

3

Fibrados de Seifert de Dimensão Três

Um fibrado de Seifert de dimensão três é uma folheação por círculos numa variedade de dimensão três e pode ser visto como um fibrado sobre uma orbifold de dimensão dois (*Seção 2.7*). Veremos no *Capítulo 4* que se M^3 é uma variedade compacta modelada por uma geometria modelo não equivalente a H^3 ou a Sol , então M admite uma folheação por círculos. Por um resultado devido a Epstein ([3]), esta folheação é um fibrado de Seifert. Definimos a característica de Euler de um fibrado de Seifert de dimensão três como uma extensão do mesmo conceito para fibrados usuais com fibra S^1 .

3.1

Definições básicas

Nesta seção trataremos da definição de um fibrado de Seifert de dimensão três, que chamaremos simplesmente de fibrado de Seifert, bem como de alguns fatos básicos relacionados. Para definir essa estrutura, consideraremos inicialmente o toro sólido e a garrafa de Klein sólida com folheações por círculos que descrevemos a partir de agora. Sejam $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ e $I = [0, 1]$. Considere $D \times I$ com orientação fixa e com folheação produto $\{x\} \times I$, $x \in D$, cujas folhas chamaremos de fibras. No que se segue, faremos identificações nos extremos de $D \times I$ de forma a obter toros sólidos e garrafas de Klein sólidas com folheações por círculos induzidas, que chamaremos toros fibrados e garrafas de Klein fibradas, cujas folhas também serão chamadas de fibras.

3.1.1

Toro Fibrado:

Seja $\rho : D \rightarrow D$ uma rotação em torno da origem de \mathbb{R}^2 por um ângulo $2\pi\gamma/\alpha$, onde $\alpha > 0$, e $\gamma \geq 0$ são inteiros primos entre si. Se fizermos a identificação $(x, 1) \sim (\rho(x), 0)$ em $D \times I$, teremos um toro T_ρ com folheação induzida por $\{x\} \times I$, o chamado toro fibrado. Se $\gamma = 0$, $T_\rho = T_{id}$, chamado toro fibrado trivial, herda a folheação produto $\{x\} \times S^1$. Se $\gamma > 0$, T_ρ é denotado por $T_{\alpha,\gamma}$. Nesse caso, se $x = 0$, essa identificação apenas liga os extremos da fibra central $\{0\} \times I$, resultando em um único círculo central $\{0\} \times S^1$. Se $x \in D - \{0\}$, cada folha $\{\rho^j(x)\} \times I$, $j = 0, \dots, \alpha - 2$, é ligada à folha $\{\rho^{j+1}(x)\} \times I$ e a folha $\{\rho^{\alpha-1}(x)\} \times I$ é ligada à folha $\{\rho^0(x)\} \times I = \{x\} \times I$, sempre resultando em um único círculo em $T_{\alpha,\gamma}$. Este círculo intercepta $D \times \{0\} \sim D \times \{1\}$ em α pontos diferentes e dá γ voltas em torno da fibra central. Na *Figura 3.1*, que ilustra isso, o bordo de $T_{\alpha,\gamma}$, que é um toro bi-dimensional, é representado por um retângulo, onde os lados horizontais são identificados, resultando no meridiano M , assim como os verticais, que resultam no paralelo P . Neste retângulo, as fibras, se supostas lineares, têm inclinação α/γ .

Observe que se α' divide α , $T_{\alpha',\gamma}$ é um recobrimento por α/α' folhas de $T_{\alpha,\gamma}$. Além disso, o espaço das fibras de $T_{\alpha,\gamma}$, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada fibra a um ponto, é uma orbifold, um cone de ângulo $2\pi/\alpha$. O que acontece é que $T_{\alpha,\gamma}$ é o quociente do toro fibrado trivial T_{id} pela ação de \mathbb{Z}_α na qual seu gerador age por rotação por γ/α de volta na primeira coordenada e por $1/\alpha$ de volta na segunda coordenada. Essa

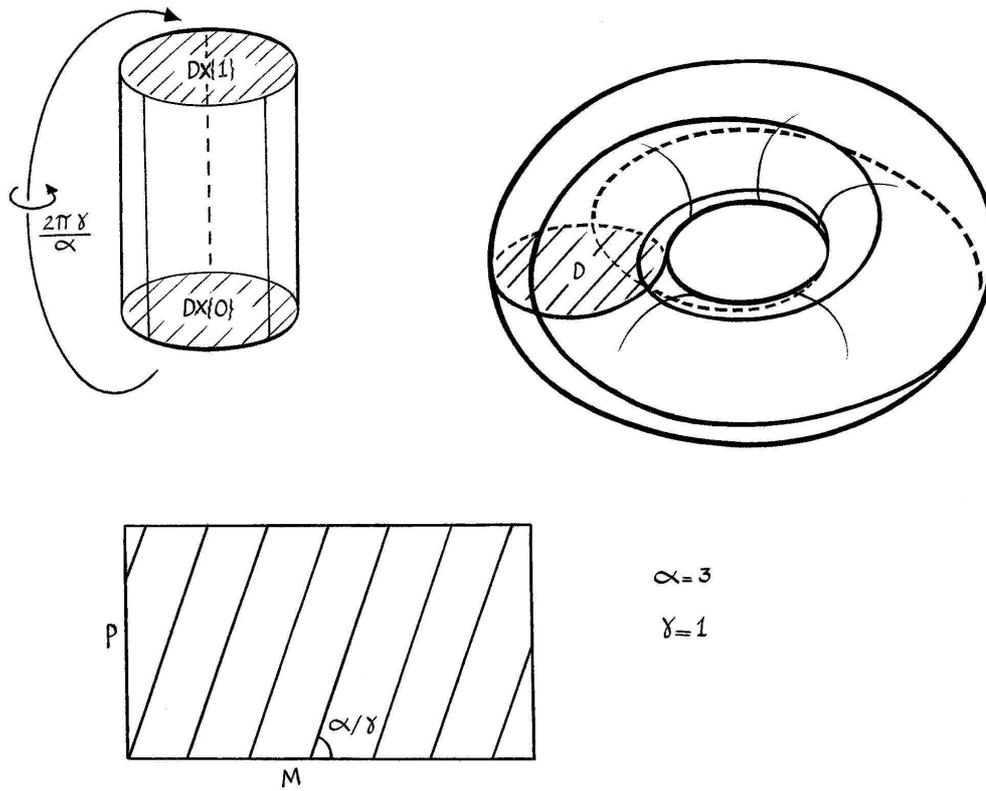


Figura 3.1: O toro fibrado com invariantes de órbita (3, 1).

ação desce ao disco D resultando no cone de ângulo $2\pi/\alpha$. No caso do toro fibrado trivial, o espaço de fibras é o próprio disco D .

3.1.2 Garrafa de Klein Fibrada

Se $\rho : D \rightarrow D$ for uma reflexão em um diâmetro $l \subset D$, a identificação $(x, 1) \sim (\rho(x), 0)$ resulta em uma garrafa de Klein K_ρ , dita garrafa de Klein fibrada, e a folheação induzida por $\{x\} \times I$ é descrita como se segue. Cada fibra $\{x\} \times I$, com $x \in D - l$, é ligada à fibra $\{\rho(x)\} \times I$, oposta em relação a l , formando um único círculo. Estas fibras interceptam $D \times \{0\} \approx D \times \{1\}$ em dois pontos opostos em relação a $l \times \{0\}$. As fibras que interceptam o subconjunto $l \times \{0\}$ interceptam $D \times \{0\}$ num único ponto cada uma.

Observe que T_{id} recobre K_ρ por duas folhas. Na realidade, K_ρ é o quociente de T_{id} pela ação de \mathbb{Z}_2 na qual seu gerador age por reflexão em l na primeira coordenada e por rotação por $1/2$ de volta na segunda coordenada.

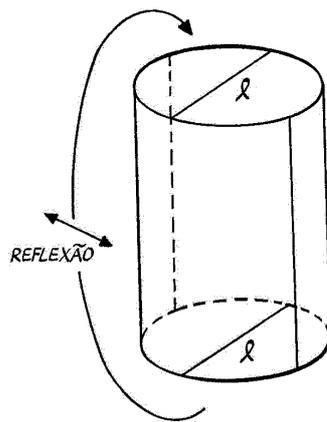


Figura 3.2: A garrafa de Klein fibrada.

Essa ação desce ao disco D resultando numa orbifold, um disco com uma linha refletora, que é o espaço de fibras de K_ρ (Figura 3.2).

Daqui para frente, um homeomorfismo que preserva fibras será dito um isomorfismo. Observe que todas as garrafas de Klein fibradas são isomorfas entre si. Além disso, é fácil ver que $T_{\alpha,\gamma}$ é isomorfo a $T_{\alpha',\gamma'}$, por um isomorfismo que preserva orientações da variedade e das fibras, se e só se

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha \\ \gamma' \equiv \gamma \pmod{\alpha} \end{cases}$$

O par (α, γ) , com $0 < \gamma < \alpha$ primos entre si, define a classe de toros fibrados isomorfos a $T_{\alpha,\gamma}$ e é dito os invariantes de órbita dessa classe. Definimos os invariantes de órbita do toro fibrado trivial como $(1, 0)$. Frequentemente nos referiremos aos invariantes de órbita não normalizados, o que significa que não estaremos impondo, a α e γ , a condição $0 < \gamma < \alpha$.

Definição 3.1.1 *Um fibrado de Seifert (de dimensão três) é uma variedade de dimensão três com uma decomposição por círculos, ditos fibras, tal que cada fibra possui uma vizinhança tubular isomorfa ou a um toro fibrado ou a uma garrafa de Klein fibrada.*

Um fibrado de Seifert é uma folheação por círculos. Suporemos esta folheação sempre de classe C^∞ . Epstein mostra em [3], que toda folheação por círculos de uma variedade compacta de dimensão três é um fibrado de Seifert. Observe que o espaço de fibras de um fibrado de Seifert é uma orbifold com cones, provenientes de toros fibrados, e linhas refletoras, provenientes da união de garrafas de Klein fibradas. Um fibrado de Seifert

é um fibrado sobre a orbifold dada por seu espaço de fibras, conforme a *Definição 2.7.2*, com fibra S^1 e espaço total uma variedade de dimensão três. Em razão disso, usaremos a notação (E, O, η) para um fibrado de Seifert em E sobre uma orbifold O , com projeção $\eta : E \rightarrow O$. As fibras de E sobre as singularidades de O são ditas as fibras singulares do fibrado de Seifert e as demais são ditas as fibras regulares. Observe que dois fibrados de Seifert isomorfos possuem orbifolds base isomorfas.

Passamos agora a dar um exemplo de fibrado de Seifert. Considere C_λ , $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, a interseção da reta complexa $\{(z, \lambda z) \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$, se $\lambda \in \mathbb{C}$, ou $\{(0, z) \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C}\}$, se $\lambda = \infty$, com $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Mostremos que C_λ é um círculo. As equações de C_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, são:

$$\begin{cases} |z|^2 + |w|^2 = 1 \\ w = \lambda z \end{cases}$$

Resolvendo para z e para w temos:

$$\begin{cases} |z|^2 = \frac{1}{1 + |\lambda|^2} \\ |w|^2 = \frac{|\lambda|^2}{1 + |\lambda|^2} \end{cases}$$

Logo, $e^{it}(z_0, \lambda z_0) = (e^{it}z_0, e^{it}\lambda z_0)$, $t \in [0, 2\pi]$, onde $z_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\lambda|^2}}$, é uma parametrização de C_λ . Se $\lambda = \infty$, essa parametrização é $e^{it}(1, 0) = (e^{it}, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Os círculos C_λ , $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, determinam uma folheação de S^3 cujo espaço de folhas, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada folha a um ponto, é $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx S^2$. Essa folheação é um fibrado de Seifert, dito o fibrado de Hopf, com duas fibras, $C_1 = \{(e^{it}z, 0); t \in S^1\} \subset \mathbb{C} \times \{0\}$ e $C_2 = \{(0, e^{it}z); t \in S^1\} \subset \{0\} \times \mathbb{C}$, com invariantes de órbita não normalizados $(1, 1)$ (e $(1, 0)$ quando normalizados). Isso porque cada fibra próxima de C_i , $i = 1, 2$, dá uma volta em torno desta no sentido positivo determinado pelas orientações canônicas de $\mathbb{C} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{C}$. As demais fibras têm invariantes de órbita não normalizados $(1, 0)$ (e normalizados também). Voltaremos a tratar do fibrado de Hopf na *Seção 4.3*. Veja também a *Figura 4.3*.

Exemplo 3.1.2 Os fibrados $\eta_{p,q}$

De forma mais geral, se considerarmos as ações de S^1 em S^3 dadas por

$$\zeta \cdot (z, w) = (\zeta^p z, \zeta^q w)$$

para inteiros p e q primos entre si, temos um fibrado de Seifert com duas fibras (possivelmente singulares), com invariantes de órbita não normalizados (p, q) e (q, p) cada uma. Usaremos a notação $\eta_{p,q}$ para um tal fibrado. Em particular, o fibrado de Hopf é o fibrado $\eta_{1,1}$.

3.2

Recobrimentos do espaço total

Definição 3.2.1 *Sejam $(\tilde{E}, \tilde{O}, \tilde{\eta})$ e (E, O, η) dois fibrados de Seifert. Dizemos que $(\tilde{E}, \tilde{O}, \tilde{\eta})$ recobre (E, O, η) por $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow E$ se \tilde{p} é uma aplicação de recobrimento que leva fibra em fibra.*

Nesse caso, \tilde{p} induz um recobrimento $p : \tilde{O} \rightarrow O$ de orbifolds tal que

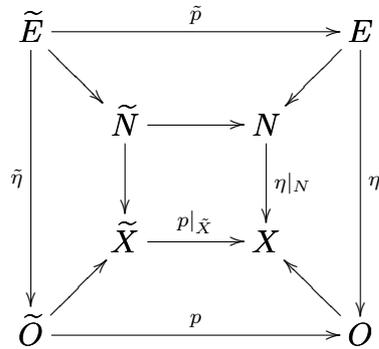
$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{p}} & E \\ \downarrow \tilde{\eta} & & \downarrow \eta \\ \tilde{O} & \xrightarrow{p} & O \end{array}$$

comuta.

Seja (E, O, η) um fibrado de Seifert e (\tilde{E}, \tilde{p}) um recobrimento qualquer de E . A aplicação \tilde{p} induz em \tilde{E} uma folheação por linhas. Se o recobrimento for finito esta folheação será por círculos. Senão, será ou por círculos ou por retas. Não é difícil verificar que os dois casos não podem ocorrer simultaneamente. Se a folheação induzida em \tilde{E} for por círculos, esta será um fibrado de Seifert. Basta verificar esse fato para toros fibrados e garrafas de Klein fibradas. Assim, \tilde{E} fibra sobre uma orbifold \tilde{O} com projeção, digamos, $\tilde{\eta} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{O}$, chegando então ao diagrama comutativo acima.

O processo recíproco também é possível, ou seja, dado um fibrado de Seifert (E, O, η) e um recobrimento (\tilde{O}, p) da orbifold O , podemos definir um fibrado de Seifert $(\tilde{E}, \tilde{O}, \tilde{\eta})$, dito o pull-back de (E, O, η) por p , e um recobrimento $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow E$ tal que tenhamos o diagrama comutativo anterior. Suponha que O tenha os pontos de cone q_1, \dots, q_r como únicas singularidades. Sejam D_1, \dots, D_r discos disjuntos contendo q_1, \dots, q_r respectivamente. Seja $X = O - \cup_{i=1}^r D_i$. Temos então o fibrado $(N, X, \eta|_N)$, onde $N = \eta^{-1}(X)$. Se $\tilde{X} = p^{-1}(X)$, o pull-back usual de fibrados de

$(N, X, \eta|_N)$ por $p|_{\tilde{X}}$ tem espaço total $\tilde{N} = \{(x, y) \in \tilde{X} \times N; p(x) = \eta(y)\}$, base \tilde{X} e projeção natural na primeira coordenada. Devemos agora definir \tilde{E} e a aplicação $\tilde{p}: \tilde{E} \rightarrow E$ de forma que o seguinte diagrama comute:



Mas, para isso, basta escolher apropriadamente recobrimentos dos toros fibrados $T_i = \eta^{-1}(D_i) \subset E$ e colá-los em \tilde{N} .

Se O também possuir linhas refletoras, para obtermos a superfície X , retiram-se, além dos discos D_i acima, vizinhanças produto de cada linha refletora, de forma que cada uma delas contenha uma única linha refletora como singularidades. O processo anterior então é facilmente generalizado a esse caso.

3.3

Os invariantes (α, β)

Com o intuito de definir, na seção seguinte, a característica de Euler de fibrados de Seifert, vamos introduzir outro par de invariantes para o toro fibrado orientado $T_{\alpha, \gamma}$, onde (α, γ) são os invariantes de órbita normalizados. Se $\gamma \neq 0$, tome um inteiro β tal que

$$\beta \gamma \equiv 1 \pmod{\alpha} \quad (3-1)$$

ou seja, se β e γ são pensados como elementos de \mathbb{Z}_α , eles são inversos multiplicativos um do outro. Se tomarmos β normalizado, ou seja, β sendo o menor inteiro positivo tal que valha (3-1), o par (α, β) , dito os invariantes de Seifert de $T_{\alpha, \gamma}$, é um invariante de $T_{\alpha, \gamma}$ (a menos de isomorfismo). No caso do toro fibrado trivial, ou seja, com invariantes de órbita $(1, 0)$, por razões que ficarão claras adiante, definimos $\beta = 1$. Então $(1, 1)$ são os invariantes de Seifert deste toro. Daremos, no que se segue, uma interpretação para β .

Por simplicidade, chame $T_{\alpha, \gamma}$ de T . Sejam M e L respectivamente um meridiano e uma fibra de ∂T , com orientações tais que (M, L) determina orientação positiva de T . Suponha que Q seja seção em ∂T , ou seja, uma curva fechada que intercepta cada fibra uma única vez. Oriente Q de modo que $Q \cdot L = 1$, onde \cdot é a interseção homológica. Defina

$$\beta(Q) = Q \cdot M. \quad (3-2)$$

Veremos adiante que $\beta(Q) \equiv \beta \pmod{\alpha}$. Na *Figura 3.3*, representamos o toro fibrado com invariantes de órbita $(7, 2)$ por um cilindro (à esquerda), onde o bordo superior é identificado com o inferior, e por um retângulo (à direita), onde o lado direito é identificado com o esquerdo e o lado superior com o inferior. A seção Q , desenhada no retângulo, foi construída de forma que $Q \cdot L = 1$. Como $Q \cdot M = 4$, este toro fibrado tem invariantes de Seifert $(7, 4)$.

Dizemos que duas seções Q e Q' de ∂T são homotópicas se existe uma homotopia livre H_t , $t \in [0, 1]$, tal que $H_0 = Q$, $H_1 = Q'$ e, para todo $t \in [0, 1]$, H_t é uma seção de ∂T . Temos então classes de equivalência $[Q]$ de seções de ∂T . É claro que, se $Q' \in [Q]$, $\beta(Q') = \beta(Q)$. Logo podemos definir

$$\beta([Q]) = \beta(Q).$$

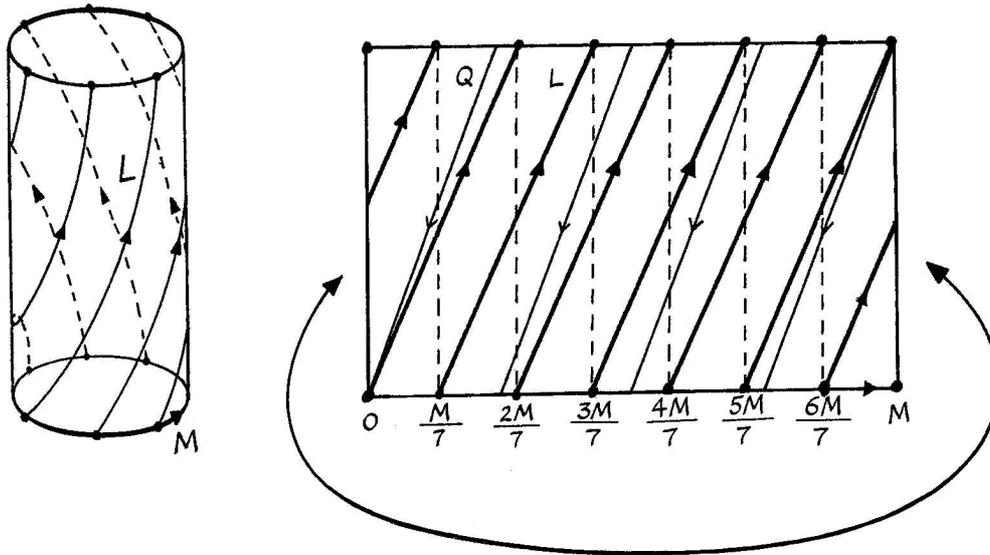


Figura 3.3: Interpretação para os invariantes de Seifert.

Reciprocamente, se Q e Q' são seções de ∂T tais que $\beta(Q) = \beta(Q')$, então $[Q] = [Q']$.

Proposição 3.3.1 *A aplicação*

$$[Q] \mapsto \beta([Q])$$

define uma correspondência biunívoca entre classes de homotopia de seções de ∂T e soluções (em \mathbb{Z}) da equação (3-1). Além disso, Q é dado, homologicamente, por

$$\alpha Q + \beta([Q])L \sim M. \tag{3-3}$$

É deixado ao leitor verificar esta proposição.

3.4

A Característica de Euler

Seja (E, O, η) um fibrado de Seifert, onde E é uma variedade orientada. Sejam q_1, \dots, q_r , $r \geq 1$ fibras de E com respectivos invariantes de Seifert (normalizados) $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$, tais que o conjunto $\{q_1, \dots, q_r\}$ contenha todas as fibras singulares de E . Para cada $i = 1, \dots, r$, retire de E um toro fibrado aberto T_i , contendo a fibra q_i . Suponha os T_i 's disjuntos entre si e considere o fibrado $(N, X, \eta|_N)$ onde $N = E - \cup_{i=1}^r T_i$ e $X = \eta(N)$ é uma superfície com bordo. Então podemos construir uma seção σ nesse novo fibrado. Cada $Q_i = \sigma \cap \partial T_i$ determina $\beta(Q_i) \equiv \beta_i \pmod{\alpha_i}$, conforme a seção anterior.

Definição 3.4.1 Defina a característica de Euler de (E, O, η) por

$$e(\eta) = \sum_{i=1}^r \frac{\beta(Q_i)}{\alpha_i}.$$

O que temos é uma generalização da primeira obstrução para fibrados S^1 usuais com espaços totais orientados. Isso porque, quando não temos fibras singulares, podemos supor $r = 1$ e, como $\alpha_1 = 1$, o somatório acima se reduz ao termo $\beta_1(Q_1)$, que é o inteiro correspondente à primeira obstrução à construção de uma seção no fibrado S^1 ([5], [16]). Na *Figura 3.4*, um toro fibrado trivial com uma seção Q no bordo é representado por um cilindro sólido cujo bordo superior é identificado com o inferior. Um fibrado de Seifert (E, S, η) sem fibras singulares tem uma seção global se e só se $e(\eta) = 0$. Assim, um fibrado produto tem característica de Euler nula. A *Proposição 3.4.3* é a razão da inclusão dos denominadores α_i nos termos do somatório da *Definição 3.4.1*.

Para mostrar que $e(\eta)$ está bem definido, considere a seguinte cirurgia na seção σ . Ligue toros sólidos T_i e T_j por um cilindro C como na *Figura 3.5*. Corte σ ao longo da sua interseção com C e cole-a novamente com uma rotação de 2π . Assim, ∂T_i e ∂T_j herdam novas seções Q'_i e Q'_j respectivamente. As curvas M_i e M_j , com as notações da seção anterior, permanecem inalteradas, assim como as fibras L_i e L_j , já que a cirurgia é feita em σ . Observando que $Q'_i \sim Q_i - L_i$ e $Q'_j \sim Q_j + L_j$ temos, pela *Equação 3-3*:

$$\alpha_i Q_i + \beta(Q_i) L_i \sim \alpha_i Q'_i + \beta(Q'_i) L_i \sim \alpha_i Q_i + (\beta(Q'_i) - \alpha_i) L_i$$

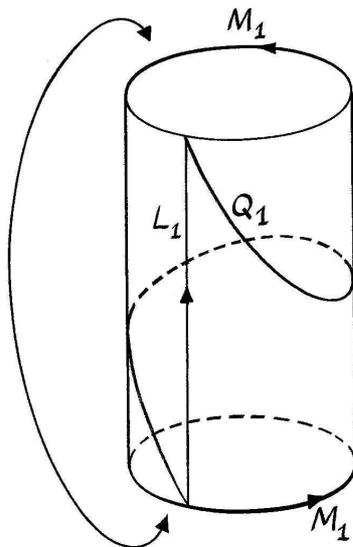


Figura 3.4: Interpretação para a característica de Euler num fibrado por círculos usual.

logo, $\beta(Q'_i) = \beta(Q_i) + \alpha_i$. Assim

$$\frac{\beta(Q'_i)}{\alpha_i} = \frac{\beta(Q_i)}{\alpha_i} + 1.$$

De forma análoga, verifica-se que

$$\frac{\beta(Q'_j)}{\alpha_j} = \frac{\beta(Q_j)}{\alpha_j} - 1.$$

Logo, a cirurgia não altera $e(\eta)$. Observando que com essa cirurgia podemos obter qualquer classe de homotopia de seções em $E - \bigcup_{i=1}^r T_i$, e que seções homotópicas resultam no mesmo $e(\eta)$, vemos que esse valor independe da seção tomada.

Se o espaço total E for não orientável, não temos mais os inteiros $\beta(Q_i)$'s bem definidos. Temos então:

Definição 3.4.2 *Seja (E, O, η) fibrado de Seifert onde E é uma variedade não orientável. Defina*

$$e(\eta) = 0.$$

A proposição seguinte justifica essa escolha:

Proposição 3.4.3 *Seja (E, O, η) um fibrado de Seifert e seja (\tilde{E}, p) um recobrimento finito de E induzindo uma estrutura $(\tilde{M}, \tilde{O}, \tilde{\eta})$ de fibrado*

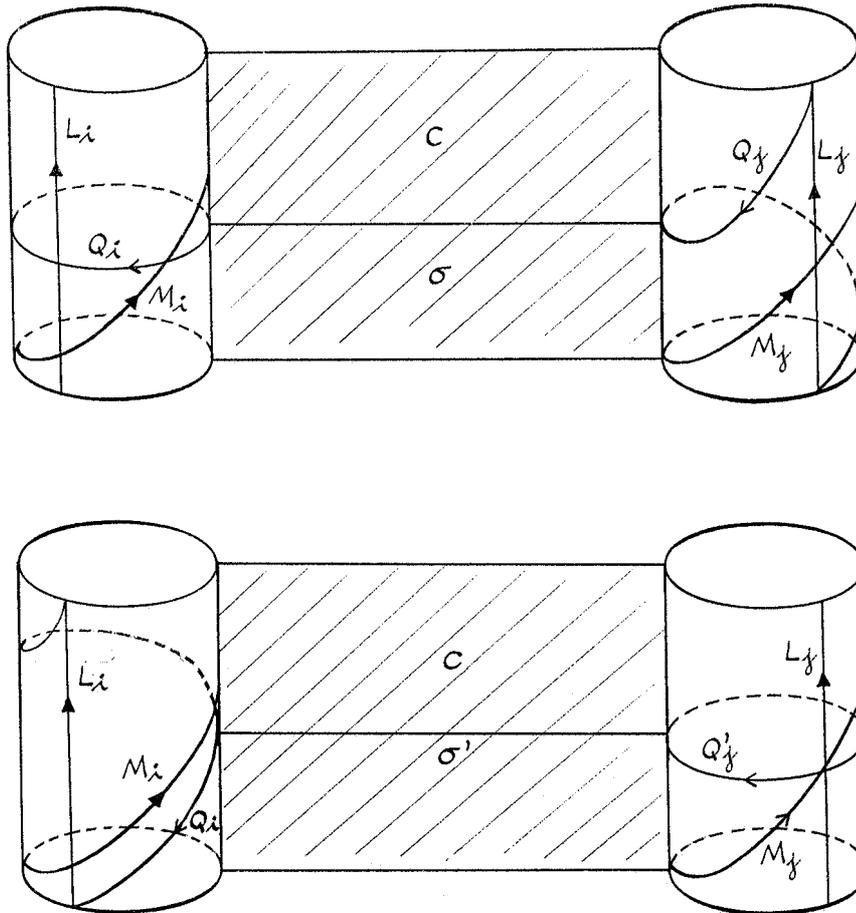


Figura 3.5: A cirurgia num fibrado de Seifert que mostra que a característica de Euler é bem definida.

de Seifert. Se os espaços totais são orientados, suponha que p preserva orientação. Se cada fibra regular F de E é recoberta por m fibras de \tilde{E} e cada uma delas recobre l vezes F , então

$$e(\tilde{\eta}) = \frac{m}{l} e(\eta).$$

Demonstração: Suporemos inicialmente que o espaço total E seja orientável, não possuindo portanto garrafa de Klein fibrada. Seja $q \subset E$ a fibra central de um toro fibrado T com invariantes de Seifert (α, β) e seja Q uma seção em ∂T . Podemos supor que T seja homeomorfo, por p , a cada uma das componentes T_1, \dots, T_m de $p^{-1}(T)$. Sejam $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_m, \beta_m)$ os invariantes de Seifert de T_1, \dots, T_m respectivamente, e sejam Q_1, \dots, Q_m os levantamentos de Q em $\partial T_1, \dots, \partial T_m$ respectivamente, ou seja, $p(Q_i) = Q$

para todo $i = 1, \dots, m$. Vamos mostrar que

$$\sum_{i=1}^m \frac{\beta(Q_i)}{\alpha_i} = \frac{m}{l} \frac{\beta(Q)}{\alpha}. \quad (3-4)$$

Não é difícil ver que, como cada fibra regular de T_i , $i = 1, \dots, m$, recobre l vezes uma fibra regular de T ,

$$\beta(Q_i) = \beta(Q)/l. \quad (3-5)$$

Pelo visto na demonstração da *Proposição 2.6.3*, $m = \sum_{i=1}^m \alpha/\alpha_i$, ou seja,

$$\frac{m}{\alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_i}.$$

Usando esta equação juntamente com a *Equação 3-5*, chegamos à *Equação 3-4*. Para o caso não orientável basta considerar o lema a seguir. \square

Lema 3.4.4 *Seja (E, O, η) um fibrado de Seifert com espaço total E não orientável. Seja (\tilde{E}, p) o recobrimento duplo orientável de E induzindo uma estrutura $(\tilde{E}, \tilde{O}, \tilde{\eta})$ de fibrado de Seifert. Então*

$$e(\tilde{\eta}) = 0.$$

Demonstração: Seja $q \subset E$ a fibra central de um toro fibrado com invariantes de Seifert (α, β) . Observe que q não pode ser recoberta duplamente por uma única fibra porque, nesse caso, q seria uma curva que reverte orientação, sendo portanto fibra de uma garrafa de Klein fibrada. Então q tem como pré-imagem duas fibras, uma com invariantes de Seifert (α, β) e a outra $(\alpha, -\beta)$. Como cada fibra singular de $(\tilde{E}, \tilde{O}, \tilde{\eta})$ é isolada (por \tilde{E} ser orientável, não possuindo, portanto, garrafas de Klein) e pertence à pré-imagem de uma fibra singular isolada de (E, O, η) , vemos que $e(\tilde{\eta}) = 0$. \square

A proposição seguinte é um caso particular da *Proposição 3.4.3* (quando $m = l = 1$) e afirma que a característica de Euler é invariante por isomorfismo.

Proposição 3.4.5 *Sejam (E, O, η) e (E, O, η') dois fibrados de Seifert isomorfos por $f : E \rightarrow E$. Se o espaço total E for orientado, suponha que f preserva orientação. Então $e(\eta) = e(\eta')$.*

Concluimos esse capítulo com a seguinte proposição:

Proposição 3.4.6 *Seja (E, O, η) um fibrado de Seifert com espaço total E compacto. Então $e(\eta) = 0$ se e só se (E, O, η) é finitamente recoberto por um fibrado produto $S^1 \times F$, onde F é uma superfície fechada.*

Demonstração: Suponha $e(\eta) = 0$. Queremos ver que (E, O, η) é finitamente recoberto por um fibrado produto $S^1 \times F$, onde F é uma superfície fechada. Mostremos que O é uma orbifold boa. Suponha por absurdo que seja má. Pelo *Corolário 2.4.6*, $O = S^2(p)$, $p > 1$, ou $O = S^2(p, q)$, $p, q > 1$, $p \neq q$. A característica de Euler de um fibrado sobre $S^2(p)$ não pode ser zero porque esse fibrado contém uma única fibra singular. No caso $S^2(p, q)$, tomando um recobrimento finito se necessário, podemos supor que p e q são primos entre si. A característica de Euler de um fibrado sobre essa orbifold tem a forma $\beta/p + \beta'/q$, $\beta, \beta' \in \mathbb{Z}$. Deixamos como exercício ao leitor mostrar que este número não é um inteiro (*Sugestão:* Além do fato que p e q são primos entre si, use também $\beta'\gamma \equiv 1 \pmod{q}$).

Então O é uma orbifold boa. Pelo *Teorema 2.6.5*, temos um recobrimento finito (F, p) de O , onde F é uma superfície fechada. Seja $(\tilde{E}, F, \tilde{\eta})$ o pull-back de (E, O, η) por p . Tomando recobrimento finito de \tilde{E} se necessário, podemos supor que \tilde{E} e F são orientáveis. Pela *Proposição 3.4.3*, $e(\tilde{\eta}) = 0$ e portanto $(\tilde{E}, F, \tilde{\eta})$ admite uma seção. Logo, o fibrado $(\tilde{E}, F, \tilde{\eta})$ é dado por uma ação de S^1 , sendo portanto isomorfo ao produto $S^1 \times F$.

A recíproca segue da *Proposição 3.4.3* e do fato que um fibrado produto tem característica de Euler nula. \square