**Sérgio de Moura Almaraz**

# Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Programa de Pós–graduação em Matemática

Rio de Janeiro
Abril de 2003

**Sérgio de Moura Almaraz**

# Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Paul Alexander Schweitzer S.J.

Rio de Janeiro
Abril de 2003

**Sérgio de Moura Almaraz**

# Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paul Alexander Schweitzer S.J.**
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**
Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ketty Abaroa de Rezende**
IMECC — UNICAMP

**Prof. Marcos Martins Alexandrino da Silva**
Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ney Augusto Dumont**
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 29 de Abril de 2003

**Sérgio de Moura Almaraz**

Graduou–se na PUC-Rio em Matemática Pura, sendo premiado com o Certificado de Excelência Acadêmica do CTC (Centro Técnico Científico) e demonstrando desde cedo interesse na área de topologia. Atualmente é Professor Agregado da PUC-Rio.



Ficha Catalográfica

Almaraz, Sérgio de Moura

Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert/ Sérgio de Moura Almaraz; orientador: Paul Alexander Schweitzer S.J.. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2003.

v., 122 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

I. Schweitzer S.J., Paul Alexander. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Aos meus avós Hermé, Gastão (in memoriam)
e Maria Elsa (in memoriam).

## Agradecimentos



Ao professor Paul Schweitzer, pela orientação e amizade.

À FAPERJ e à CAPES, pelos auxílios concedidos.

À minha família, pelo apoio e carinho.

Aos meus amigos e à minha namorada, pela companhia e motivação nas diversas etapas da elaboração deste trabalho.

Aos professores integrantes da banca examinadora, pelas valiosas sugestões.

Às secretárias do Departamento de Matemática da PUC-Rio, pela prestatividade de sempre.

Aos amigos Eduardo Ochs, José Barbosa, Silvana Marini e Thomas Lewiner, pelas contribuições diretas na elaboração deste trabalho.

Ao amigo Marco Periquito, pela sua contribuição nas ilustrações.

## Resumo

Almaraz, Sérgio de Moura; Schweitzer S.J., Paul Alexander. **Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert**. Rio de Janeiro, 2003. 122p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Iniciamos com o estudo das orbifolds, que são espaços topológicos localmente homeomorfos a quocientes de $\mathbb{R}^n$ por grupos finitos. Estudamos em seguida os fibrados de Seifert de dimensão três, que consistem-se de folheações por círculos que podem ser vistas como fibrados sobre orbifolds. Esse material é usado em seguida no estudo das geometrias modelo. Uma geometria modelo (ou geometria de Thurston) é um par $(G, X)$, onde $X$ é uma variedade conexa e simplesmente conexa e $G$ é um grupo de difeomorfismos de $X$ com certas propriedades que nos permite encontrar uma métrica riemanniana em $X$ tal que $G$ é o grupo de todas as isometrias. A classificação das geometrias modelo é muito útil na classificação topológica das variedades que admitem uma métrica localmente homogênea e foi feita por Thurston em "Three-Dimensional Geometry and Topology", vol.1, Princeton University Press, 1997. Na seqüência, apresentamos uma breve descrição de cada geometria modelo bem como parte da prova do teorema de classificação das geometrias modelo.

## Palavras–chave

Geometrias Modelo; Geometrias de Thurston; Orbifolds; Fibrados de Seifert.

# Abstract

Almaraz, Sérgio de Moura; Schweitzer S.J., Paul Alexander. **Thurston geometries and Seifert fiber spaces**. Rio de Janeiro, 2003. 122p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We begin by studying orbifolds, i.e., topological spaces locally homeomorphic to quotients of $\mathbb{R}^n$ by finite groups. Then we study Seifert fiber spaces of dimension three which are certain type of foliations by circles that can be seen as fiber bundles over orbifolds. This material is useful in the subsequent study of Thurston model geometries. A Thurston model geometry is a pair $(G, X)$, where $X$ is a connected and simply connected manifold and $G$ is a group of diffeomorfisms of $X$ with certain properties that allow us to find a riemannian metric on $X$ such that $G$ is the group of all isometries. The classification of the model geometries is very useful in the topological classification of manifolds that admit a locally-homogeneous metric and was done by Thurston in "Three-Dimensional Geometry and Topology", vol.1, Princeton University Press, 1997. Then we give a brief description of each one of these eight geometries and present part of Thurston's classification theorem.

## Keywords

Thurston Model Geometries; Orbifolds; Seifert Fiber Spaces.

# Sumário

# Lista de Figuras