

5 O Teorema de Classificação

Na *Seção 5.2*, demonstraremos parcialmente o teorema de classificação das geometrias modelo de dimensão três devido a W. Thurston (*Teorema 5.2.1*). Antes disso porém, devemos mostrar algumas propriedades das geometrias modelo enunciadas na introdução. A *Seção 5.1* será dedicada a isso.

5.1

A aplicação de desenvolvimento

Definição 5.1.1 *Sejam M e X duas variedades e G um grupo de Lie de difeomorfismos de X . Um atlas (G, X) de M é um conjunto $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, onde I é um conjunto de índices e*

$$\phi_i : U_i \rightarrow X$$

é um difeomorfismo do aberto $U_i \subset M$ sobre um aberto de X , com a seguinte propriedade. Sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos uma função localmente constante

$$\gamma_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow G,$$

de forma que, para cada $u \in U_i \cap U_j$, $\gamma_{i,j}(u)$ coincide com

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

na componente conexa de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ que contém $\phi_j(u)$. Cada par (U_j, ϕ_j) como acima é dito uma carta do atlas (G, X) .

Convenção: Neste trabalho, trabalharemos somente com variedades que admitem um atlas (G, X) fechado pela ação de G , ou seja, se (U_i, ϕ_i) é uma carta do atlas, então $(U_i, g \circ \phi_i)$ também o é. Suporemos que todo atlas (G, X) é dessa forma.

Observe que se $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ temos:

$$\phi_i \circ \phi_k^{-1}|_{\phi_k(U_{i,j,k})} = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}) \circ (\phi_j \circ \phi_k^{-1})|_{\phi_k(U_{i,j,k})} : \phi_k(U_{i,j,k}) \rightarrow \phi_i(U_{i,j,k}).$$

Logo, se $u \in U_{i,j,k}$,

$$\gamma_{i,k}(u) = \gamma_{i,j}(u) \gamma_{j,k}(u).$$

Esta é a chamada condição de cociclo.

Definição 5.1.2 *Sejam X uma variedade e G um grupo de Lie de difeomorfismos de X . Dizemos que uma variedade M é modelada por (G, X) , ou que admite uma estrutura (G, X) , ou que é uma variedade (G, X) , se M admite um atlas (G, X) .*

Sejam M uma variedade com um atlas (G, X) fixo e (\widetilde{M}, p) o seu recobrimento universal. Então \widetilde{M} recebe um atlas (G, X) induzido por $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ como se segue. Seja $x \in \widetilde{M}$ e seja (U_i, ϕ_i) uma carta do atlas

(G, X) de M tal que $p(x) \in U_i$. Restringindo U_i se necessário podemos supor que U_i é difeomorfo, por p , a cada componente de $p^{-1}(U_i)$. Seja \tilde{U} a componente de $p^{-1}(U_i)$ que contem x . Defina carta $(\tilde{U}, (\phi_i \circ p)|_{\tilde{U}})$. Fazendo isso para cada $x \in \tilde{M}$, temos um atlas (G, X) em \tilde{M} . Para que este seja fechado pela ação de G , devemos considerar também todas as cartas do tipo $(\tilde{U}, (g \circ \phi_i \circ p)|_{\tilde{U}})$.

Damos aqui um breve resumo da presente seção. Fixe carta $(\tilde{U}_0, \tilde{\phi}_0)$ do atlas (G, X) de \tilde{M} obtido como acima. A aplicação de desenvolvimento de M ,

$$D : \tilde{M} \rightarrow X,$$

é uma aplicação suave que coincide com $\tilde{\phi}_0$ em $\tilde{U}_0 \subset \tilde{M}$ e é localmente dada por cartas do atlas (G, X) de \tilde{M} (*Definição 5.1.7*). Define-se também o homomorfismo de holonomia

$$H : \pi_1(M) \rightarrow G$$

cuja imagem $\Gamma = H(\pi_1(M))$ é dito o grupo de holonomia de M e é definido a menos de conjugação por um elemento de G . O teorema principal dessa seção (*Teorema 5.1.13*) afirma que se (G, X) é uma geometria modelo (*Definição 5.1.12*), X recebe uma métrica tal que $G = \text{Isom}(X)$ e, se M é variedade (G, X) , M é completa com métrica induzida pela (G, X) estrutura e é escrita como $M = X/\Gamma$. Seguem aqui as linhas gerais da demonstração deste teorema. O fato da ação de G em X ter estabilizadores de ponto compactos ((ii) da *Definição 5.1.12*) implica que X tem uma métrica invariante por G (*Proposição 5.1.11*) e a maximalidade de G ((iii) da *Definição 5.1.12*) garante que $G = \text{Isom}(X)$, o grupo de todas as isometrias de X . Pela *Proposição 5.1.10*, D é um recobrimento. Como X é simplesmente conexo ((i) da *Definição 5.1.12*), D é um difeomorfismo. Como a ação de $\pi_1(M)$ em \tilde{M} corresponde à ação de Γ em X (*Equação 5-1*), escrevemos $M = \tilde{M}/\pi_1(M) = X/\Gamma$ (*Equação 5-2*). Por último, é mostrado que o fato de D ser difeomorfismo implica que M é completa com a métrica induzida pela estrutura (G, X) .

Daqui para frente fixaremos um atlas (G, X) da variedade M , uma carta (U_0, ϕ_0) desse atlas e um ponto $x_0 \in U_0$. Começemos por definir a projeção, em X , de uma curva com ponto inicial x_0 .

Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva, tome uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$$

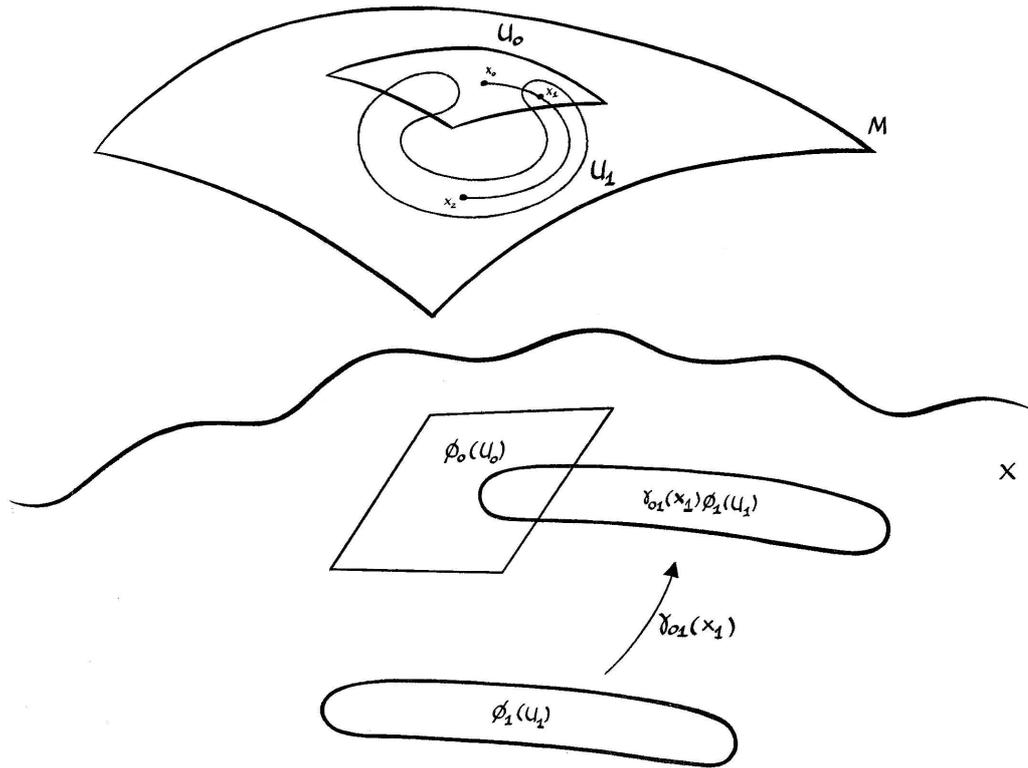


Figura 5.1: Projetando em X uma curva de M .

e associe cartas $\{(\phi_i, U_i)\}_{i=0}^n$ de modo que $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, para cada $i = 0, \dots, n$, reindexando o atlas se necessário. Chamaremos a uma tal partição $\{t_i\}_{i=0}^{n+1}$ de partição regular de α , e às cartas $\{(\phi_i, U_i)\}_{i=0}^n$ de cartas associadas à tal partição. Seja $x_i = \alpha(t_i)$, para cada $i = 0, \dots, n + 1$. Definimos a projeção

$$\bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow X$$

de α por:

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \phi_0 \circ \alpha(t), & \text{se } t \in [t_0, t_1] \\ \gamma_{0,1}(x_1) \phi_1 \circ \alpha(t), & \text{se } t \in [t_1, t_2] \\ \dots & \\ \gamma_{0,1}(x_1) \dots \gamma_{n-1,n}(x_n) \phi_n \circ \alpha(t), & \text{se } t \in [t_n, t_{n+1}]. \end{cases}$$

Veja a *Figura 5.1*. Considere a carta

$$\psi_\alpha = \gamma_{0,1}(x_1) \dots \gamma_{n-1,n}(x_n) \phi_n : U_n \rightarrow X.$$

Observe que $\psi_\alpha(\alpha(1)) = \bar{\alpha}(1)$.

Definição 5.1.3 *Sejam M e N duas variedades. Dizemos que duas funções suaves $f, g : M \rightarrow N$ têm o mesmo germe em $x_0 \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de x_0 tal que $f|_U = g|_U$. O germe de f em x_0 é a classe de equivalência de funções de M em N que têm o mesmo germe que f no ponto x_0 .*

O germe de ψ_α em $\alpha(1)$ depende somente da carta (U_0, ϕ_0) escolhida e não da partição regular escolhida nem das demais cartas associadas. Em outras palavras, se tivermos duas partições regulares $\{t_i\}_{i=0}^{n+1}$ e $\{s_j\}_{j=0}^{m+1}$ de α com cartas associadas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=0}^n$ e $\{(V_j, \varphi_j)\}_{j=0}^m$ tais que $(U_0, \phi_0) = (V_0, \varphi_0)$, então os valores de ψ_α obtidos coincidem em uma vizinhança de $\alpha(1)$. É deixado ao leitor verificar os detalhes da demonstração desse fato usando o seguinte lema:

Lema 5.1.4 *A inclusão de um novo elemento t_{n+2} em $\{t_i\}_{i=0}^{n+1}$, de forma que $t_i < t_{n+2} < t_{i+1}$, para algum $i \leq n$, e de uma nova carta associada (U_{n+1}, ϕ_{n+1}) tal que $\alpha([t_{n+2}, t_{i+1}]) \subset U_{n+1}$, não altera o germe de ψ_α em $\alpha(1)$.*

Demonstração: Seja $x_{n+2} = \alpha(t_{n+2})$. O germe de ψ_α em $\alpha(1)$ na partição original é dado por

$$\gamma_{0,1}(x_1) \dots \gamma_{i,i+1}(x_{i+1}) \gamma_{i+1,i+2}(x_{i+2}) \dots \gamma_{n-1,n}(x_n) \phi_n$$

e, na nova partição, por

$$\gamma_{0,1}(x_1) \dots \gamma_{i,n+1}(x_{n+2}) \gamma_{n+1,i+1}(x_{i+1}) \gamma_{i+1,i+2}(x_{i+2}) \dots \gamma_{n-1,n}(x_n) \phi_n,$$

Como $\alpha([t_{n+2}, t_{i+1}]) \subset U_i$, x_i e x_{n+2} pertencem à mesma componente de $U_{n+1} \cap U_i$ (Figura 5.2). Logo, $\gamma_{i,n+1}(x_{n+2}) = \gamma_{i,n+1}(x_{i+1})$ e o resultado segue facilmente da condição de cociclo. \square

Observe que, mesmo após uma pequena perturbação de α , o germe de ψ_α em $\alpha(1)$ ainda pode ser dado por $\gamma_{0,1}(x_1) \dots \gamma_{n-1,n}(x_n) \phi_n$. Assim, não é difícil ver que todas as curvas homotópicas a α têm o mesmo germe em $\alpha(1)$. Daqui em diante, nos referiremos somente ao germe ψ_α da classe de homotopia de α . Isto significa que estaremos interessados em ψ_α restrito a uma vizinhança arbitrariamente pequena de α , de forma que só a carta inicial e a classe de homotopia de α nos é relevante, não sendo necessário especificar a partição e as demais cartas escolhidas.

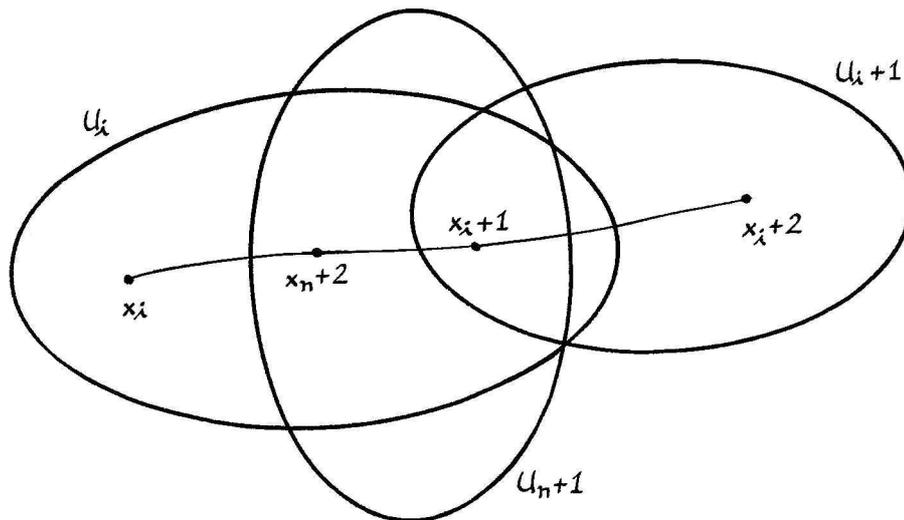


Figura 5.2: A inclusão de uma nova carta numa partição regular.

Definição 5.1.5 O elemento $g_\alpha \in G$ tal que $\psi_\alpha = g_\alpha \phi_0$ é chamado de holonomia de α .

Observe que g_α depende somente da carta inicial e da classe de holonomia de α . Se mudarmos a carta inicial, g_α varia por conjugação em G .

Definição 5.1.6 O homomorfismo de holonomia é a aplicação

$$H : \pi_1(M) \rightarrow G,$$

que associa, a cada $[\alpha] \in \pi_1(M)$, o elemento de holonomia de g_α , onde α é um laço com ponto base x_0 .

Observe que H é realmente um homomorfismo, independe do ponto base x_0 e varia por conjugação em G quando mudamos a carta inicial (U_0, ϕ_0) . O subgrupo

$$\Gamma = H(\pi_1(M)) < G$$

é dito o grupo de holonomia de M e está definido a menos de conjugação.

Considere agora (\tilde{M}, p) , o recobrimento universal de M , onde \tilde{M} tem um atlas (G, X) induzido por p . Fixe $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ e uma carta $(\tilde{U}_0, \tilde{\phi}_0)$ do atlas tal que $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}_0$.

Definição 5.1.7 A aplicação de desenvolvimento de M é definida por

$$D : \tilde{M} \rightarrow X$$

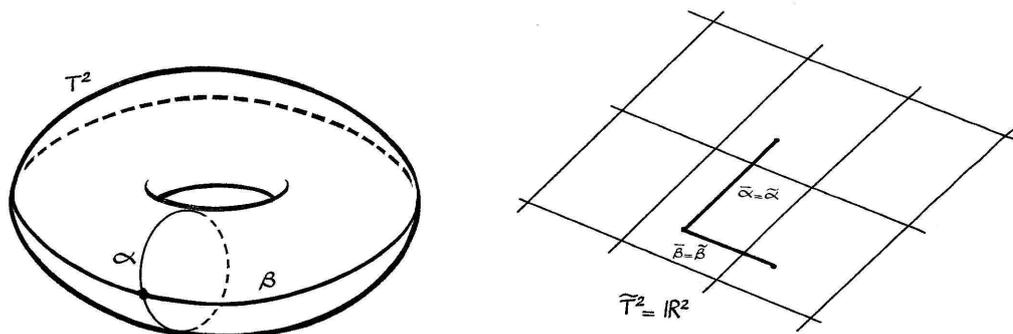


Figura 5.3: A aplicação de desenvolvimento do toro T^2 com estrutura $(\text{Isom}(E^2), \mathbb{R}^2)$.

$$\tilde{x} \mapsto \psi_\alpha(\tilde{x}),$$

onde ψ_α é o germe, com a carta inicial acima, de uma curva α que liga \tilde{x}_0 a \tilde{x} .

Como todas as curvas ligando \tilde{x}_0 a \tilde{x} são homotópicas entre si, essa aplicação está bem definida. É fácil ver também que D é um difeomorfismo local que varia por composição com um elemento de G quando mudamos as condições iniciais. Se X tem uma métrica invariante por G , M recebe métrica induzida pela sua estrutura (G, X) . Assim, \tilde{M} recebe métrica induzida por p . Segue facilmente das definições que D é uma isometria local.

O segundo exemplo a seguir mostra que não podemos garantir que o homeomorfismo local D seja um recobrimento.

Exemplo 5.1.8 O Toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, onde \mathbb{Z}^2 é o grupo gerado por duas translações de \mathbb{R}^2 em direções linearmente independentes, tem uma estrutura $(\text{Isom}(E^2), \mathbb{R}^2)$. Nesse caso, \tilde{T}^2 , o recobrimento universal de T^2 , é \mathbb{R}^2 e D , a aplicação de desenvolvimento, é a identidade de \mathbb{R}^2 . O grupo de holonomia é \mathbb{Z}^2 (Figura 5.3).

Exemplo 5.1.9 Podemos dar ao mesmo toro uma estrutura $(\text{Af}, \mathbb{R}^2)$, onde Af é o grupo das transformações afins de \mathbb{R}^2 , ou seja, o grupo das transformações dadas por $v \mapsto Av + b$, onde $A \in GL(2, \mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^2$. Nesse caso, T^2 é escrito como $(\mathbb{R}^2 - \{0\})/\mathbb{Z}$, onde \mathbb{Z} é o subgrupo de Af gerado por uma homotetia não trivial, ou seja, $\mathbb{Z} = \{\lambda^n I\}_{-\infty}^{\infty}$, onde $0 < \lambda \neq 1$, e I é a identidade de $GL(2, \mathbb{R})$. O grupo de holonomia de T^2 com essa estrutura é \mathbb{Z} e a aplicação de desenvolvimento $D : \tilde{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser visualizada na Figura 5.4.

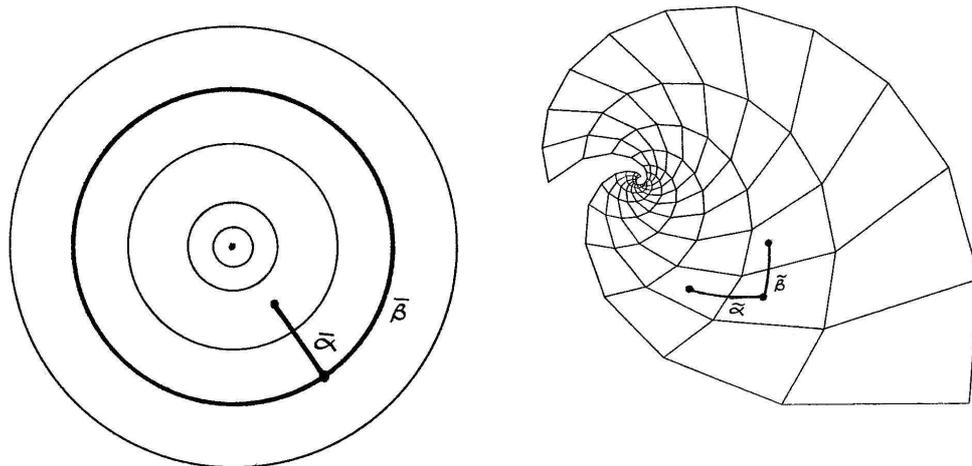


Figura 5.4: A aplicação de desenvolvimento do toro T^2 com estrutura (Af, \mathbb{R}^2) .

Observe que, no primeiro exemplo, a aplicação de desenvolvimento, sendo a identidade, é um recobrimento. No segundo isso não ocorre, já que a origem não pertence à imagem dessa aplicação. Pela *Proposição 5.1.10* adiante, isso implica que \mathbb{R}^2 não admite uma métrica invariante por Af . Observando que o estabilizador de qualquer ponto de \mathbb{R}^2 pela ação de Af não é compacto, a *Proposição 5.1.11* adiante nos dá outra forma de ver esse mesmo fato.

Fixemos novamente uma carta (U_0, ϕ_0) de um atlas (G, X) de M . Suponha que D seja definida com ponto base $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ e carta inicial $(\tilde{U}_0, \tilde{\phi}_0)$, onde $\tilde{\phi}_0 = \phi_0 \circ p$. Então, por definição, $D(\tilde{x}) = \bar{\alpha}(1)$, onde $\bar{\alpha}$ é a projeção, com carta inicial $(\tilde{U}_0, \tilde{\phi}_0)$, de uma curva $\tilde{\alpha}$ que liga \tilde{x}_0 ao ponto $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Observe que $\bar{\alpha}$ é também a projeção, com carta inicial (U_0, ϕ_0) , da curva $\alpha := p \circ \tilde{\alpha}$ em M . Além disso, a holonomia $g_{\tilde{\alpha}}$, com carta inicial $(\tilde{U}_0, \tilde{\phi}_0)$, e a holonomia g_α , com carta inicial (U_0, ϕ_0) , são iguais.

Suponha que D seja um recobrimento e que X seja simplesmente conexo. Então, D é difeomorfismo. Segue facilmente das observações que acabamos de fazer, que o homomorfismo $H : \pi_1(M) \rightarrow G$ é injetivo. Também não é difícil mostrar que se $T_{[\alpha]} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ é uma transformação de recobrimento associada a $[\alpha] \in \pi_1(M)$, então

$$D \circ T_{[\alpha]} = g_\alpha \circ D. \tag{5-1}$$

Logo, a ação de $\pi_1(M)$ em \widetilde{M} comuta com a ação de $\Gamma = H(\pi_1(M)) \approx \pi_1(M)$. Então, como D é difeomorfismo,

$$X/\Gamma \approx \widetilde{M}/\pi_1(M) \approx M, \quad (5-2)$$

ou seja, estas variedades são difeomorfas.

Veremos agora que a existência de uma métrica em X , invariante por G , garante que $D : \widetilde{M} \rightarrow X$ seja um recobrimento. Lembremos que, se N é uma variedade riemanniana e $x_0 \in N$, a bola aberta, de raio $r > 0$ e centro x_0 , é definida por

$$B_r(x_0) = \{x \in N; d(x, x_0) < r\},$$

onde $d(x, x_0)$ é a distância entre x e x_0 . A bola fechada, de raio $r > 0$ e centro x_0 , $\bar{B}_r(x_0)$, é o fecho de $B_r(x_0)$.

Proposição 5.1.10 *Sejam X uma variedade e G um grupo de Lie de difeomorfismos de X , agindo transitivamente. Sejam M uma variedade (G, X) compacta e $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ o seu recobrimento universal. Se X admite uma métrica riemanniana invariante por G , então $D : \widetilde{M} \rightarrow X$ é um recobrimento.*

Demonstração: Se X tem uma métrica invariante por G , então M recebe uma métrica induzida pela estrutura (G, X) . Como já vimos, p induz uma métrica em \widetilde{M} tal que D é isometria local. Para cada $y \in M$, podemos escolher $\epsilon_y > 0$ tal que a bola $B_{\epsilon_y}(y)$ é convexa, ou seja, dados dois pontos nessa bola, existe uma única geodésica ligando estes dois pontos cujo interior está contido em $B_{\epsilon_y}(y)$ (vide [9], p. 75-77). Em particular, $B_{\epsilon_y}(y)$ não contem geodésica fechada. Como M é compacta, podemos escolher ϵ tal que $\epsilon_y = \epsilon$, para todo $y \in M$. Tomando ϵ menor se necessário, também podemos supor que, para todo y , $B_\epsilon(y)$ é difeomorfa, por p , a cada componente de $p^{-1}(B_\epsilon(y))$ e que existe carta (U, ϕ) tal que $B_\epsilon(y) \subset U$ para algum y . Logo, toda bola de raio ϵ em \widetilde{M} é convexa e $\phi(B_\epsilon(y_0)) = B_\epsilon(\phi(y_0))$ é convexa. Como G age transitivamente em X , toda bola de raio ϵ em X também é convexa.

Mostremos que, para cada $y \in M$, D leva $B_\epsilon(y)$ difeomorficamente em $D(B_\epsilon(y))$. Sendo uma isometria local, D leva cada caminho em $B_\epsilon(y)$ em caminho em $D(B_\epsilon(y))$ de mesmo comprimento. Logo, $D(B_\epsilon(y)) \subset B_\epsilon(D(y))$. Sendo D um difeomorfismo local, o que devemos mostrar é que $D|_{B_\epsilon}$ é injetiva. Sejam $y_1, y_2 \in B_\epsilon$, $y_1 \neq y_2$. Seja γ a geodésica em $B_\epsilon(y)$ ligando y_1

a y_2 . Então, $D(y_1) \neq D(y_2)$ pois, caso contrário, $D(\gamma)$ seria uma geodésica fechada, contrariando o fato de $B_\epsilon(D(y))$ ser convexa.

Se $x \in D(\widetilde{M})$, pelo que acabamos de ver, $B_\epsilon(x) \subset D(\widetilde{M})$. Como X é conexo, D é sobrejetiva.

Seja $x \in X$. Então $B_\epsilon(x)$ é difeomorfa a $B_\epsilon(y)$ para cada $y \in D^{-1}(x)$. Logo, as bolas $B_{\epsilon/2}(x)$ e $B_{\epsilon/2}(y)$ também são difeomorfas entre si. Para concluir que D é um recobrimento, basta mostrar que as bolas $B_{\epsilon/2}(y)$, $y \in D^{-1}(x)$, são disjuntas entre si. Suponha por absurdo que $B_{\epsilon/2}(y_1) \cap B_{\epsilon/2}(y_2) \neq \emptyset$ para dois pontos $y_1 \neq y_2$ em $D^{-1}(x)$. Então existe um ponto $z \in B_{\epsilon/2}(y_1) \cap \partial \bar{B}_{\epsilon/2}(y_2)$. Temos agora uma contradição porque por um lado, como $B_\epsilon(y_1)$ é difeomorfa a $B_\epsilon(x)$, temos que $D(z) \in \text{int}(B_{\epsilon/2}(x))$ e, por outro lado, como $B_\epsilon(y_2)$ também é difeomorfa a $B_\epsilon(x)$, temos que $D(z) \in \partial \bar{B}_{\epsilon/2}(x)$. \square

Trataremos agora de dar uma condição necessária e suficiente para que X admita uma métrica invariante por G .

Proposição 5.1.11 *Sejam X uma variedade e G um grupo de Lie de difeomorfismos de X agindo transitivamente. Então X admite uma métrica riemanniana invariante por G se e só se o estabilizador de algum ponto de X pela ação de G é compacto.*

Demonstração: Em primeiro lugar, é conveniente observar que, como a ação de G é transitiva, todos os estabilizadores de ponto são conjugados entre si. Logo, o estabilizador de um ponto ser compacto equivale a qualquer estabilizador de ponto ser compacto.

Suponha que X admite uma métrica invariante por G . Seja $x \in X$ e seja G_x o estabilizador de x . Então G_x age pela derivada de seus elementos em $T_x X$ por isometrias fixando a origem. Logo, G_x é um subgrupo fechado do grupo compacto $O(3)$, sendo portanto compacto. Reciprocamente, suponha que os estabilizadores de ponto sejam compactos. Fixe $x \in X$ e uma forma bilinear simétrica não degenerada Q em $T_x X$. Considerando G com medida de Haar (vide [17], p.96), defina a forma quadrática não degenerada H em $T_x X$ por

$$H(u, v) = \int_{g \in G_x} Q(g_* u, g_* v) dg.$$

Não é difícil ver que H é invariante por G_x e que $g_*^{-1} H$ é invariante por $G_{g \cdot x}$. Além disso, se $g' \cdot x = g \cdot x$, temos um $h \in G_x$ tal que $g'^{-1} = h g^{-1}$. Logo, $g'^{-1} H = (h g^{-1})_* H = g_*^{-1} h_* H = g_*^{-1} H$. Assim, como a ação de G em X é transitiva, $H_{g \cdot x} = g_*^{-1} H$ define uma métrica em X . É imediato verificar que essa métrica é invariante por G . \square

Lembremos a definição de uma geometria modelo dada na introdução:

Definição 5.1.12 *Sejam X uma variedade e G um grupo de Lie de difeomorfismos de X . Dizemos que o par (G, X) é uma geometria modelo se satisfaz às seguintes condições:*

- (i) X é conexo e simplesmente conexo;
- (ii) G age em X transitivamente e com estabilizadores de ponto compactos;
- (iii) G é maximal com relação a (ii), ou seja, não está propriamente contido em nenhum grupo de difeomorfismos de X que aja com estabilizadores de ponto compactos;
- (iv) Existe uma variedade compacta modelada por (G, X) .

Concluimos esta seção com o seguinte teorema:

Teorema 5.1.13 *Seja (G, X) uma geometria modelo. Então X tem uma métrica riemanniana tal que $G = \text{Isom}(X)$. Se M é uma variedade (G, X) compacta, então M é completa com a métrica induzida pela estrutura (G, X) e é escrita como*

$$M = X/\Gamma.$$

Demonstração: Se (G, X) é uma geometria modelo, (ii) da definição acima, juntamente com a *Proposição 5.1.11*, implica que X tem uma métrica invariante por G . Por (iii), G é $\text{Isom}(X)$, o grupo de todas as isometrias de X . Seja M uma variedade modelada por (G, X) . Como vimos, a *Equação 5-1* implica que $M = X/\Gamma$ (*Equação 5-2*). Resta mostrar que M é completa com a métrica induzida pela estrutura (G, X) .

Pela *Proposição 5.1.10*, a aplicação de desenvolvimento, $D : \widetilde{M} \rightarrow X$, é um recobrimento. Por observação feita logo após a *Definição 5.1.7*, D é isometria local. Como X é simplesmente conexo, D é difeomorfismo e logo é isometria. Tome $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\epsilon(x_0)$ esteja contida em alguma vizinhança normal de x_0 . Logo, $\bar{B}_\epsilon(x_0)$ é compacta. Como a ação de G é transitiva, $\bar{B}_\epsilon(x)$ é compacta para todo $x \in X$. Como D é isometria, toda bola fechada de raio ϵ em \widetilde{M} é compacta e o mesmo ocorre em M . Fixe $y_0 \in M$. Não é difícil verificar que, para todo $a > 0$, $\bar{B}_a(y_0)$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ . Para isso, basta observar que se isso vale para um dado $a > 0$ então também vale para $a + \epsilon/2$.

Logo $\{\bar{B}_a(y_0)\}_{a>0}$ é uma cobertura de M por compactos. Tome $\{x_n\}$ uma seqüência de Cauchy em \widetilde{M} . Então $\{x_n\} \subset \bar{B}_a(y_0)$, para algum $a > 0$. Pela compacidade de $\bar{B}_a(y_0)$, $\{x_n\}$ converge. Assim, M é completa. \square

5.2

Demonstração do teorema de classificação

Seja (G, X) uma geometria modelo. Lembremos que uma variedade riemanniana M representa (G, X) quando existem difeomorfismo

$$f : X \rightarrow M$$

e isomorfismo

$$\varphi : G \rightarrow \text{Isom}(M)$$

tais que

$$f(g(x)) = \varphi(g)(f(x)), \quad \forall x \in M, \quad \forall g \in G.$$

Teorema 5.2.1 *Seja (G, X) uma geometria modelo, onde X tem dimensão três. Então os estabilizadores de ponto têm dimensão três, um ou zero e vale o seguinte:*

- (i) *Se os estabilizadores de ponto têm dimensão três, (G, X) é representada por S^3 , E^3 ou H^3 ;*
- (ii) *Se os estabilizadores de ponto têm dimensão um, então X é um fibrado principal S^1 ou \mathbb{R} tal que a ação de G leva fibra em fibra. Além disso, esse fibrado admite uma conexão, também invariante pela ação de G . Temos as seguintes possibilidades:*
 - (a) *Se a conexão é integrável, (G, X) é representada por $S^2 \times E$ ou $H^2 \times E$ com as métricas produto;*
 - (b) *Se a conexão não é integrável, (G, X) é representada pelos grupos de Lie Nil ou $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ com as métricas invariantes à esquerda descritas nas Seções 4.7 e 4.8 respectivamente;*
- (iii) *Se os estabilizadores de ponto têm dimensão zero, então (G, X) é representada pelo grupo de Lie Sol com a métrica invariante à esquerda descrita na Seção 4.9.*

Demonstração: Conforme visto na Seção 5.1, usando a transitividade da ação de G e a compacidade dos estabilizadores de ponto, X admite uma

métrica riemanniana tal que $G = \text{Isom}(X)$ (*Teorema 5.1.13*). Seja G_x o estabilizador de um ponto $x \in X$. Então G_x age em $T_x X$ por isometrias fixando a origem. Assim, G'_x , a componente da identidade de G_x , é um subgrupo compacto conexo de $O(3)$. É conhecido, da teoria de grupos de Lie, que os subgrupos compactos conexos de $O(3)$ são, a menos de conjugação, o grupo trivial, $SO(2)$ e $SO(3)$, cujas dimensões são zero, um e três respectivamente. Como G age transitivamente, G'_x é conjugado a um único desses três, independentemente do ponto x escolhido. Consideraremos separadamente cada uma destas possibilidades.

(i) Se $G'_x \approx SO(3)$ então, usando a transitividade da ação, podemos levar qualquer plano de dimensão dois tangente a um ponto em qualquer plano de dimensão dois tangente a qualquer outro ponto, por um elemento de G . Logo, a curvatura seccional de X é constante. É fato básico de geometria riemanniana que as únicas variedades riemannianas de dimensão três simplesmente conexas com curvatura seccional constante são S^3 , E^3 e H^3 , a menos de multiplicação da métrica por uma constante. É claro que essa multiplicação por constante não altera o grupo de todas as isometrias da respectiva variedade riemanniana. Logo, essas três são as únicas possibilidades para representações de (G, X) , demonstrando a parte (i) do teorema.

(ii) Se $G'_x \approx SO(2)$, temos, para cada $x \in X$ um eixo de rotação em $T_x X$, fixo por G'_x . Esse eixo é preservado por G_x (verifique que qualquer reflexão de G_x preserva esse eixo). Isso determina um campo de retas em X que, por sua vez, determina uma folheação \mathcal{F} de dimensão um. Mostremos que \mathcal{F} é invariante pela ação de G . Sejam $v \in T_x \mathcal{F}$ e $g \in G$. Queremos ver que $dg(v) \in T_{g \cdot x} \mathcal{F}$. Observe que se $h_{g \cdot x} \in G'_{g \cdot x}$, existe um elemento $h_x \in G'_x$ tal que $h_{g \cdot x} = g h_x g^{-1}$ e que, por definição de \mathcal{F} , $dh_x(v) = v$ para todo $h_x \in G'_x$. Então para todo $h_{g \cdot x} \in G'_{g \cdot x}$,

$$dh_{g \cdot x}(dg(v)) = d(g h_x g^{-1}) dg(v) = dg(dh_x(v)) = dg(v).$$

Logo, $dg(v)$ fica fixo pela ação de $G'_{g \cdot x}$ e portanto pertence a $T_{g \cdot x} \mathcal{F}$.

Seja v um vetor unitário tangente a \mathcal{F} . Usando o fato de X ser simplesmente conexo e conexo por caminhos, podemos definir um campo unitário V tangente a \mathcal{F} que estenda v . Se $g \in G$, como X é conexo por caminhos, ou $dg(V_x) = V_{g \cdot x}$, para todo $x \in X$, ou $dg(V_x) = -V_{g \cdot x}$, para todo $x \in X$. Defina o subgrupo G_1 como o conjunto dos elementos de G que satisfazem a primeira igualdade, ou seja, G_1 é o maior subgrupo de G pela

ação do qual V é invariante. Observe que se $g \in G - G_1$, então $g^2 \in G_1$. Logo G_1 tem índice no máximo dois em G .

Lema 5.2.2 *O subgrupo $G_1 < G$ contém G' , a componente conexa da identidade, e comuta com o fluxo ϕ_t de V , ou seja,*

$$\phi_t(g \cdot x) = g \cdot \phi_t(x), \quad \forall x \in X, \forall g \in G_1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Para a primeira afirmação basta observar que G_1 e $G - G_1$ são abertos de G e, como G' é conexa, $G' \subset G_1$. Para a segunda afirmação basta verificar que, dado $g \in G_1$,

$$t \mapsto g \cdot \phi_t(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma curva integral de V , partindo de $g \cdot x$. Mas isso é claro já que, como V é invariante por G_1 ,

$$\frac{d}{dt} g \cdot \phi_t(x) = dg(V_{\phi_t(x)}) = V_{g \cdot \phi_t(x)}. \quad \square \text{ (Lema)}$$

Como conseqüência, vemos que, como G' age transitivamente em X , a ação de G_1 também é transitiva. Além disso, se x e y pertencem à mesma fibra, então $G'_x = G'_y$. Isso porque, se $y = \phi_t(x)$, $t \in \mathbb{R}$, então, para todo $g \in G'_x \subset G_1$,

$$g \cdot y = g \cdot \phi_t(x) = \phi_t(g \cdot x) = \phi_t(x) = y.$$

Logo $G'_x \subset G'_y$. Trocando-se o papel de x e y , concluímos que $G'_x = G'_y$.

Seja P o campo de planos de dimensão dois ortogonal a \mathcal{F} em cada ponto. Observe que P é invariante pela ação de G , já que \mathcal{F} e a métrica riemanniana assim o são. Daqui para frente, chamaremos toda curva tangente a P de uma curva horizontal. Mostremos que o fluxo, ϕ_t , preserva P . Seja v um vetor em $P_x \subset T_x X$, onde x é um ponto de X , e seja $y = \phi_t(x)$, para um $t \in \mathbb{R}$. Escreva $w = (d\phi_t)_x(v) \in T_y X$ como

$$w = w_{\mathcal{F}} + w_P,$$

onde $w_{\mathcal{F}} \in T_y \mathcal{F}$ e $w_P \in P_y$. Suponha por absurdo que $w_{\mathcal{F}}$ seja não nulo. Nesse caso, o vetor $(d\phi_t)_x^{-1}(w_{\mathcal{F}})$ seria um vetor não nulo de $T_x \mathcal{F}$, já que ϕ_t

é um difeomorfismo que preserva $T\mathcal{F}$. Mas isso seria um absurdo porque $(d\phi_t)_x^{-1}(w) = v$. Logo, $w_{\mathcal{F}}$ é nulo, ou seja, $w \in P_y$.

Usaremos agora o fato de (G, X) modelar uma variedade compacta para mostrar que ϕ_t age por isometrias em P e, conseqüentemente, também em X . Sejam x um ponto de X e v um vetor não nulo de P_x . Escreva

$$\|d\phi_t(v)\| = A_t \|v\|, \quad (5-3)$$

onde A_t é uma função de t com valores reais e $\|\cdot\|$ é a norma determinada pela métrica riemanniana em X . Como ϕ_t comuta com a ação de $G'_x \approx SO(2)$, a Equação 5-3 vale para qualquer vetor em P_x . Como G age transitivamente por isometrias em X , 5-3 vale para qualquer $x \in X$. Queremos mostrar que $A_t = 1$. Como ϕ_t preserva o campo V e estica o plano P_x por homotetia com fator A_t^2 , ϕ_t multiplica o elemento volume dV em X pela constante A_t^2 . Seja M uma variedade compacta modelada por (G, X) . Então, pelo Teorema 5.1.13, M é o quociente de X por um subgrupo $\Gamma < G$. Como $G_1 < G$ tem índice no máximo dois, tomando recobrimento duplo de M se necessário, podemos supor que $\Gamma < G_1$. Assim, o fluxo ϕ_t e o campo P descem ao quociente X/Γ . Mas, como M tem volume finito, ϕ_t age multiplicando esse volume por A_t^2 . Então $A_t = 1$.

Seja $Y = X/\mathcal{F}$ o espaço das folhas de \mathcal{F} , ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada folha de \mathcal{F} a um ponto, e seja $p : X \rightarrow Y$ a projeção natural.

Lema 5.2.3 *A folheação \mathcal{F} determina uma estrutura (X, Y, p) de fibrado principal S^1 ou \mathbb{R} . Além disso, p induz em Y uma métrica tal que $Y = S^2, E^2$ ou H^2 .*

Demonstração: Mostremos inicialmente que Y é variedade. Seja $x \in X$. Encontraremos uma seção local S_x de \mathcal{F} , ou seja, $S_x \subset X$ é uma superfície tal que cada folha de \mathcal{F} que intercepta S_x , o faz em um único ponto. Podemos tomar uma vizinhança V de x tal que V é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos, ou seja, para cada $y \in V$, existe $U_y \subset T_y X$ vizinhança convexa da origem tal que $\exp_y : U_y \rightarrow V$ é difeomorfismo (vide [9], p.72). Seja $D \subset P_x \cap U_x \subset T_x X$ um disco centrado na origem tal que $S_x := \exp_x(D)$ é transversal a \mathcal{F} . Mostremos que S_x é uma seção local de \mathcal{F} . Seja $y \in S_x$ e seja L_y a folha que contem y . Suponha, por absurdo, que L_y intercepte S_x em $z \neq y$. Lembremos que $G'_y \approx SO(2)$ age por rotações em $P_y \subset T_y Y$, pela derivada de seus elementos. Seja $v = \exp_y^{-1}(z) \in U_y \subset T_y X$. Tome $g \in G'_y$,

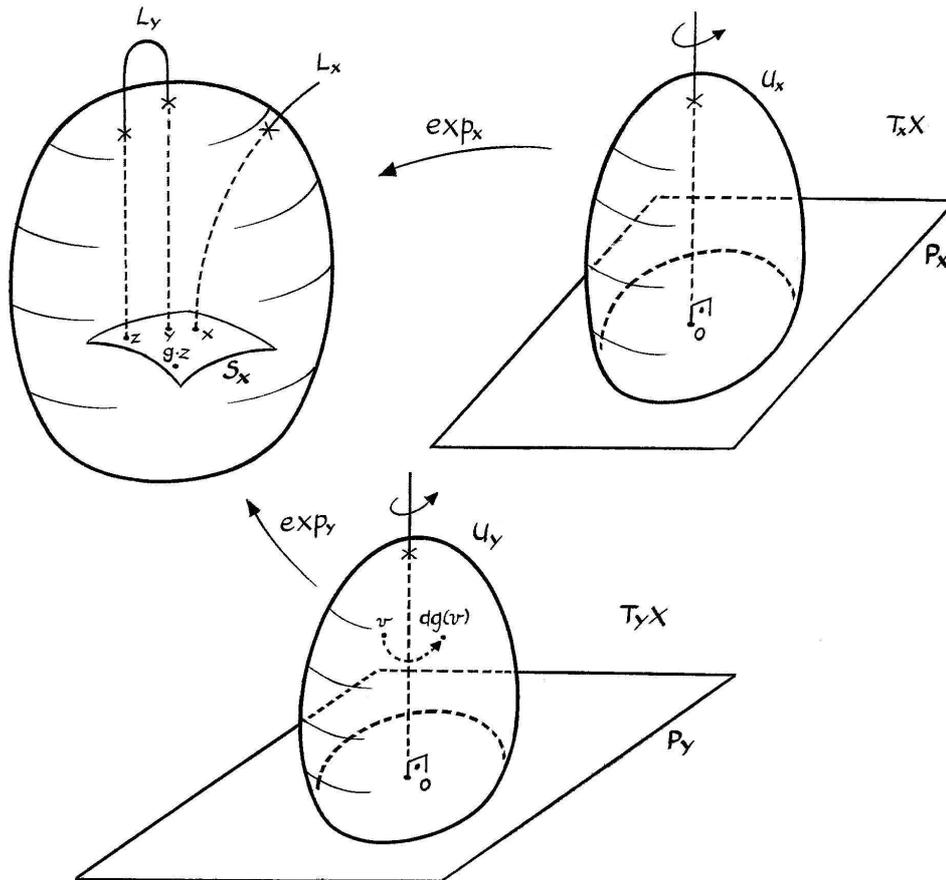


Figura 5.5: Mostrando que S_x , na demonstração do *Lema 5.2.3*, é uma seção.

$g \neq e_G$. Então $dg(v) \neq v$ e, como U_y é convexa, $dg(v) \in U_y$. Logo,

$$g \cdot z = g \cdot \exp_y(v) = \exp_y(dg \cdot v) \neq \exp_y(v) = z.$$

Veja a *Figura 5.5*. Como y e z estão na mesma fibra, pela observação após o *Lema 5.2.2*, $G'_y = G'_z$. Logo, $g \cdot z = z$ e temos uma contradição. A existência dessa seção para qualquer $x \in X$ implica que Y é variedade.

Como G age transitivamente por isometrias em X , preservando o campo P , a projeção $p : X \rightarrow Y$ induz uma métrica em Y tal que, para todo $x \in X$, p define uma isometria entre P_x e $T_{p(x)}Y$. Como G também preserva a folheação \mathcal{F} , todas as folhas dessa folheação são difeomorfas entre si, podendo ser S^1 ou \mathbb{R} . Além disso, essa ação transitiva passa a ação, também por isometrias, de G em Y . Então Y tem curvatura constante. Como X é conexo e simplesmente conexo, Y também o é. Então $Y = S^2$, E^2 ou H^2 , a menos de multiplicação da métrica por uma constante.

Agora é fácil ver que \mathcal{F} define um fibrado principal sobre Y , onde identificamos a própria fibra com o seu grupo de translações agindo em um ponto. Para isso, para cada $x \in X$, definiremos uma carta trivializadora usando a seção S_x . Lembremos que o saturado de S_x , $\text{sat}(S_x)$, é a união das folhas de \mathcal{F} que interceptam S_x . Se $W_x = p(S_x) \subset Y$, considere

$$f : W_x \rightarrow S_x \subset \text{sat}(S_x) = p^{-1}(W_x)$$

a função suave que define essa seção, ou seja $p \circ f(u) = u, \forall u \in W_x$. Defina a carta

$$\varphi : p^{-1}(W_x) \rightarrow W_x \times L$$

onde L é $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou \mathbb{R} , por

$$\varphi(\phi_{\alpha t}(f(y))) = (p(y), t),$$

onde α é o comprimento da fibra $L_{f(y)}$ caso $L = S^1$, e 1 caso contrário. \square (*Lema*)

Mostremos que P é uma conexão no fibrado (X, Y, p) . Como ϕ_t age por isometrias, se α é uma curva em Y e $\tilde{\alpha}$ é um levantamento horizontal qualquer de α , $\phi_t(\tilde{\alpha}), t \in \mathbb{R}$ define todos os demais levantamentos de α . Assim, a função $\phi_t(\tilde{\alpha}(0)) \mapsto \phi_t(\tilde{\alpha}(1))$, composta com trivializações escolhidas nos extremos de α , define uma translação da fibra. Então, P é uma conexão no fibrado (X, Y, p) (vide *Definição 4.1.9*). Observe que, como G age transitivamente mantendo P , essa conexão tem forma curvatura Ω constante. Então, se ω é a forma volume na superfície Y , podemos escrever,

$$\Omega = k\omega,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é constante. Temos duas possibilidades:

(a) Se $k = 0$, P define uma folheação em X . Como Y é uma superfície simplesmente conexa, pela *Proposição 4.1.14*, (X, Y, p) é isomorfo ao fibrado produto $Y \times L$, onde L é a fibra do primeiro fibrado. Como X é simplesmente conexo, $L = \mathbb{R}$ e temos então três possibilidades para este fibrado: $S^2 \times E$, $H^2 \times E$ e $E^2 \times E$. Repare que só nos dois primeiros casos G é maximal como grupo de isometrias. Isso porque G preserva essa estrutura de fibrado e logo, no último caso, G não é o grupo de todas as isometrias de $E^2 \times E = E^3$. Assim temos exatamente duas possibilidades para representações de (G, X) : $S^2 \times E$ e $H^2 \times E$.

(b) Se $k \neq 0$, sempre que a fibra de (X, Y, p) for \mathbb{R} , podemos multiplicar por uma constante a métrica em X na direção das fibras e tomar orientação apropriada de modo que k seja a constante não nula que se queira, sem alterar o grupo de todas as isometrias de X , que continua sendo G . Trataremos separadamente os casos $Y = H^2$, $Y = S^2$ e $Y = E^2$.

Suponha $Y = H^2$. Nesse caso, a fibra não pode ser S^1 porque, caso fosse, como H^2 é contrátil, (X, H^2, p) seria um produto $H^2 \times S^1$, que não é simplesmente conexo. Então a fibra é \mathbb{R} . Considere $T^1 H^2$, o fibrado tangente unitário de H^2 , com a conexão de Levi-Civita (*Exemplo 4.1.11*), que tem curvatura dada pelo *Theorema Egregium* de Gauss (*Teorema 4.1.15*). Vimos na *Seção 4.7* que $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ recebe estrutura de fibrado e conexão induzidas por $T^1 H^2 \approx PSL(2, \mathbb{R})$. Fazendo com que k seja igual a -1 , as respectivas conexões em (X, H^2, p) e em $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ terão mesma forma curvatura. Pela *Proposição 4.1.14*, existe um isomorfismo ψ entre estes dois fibrados principais \mathbb{R} que mantém conexões. Como vimos na demonstração dessa proposição, ψ pode ser escolhido de forma que induza a identidade na base H^2 . Assim, ψ é uma isometria entre as conexões. Mas, pela compatibilidade com a estrutura de fibrados principais, (vide *Definição 4.1.6*), ψ também é uma isometria entre as fibras. Logo ψ é uma isometria entre os espaços totais. Sendo isométrico a X , $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ representa (G, X) .

Suponha agora que $Y = E^2$. Novamente a fibra não pode ser S^1 pelo mesmo argumento acima. Então, a fibra nesse caso é \mathbb{R} e X é isométrico a *Nil* por raciocínio análogo ao do caso anterior. Assim, (G, X) é representada por *Nil*.

Por último, suponha $Y = S^2$. Considere $T^1 S^2$ com a conexão de Levi-Civita, cuja forma curvatura é dada pelo *Theorema Egregium* de Gauss. Se, por absurdo, a fibra de (X, S^2, p) for \mathbb{R} , pode-se construir um recobrimento de $T^1 S^2$ por X que preserve as estruturas de fibrado e as conexões (para verificar isso, use o mesmo raciocínio da demonstração da *Proposição 4.1.14*). Mas esse recobrimento é S^3 com o fibrado $\eta_{1,-1}$ (*Proposição 4.3.6*) o que é um absurdo porque esse fibrado tem fibra S^1 . Logo, a fibra de (X, S^2, p) é S^1 e existe isomorfismo entre esse fibrado e o fibrado de Hopf (ou o fibrado $\eta_{1,-1}$) em S^3 . Como esse isomorfismo é uma isometria, o grupo G não é maximal, já que preserva o fibrado $\eta_{1,-1}$ e nem toda isometria de S^3 preserva esse fibrado. Então não temos uma nova geometria. Isso conclui a parte (ii) do teorema.

(iii) Se $G'_x = \{id\}$, então G' age simplesmente transitivamente em X . Então identificamos X com G' e o trabalho passa a ser estudar os grupos de

Lie de dimensão três conexos e simplesmente conexos. Nesse caso, (G, X) é representado pelo grupo Sol . Isso é feito em [17], *pp.185-188*, num processo técnico que não reproduziremos aqui. \square