

**Sérgio de Moura Almaraz**

**Geometrias de Thurston e  
Fibrados de Seifert**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
Programa de Pós-graduação em  
Matemática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Sérgio de Moura Almaraz**

**Geometrias de Thurston e Fibrados de  
Seifert**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Paul Alexander Schweitzer S.J.

Rio de Janeiro  
Abril de 2003



**Sérgio de Moura Almaraz**

**Geometrias de Thurston e Fibrados de  
Seifert**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paul Alexander Schweitzer S.J.**

Orientador  
Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ketty Abaroa de Rezende**

IMECC — UNICAMP

**Prof. Marcos Martins Alexandrino da Silva**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ney Augusto Dumont**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —  
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de Abril de 2003

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Sérgio de Moura Almaraz**

Graduou-se na PUC-Rio em Matemática Pura, sendo premiado com o Certificado de Excelência Acadêmica do CTC (Centro Técnico Científico) e demonstrando desde cedo interesse na área de topologia. Atualmente é Professor Agregado da PUC-Rio.

#### Ficha Catalográfica

Almaraz, Sérgio de Moura

Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert/  
Sérgio de Moura Almaraz; orientador: Paul Alexander  
Schweitzer S.J.. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departa-  
mento de Matemática, 2003.

v., 122 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universi-  
dade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Ma-  
temática.

Inclui referências bibliográficas.

I. Schweitzer S.J., Paul Alexander. II. Pontifícia Uni-  
versidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de  
Matemática. III. Título.

Aos meus avós Hermé, Gastão (in memoriam)  
e Maria Elsa (in memoriam).

## Agradecimentos

Ao professor Paul Schweitzer, pela orientação e amizade.

À FAPERJ e à CAPES, pelos auxílios concedidos.

À minha família, pelo apoio e carinho.

Aos meus amigos e à minha namorada, pela companhia e motivação nas diversas etapas da elaboração deste trabalho.

Aos professores integrantes da banca examinadora, pelas valiosas sugestões.

Às secretárias do Departamento de Matemática da PUC-Rio, pela prestatividade de sempre.

Aos amigos Eduardo Ochs, José Barbosa, Silvana Marini e Thomas Lewiner, pelas contribuições diretas na elaboração deste trabalho.

Ao amigo Marco Periquito, pela sua contribuição nas ilustrações.

## Resumo

Almaraz, Sérgio de Moura; Schweitzer S.J., Paul Alexander. **Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert**. Rio de Janeiro, 2003. 122p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Iniciamos com o estudo das orbifolds, que são espaços topológicos localmente homeomorfos a quocientes de  $\mathbb{R}^n$  por grupos finitos. Estudamos em seguida os fibrados de Seifert de dimensão três, que consistem-se de folheações por círculos que podem ser vistas como fibrados sobre orbifolds. Esse material é usado em seguida no estudo das geometrias modelo. Uma geometria modelo (ou geometria de Thurston) é um par  $(G, X)$ , onde  $X$  é uma variedade conexa e simplesmente conexa e  $G$  é um grupo de difeomorfismos de  $X$  com certas propriedades que nos permite encontrar uma métrica riemanniana em  $X$  tal que  $G$  é o grupo de todas as isometrias. A classificação das geometrias modelo é muito útil na classificação topológica das variedades que admitem uma métrica localmente homogênea e foi feita por Thurston em “Three-Dimensional Geometry and Topology”, vol.1, Princeton University Press, 1997. Na seqüência, apresentamos uma breve descrição de cada geometria modelo bem como parte da prova do teorema de classificação das geometrias modelo.

## Palavras-chave

Geometrias Modelo; Geometrias de Thurston; Orbifolds; Fibrados de Seifert.

## Abstract

Almaraz, Sérgio de Moura; Schweitzer S.J., Paul Alexander.  
**Thurston geometries and Seifert fiber spaces.** Rio de Janeiro,  
2003. 122p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática,  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We begin by studying orbifolds, i.e., topological spaces locally homeomorphic to quotients of  $\mathbb{R}^n$  by finite groups. Then we study Seifert fiber spaces of dimension three which are certain type of foliations by circles that can be seen as fiber bundles over orbifolds. This material is useful in the subsequent study of Thurston model geometries. A Thurston model geometry is a pair  $(G, X)$ , where  $X$  is a connected and simply connected manifold and  $G$  is a group of diffeomorphisms of  $X$  with certain properties that allow us to find a riemannian metric on  $X$  such that  $G$  is the group of all isometries. The classification of the model geometries is very useful in the topological classification of manifolds that admit a locally-homogeneous metric and was done by Thurston in “Three-Dimensional Geometry and Topology”, vol.1, Princeton University Press, 1997. Then we give a brief description of each one of these eight geometries and present part of Thurston’s classification theorem.

## Keywords

Thurston Model Geometries; Orbifolds; Seifert Fiber Spaces.

# Sumário

1	Introdução	11
2	Orbifolds	16
2.1	Preliminares	17
2.2	Definições básicas	19
2.3	Singularidades de orbifolds de dimensão dois	23
2.4	Recobrimentos	25
2.5	O grupo fundamental	33
2.6	A Característica de Euler	36
2.7	Fibrados sobre orbifolds	39
3	Fibrados de Seifert de Dimensão Três	41
3.1	Definições básicas	42
3.2	Recobrimentos do espaço total	46
3.3	Os invariantes $(\alpha, \beta)$	48
3.4	A Característica de Euler	50
4	As Oito Geometrias	55
4.1	Fibrados $(G, X)$ e conexões	56
4.2	$E^3$	63
4.3	$S^3$	65
4.4	$H^3$	78
4.5	$S^2 \times E$	89
4.6	$\widetilde{H^2} \times E$	91
4.7	$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$	93
4.8	$Nil$	97
4.9	$Sol$	100
5	O Teorema de Classificação	102
5.1	A aplicação de desenvolvimento	103
5.2	Demonstração do teorema de classificação	113
	Referências Bibliográficas	121

## Lista de Figuras

2.1	Abertos do atlas da gota de lágrima.	22
2.2	Troca de cartas do <i>Exemplo 2.2.3</i> .	23
2.3	A identificação que resulta numa linha refletora.	24
2.4	A identificação que resulta num ponto de cone.	24
2.5	A identificação que resulta num refletor de quina.	25
2.6	À esquerda, um ladrilhamento de $\mathbb{R}^2$ . À direita, uma região fundamental do quociente $\mathbb{R}^2/\Gamma'$ .	28
2.7	Recobrimo uma orbifold com três ou mais pontos de cone.	29
2.8	O recobrimento universal de uma orbifold com linha refletora.	31
2.9	Interpretação em termos de laços para o grupo fundamental de um cone.	34
2.10	Interpretação em termos de laços para o grupo fundamental de uma vizinhança de uma linha refletora fechada.	34
2.11	Triangulando a orbifold $\Delta_{3,3,3}$ .	37
3.1	O toro fibrado com invariantes de órbita $(3, 1)$ .	43
3.2	A garrafa de Klein fibrada.	44
3.3	Interpretação para os invariantes de Seifert.	49
3.4	Interpretação para a característica de Euler num fibrado por círculos usual.	51
3.5	A cirurgia num fibrado de Seifert que mostra que a característica de Euler é bem definida.	52
4.1	Construindo o isomorfismo $\psi$ da <i>Proposição 4.1.14</i> .	62
4.2	A projeção estereográfica.	66
4.3	O fibrado de Hopf sob a projeção estereográfica.	69
4.4	A isometria $x \mapsto e^{ta} x e^{-ta}$ vista como uma composta de reflexões.	71
4.5	À esquerda, o espaço de lentes sob a projeção estereográfica. À direita, este mesmo espaço obtido pela identificação dos bordos de uma “lente”.	75
4.6	O espaço dodecaedral.	76
4.7	As geodésicas de $H^2$ .	78
4.8	As geodésicas de $H^3$ .	79
4.9	O disco de Poincaré de dimensão dois com suas geodésicas.	80
4.10	A inversão numa esfera de dimensão $n - 1$ em $E^n$ .	81
4.11	A transitividade da ação do grupo gerado pelas reflexões de $H^2$ .	82
4.12	Uma isometria elíptica em $H^2$ .	83
4.13	Uma isometria parabólica em $H^2$ .	84
4.14	Uma isometria hiperbólica em $H^2$ .	84
4.15	Uma isometria elíptica em $H^3$ .	86
4.16	Uma isometria parabólica em $H^3$ .	86
4.17	Uma isometria hiperbólica em $H^3$ .	86
4.18	À esquerda, o espaço dodecaedral de Seifert-Weber. À direita, um dodecaedro hiperbólico.	87

4.19	Demonstrando a <i>Proposição 4.7.2</i> .	95
4.20	A estrutura de contato em $\mathbb{R}^3$ definida por $\omega$ .	97
5.1	Projetando em $X$ uma curva de $M$ .	105
5.2	A inclusão de uma nova carta numa partição regular.	107
5.3	A aplicação de desenvolvimento do toro $T^2$ com estrutura $(\text{Isom}(E^2), \mathbb{R}^2)$ .	108
5.4	A aplicação de desenvolvimento do toro $T^2$ com estrutura $(\text{Af}, \mathbb{R}^2)$ .	109
5.5	Mostrando que $S_x$ , na demonstração do <i>Lema 5.2.3</i> , é uma seção.	117