1
Introdução

No estudo de uma curva algébrica não singular completa definida sobre um corpo algebricamente fechado de característica arbitrária, o invariante principal é o *gênero*. Desde os tempos de Riemann sabemos que o conjunto $\mathcal{M}_g$ de curvas de um gênero $g \geq 2$ fixo é uma variedade quase compacta, de dimensão $3g-3$. Este *espaço de moduli* $\mathcal{M}_g$ ocupa um papel preponderante na teoria de curvas algébricas, sendo o instrumento essencial no tratamento de famílias de curvas. Sabemos que ele é irreduível ([1]), temos várias técnicas para sua construção, uma descrição bastante satisfatória de uma compactificação natural, através de curvas estáveis, e um conhecimento de sua geometria. Além disso, o estudo de $\mathcal{M}_g$ interveio recentemente em física sendo, em contrapartida, fecundado por questões de cohomologia quântica, como as fórmulas de Witten-Kontsevitch.

Estes estudos usam técnicas gerais bastante avançadas, e de fato não se pode dizer que, para padrões de rigor atuais, nem Riemann nem renomados matemáticos da escola italiana provaram que $\mathcal{M}_g$ fosse uma variedade; antes eles utilizavam a vontade estas idéias que lhes deviam parecer claras. Na verdade pode ser dito que o grande avanço da geometria algébrica do século XX se deu para fundamentar em bases sólidas as intuições de Riemann e de seus seguidores.

Este trabalho pretende analisar com detalhe a subvariedade de $\mathcal{M}_3$ de curvas completas, não singulares e não hiperelípticas sobre um corpo algebricamente fechado de característica dois. Por um resultado de Komiya [5], temos que estas curvas são clássicas. No caso não clássico, temos o resultado de Freitas e Stöhr, ver [3], para curvas de Gorenstein singulares que são projetivamente equivalentes a uma das seguintes curvas:

$$y^2 + y + x^4 = 0, \quad \text{ou} \quad y + x^4 = 0.$$

Se N_C denota o número de pontos de Weierstrass da curva C sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero temos, por Hurwitz [4]

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 9816063/CA

que

$$2g + 2 \leq N_C \leq g^3 - g,$$

onde $g \geq 2$ é o gênero da curva. N_C atinge o valor mínimo, ou seja $N_C = 2g+2$, se a curva é hiperelíptica. Para curvas não hiperelípticas de gênero 3 sobre característica zero Kuribayashi e Komiya, ver [6], determinaram que o menor valor para N_c é 12. Estas curvas são dadas pelas equações

$$y^3 - y - x^4 = 0,$$

ou

$$x^4 + y^4 + \frac{6}{5}x^2y^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

No capítulo 3 deste trabalho, utilizando uma teoria de característica teta inteiramente diferente do caso geral, ver [11], encontramos curvas não hiperelípticas, não singulares tal que $N_C = 5$. Técnicas assim restritas a estas condições particulares, porém mais concretas, têm a vantagem de permitir uma descrição mais explícita, mesmo em termos de equações, dos problemas de moduli correspondentes. Um exemplo, consequência da contagem de parâmetros na descrição destas soluções dos problemas de moduli, é o resultado que a curva genérica tem todos os pontos de Weieirstrass com peso 1 e a sequência de ordens a mais simples possível 0,1,3. Este resultado é certamente conhecido, e consequência de teoremas mais gerias, no caso de característica 0 (ver [2]). Estas curvas são o assunto do capítulo 4.

No capítulo 5, estudaremos o conceito de ponto de Galois, que foi introduzido por Morrison e Pinkham [7] em característica nula, caso que é substancialmente mais simples: todos os grupos de Galois envolvidos são então cíclicos. Com seu estudo, eles conseguiram uma descrição completa dos possíveis semigrupos associados a pontos de Galois. Neste capítulo utilizamos a hipótese de o gênero ser 3, o que nos permite cálculos sobre a descrição galoisiana de pontos da curva que seriam muito complicados em gêneros maiores. O conceito de pontos de Galois não recebeu, a nosso ver, uma atenção devida, sem dúvida porque na prática é bastante difícil testar a propriedade de Galois de um ponto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 9816063/CA