3
Soluções Analíticas de Fluxo em Poços Circulares

As soluções analíticas apresentadas derivam da lei de Darcy aplicada para o caso de fluxo radial representada pela equação 3.1.

$$Q = K_s \frac{\partial h}{\partial r} A_C \tag{3.1}$$

onde K_s é a permeabilidade saturada do solo [LT^{-1}], h é a carga total aplicada [L], r é o raio da distância do poço [L], A_C é a área lateral do cilindro por onde se processa o fluxo [L^2].

As soluções analíticas para regime permanente foram resolvidas segundo Thiem (Freeze, 1979). Os aqüíferos podem se apresentar confinados e não confinados com fluxos em regimes permanentes ou não permanentes. Cada caso possui suas particularidades e devem ser tratados separadamente.

Algumas simplificações estão associadas às soluções e isto implica em tratar o modelo numérico para que possa representar a solução analítica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

3.1.
Aqüífero Não Confinado

3.1.1.
Regime Permanente

A solução analítica de regime permanente para o caso de aqüífero não confinado (figura 6), tem como variáveis o raio (r) e a carga total (h) que determinam a área por onde processa o fluxo correspondente a uma superfície cilíndrica dada pela equação 3.2.

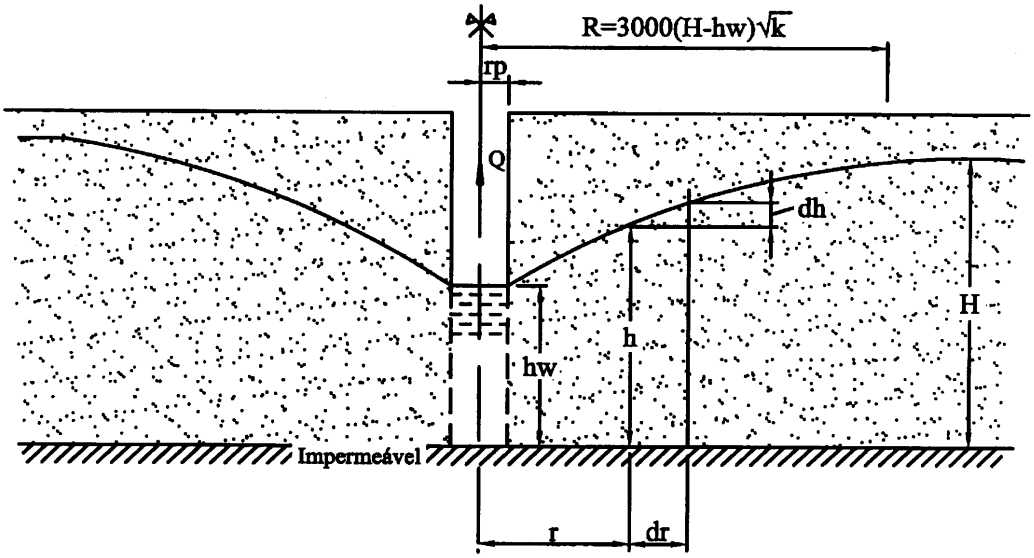

Figura 6-Visualização das propriedades geométricas do elemento de poço (Alonso, 1999).

$$A_C = 2\pi rh \tag{3.2}$$

Assim, a vazão fica:

$$Q = K_s \frac{\partial h}{\partial r} 2\pi rh \tag{3.3}$$

Para resolver a equação diferencial precisa-se fornecer dois pontos dos limites de integração. Estes pontos podem ser quaisquer, geralmente fornece-se um ponto no poço, com $r_1 = r_p$ e $h_1 = h_w$ e outro a uma distância $r_2 = R$ e $h_2 = H$, sendo r_p igual ao raio do poço, h_w igual a carga total no poço, R igual ao raio cuja distância corresponde aquela em que o rebaixamento é nulo, H é a carga total do ponto distante de R do poço.

$$hdh = \frac{Q}{2K_s\pi} \frac{dr}{r} \tag{3.4}$$

Integrando e aplicando os limites de integração, tem-se:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

$$\int_{h1}^{h2} h dh = \frac{Q}{2K_s\pi}\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r} \tag{3.5}$$

A solução geral da integral resulta:

$$\left|\frac{h^2}{2}\right|_{h1}^{h2} = \frac{Q}{2K_s\pi}\left|\ln r\right|_{r1}^{r2} \tag{3.6}$$

ou seja,

$$h_2{}^2 - h_1{}^2 = \frac{Q}{K_s\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{3.7}$$

Assim, se os dados de campo são as leituras dos medidores de nível de água, pode-se obter a vazão do poço pela equação 3.8.

$$Q = \frac{K_s\pi(h_2{}^2 - h_1{}^2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{3.8}$$

Para a previsão do nível freático, e conseqüente rebaixamento, em qualquer ponto do domínio, tem que conhecer a medição de um ponto e a vazão do poço. A carga hidráulica em qualquer distância r_2 é dada pela equação 3.9.

$$h_2 = \sqrt{\frac{Q}{K_s\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + h_1{}^2} \tag{3.9}$$

Da mesma forma pode-se obter a vazão ou a carga hidráulica no domínio pelas equações 3.10 e 3.11.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

$$Q = \frac{K_s \pi (H^2 - {h_w}^2)}{\ln\left(\frac{R}{r_p}\right)} \tag{3.10}$$

$$h = \sqrt{\frac{Q}{K_s \pi} \ln\left(\frac{r}{r_p}\right) + {h_w}^2} \tag{3.11}$$

O valor de R pode ser calculado por formulação empírica ou lançado conforme análise. Sabe-se que para grandes valores de R, pouco se reflete no rebaixamento, pois se desenvolver a equação 3.10, tem-se:

$$\ln\left(\frac{R}{r_p}\right) = \frac{K_s \pi}{Q}\left(H^2 - {h_w}^2\right)$$
$$\therefore \frac{R}{r_p} = e^{\frac{K_s \pi}{Q}\left(H^2 - {h_w}^2\right)} \tag{3.12}$$

Pela expressão acima, o valor de R tende a uma constante quando Q tende a se estabilizar. Na prática, sabe-se que R aumenta lentamente com o tempo. Porém um erro no valor de R influi pouco no cálculo da vazão. A avaliação de seu valor pode ser feita com formulação empírica como a de Sichardt (Alonso, 1999).

$$R = 3000(H - h_w)\sqrt{K_s} \tag{3.13}$$

sendo K_s dado em m/s e as demais variáveis em metros.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

3.1.2.
Regime Transiente

O fluxo de água em um aqüífero não confinado na direção do poço é descrito pela equação 3.14 (Neumann & Witherspoon 1969) (Fetter, 1994).

$$K_u \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{K_u}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + K_v \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.14)$$

onde h é a carga total [L], r é a distância radial do poço [L], z é a elevação acima da base do aqüífero [L], S_s é o armazenamento específico [L^{-1}], K_u é a condutividade hidráulica radial [LT^{-1}], K_v é a condutividade hidráulica vertical [LT^{-1}], t é o tempo [T]

Há três fases distintas da relação do rebaixamento no tempo do nível de água no poço. A primeira fase ocorre logo após o início do bombeamento em que o aqüífero responde pela contribuição de um pequeno volume de água sendo resultado da compressibilidade da água e do solo. Durante este tempo o aqüífero se comporta como se tivesse confinado com fluxo horizontal em direção ao poço, se ajustando com a curva de Theis para S igual ao armazenamento específico $(S\ )$.

Na segunda fase ocorre um efeito de drenagem da região não saturada do solo alimentando a região saturada de maneira a estabilizar o rebaixamento, o fluxo apresenta componentes horizontal e vertical.

Na terceira fase, as variações na região não saturada são maiores o que torna a parcela do armazenamento efetivo (S_y) mais significativo no cálculo do rebaixamento e a relação do rebaixamento no tempo se ajusta com a curva de Theis para S igual a S_y.

A relação do rebaixamento no tempo, segundo Neumann & Witherspoon (1969), é função da razão da permeabilidade horizontal pela vertical, da distância radial do ponto de interesse ao poço e da espessura do aqüífero.

Para análise de fluxo transiente em aqüíferos não confinados, fez se uso da solução de Neumann (1972) que reproduz as três fases na sua curva de rebaixamento no tempo. O método de Neumann admite a existência de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

componente vertical de fluxo e a solução geral do rebaixamento é apresentada pela equação 3.15.

$$h_0 - h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u_A, u_B, \lambda) \tag{3.15}$$

Sendo $W(u_A, u_B, \lambda)$ conhecido como *unconfined well function* e $\lambda = \frac{r^2}{b^2}$.

A figura 7 mostra as curvas desta função para vários valores de λ. A curva tipo A representa a solução de Theis para o armazenamento do solo igual a S_s, responsável pelas variações instantâneas do nível de água no poço. Assim sua solução fica:

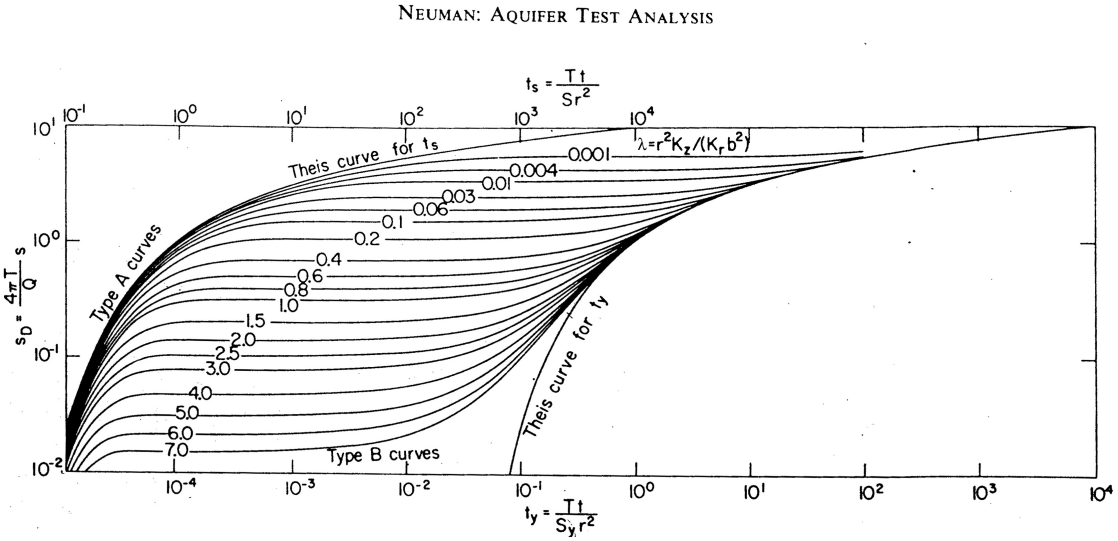

Figura 7-Curvas de rebaixamento versus tempo para um ponto no domínio (Neumann, 1975).

$$h_0 - h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u_A, \lambda) \tag{3.16}$$

onde

$$u_A = \frac{r^2 S_s}{4Tt} \tag{3.17}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

A curva tipo B representa a solução de Theis para o armazenamento do solo igual a S_y, responsável pelas variações a longo prazo do nível de água no poço, resultando na equação 3.18.

$$h_0 - h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u_B, \lambda) \tag{3.18}$$

onde

$$u_B = \frac{r^2 S_y}{4Tt} \tag{3.19}$$

No item 6.1.2, serão apresentadas as tabelas 6.1 e 6.2 que definem os valores numéricos obtidos por Neumann (1972).

3.2. Aqüífero Confinado

3.2.1. Regime Permanente

A solução do aqüífero confinado é a resolução da equação 3.1 levando em consideração a área cilíndrica formada por onde se processa o fluxo, ilustrado pela figura 8, sendo esta variável em função de r e a altura da superfície do cilindro é a espessura da camada confinante L_C.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

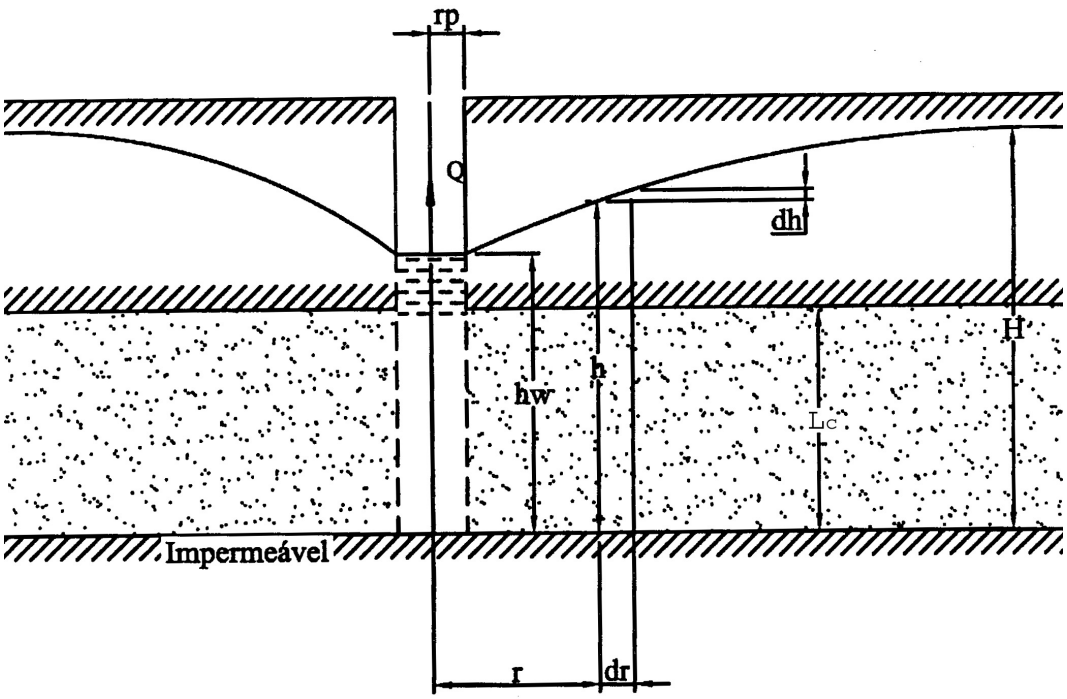

Figura 8-Visualização das propriedades geométricas do elemento de poço (Alonso, 1999).

$$A_C = 2\pi r L_C \tag{3.20}$$

$$Q = K_s \frac{\partial h}{\partial r} 2\pi r L_C \tag{3.21}$$

Desenvolvendo a equação diferencial obtêm-se as relações de carga e vazões para 2 pontos no domínio, conforme explicitado no caso do aqüífero não confinado em regime permanente (item 3.1.1).

$$dh = \frac{Q}{2K_s \pi L_C} \frac{dr}{r} \tag{3.22}$$

Integrando e aplicando os limites de integração em pontos qualquer do domínio, tem-se:

$$\int_{h1}^{h2} dh = \frac{Q}{2k\pi L_C} \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{r} \tag{3.23}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

A solução geral da integral resulta:

$$\left|h\right|_{h1}^{h2} = \frac{Q}{2K_s \pi L_C} \left|\ln r\right|_{r1}^{r2} \tag{3.24}$$

ou seja,

$$h_2 - h_1 = \frac{Q}{2K_s \pi L_C} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{3.25}$$

A vazão do poço, conhecido dois pontos do domínio por leituras em campo tem-se:

$$Q = \frac{2K_s \pi L_C (h_2 - h_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{3.26}$$

Se o caso for preciso prever o nível freático, e conseqüente rebaixamento, em qualquer ponto do domínio, tem que conhecer a medição de um ponto e a vazão do poço.

$$h_2 = \frac{Q}{2K_s \pi L_C} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + h_1 \tag{3.27}$$

As equações 3.28 e 3.29, mostram a forma mais usual, utilizando um ponto no poço e outro a uma distância R do poço.

$$Q = \frac{2K_s \pi L_C (H - h_w)}{\ln\left(\frac{R}{r_p}\right)} \tag{3.28}$$

$$h = \frac{Q}{2K_s \pi L_C} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) + h_w \tag{3.29}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

3.2.2.
Regime Transiente

Quando o poço é instalado em aqüífero confinado, a água é obtida do armazenamento elástico ou específico do aqüífero (S_s). Este coeficiente representa o volume extraído devido à compressibilidade da água e do solo. Este termo deve ser somado ao valor da capacidade de retenção específica (C) da parcela transiente da equação de fluxo (equação 3.30) para representar este efeito.

A primeira análise matemática do rebaixamento em fluxo confinado em regime transiente foi publicado por Theis (1935), sendo esta deduzida a partir da equação 3.30 de fluxo radial, considerando nulas as variações de carga ao logo da coordenada z e ao longo da variação angular ao redor do poço, devido às características do fluxo em aqüífero confinado, tem-se a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{3.30}$$

onde S é o coeficiente de armazenamento e T é a transmissibilidade do aqüífero.

A condição inicial para a solução é dada por:

$$h(r,0) = h_0 \qquad para \qquad r \geq 0 \tag{3.31}$$

onde h_0 é a carga hidráulica inicial [L], h carga total [L], r é o raio dado pela distância do ponto ao poço [L], t é o tempo [T]. A condição de contorno assume rebaixamento nulo na carga hidráulica no contorno infinito.

$$h(\infty,t) = h_0 \qquad para \qquad t \geq 0 \tag{3.32}$$

Aplicando estas condições iniciais e de contorno chega-se à solução da equação 3.30 que, por uma analogia com a teoria de fluxo de calor, resulta na solução analítica dada em termos do rebaixamento.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA

$$h_0 - h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T}\int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \tag{3.33}$$

onde

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \tag{3.34}$$

sendo Q a vazão aplicada no poço [L^3T^{-1}], T a transmissibilidade do aqüífero [L^2T^{-1}], S o armazenamento do aqüífero [-].

A integral da equação 3.33 é resolvida através do uso de uma série de potência, sendo esta chamada de *well function,* representada por $W(u)$, assim tem-se:

$$h_0 - h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \tag{3.35}$$

A curva resultante da relação $W(u)$ e $1/u$ é chamada curva de Theis. Para a representação desta devem ser conhecidas as propriedades do solo como a transmissibilidade do aqüífero (T), armazenamento do solo (S) e vazão do poço (Q) para simular o rebaixamento da carga hidráulica em um aqüífero confinado a uma certa distância r e em algum tempo t após o início do bombeamento.

O valor de $W(u)$ pode ser expresso pela série abaixo:

$$W(u) = -0.5772 - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2.2!} + \frac{u^3}{3.3!} - \frac{u^4}{4.4!} + ... \tag{3.36}$$

O rebaixamento para qualquer ponto em um dado tempo é diretamente proporcional à vazão e inversamente proporcional a transmissibilidade (T) e ao armazenamento do aqüífero (S), sendo que a transmissibilidade exerce maior influência no rebaixamento do que o armazenamento (Freeze, 1979).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115482/CA