (α, β) é 4.

Portanto, o número de pontos de Weierstrass da curva é:

$$\begin{cases} 11, & \text{se} \quad a_0 = a_2 = 0 \ \text{ e } \ b_1 = b_2^2 \\ 12, & \text{se} \quad a_0 = a_2 b_1 \neq 0 \ \text{ e } \ b_1 = b_2^2 \\ 17, & \text{se} \quad a_2 = 0 \ \text{ e } \ a_0 \neq 0 \ \text{ e } \ b_1 \neq b_2^2 \\ 18, & \text{se} \quad a_2 \neq 0 \ \text{ e } \ a_0 \neq a_2 b_2^2 \ \text{ e } \ b_1 \neq b_2^2 \\ 20, & \text{se} \quad a_2 = a_0 = 0 \ \text{ e } \ b_1 \neq b_2^2 \ \text{ ou } \ a_2 = 0 \ \text{ e } \ a_0 \neq 0 \ \text{ e } \ b_1 = b_2^2 \\ 21, & \text{se} \quad a_2 \neq 0 \ \text{ e } \ a_0 = a_2 b_2^2 \neq 0 \ \text{ e } \ b_1 \neq b_2^2 \ \text{ ou } \ a_2 \neq 0 \ \text{ e } \ a_0 \neq a_2 b_2^2 \ \text{ e } \ b_1 = b_2^2. \end{cases}$$

Se a reta no infinito não é a bitangente canônica, isto é, $a_1 \neq 0$, então o invariante de Hasse-Witt da curva é dois se, e somente se, $b_3 = 0$ e $a_2 \neq 0$.

A equação da curva é dada por

$$f = y^3 + (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)y + x^4 + b_2 x^2 + b_1 x,$$

com $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$.

Podemos normalizar, substituindo x por $a_1^{3/5}x$ e y por $a_1^{4/5}y$, a equação da curva para

$$f = y^3 + (a_2 x^2 + x + a_0)y + x^4 + b_2 x^2 + b_1 x,$$

com $a_2 \neq 0$. Seja (p, q) um ponto da curva. A curva é singular no ponto (p, q) se $p(p^3 + b_2 p + b_1) = 0$ e $q = b_1$. Logo, a curva é singular no ponto $(0, b_1)$ se $a_0 + b_1^2 = 0$. Por outro lado, o ponto (p, b_1) é um ponto singular da curva se p é raiz comum de $p^3 + b_2 p + b_1$ e $a_2 p^2 + p + a_0 + b_1^2$, ou seja, se a resultante

$$R = (a_0+b_1^2)a_2^2b_2^2+(a_2^2b_1+b_1^2+a_0)b_2+(a_0+b_1^2)^3+(a_0+b_1^2)a_2b_1+a_2^3b_1^2+b_1 = 0.$$

Logo, podemos concluir que a curva é não singular se

$$(a_0 + b_1^2)R \neq 0. \tag{3-3}$$

Suponhamos que a curva é não singular, então a matriz de Hasse-Witt é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & 1 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A característica teta canônica é dada pela reta $y + b_1$ e as características teta não canônicas são dadas pela reta no infinito $(Z = 0)$ e as retas $a_2x + a_2^{1/2}y + r = 0$, onde r é raiz de $W^2 + W + a_0a_2 + b_1a_2^{1/2} = 0$. No caso da característica teta canônica temos que a reta $y + b_1$ intersecta a curva em um único ponto se, e somente se, $b_2 = a_2b_1$. Logo, estamos nas condições do caso anterior. No caso das características teta não canônicas, temos pela proposição 3.2, que o peso é 4 para o ponto P_∞. Por outro lado, as retas $a_2x + a_2^{1/2}y + r$ intersectam a curva em um único ponto, se $b_2 = a_2^{1/2}$. Esta condição independe de r. Logo, pela proposição 3.2, cada ponto de Weierstrass tem peso 4.
Assim, temos o seguinte:

Teorema 3.2 *Uma curva C algébrica não singular completa e não hiperelítica de gênero três definida sobre um corpo algebricamente fechado de característica dois e com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 2$ é isomorfa à curva dada por*

$$y^3 + (a_2x^2 + a_0)y + x^4 + x^3 + b_2x^2 + b_1x = 0,$$

ou,

$$y^3 + (a_2x^2 + x + a_0)y + x^4 + b_2x^2 + b_1x = 0, \ \textit{com}\, a_2 \neq 0,\ b_2 \neq a_2b_1,$$

com as condições de não singularidade, $b_1^2 \neq b_1b_2$ para a primeira e (3-3) *para a segunda. No primeiro caso a bitangente canônica tem suporte em um* *único ponto e o número de pontos de Weierstrass é*

$$\begin{cases} 11, & se \quad a_0 = a_2 = 0 \;\; e \;\; b_1 = b_2^2 \\ 12, & se \quad a_0 = a_2 b_1 \neq 0 \;\; e \;\; b_1 = b_2^2 \\ 17, & se \quad a_2 = 0 \;\; e \;\; a_0 \neq 0 \;\; e \;\; b_1 \neq b_2^2 \\ 18, & se \quad a_2 \neq 0 \;\; e \;\; a_0 \neq a_2 b_2^2 \;\; e \;\; b_1 \neq b_2^2 \\ 20, & se \quad a_2 = a_0 = 0 \;\; e \;\; b_1 \neq b_2^2 \;\; ou \;\; a_2 = 0 \;\; e \;\; a_0 \neq 0 \;\; e \;\; b_1 = b_2^2 \\ 21, & se \quad a_2 \neq 0 \;\; e \;\; a_0 = a_2 b_2^2 \neq 0 \;\; e \;\; b_1 \neq b_2^2 \;\; ou \;\; a_2 \neq 0 \;\; e \;\; a_0 \neq a_2 b_2^2 \;\; e \;\; b_1 = b_2^2, \end{cases}$$

caso contrário, o número de pontos de Weierstrass é

$$\begin{cases} 15, & se \quad a_2^{1/2} = b_2 \\ 21, & se \quad a_2^{1/2} \neq b_2 \end{cases}$$

3.5
Pontos de Weierstrass para curvas com Invariante de Hasse-Witt $\sigma = 1$

Neste caso a curva tem duas bitangentes sendo que uma delas é a bitangente canônica. Além disso, podemos supor que uma bitangente é a reta no infinito. Logo, podemos considerar dois casos:

Caso 1: A bitangente canônica é a reta no infinito.

Caso 2: A bitangente canônica não é a reta no infinito.

Se a bitangente canônica é a reta no infinito, pela proposição 3.1, $a_1 = 0$. A curva tem invariante $\sigma = 1$ se, e somente se, $a_2 \neq 0$ e $b_3 = 0$. Podemos supor que P_∞ é o ponto de Weierstrass correspondente à reta no infinito, de (3-2), temos que o peso deste ponto é 4. Podemos normalizar a equação da curva, supondo $a_2 = 1$, e obter

$$f = y^3 + (x^2 + a_0)y + x^4 + b_2 x^2 + b_1 x = 0.$$

A curva é não singular se, e somente se, $b_1 \neq 0$. Neste caso a matriz de Hasse-Witt é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 1 & 1 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A característica teta não canônica é dada pela reta $x + y = (a_0 + b_1)^{1/2}$ e ela intersecta a curva em um único ponto se, e somente se, $b_2 = 0$. Supondo que $b_2 = 0$ e $P_{\alpha,\beta} = (\alpha, \beta)$ é o ponto de interseção da bitangente com a curva, temos que

$$\alpha = b_1^{1/4}(a_0 + b_1)^{1/8},$$

e

$$\beta = (a_0 + b_1)^{1/2} + b_1^{1/4}(a_0 + b_1)^{1/8}.$$

Os pontos finitos de Weierstrass são raízes do polinômio

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = y^5 + (x^4 + (a_0 + b_1)^2)y.$$

Como $f_y(\alpha, \beta) \neq 0$, podemos considerar $t = x + \alpha$ como parâmetro local, então

$$y(t) = \beta + \frac{1}{b_1}t^4 + \frac{\beta}{b_1^3}t^8 + \frac{1}{b_1^3}t^9 + \frac{1}{b_1^4}t^{12} + \cdots$$

e

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(t) = \frac{\beta}{b_1^4}t^{16} + \frac{1}{b_1^4}t^{17} + \cdots$$

Então,

$$\text{Peso de } P_{\alpha\beta} = \begin{cases} 16, & \text{se}\, \beta \neq 0 \quad \text{e} \quad b_2 = 0 \\ 17, & \text{se}\, \beta = 0 \quad \text{e} \quad b_2 = 0. \end{cases}$$

Portanto, o número de pontos de Weierstrass é

$$\begin{cases} 21, & \text{se} \quad b_2 \neq 0 \\ 6, & \text{se} \quad \beta \neq 0 \quad \text{e} \quad b_2 = 0 \\ 5, & \text{se} \quad \beta = 0 \quad \text{e} \quad b_2 = 0. \end{cases}$$

Se a reta no infinito não é a bitangente canônica, pela proposição 3.1, temos que $a_1 \neq 0$. Logo a curva tem invariante $\sigma = 1$ se, e somente se, $a_2 = b_3 = 0$. A equação da curva, normalizando $a_1 = 1$, é dada por

$$f(x, y) = y^3 + (x + a_0)y + (x^4 + b_2x^2 + b_1x),$$

e ela é não singular se

$$(a_0 + b_1^2)^4 + b_2(a_0 + b_1^2)^2 + b_1(a_0 + b_1^2) \neq 0. \tag{3-4}$$

A bitangente canônica é a reta $y + b_1$ e a interseção com a curva é um único ponto se $b_2 = 0$. Para $b_2 = 0$ obtemos os mesmos resultados do caso anterior. Se $b_2 \neq 0$ só temos um único ponto de Weierstrass com seqüência de ordens 0,1,4. De (3-2), o peso deste ponto é 8. Logo, a curva tem 17 pontos de Weierstrass.

Assim, temos o seguinte:

Teorema 3.3 *Uma curva C algébrica não singular completa e não hiperelítica de gênero três definida sobre um corpo algebricamente fechado de característica dois e com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 1$ é isomorfa à curva dada por*

$$y^3 + (x^2 + a_0)y + x^4 + b_2x^2 + b_1x = 0,$$

ou,

$$y^3 + (x + a_0)y + x^4 + b_2x^2 + b_1x = 0 \quad com \quad b_2 \neq 0,$$

com as condições de não singularidade $b_1 \neq 0$ para a primeira e (3-4) para a segunda. No primeiro caso a bitangente canônica tem suporte em um único ponto e o número de pontos de Weierstrass é

$$\begin{cases} 21, & se \quad b_2 \neq 0 \\ 6, & se \quad \beta \neq 0 \quad e \quad b_2 = 0 \\ 5, & se \quad \beta = 0 \quad e \quad b_2 = 0. \end{cases}$$

No segundo caso o número de ponto de Weierstrass é 17.

3.6 Pontos de Weierstrass para curvas com Invariante de Hasse-Witt $\sigma = 0$

Neste caso só temos uma bitangente que deve ser a bitangente canônica e ela tem um único ponto de Weierstrass com seqüência de ordens 0,1,4. Podemos supor que a bitangente é a reta no infinito e pela proposição 3.1, temos que $a_1 = 0$. A curva tem invariante $\sigma = 0$ se, e somente se, $a_2 = b_3 = 0$. Logo a equação da curva é dada por

$$y^3 + a_0y + b_1x + b_2x^2 + x^4 = 0,$$

e ela é não singular se $b_1 \neq 0$. Podemos normalizar a equação, supondo $b_1 = 1$, e termos

$$y^3 + a_0y + x + b_2x^2 + x^4 = 0.$$

Como

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} = b_2y^4 + y + a_0^2b_2,$$

temos dois casos a considerar
Caso 1: $b_2 = 0$, neste caso a curva é dada pela equação

$$y^3 + a_0 y + x + x^4 = 0.$$

Como $\mathcal{N}_\mathcal{K} = y$ temos que os pontos de Weierstrass são os pontos com segunda coordenada $y = 0$.
Fazendo $y = 0$ e substituindo na equação da curva temos

$$x^4 + x,$$

este polinômio é separavel, logo obtemos quatro raízes distintas, isto é, obtemos quatro pontos de Weierstrass da forma $(\alpha, 0)$ com $\alpha \in \mathbb{F}_4$.
Observe que estes pontos tem seqüências de ordens $0, 1, 3$, pois $\sigma = 0$. Neste caso, de (3-2), o peso do ponto no infinito é 20. Logo o número de pontos de Weierstrass neste caso é 5.
Caso 2: $b_2 \neq 0$, neste caso a curva é dada pela equação

$$y^3 + a_0 y + x + b_2 x^2 + x^4 = 0.$$

As segundas coordenadas dos pontos de Weierstrass satisfazem

$$y^4 + \frac{1}{b_2} y + \frac{a_0^2}{b_2} = 0.$$

Como $\frac{1}{b_2} \neq 0$ temos que este polinômio tem quatro raízes distintas e que para cada raiz deste polinômio conseguimos encontrar quatro pontos de Weierstrass distintos. Neste caso, de (3-2) o peso do ponto no infinito é 8. Portanto, temos dezesseis pontos de Weierstrass com seqüência de ordens $0, 1, 3$ e no total temos 17 pontos de Weierstrass.
Assim, temos o seguinte:

Teorema 3.4 *Uma curva C algébrica não singular completa e não hiperelítica de gênero três definida sobre um corpo algebricamente fechado de característica dois e com invariante de Hasse-Witt $\sigma = 0$ é isomorfa à curva dada por*

$$y^3 + a_1 y + x^4 + b_2 x^2 + x = 0$$

o número de pontos de Weierstrass é

$$\begin{cases} 5, & se \quad b_2 = 0 \\ 17, & se \quad b_2 \neq 0 \end{cases}$$