1 Introdução

Seja F uma superfície compacta e conexa. Considere S^2, a esfera unitária no espaço euclideano (E^3) com a métrica induzida, E^2, o plano euclideano, e H^2, o plano hiperbólico. De acordo com a característica de Euler de F ($\chi(F)$), temos as seguintes possibilidades:

- $\chi(F) > 0$ se e só se F é homeomorfo a S^2/Γ;
- $\chi(F) = 0$ se e só se F é homeomorfo a E^2/Γ;
- $\chi(F) < 0$ se e só se F é homeomorfo a H^2/Γ;

onde Γ é um grupo discreto de isometrias;

Conforme veremos neste trabalho, S^2, E^2 e H^2 são variedades riemannianas homogêneas. Uma métrica homogênea em uma variedade M é uma métrica riemanniana tal que dados dois pontos $x, y \in M$ existe uma isometria de M que leva x em y. Com uma tal métrica, M é dita homogênea. Assim, toda superfície compacta admite uma métrica completa localmente homogênea. Uma métrica localmente homogênea em uma variedade M é uma métrica riemanniana tal que dados dois pontos $x, y \in M$ existe uma isometria local que leva x em y. Com uma tal métrica, M é dita localmente homogênea. Em dimensão três, permanece em aberto o problema da classificação topológica das variedades compactas. Parece razoável que nos restrinjamos ao estudo das variedades compactas de dimensão três que admitam uma métrica completa localmente homogênea.

Convenção: Suporemos nesse trabalho que todas as variedades são conexas e suaves, ou seja, têm coordenadas locais de classe C^∞, e que todos os espaços topológicos são Hausdorff com base enumerável.

Notações: Se G é um grupo, e_G (ou simplesmente e, quando o grupo ao qual nos referimos ficar claro no contexto) é o seu elemento identidade e $H < G$ significa que H é subgrupo de G. Se M é uma variedade riemanniana, $\mathrm{Isom}(M)$ é o grupo de todas as isometrias de M e, se M é orientável, $\mathrm{Isom}^+(M) < \mathrm{Isom}(M)$ é o subgrupo das isometrias que preservam orientação e $\mathrm{Isom}^-(M) \subset \mathrm{Isom}(M)$ é o subconjunto das isometrias que revertem orientação.

Considere uma variedade riemanniana M compacta, conexa e localmente homogênea. Seja $\widetilde{M}$ o recobrimento universal de M. Então $\widetilde{M}$ herda uma métrica completa e localmente homogênea. Por teorema devido a I. Singer ([15]), essa métrica é homogênea.

Se classificarmos as variedades homogêneas completas simplesmente conexas, estaremos classificando os recobrimentos universais de variedades compactas que admitem uma métrica completa localmente homogênea. Classificando topologicamente os quocientes de tais variedades simplesmente conexas por grupos discretos de isometrias, estaremos classificando topologicamente as variedades que admitem uma métrica completa localmente homogênea. Já que estamos interessados na classificação topológica desses quocientes por grupos de isometrias, podemos considerar equivalentes variedades riemannianas simplesmente conexas difeomorfas com grupos de todas as isometrias isomorfos por um isomorfismo eqüivariante com relação ao difeomorfismo, ou seja, se $f : M \to N$ é o difeomorfismo e $\varphi : \mathrm{Isom}\,(M) \to \mathrm{Isom}\,(N)$ é o isomorfismo, então, para toda isometria h da variedade riemanniana M e para todo ponto x dessa variedade, $f(h(x)) = \varphi(h)\,(f(x))$. Também podemos considerar, numa dada variedade, somente métricas riemannianas maximais, ou seja, cujo grupo de todas as isometrias não está propriamente contido no grupo de todas as isometrias dessa mesma variedade com outra métrica. No presente trabalho, estudaremos tais variedades homogêneas completas simplesmente conexas, cuja métrica é maximal, sob essa relação de equivalência.

Lembremos algumas definições. Uma aplicação entre duas variedades suaves é dita suave se tem derivadas contínuas de todas as ordens. Um grupo de Lie é um grupo G com uma estrutura de variedade tal que as operações produto e inversa são suaves. Uma ação de um grupo de Lie G numa variedade X é uma aplicação suave

$$G \times X \to X$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

tal que, para todos $g_1, g_2 \in G$ e para todo $x \in X$, $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1\, g_2) \cdot x$ e, para todo $x \in X$, $e_G \cdot x = x$. A ação é transitiva se dados dois pontos de

X existe um elemento de G que leva um ponto no outro. O estabilizador de um ponto $x \in X$ é o grupo $G_x = \{g \in G;\ g \cdot x = x\}$.

Seja G um grupo de Lie de difeomorfismos de uma variedade X. Um atlas (G, X) de uma variedade M é um conjunto de difeomorfismos, ditos cartas,

$$\phi_i : U_i \to X,\ i \in I,$$

do aberto U_i em M sobre um aberto em X, onde I é um conjunto de índices, tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura de M e, sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, as funções $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ são localmente dadas por elementos de G. Dizemos que uma variedade M é modelada por (G, X), ou que admite uma estrutura (G, X), ou que é uma variedade (G, X), se M admite um atlas (G, X). W. Thurston definiu o seguinte conceito ([17], *pp.179-190*). Seja G um grupo de Lie de difeomorfismos de uma variedade simplesmente conexa X, agindo nessa variedade transitivamente e com estabilizadores de pontos compactos. O par (G, X) é dito uma geometria modelo se existe uma variedade compacta modelada por (G, X) e G não está propriamente contido em um grupo de difeomorfismos de X que aja com estabilizadores de ponto compactos.

Dizemos que uma variedade riemanniana M representa uma geometria modelo (G, X) se M é difeomorfa a X e G é isomorfo a $\mathrm{Isom}(M)$ por um isomorfismo eqüivariante com relação ao difeomorfismo. Observe que se M é uma variedade riemanniana completa, homogênea, conexa e simplesmente conexa, então $(\mathrm{Isom}(M),\ M)$ é uma geometria modelo representada por M se $\mathrm{Isom}(M)$ não está propriamente contido em um grupo de isometrias de M com outra métrica.

Mostra-se no *Capítulo 5* que se (G, X) é uma geometria modelo, X admite uma métrica invariante pela ação de G tal que G é o grupo de todas as isometrias. Logo, se M é modelada por uma geometria modelo (G, X), então M admite uma métrica localmente homogênea induzida pelo atlas (G, X). Nesse caso, dizemos que M tem uma estrutura geométrica modelada por (G, X). Também mostra-se que se M é uma variedade compacta modelada por (G, X), então M é quociente de X por um grupo discreto de isometrias. Então, para uma variedade compacta, ser modelada por uma geometria modelo (G, X) é equivalente a ser escrita como quociente de X por um grupo discreto de isometrias.

Thurston mostra que existem somente oito geometrias modelo de dimensão três (dimensão de X) tais que as variedades riemannianas

$$E^3,\ S^3,\ H^3,\ S^2 \times E \quad \text{e} \quad H^2 \times E\,,$$

juntamente com os grupos de Lie tri-dimensionais

$$\widetilde{SL}\,(2,\,\mathbb{R}),\ Nil \quad \text{e} \quad Sol\,,$$

onde $\widetilde{SL}\,(2,\,\mathbb{R})$ é o recobrimento universal de $SL\,(2,\,\mathbb{R})$, com certas métricas invariantes por multiplicação à esquerda, representam cada uma dessas oito geometrias. Este resultado é conhecido como o teorema de classificação de Thurston.

Verifica-se que se M é uma variedade compacta modelada por uma geometria modelo representada por E^3, S^3, $S^2 \times E$, $H^2 \times E$, $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ ou Nil, então M possui um tipo especial de folheação por círculos denominada fibrado de Seifert. Reciprocamente, toda variedade compacta de dimensão três que é um fibrado de Seifert admite uma estrutura geométrica modelada por uma dessas seis geometrias ([13], *pp.477-480*). Um fibrado de Seifert possui um invariante denominado característica de Euler, que é uma extensão da primeira obstrução à construção de uma seção num fibrado com fibra S^1 (vide [16]). O espaço base de um fibrado de Seifert, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada círculo a um ponto, recebe uma estrutura de orbifold. Uma orbifold é um espaço topológico localmente homeomorfo ao quociente de $\mathbb{R}^n$ por um grupo finito. Uma orbifold possui um invariante, também denominado característica de Euler, que estende o mesmo conceito para espaços topológicos. A geometria que modela M fica determinada pelas características de Euler do fibrado de Seifert (e) e da sua orbifold base (χ) de acordo com a seguinte tabela:

	$\chi > 0$	$\chi = 0$	$\chi < 0$
$e = 0$	$S^2 \times E$	E^3	$H^2 \times E$
$e \neq 0$	S^3	Nil	$\widetilde{SL}\,(2,\,\mathbb{R})$

Esta tabela é usada na demonstração de que se uma variedade compacta M admite uma estrutura geométrica modelada por uma das oito geometrias modelo, então esta estrutura é única (vide [13], *pp.476-477*).

No *Capítulo 2*, estudamos as orbifolds com ênfase no caso bi-dimensional e, no *Capítulo 3*, os fibrados de Seifert de dimensão três com ênfase na sua característica de Euler. No *Capítulo 4*, descrevemos e estudamos um pouco de cada uma das oito variedades riemannianas que representam as geometrias modelo de dimensão três e, no *Capítulo 5*, apresentamos uma demonstração parcial do teorema de classificação de Thurston (*Teorema 5.2.1*).

Sabe-se que existem inúmeras variedades compactas que não admitem uma métrica completa localmente homogênea. Por exemplo, qualquer soma conexa não trivial de variedades fechadas, exceto $P^3 \# P^3$, não admite uma tal métrica. Thurston conjecturou que toda variedade compacta orientável de dimensão três pode ser cortada em partes por esferas e toros, ambos de dimensão dois, tais que, depois de coladas bolas de dimensão três aos bordos dados pelas esferas e retirados os bordos dados pelos toros, essas partes admitem uma métrica completa localmente homogênea. Esta é conhecida como a conjectura de geometrização de Thurston e uma possível prova para ela foi apresentada recentemente por Grigori Perelman ([11, 12]).