

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Departamento de Engenharia Mecânica

Análise energética de um oscilador com atrito seco

Aluno: Pedro de Macedo Alves

Professor: Roberta de Queiroz Lima

Rio de Janeiro, 13 de dezembro de 2018

AGRADECIMENTOS

À professora Roberta de Queiroz Lima, orientadora deste trabalho, pelo apoio cedido.

Aos meus pais, Virginia e Marcelo, pelo imenso amor e apoio cedido durante o curso.

Aos meus avós, Diogenes e Jovita, pela amizade, companheirismo e apoio cedido durante o curso.

Aos meus tios, Diogenes, Cláudia e Marcelo, por todo apoio cedido durante o curso.

Ao meu primo, Eric, pelo apoio, amizade e pelos bons momentos vividos juntos na graduação.

Ao meu amigo, Breno, por sempre me incentivar a ir além e acreditar em mim em todos os momentos.

Aos meus colegas, pelas incríveis amizades feitas e pelos bons momentos vividos juntos durante a graduação.

RESUMO

Análise energética de um oscilador com atrito seco

O projeto visa o estudo da dinâmica de osciladores com múltiplos graus de liberdade e atrito seco. Devido ao atrito, o movimento do sistema pode ser caracterizado em dois modos diferentes, stick-slip, com uma transição não suave entre eles. O objetivo do trabalho é analisar a transferência de energia entre os modos de vibração do sistema quando há a transição entre os modos de stick-slip. As análises serão feitas através de análise de Fourier.

Palavras chaves: Osciladores harmônicos, Stick-Slip, Atrito seco, Análise energética

ABSTRACT

Energy analysis of an oscillator with dry friction

The project aims to study the dynamics of oscillators with multiple degrees of freedom and dry friction. Due to friction, the movement of the system can be characterized in two different modes, stick-slip, with a non-smooth transition between them. The objective of the work is to analyze the transfer of energy between the vibration modes of the system when there is a transition between stick-slip modes. The analyzes will be done through Fourier analysis.

Keywords: Harmonic oscillators, Stick-Slip, Dry friction, Energy analysis

Sumário

1	Introdução	1
2	Análise do fenômeno de stick-slip para um grau de liberdade	3
2.1	Dinâmica do sistema	3
2.2	Definição da força de atrito	4
2.2.1	Força de atrito com coeficientes iguais	4
2.2.2	Definição da fase de stick	5
2.2.3	Definição fase de slip	5
2.2.4	Simulação computacional	5
2.2.5	Análise das condições iniciais	6
2.2.6	Análise energética	9
2.2.7	Força de atrito com coeficientes diferentes	11
2.2.8	Definição da fase de stick	12
2.2.9	Definição da fase de slip	13
2.2.10	Simulação computacional	13
2.2.11	Análise das condições iniciais	13
2.2.12	Análise energética	14
3	Análise do fenômeno de stick-slip para dois graus de liberdade	15
3.1	Definição do sistema	15
3.2	Análise das condições iniciais	18
3.3	Análise energética	19
3.4	Definição do sistema	25
3.5	Definição da força de atrito	26
3.6	Definição da fase de stick	26
3.7	Definição fase de slip	27
3.8	Simulação computacional	27
3.9	Análise energética	28
4	Conclusão	32

Capítulo 1

Introdução

Processos como o limpador de vidros seco de um carro, uma pastilha de freio sendo acionada, ou uma broca perfurando uma coluna de petróleo, são exemplos onde pode-se observar o fenômeno de stick-slip, ou cola-desliza, devido à existência de atrito seco entre as superfícies de contato. No fenômeno de stick-slip, os dois modos de movimento, stick e slip, podem ocorrer de forma alternada. Durante a fase de stick há acúmulo de energia potencial, até que a força de atrito estática entre as superfícies em contato sature e de forma brusca, o sistema passa a deslizar, ocorrendo a transformação de parte da energia potencial em cinética, o que pode causar vibrações com altas amplitudes. Muitas vezes, essas vibrações são indesejadas pois podem impedir um correto funcionamento do sistema ou podem, inclusive, causar a destruição do mesmo em casos extremos.

O objetivo desse trabalho é fazer uma análise energética de sistemas com atrito seco. Foram estudados sistemas com um e com dois graus de liberdade. Para sistemas com um grau de liberdade verificou-se que a força de atrito seco pode introduzir ou dissipar energia no sistema, visto que isso introduz uma não linearidade ao problema, podendo assim, dar continuidade as temas ensinados durante o curso de vibrações mecânicas, que só aborda o conceito de modos em sistemas lineares. Vale observar que quando o sistema é linear não existe transferência de energia entre os modos de vibração. Para isso, estudou-se artigos que explicavam como um sistema com o fenômeno de stick-slip se comporta. Além disso, também houve um estudo da ferramenta matemática transformada de Fourier e de resoluções de equações diferenciais de primeira e segunda ordem pelo método de Runge-Kutta.[3][4]

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No segundo capítulo estuda-se o fenômeno de stick-slip em um sistema de um grau de liberdade, definindo-se a equação da dinâmica que rege o movimento do sistema e as condições para estar na fase de stick e na fase de slip. Uma rotina computacional foi implementada em MATLAB para fazer a integração da equação da dinâmica e assim determinar a posição e velocidade do sistema ao longo do tempo. Com os resultados da rotina faz-se uma análise energética do sistema e uma análise da influência das condições iniciais. No terceiro capítulo, faz-se a análise de um sistema com dois graus de liberdade, primeiramente, estudando o caso do mesmo ser linear, obtendo suas equações de posição, seus modos e frequências de vibração, analisando a transferência de energia entre seus modos e analisando a influência das condições iniciais no sistema. Depois, considera-se o fenômeno de stick-slip

no mesmo e define-se as condições para as fases de stick-slip. Uma rotina computacional em MATLAB foi implementada para a integração das equações da dinâmica permitindo especificar os modos de stick e slip e analisar a transferência de energia entre seus modos. Por fim, o quarto capítulo discute as conclusões, resultados e próximos passos para o projeto.

Capítulo 2

Análise do fenômeno de stick-slip para um grau de liberdade

2.1 Dinâmica do sistema

Considere um sistema composto por um corpo de massa m e deslocamento x , conectado a uma parede por uma mola de constante elástica k . O corpo desliza sobre uma superfície que se move com velocidade constante V_{sup} . Admite-se a existência de atrito entre a superfície e o corpo. O coeficiente de atrito entre essas superfícies vale μ .

O sistema é ilustrado na figura 2.1.

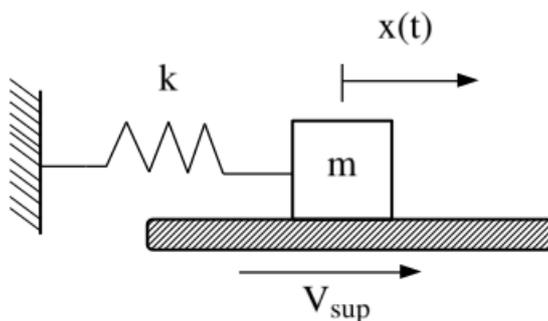


Figura 2.1: Ilustração do sistema massa-mola.

O corpo é modelado como uma partícula de massa m e quando a posição x do mesmo é igual a zero, tem-se que a força elástica F_{el} na mola é nula. O somatório das forças $\sum F$ que atuam sobre a massa na direção horizontal é igual a diferença da força de atrito F_{at} e a força elástica da mola. Aplica-se a segunda lei de Newton para o sistema ilustrado na figura 2.1 e obtém-se que a equação de movimento é

$$\sum F = F_{\text{at}}(t) - F_{\text{el}}(t) = m\ddot{x}(t). \quad (2.1)$$

Aplica-se a lei de Hook para a mola chegando no seguinte resultado,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_{\text{at}}(t). \quad (2.2)$$

Define-se as condições iniciais de posição, $x(0) = x_0$, e velocidade, $\dot{x}(0) = v_0$, do problema.

2.2 Definição da força de atrito

O atrito é um componente essencial para o problema e ocorre quando há o contato entre duas superfícies. No caso que este é sem movimento, o coeficiente utilizado para o cálculo da força de atrito é o de atrito estático μ_{est} , caso contrário utiliza-se o de atrito dinâmico μ_{din} .

A força de atrito pode ser modelada de diversas formas, porém para esse estudo, as análises feitas baseiam-se no modelo de Coulomb.

2.2.1 Força de atrito com coeficientes iguais

Considere que os coeficientes de atrito dinâmico e estático entre duas superfícies possuem o mesmo valor μ . Sabe-se que o valor máximo em módulo da força de atrito vale,

$$|F_{\text{at}}| = \mu mg, \quad (2.3)$$

onde g é a aceleração da gravidade. Determina-se a velocidade relativa entre a velocidade da superfície e do corpo como sendo $V_{\text{rel}} = V_{\text{sup}} - \dot{x}$ e constrói-se o gráfico 2.2, que apresenta como a força de atrito se comporta conforme a velocidade relativa.

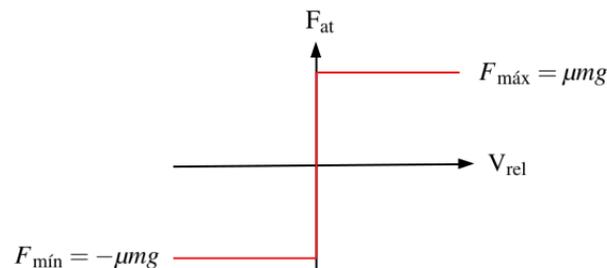


Figura 2.2: Força de atrito x velocidade relativa.

Observa-se no gráfico da figura 2.2 a importância do valor que a velocidade relativa assume para determinar o valor da força de atrito. Para o caso onde a mesma é nula, tem-se que a força de atrito pode assumir quaisquer valores no intervalo $[-\mu mg; \mu mg]$ e que o corpo se move com a mesma velocidade da superfície, assim, diz-se que ele está colado na esteira, comumente conhecido como estar em fase de stick. Para o caso da velocidade relativa diferente de zero, a força de atrito assume valor em módulo constante e seu sentido depende se a velocidade do corpo é maior ou menor que a da esteira, caso seja maior, ela é negativa, caso contrário é positiva e neste caso tem-se que o bloco desliza sobre a superfície, essa fase é conhecida como fase de slip.

2.2.2 Definição da fase de stick

A fase de stick ocorre quando o corpo está colado com a superfície e pode ser definida por duas condições. A primeira delas está relacionada com a velocidade relativa entre a superfície e o corpo, pois caso ela seja nula, garante-se então que o corpo se move junto com a superfície.

Assim, tem-se como primeira condição,

$$V_{\text{sup}} = \dot{x}(t). \quad (2.4)$$

A segunda condição para esta fase está relacionada com as posições aonde pode-se ocorrer a fase de stick, também conhecidas como lócus de stick. Para obter esse intervalo, aplica-se a condição de que o corpo se move com velocidade constante, logo sua aceleração \ddot{x} é nula. Substituindo na equação de movimento do sistema e considerando-se os valores de máximo e mínimo que a força de atrito pode assumir, tem-se

$$\frac{-\mu mg}{k} < x(t) < \frac{\mu mg}{k}. \quad (2.5)$$

Para este caso, verifica-se que o valor da força de atrito não é constante e o mesmo depende da força que a mola exerce sobre o corpo, podendo assumir qualquer valor no intervalo de $[-\mu mg; \mu mg]$.

2.2.3 Definição fase de slip

A fase de slip ocorre quando o corpo desliza sobre a superfície, ou seja, o valor da velocidade relativa é diferente de zero. O valor em módulo da força de atrito nessa fase é constante e equivale a μmg . Para definição do sentido da mesma, é necessário saber se a velocidade relativa é positiva ou negativa, caso ela seja positiva a força vale μmg , caso contrário vale $-\mu mg$. Dessa maneira, tem-se

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = \text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x}(t))\mu mg. \quad (2.6)$$

2.2.4 Simulação computacional

Com a dinâmica do problema e as fases de stick-slip definidas, é possível construir uma rotina computacional para a integração numérica da equação da dinâmica através do método de Runge-Kutta.

Sendo assim, primeiramente, é necessário definir as variáveis de massa, constante elástica da mola, coeficiente de atrito, gravidade, velocidade da superfície e posição e velocidade iniciais do corpo.

O método de resolução aplicado consiste em a cada instante t , calcular uma solução e avançar para um próximo instante $t + \Delta t$. Para isso, define-se um intervalo de tempo, que delimita o instante inicial t_i e final t_f da simulação e o valor de incremento Δt .

Em cada instante é necessário determinar se o corpo se encontra em stick ou em slip. Para a fase de stick, é feita a verificação se $|V_{\text{rel}}| < \text{Erro}_{\text{rel}}$ e se $\frac{-\mu mg}{k} < x < \frac{\mu mg}{k}$. Caso ambas condições sejam satisfeitas, o corpo está em stick e define-se $\dot{x} = V_{\text{sup}}$ e $\ddot{x} = 0$.

Percebe-se que a condição da velocidade relativa ser igual a zero tem que ser adaptada, visto que a condição $V_{\text{rel}} = 0$ nunca será atingida computacionalmente. Sendo assim, define a variável de erro relativo Erro_{rel} .

Caso contrário o corpo se encontra em slip e a condição que deve ser aplicada é de que $F_{\text{at}} = \text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x})\mu mg$.

2.2.5 Análise das condições iniciais

As condições iniciais de posição e velocidade têm grande influência na dinâmica do sistema. O estudo desta influência será feito através do diagrama de fase do sistema, visto que a partir desse diagrama é possível analisar todos os comportamentos possíveis que os pares de condições iniciais geram. Sendo assim, analisa-se o caso em que o corpo está em fase de slip, obtendo-se que

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = \text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x}(t))(\mu mg). \quad (2.7)$$

Supõe-se que $\text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x}(t)) > 0$ e reescreve-se a equação da seguinte forma,

$$\ddot{x}(t) = \frac{\mu mg - kx(t)}{m}. \quad (2.8)$$

Introduzindo-se duas novas variáveis, $y_1 = x$ e $y_2 = \dot{x}$ e sabendo-se que, $\dot{y}_1 = \dot{x}$ e que $\dot{y}_2 = \ddot{x}$, pode-se escrever

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{y_2}{1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{\mu mg - ky_1}{m}. \quad (2.9)$$

Reescreve-se a igualdade de modo a separar de um lado tudo que corresponde a y_1 e do outro tudo correspondente a y_2 , obtendo-se assim

$$y_2 dy_2 = \frac{(\mu mg) - ky_1}{m} dy_1, \quad (2.10)$$

integra-se os dois lados da mesma e obtém-se

$$\frac{y_2^2}{2} + c_1 = \frac{\mu mgy_1}{m} - \frac{ky_1^2}{2m} + c_2, \quad (2.11)$$

onde c_1 e c_2 são as constantes de integração. Reescrevendo, tem-se

$$y_2^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}} y_1 - \frac{\mu mg}{\sqrt{\frac{k}{m}m}} \right)^2 = c. \quad (2.12)$$

Sabe-se que $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$ e c é uma constante. Introduce-se uma nova variável, $z = \omega_n x$ e reescreve-se o sistema em função de z e \dot{x} , obtendo que

$$\dot{x}^2(t) + \left(z - \frac{\mu mg}{\omega_n m} \right)^2 = c. \quad (2.13)$$

Para o caso de $V_{\text{sup}} < \dot{x}$, chega-se num resultado próximo ao encontrado, o que muda é o sinal que deriva do sentido da força de atrito, com isso tem-se

$$\dot{x}^2(t) + \left(z + \frac{\mu mg}{\omega_n m} \right)^2 = c. \quad (2.14)$$

Para o caso do corpo estar em stick, sabe-se que $\dot{x} = V_{\text{sup}}$ e o lócus de stick para a variável z é definido por $\frac{-\mu mg \omega_n}{k} < z < \frac{\mu mg \omega_n}{k}$.

Assim, tem-se que o diagrama de fase durante a fase de slip vai ter a forma de um círculo de raio c , centrado em $\left(\frac{\mu mg}{\omega_n k}, 0 \right)$, caso $V_{\text{sup}} < \dot{x}$ e centrado em $\left(\frac{-\mu mg}{\omega_n k}, 0 \right)$, no caso $V_{\text{sup}} > \dot{x}$. Durante a fase de stick sabe-se que terá a forma de uma reta horizontal onde $\dot{x} = V_{\text{sup}}$ e a posição z deve pertencer ao lócus de stick. Constrói-se o diagrama de fase, considerando-se o caso onde $V_{\text{sup}} > \dot{x}$. O diagrama está representado na figura 2.3.

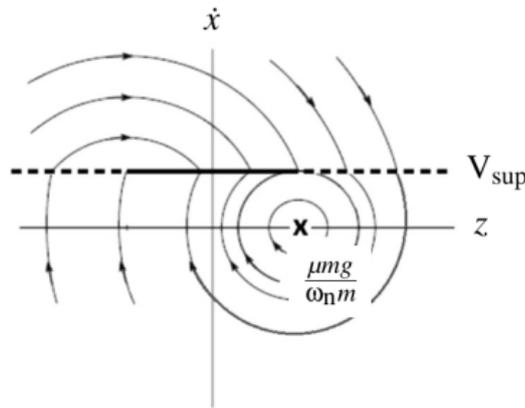


Figura 2.3: Diagrama de fase para um oscilador em stick-slip com velocidade da superfície maior que a do corpo.

É possível observar pela figura do digrama 2.3 e pela equação do círculo três casos diferentes que as condições iniciais podem gerar no sistema.

Para o primeiro caso, supõe-se que a condição inicial relacionada a posição do corpo seja igual a posição de deslocamento do centro do círculo, independentemente se a velocidade da superfície for maior ou menor que a do corpo. Assim, o valor da condição inicial de velocidade será o raio c da trajetória do corpo e se o mesmo for menor ou igual ao valor da velocidade da superfície, sabe-se que corpo possirá uma trajetória no interior do círculo de slip e uma vez que

o mesmo está dentro dela, nunca mais atinge as condições de stick, permanecendo sempre nesta fase.

Para o segundo caso, supõe-se que a posição inicial do corpo seja qualquer posição pertencente ao lócus de stick e que a velocidade inicial seja igual a velocidade da esteira. Para este caso, o corpo começa em fase de stick e após sair da mesma entrará no primeiro caso.

Para o terceiro e último caso, considera-se posição e velocidade iniciais genéricas e diferentes dos casos anteriores. Nesse caso, o corpo começará em fase de slip até que em algum momento o mesmo cairá no segundo caso e depois passará para o primeiro.

Para exemplificar o diagrama de fase, fez-se a integração numérica usando-se os seguintes valores para os parâmetros do sistema, $g = 10[\frac{m}{s}], k = 1[\frac{N}{m}], m = 1[kg], V_{sup} = 1[\frac{m}{s}], \mu = 0.5$ e $Erro_{rel} = 0,0001$.

Escolhe-se três pares de condições iniciais diferentes, de modo a exemplificar os casos mencionados acima.

Para a ilustração do primeiro caso, define-se o par $x(0) = 5$ e $\dot{x}(0) = 0.9$ e o resultado é exibido no diagrama da figura 2.4.

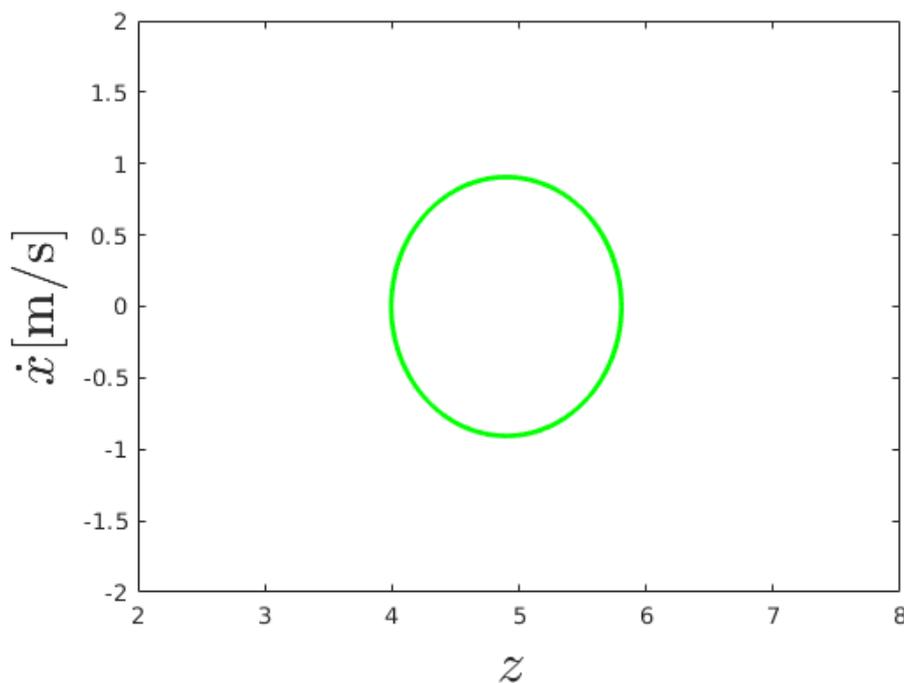


Figura 2.4: Diagrama de fase para um oscilador em stick-slip representando caso 1.

Para a demonstração do segundo caso, define-se o par $x(0) = -2$ e $\dot{x}(0) = 1$ e o resultado é exibido no diagrama da figura 2.5.

Para a demonstração do terceiro caso, define-se o par $x(0) = 7$ e $\dot{x}(0) = 2$ e o resultado é exibido no diagrama da figura 2.6.

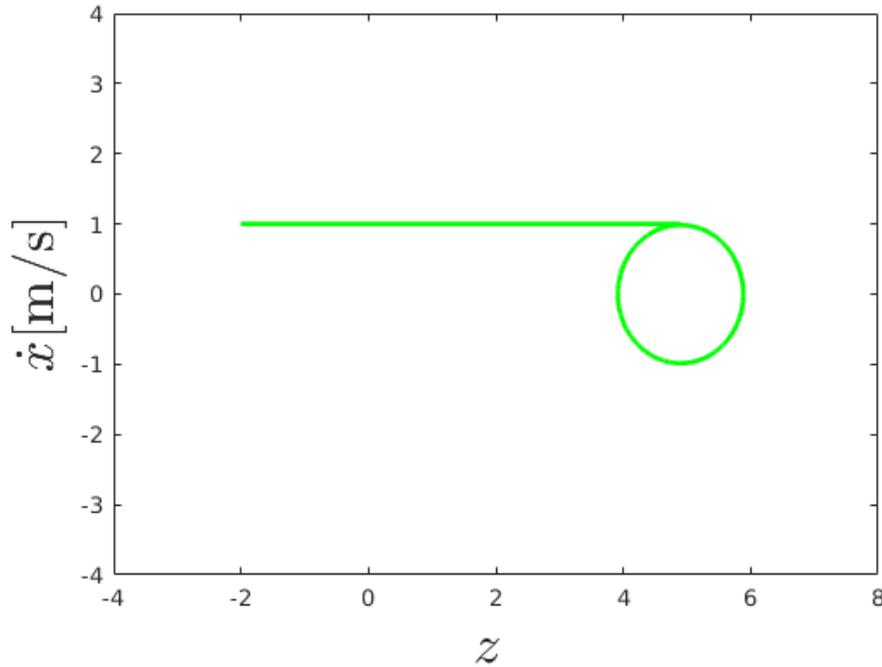


Figura 2.5: Diagrama de fase para um oscilador em stick-slip representando caso 2.

2.2.6 Análise energética

Para fazer a análise energética do sistema, primeiro multiplica-se a equação (2.1) pela velocidade do corpo \dot{x} , obtendo-se que,

$$m\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + kx(t)\dot{x}(t) = F_{at}(t)\dot{x}(t). \quad (2.15)$$

Reescreve-se a equação (2.15), obtendo-se que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2(t)}{2} + \frac{kx^2(t)}{2} \right) = F_{at}(t)\dot{x}(t), \quad (2.16)$$

e integra-se a equação (2.16) no intervalo $[t_1, t_2]$, chegando no seguinte resultado,

$$\frac{m\dot{x}^2(t)}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{kx^2(t)}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F_{at}(t)\dot{x}(t) dt. \quad (2.17)$$

Então, obtém-se

$$\frac{m\dot{x}^2(t_2)}{2} + \frac{kx^2(t_2)}{2} = \frac{m\dot{x}^2(t_1)}{2} + \frac{kx^2(t_1)}{2} + \int_{t_1}^{t_2} F_{at}(t)\dot{x}(t) dt. \quad (2.18)$$

Reescrevendo, tem-se que

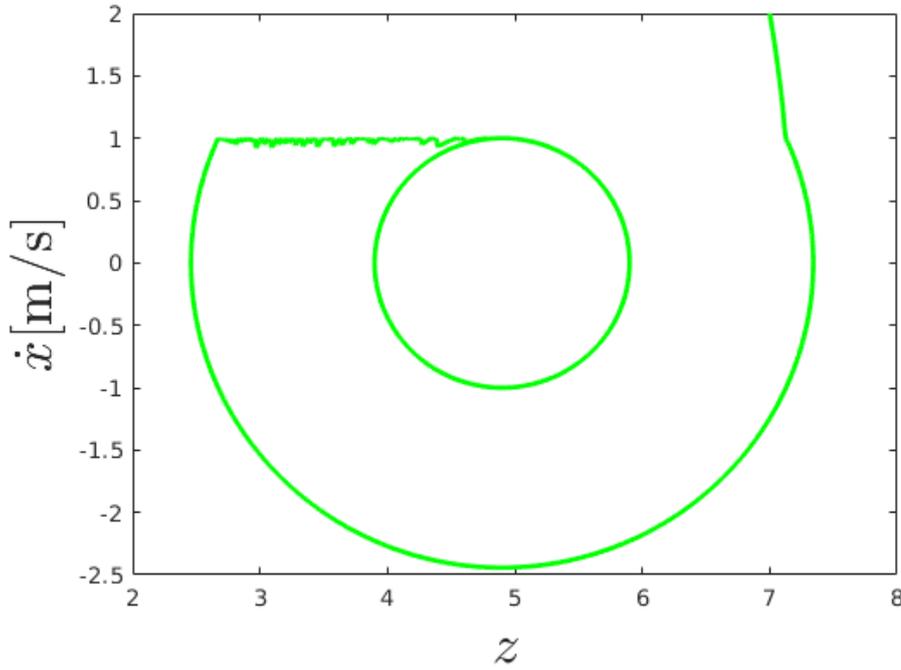


Figura 2.6: Diagrama de fase para um oscilador em stick-slip representando caso 3.

$$E_{\text{cin}}(t_2) + E_{\text{pot}}(t_2) = E_{\text{cin}}(t_1) + E_{\text{pot}}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F_{\text{at}}(t)\dot{x}(t)dt, \quad (2.19)$$

onde E_{cin} e E_{pot} correspondem respectivamente a energia cinética e energia potencial elástica no sistema. Considera-se como energia mecânica total do sistema E_{mec} , assim obtém-se que,

$$E_{\text{mec}}(t_2) = E_{\text{mec}}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F_{\text{at}}(t)\dot{x}(t)dt. \quad (2.20)$$

Supondo que o sistema está em stick, sabe-se que a força de atrito equivale a força que a mola faz no corpo, ou seja, o deslocamento x multiplicado pela constante da mola, sabe-se também que a velocidade do mesmo é igual a velocidade da superfície e que a posição do corpo deve pertencer ao intervalo $[-\frac{\mu mg}{k}, \frac{\mu mg}{k}]$. Substituindo o valor da força de atrito e da velocidade \dot{x} na equação (2.20) para o intervalo $[t_1, t_2]$, tem-se que

$$E_{\text{mec}}(t_2) = E_{\text{mec}}(t_1) + \frac{kV_{\text{sup}}}{2}(x^2(t_2) - x^2(t_1)). \quad (2.21)$$

Sendo assim, para o caso de $x^2(t_2) - x^2(t_1) > 0$, observa-se que a força de atrito introduz energia no sistema e para o caso de $x^2(t_2) - x^2(t_1) < 0$ a força de atrito dissipa energia no sistema.

Supondo que o sistema está em slip, sabe-se que o módulo da força de atrito equivale a μmg e que o sentido da força é obtido através do sinal da velocidade relativa entre o corpo e a esteira.

Com isso, tem-se que quando $\dot{x} > V_{\text{sup}}$,

$$E_{\text{mec}}(t_2) = E_{\text{mec}}(t_1) - \mu mg(x(t_2) - x(t_1)), \quad (2.22)$$

e que quando $\dot{x} < V_{\text{sup}}$, tem-se

$$E_{\text{mec}}(t_2) = E_{\text{mec}}(t_1) + \mu mg(x(t_2) - x(t_1)). \quad (2.23)$$

Sendo assim, para analisar se a força de atrito introduz ou dissipa energia no sistema deve-se avaliar se $x(t_2) - x(t_1)$ é maior ou menor que zero.

Com isso, é possível observar no diagrama de fase da figura 2.7 que existem 3 regiões diferentes. Para a primeira delas, sabe-se que $x(t_2) - x(t_1) < 0$, que o corpo está em slip e que a velocidade do corpo é menor que a da superfície, logo a força de atrito dissipa energia no sistema. Para a região 2, sabe-se que $x(t_2) - x(t_1) > 0$, que o corpo está em slip e que a velocidade do corpo é maior que a da superfície, então a força de atrito dissipa energia no sistema. Para a região 3, sabe-se que $x(t_2) - x(t_1) > 0$, que $x^2(t_2) - x^2(t_1) > 0$, que a velocidade do corpo pertence ao intervalo de $[0, V_{\text{sup}}]$ e que o corpo pode estar em slip ou stick, sendo assim em ambos os casos a força de atrito introduz energia no sistema.

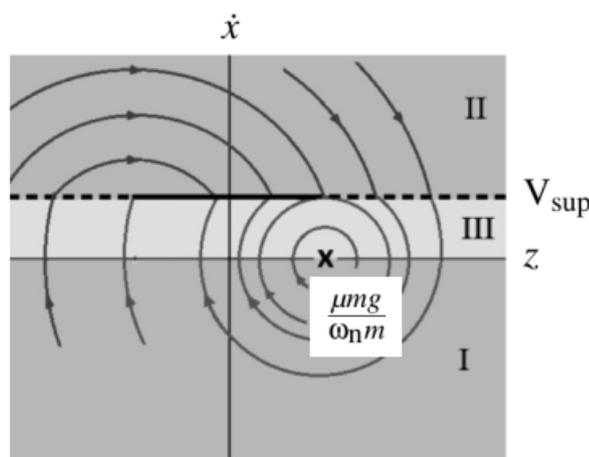


Figura 2.7: Diagrama de fase para um oscilador em stick-slip ilustrando as três regiões explicadas.

2.2.7 Força de atrito com coeficientes diferentes

Considera-se agora para uma outra análise, que a força de atrito entre a superfície e o corpo é modelada por coeficientes de atrito dinâmico μ_{din} e estático μ_{est} com valores diferentes, além disso, também é considerada(o) a força da gravidade g atuando no sistema. Sabe-se que o valor máximo em módulo da força de atrito para cada uma das situações vale,

$$\begin{cases} |F_{\text{at,din}}| = \mu_{\text{din}}mg \\ |F_{\text{at,est}}| = \mu_{\text{est}}mg. \end{cases} \quad (2.24)$$

Considerada a mesma definição utilizada anteriormente para a velocidade relativa e constrói-se o gráfico 2.8 que apresenta como a força de atrito se comporta conforme a velocidade relativa.

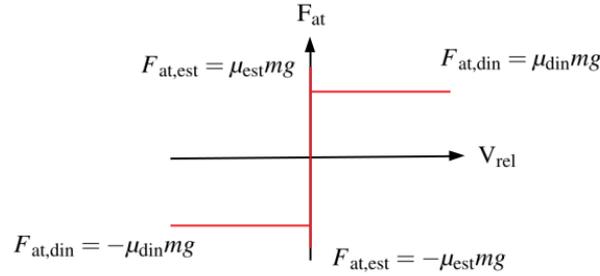


Figura 2.8: Força de atrito x velocidade relativ

Observa-se no gráfico da figura 2.8 que a força de atrito possui valores distintos quando o corpo está em stick e em slip, isto se dá devido a diferença entre os valores dos coeficientes de atrito estático e dinâmico. Além disso, sabe-se que o coeficiente de atrito estático sempre será maior que o coeficiente de atrito dinâmico, logo o valor em módulo da força de atrito estático é maior que o valor em módulo da força de atrito dinâmico. Para o caso onde a velocidade relativa é nula, sabe-se que a força de atrito pode assumir quaisquer valores no intervalo $[-\mu_{\text{est}}mg; \mu_{\text{est}}mg]$ e que para o caso da velocidade relativa diferente de zero, o valor da força de atrito dinâmico em módulo é constante e igual a $\mu_{\text{din}}mg$.

2.2.8 Definição da fase de stick

A fase de stick continua ocorrendo quando o corpo está colado com a esteira e sua condição referente a velocidade relativa entre o corpo e a superfície ser nula se mantém, porém a condição relacionada ao intervalo de posição aonde pode-se ocorrer stick se altera. Para obter esse intervalo, aplica-se a condição da velocidade do corpo ser constante, logo sua aceleração \ddot{x} é nula. Substituindo na equação de movimento do sistema e considerando os novos valores de máximo e mínimo que a força de atrito pode assumir, tem-se

$$\frac{-\mu_{\text{est}}mg}{k} < x(t) < \frac{\mu_{\text{est}}mg}{k}. \quad (2.25)$$

Sendo assim, observa-se, que a força de atrito não é constante ao longo do tempo e que o valor da mesma depende da força que a mola faz no corpo.

2.2.9 Definição da fase de slip

A fase de slip continua ocorrendo caso a velocidade relativa seja diferente de zero. O módulo da força de atrito nessa fase continua constante e vale $\mu_{\text{din}}mg$. Para definição do sentido da mesma, continua necessário saber se a velocidade relativa é positiva ou negativa, caso ela seja positiva a força de atrito vale $\mu_{\text{din}}mg$, caso contrário vale $-\mu_{\text{din}}mg$. Dessa forma, sabe-se que

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = \text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x}(t))\mu_{\text{din}}mg. \quad (2.26)$$

2.2.10 Simulação computacional

A lógica da simulação computacional é bem semelhante, porém alguns ajustes devem ser feitos de modo a atender as novas condições definidas para a força de atrito. Na parte de definição de variáveis, devem ser definidas as mesmas variáveis mencionadas anteriormente, com exceção do coeficiente de atrito, que agora deve ser definido através de duas variáveis distintas, uma para quando o corpo está deslizando, que será o coeficiente de atrito dinâmico e outra para quando o corpo está colado na superfície, que será coeficiente de atrito estático.

O método de resolução continua o mesmo, porém deve-se reescrever as condições que serão verificadas a cada instante de tempo para saber se o corpo está em fase de stick ou slip. Se $|V_{\text{rel}}(t)| < \text{Erro}_{\text{rel}}$ e $\frac{-\mu_{\text{est}}mg}{k} < x < \frac{\mu_{\text{est}}mg}{k}$, o corpo está em stick e define-se $\dot{x} = V_{\text{sup}}$ e $\ddot{x} = 0$. Caso contrário, o corpo se encontra em slip e a condição que deve ser aplicada é de que $F_{\text{at,din}} = \text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x})\mu_{\text{din}}mg$.

2.2.11 Análise das condições iniciais

As condições iniciais de posição e velocidade continuam tendo grande influência na dinâmica do sistema. O estudo dessa influência será feito novamente através do diagrama de fase do sistema, visto que a partir desse diagrama é possível analisar todos os comportamentos possíveis que os pares de condições iniciais geram. A análise ocorre de forma semelhante ao caso de coeficiente de atritos com mesmo valores, porém deve-se fazer a alteração de modo a aplicar a diferença de valores para o caso do corpo estar deslizando ou estar colado na superfície.

Sendo assim, para o caso de slip, obtém-se os seguintes resultados,

$$\dot{x}^2(t) + \left(z - \frac{\mu_{\text{din}}mg}{\omega_n m} \right)^2 = c, \quad (2.27)$$

para o caso de $V_{\text{sup}} > \dot{x}$ e

$$\dot{x}^2(t) + \left(z + \frac{\mu_{\text{din}}mg}{\omega_n m} \right)^2 = c, \quad (2.28)$$

para o caso de $V_{\text{sup}} < \dot{x}$.

Para a fase stick, sabe-se que $\dot{x} = V_{\text{sup}}$ e que a posição z deve estar dentro do lócus de stick, $\frac{-\mu_{\text{est}}mg\omega_n}{k} < z < \frac{\mu_{\text{est}}mg\omega_n}{k}$.

Assim, tem-se novamente que o diagrama de fase durante a fase de slip vai ter a forma de um círculo de raio c , centrado em $\left(\frac{\mu_{\text{din}}mg\omega_n}{k}, 0\right)$, caso $V_{\text{sup}} < \dot{x}$ e centrado em $\left(\frac{-\mu_{\text{din}}mg\omega_n}{k}, 0\right)$, no caso $V_{\text{sup}} > \dot{x}$. Durante a fase de stick sabe-se que terá a forma de uma reta horizontal onde $\dot{x} = V_{\text{sup}}$ e a posição z deve pertencer ao lócus de stick. Constrói-se o diagrama de fase, considerando-se o caso onde $V_{\text{sup}} > \dot{x}$. O diagrama está representado na figura 2.3.

2.2.12 Análise energética

Para fazer a análise energética do sistema, considera-se o mesmo método de resolução usado anteriormente, modificando apenas os valores para os coeficientes de atrito dinâmico e estático.

Dessa forma, sabe-se que quando o corpo está em stick a força de atrito equivale a força da mola faz no corpo, ou seja, o deslocamento x multiplicado pela constante da mola, sabe-se também que a velocidade do corpo é igual a velocidade da superfície e que a posição do corpo deve pertencer ao intervalo $\left[\frac{-\mu_{\text{est}}mg}{k}, \frac{\mu_{\text{est}}mg}{k}\right]$. Substituindo-se o valor da força de atrito e da velocidade na equação (2.20) para o intervalo $[t_1, t_2]$, obtém-se que

$$E_{\text{mec}}(t_2) = E_{\text{mec}}(t_1) + \frac{kV_{\text{sup}}}{2}(x^2(t_2) - x^2(t_1)). \quad (2.29)$$

Sendo assim, para o caso de $x^2(t_2) - x^2(t_1) > 0$, tem-se que a força de atrito introduz energia no sistema e para o caso de $x^2(t_2) - x^2(t_1) < 0$ a força de atrito dissipa energia no sistema.

Para o caso em que o sistema está em slip, sabe-se que o módulo da força de atrito equivale a $\mu_{\text{din}}mg$ e que o sentido da força é obtido através do sinal da velocidade relativa entre o corpo e a esteira. Com isso, tem-se que quando $\dot{x} > V_{\text{sup}}$,

$$E_{\text{mec}}(t_2) = E_{\text{mec}}(t_1) - \mu_{\text{din}}mg(x(t_2) - x(t_1)), \quad (2.30)$$

e que quando $\dot{x} < V_{\text{sup}}$, tem-se

$$E_{\text{mec}}(t_2) = E_{\text{mec}}(t_1) + \mu_{\text{din}}mg(x(t_2) - x(t_1)). \quad (2.31)$$

Sendo assim, para analisar se a força de atrito introduz ou dissipa energia no sistema deve-se avaliar se $x(t_2) - x(t_1)$ é maior ou menor que zero.

Capítulo 3

Análise do fenômeno de stick-slip para dois graus de liberdade

Nesse capítulo, primeiro, estuda-se um sistema de múltiplos graus de liberdade com forçamento nulo, calculando suas frequências naturais, seus modos de vibração, propondo uma solução para o mesmo e estudando a transferência de energia entre seus modos.

Depois disso, faz-se as mesmas análises, só que dessa vez, considera-se um sistema com atrito seco, entre a superfície e um de seus blocos, dessa forma, tem-se o fenômeno de stick-slip e faz-se as mesmas análises do caso anterior.

3.1 Definição do sistema

Define-se um novo sistema composto por dois corpos de massas, m_1 e m_2 , deslocamentos, x_1 e x_2 e duas molas com rigidezes k_1 e k_2 como ilustrado na figura 3.1.

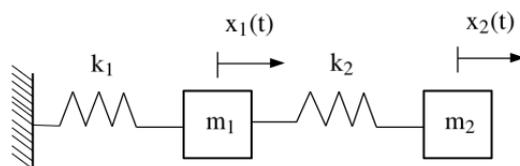


Figura 3.1: Ilustração do sistema massa-mola com dois graus de liberdade.

Considera-se que ambos os corpos são modelados como partículas de massa m_1 e m_2 e que quando as posições x_1 e x_2 são igual a zero, as força elásticas F_{el1} e F_{el2} nas molas são nulas.

Para encontrar a dinâmica do sistema escolheu-se usar o método de Lagrange. Escreve-se o Lagrangeano do sistema

$$L = T - V, \quad (3.1)$$

onde T e V representam respectivamente as energias cinéticas e potenciais do sistema dadas por

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2(t)}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2(t)}{2}, \quad (3.2)$$

e

$$V = \frac{k_1 x_1^2(t)}{2} + \frac{k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2}{2}. \quad (3.3)$$

Dessa forma, tem-se

$$L = \frac{m_1 \dot{x}_1^2(t)}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2(t)}{2} - \frac{k_1 x_1^2(t)}{2} - \frac{k_2 (x_2(t) - x_1(t))^2}{2}. \quad (3.4)$$

Sabe-se que,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}_i} \right) - \frac{dL}{dx_i} = 0. \quad (3.5)$$

Para $x_i = x_1$, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}_1(t)} \right) = m_1 \ddot{x}_1(t), \quad \frac{dL}{dx_1(t)} = -k_1 x_1(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)), \quad (3.6)$$

e para $x_i = x_2$, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}_2(t)} \right) = m_2 \ddot{x}_2(t), \quad \frac{dL}{dx_2(t)} = -k_2 (x_2(t) - x_1(t)). \quad (3.7)$$

Chega-se nas seguintes equações

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0, \quad (3.8)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = 0.$$

Reescreve-se o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Determina-se como M a matriz de massas, como \ddot{X} o vetor das acelerações, como K a matriz de constantes da mola e como X o vetor de posições, obtendo que

$$M\ddot{X} + KX = 0. \quad (3.10)$$

O sistema 3.1 não possui elementos dissipativos e o forçamento que atua sobre o mesmo é

nulo, garantindo assim que o mesmo é linear. Dessa forma, pode-se calcular sua solução para a posição X fazendo uma combinação linear da solução homogênea, X_h , do mesmo, obtendo que

$$X = X_h. \quad (3.11)$$

Propõe-se uma solução do tipo $X_h = e^{i\omega t} \cdot u$, onde u é um vetor não nulo. Sabe-se que $\dot{X}_h = i\omega \cdot e^{i\omega t} \cdot u$ e $\ddot{X}_h = -\omega^2 \cdot e^{i\omega t} \cdot u$, substituindo, tem-se

$$M \cdot -\omega^2 e^{i\omega t} \cdot u + K \cdot e^{i\omega t} \cdot u = 0, \quad (3.12)$$

colocando o termo u em evidência e dividindo o sistema por $e^{i\omega t}$, encontra-se

$$(-\omega^2 M + K) \cdot u = 0. \quad (3.13)$$

Como u é um vetor não nulo, define-se que a determinante da matriz $(-\omega^2 M + K)$ deve ser igual a zero, pois dessa forma garante-se que a mesma não é invertível. A partir dessa condição, obtém-se

$$\det \left(\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (3.14)$$

$$k_1 k_2 - \omega^2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) + \omega^4 m_1 m_2 = 0. \quad (3.15)$$

Introduzindo-se quatro novas variáveis, $\lambda = \omega^2$, $A = m_2 m_1$, $B = m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2$ e $C = k_1 k_2$ e sabendo-se que, $\lambda^2 = \omega^4$, pode-se escrever

$$\lambda^2 A - \lambda B + C = 0. \quad (3.16)$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara na equação 3.16, obtém-se

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (3.17)$$

$$\lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Como $\lambda = \omega^2$, ao substituir os valores encontrados para λ_1 e λ_2 na equação 3.13 e calculando a raiz quadrada dos valores encontrados para eles, obtém-se dois vetores para u e dois valores para ω . O vetor e a frequência, associados a λ_1 são definidos como u_1 e ω_1 , e a λ_2 como u_2 e ω_2 e eles podem ser interpretados como modos de vibração e frequências naturais do sistema. Um modo de vibração pode ser definido como um parâmetro geométrico que estabelece a relação do comportamento do sistema com os seus graus de liberdade, sendo o mesmo associado a uma frequência natural.

Para λ_1 , sendo C_1 e C_2 constantes, tem-se

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \lambda_1 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \lambda_1 m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Resolvendo o sistema, encontra-se a seguinte relação

$$C_1 = \frac{(k_2 - \lambda_1 m_2)C_2}{k_2}. \quad (3.19)$$

De forma análoga, a partir de λ_2 , tem-se

$$C_3 = \frac{(k_2 - \lambda_2 m_2)C_4}{k_2}, \quad (3.20)$$

onde C_3 e C_4 são constantes.

Os modos e frequências do sistema podem ser calculados por ,3.17, 3.19 e 3.20.

3.2 Análise das condições iniciais

A solução homogênea do sistema da figura 3.1 será uma combinação linear dos modos de vibração do sistema, u_1 e u_2 , obtendo-se

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left(A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \right) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \left(D \cos(\omega_2 t) + E \sin(\omega_2 t) \right) \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

onde A,B,C e D são constantes a serem determinadas através das condições iniciais de posição e velocidade.

Para a análise das condições relacionadas as posições x_1 e x_2 dos corpos no instante inicial, $t = 0$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \left(A \cos(0) + B \sin(0) \right) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \left(D \cos(0) + E \sin(0) \right) \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

chegando na seguinte relação,

$$x_1(0) = AC_1 + DC_3, \quad (3.23)$$

$$x_2(0) = AC_2 + DC_4.$$

Para a análise das condições relacionadas as velocidades \dot{x}_1 e \dot{x}_2 dos corpos, primeiro, deriva-se o sistema 3.21 em relação ao tempo, obtendo que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \left(-\omega_1 A \sin(\omega_1 t) + \omega_1 B \cos(\omega_1 t) \right) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \left(-\omega_2 D \sin(\omega_2 t) + \omega_2 E \cos(\omega_2 t) \right) \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

depois, aplicando-se a condição $t = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} = \left(-\omega_1 A \sin(0) + \omega_1 B \cos(0) \right) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \left(-\omega_2 D \sin(0) + \omega_2 E \cos(0) \right) \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

chegando na seguinte relação para as condições iniciais de velocidade,

$$\dot{x}_1(0) = \omega_1 B C_1 + \omega_2 E C_3, \quad (3.26)$$

$$\dot{x}_2(0) = \omega_1 B C_2 + \omega_2 E C_4.$$

Substituindo as condições iniciais de posição e velocidade nas relações 3.23 e 3.26, obtém-se os valores das constantes A, B, C e D. Dessa forma, é possível escolher condições iniciais de modo a colocar o sistema para vibrar somente em um dos modos ou vibrar em ambos. Um exemplo seria zerar as constantes D e E com A e B diferentes de zero, assim o sistema vibraria somente no primeiro modo.

3.3 Análise energética

A linearidade do sistema é um fator que impede a transferência de energia entre seus modos e para fazer esse estudo, primeiramente, é necessário fazer o cálculo das frequências e modos de vibração do sistema. Usando as relações 3.13, 3.19 e 3.20 encontradas anteriormente e adotando os seguintes valores para os parâmetros do sistema, $m_1 = 1$ [Kg], $m_2 = 1$ [Kg], $k_1 = 1 \frac{N}{m}$ e $k_2 = 2 \frac{N}{m}$, encontra-se

$$\lambda_1 = 4,55 \left[\frac{rad}{s} \right], \quad (3.27)$$

$$\lambda_2 = 0,45 \left[\frac{rad}{s} \right],$$

como $\omega^2 = \lambda$, obtém-se que as frequências naturais do sistema valem

$$\omega_1 = 2,1 \left[\frac{rad}{s} \right], \quad (3.28)$$

$$\omega_2 = 0,67 \left[\frac{rad}{s} \right].$$

Substituindo-se os valores de λ_1 e dos parâmetros do sistema na relação 3.19, encontra-se que

$$C_1 = 1, \tag{3.29}$$

$$C_2 = -1,275,$$

assim, tem-se que o modo de vibração, u_1 associado a frequência ω_1 , vale

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,275 \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Substituindo-se os valores de λ_2 e dos parâmetros do sistema na relação 3.20, encontra-se que

$$C_3 = 1, \tag{3.31}$$

$$C_4 = 0,775,$$

assim, tem-se que o modo de vibração, u_2 associado a frequência ω_2 , vale

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,775 \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Com as frequências naturais e modos de vibração definidos, falta apenas calcular as constantes A,B,D e E do sistema e para isso é necessário definir as condições iniciais do problema para posição e velocidade.

Como foi visto anteriormente, as condições iniciais possuem papel fundamental no sistema e elas determinam em qual modo de vibração o sistema irá vibrar. Sendo assim, para o estudo, utiliza-se as relações 3.23 e 3.26 e escolhe-se três conjuntos de condições iniciais diferentes, de forma que

1. sistema vibre somente no primeiro modo;
2. sistema vibre somente no segundo modo;
3. sistema vibre no primeiro e segundo modos simultaneamente.

Para (1), define-se que $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1,275$, $\dot{x}_1(0) = 0$ e $\dot{x}_2(0) = 0$ e com esses valores, encontra-se que $A=1$, $B=0$, $D=0$ e $E=0$, substituindo em 3.21, obtém-se os seguintes resultados para as posições x_1 e x_2 ,

$$x_1(t) = \cos(2,1t), \tag{3.33}$$

$$x_2(t) = -1,275 \cos(2,1t).$$

Aplicando-se a transformada de Fourier em seus respectivos sinais em x_1 e x_2 , muda-se do domínio do tempo para o da frequência, permitindo-se determinar em quais frequências o sistema está vibrando. Obteve-se os gráficos 3.2(a) e 3.2(b) e em ambos observa-se que não há transferência de energia entre modos e de que o sistema só tem amplitude associada a frequência ω_1 , exemplificando também o que foi mostrado na seção de análise das condições iniciais.

Para (2), define-se que $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -0,775$, $\dot{x}_1(0) = 0$ e $\dot{x}_2(0) = 0$ e com esses valores, encontra-se que $A=0, B=0, D=1$ e $E=0$, substituindo em 3.21, obtém-se os seguintes resultados para as posições x_1 e x_2 ,

$$x_1(t) = \cos(0,67t), \tag{3.34}$$

$$x_2(t) = 0,775 \cos(0,67t).$$

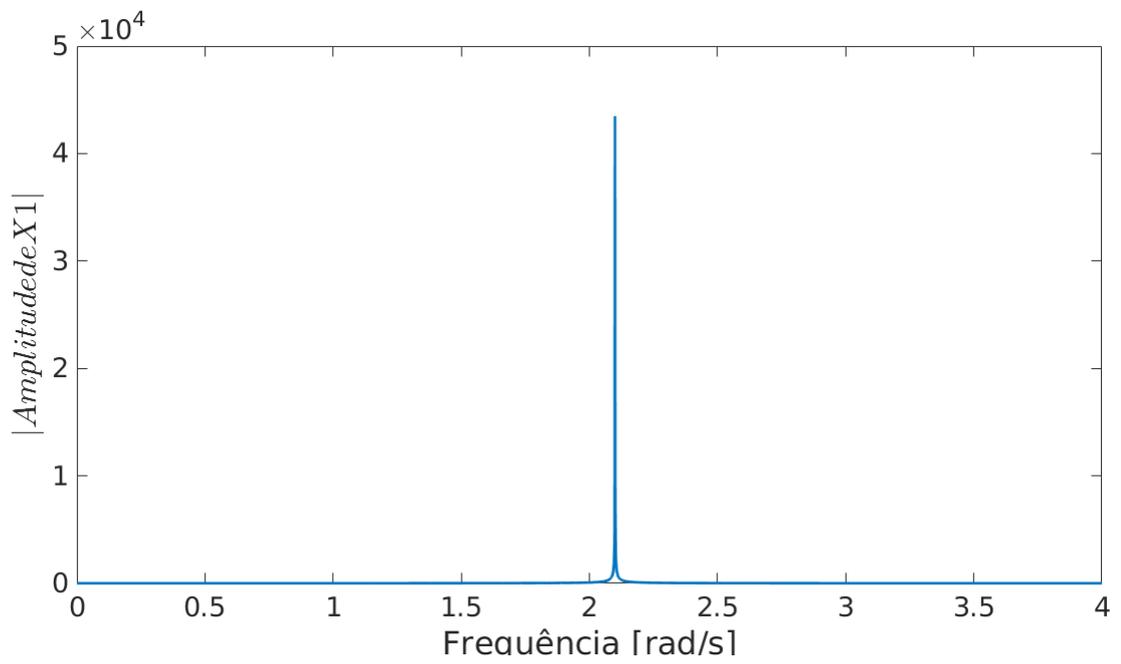
De maneira análoga ao primeiro caso, obtém-se os gráficos 3.3(a) e 3.3(b) gerados a partir das novas posições de x_1 e x_2 e observa-se novamente, que a única frequência que aparece com amplitude diferente de zero é a ω_2 .

Para (3), define-se que $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -0,275$, $\dot{x}_1(0) = 0$ e $\dot{x}_2(0) = 0$. Para esses valores, encontra-se que $A=0,5, B=0, D=0,5$ e $E=0$, substituindo em 3.21, obtém-se os seguintes resultados para as posições x_1 e x_2 ,

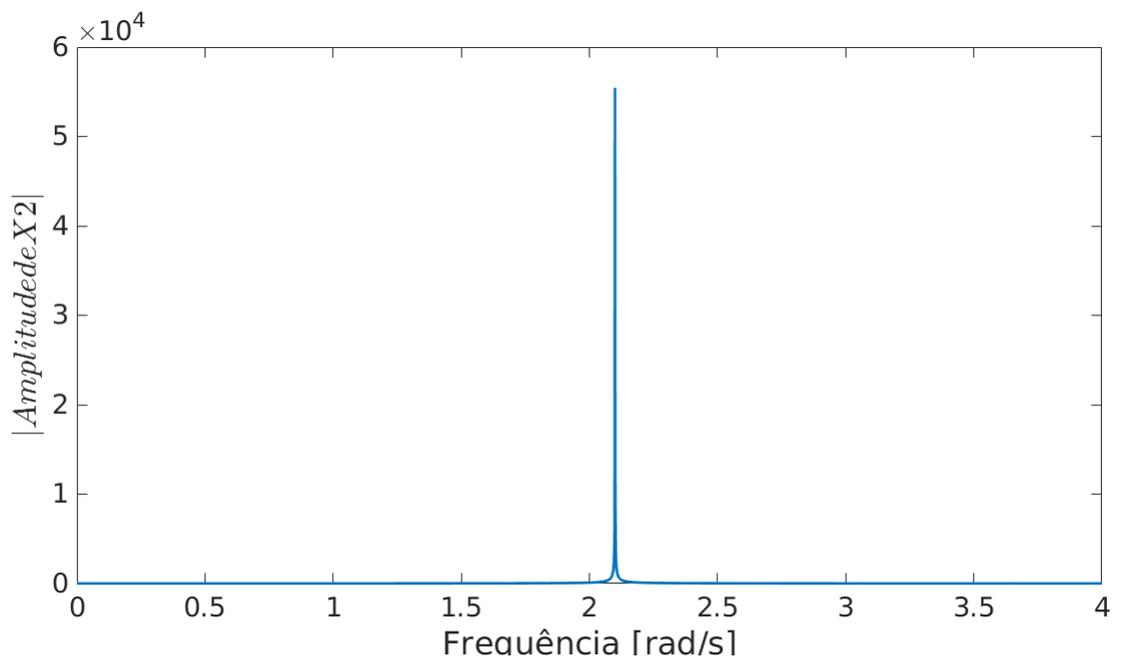
$$x_1(t) = 0,5 (\cos(2,1t) + \cos(0,67t)), \tag{3.35}$$

$$x_2(t) = 0,5 (-1,275 \cos(2,1t) + 0,775 \cos(0,67t)).$$

De maneira análoga aos outros casos, obtém-se os gráficos 3.4(a) e 3.4(b) gerados a partir das novas posições encontradas de x_1 e x_2 e observa-se duas frequências ω_1 e ω_2 possuem amplitudes diferentes de zero, ou seja, o sistema vibra em seus dois modos.

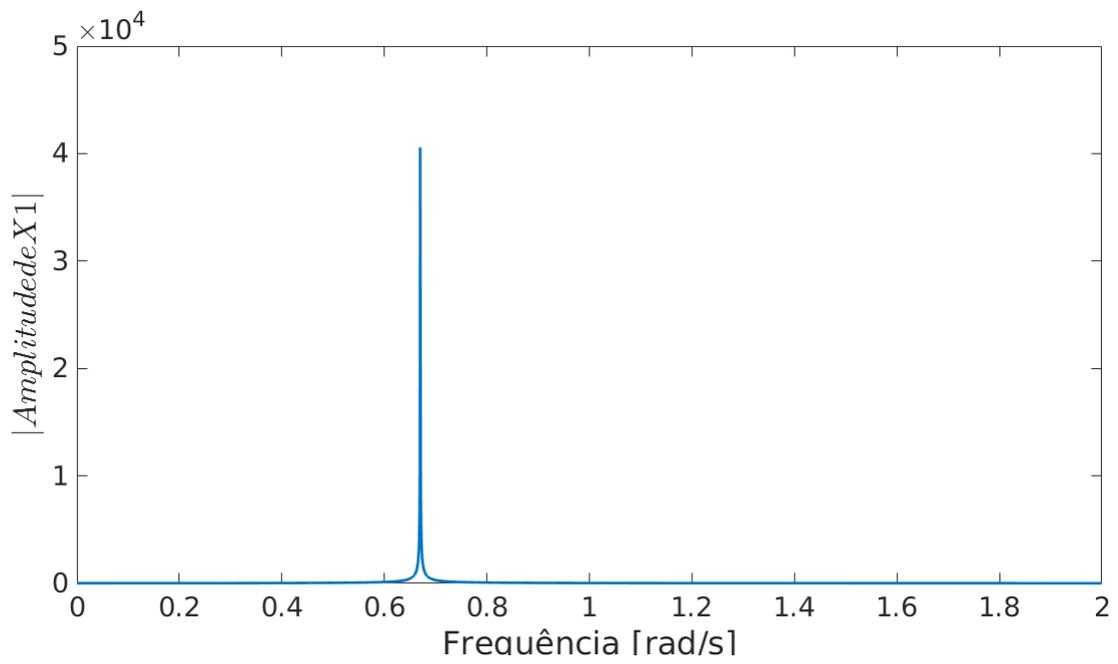


(a)

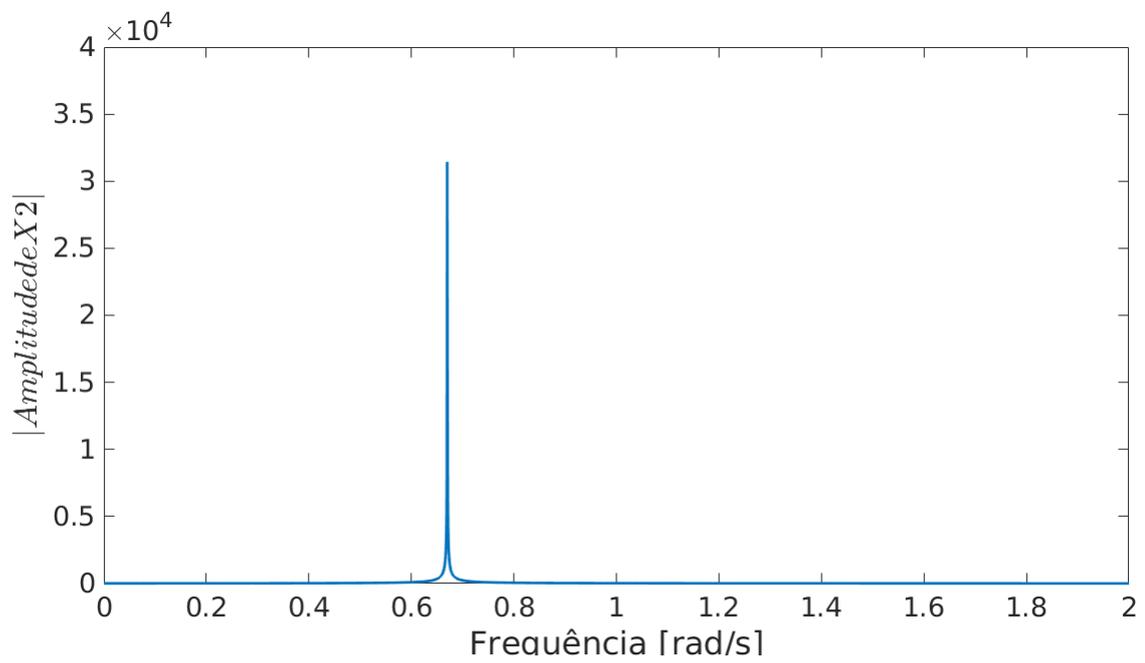


(b)

Figura 3.2: (a) Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_1 no caso (1). (b) Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_2 no caso (1).

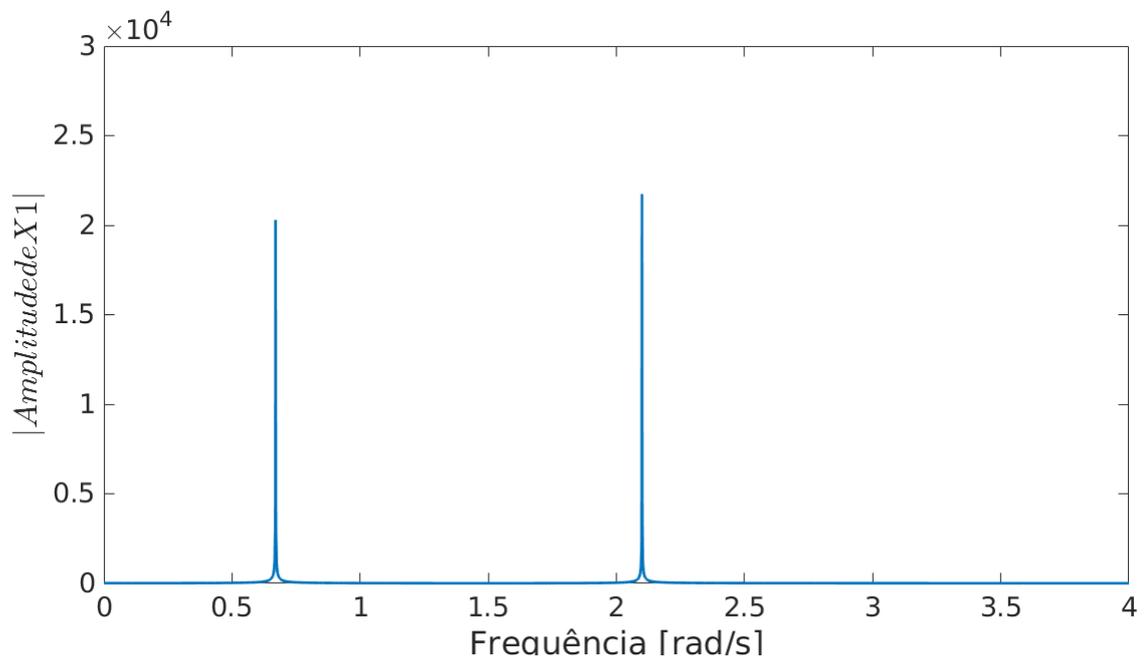


(a)

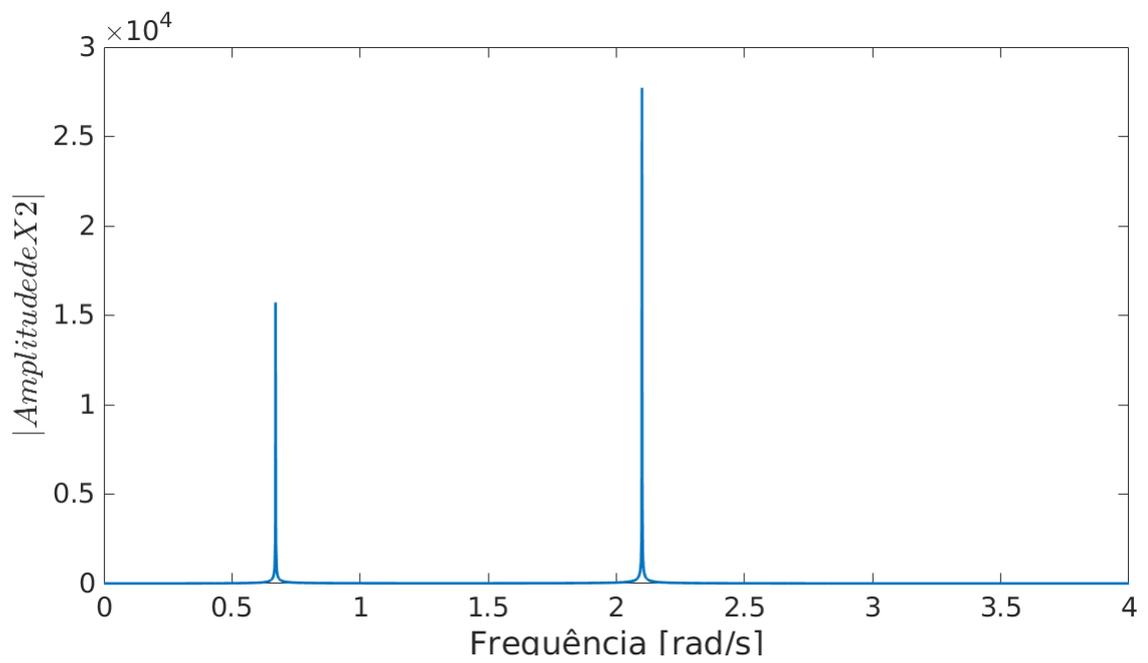


(b)

Figura 3.3: (a) Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_1 no caso (2). (b) Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_2 no caso (2).



(a)



(b)

Figura 3.4: (a) Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_1 no caso (3). (b) Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_2 no caso (3).

3.4 Definição do sistema

Define-se um novo sistema composto por dois corpos de massas, m_1 e m_2 , deslocamentos, x_1 e x_2 e duas molas com rigidezes k_1 e k_2 como ilustrado na figura 3.5. O corpo de massa m_2 desliza sobre uma superfície que se move com velocidade constante V_{sup} . Considera-se a existência de atrito entre a superfície e o segundo corpo. O coeficiente de atrito entre elas vale μ .

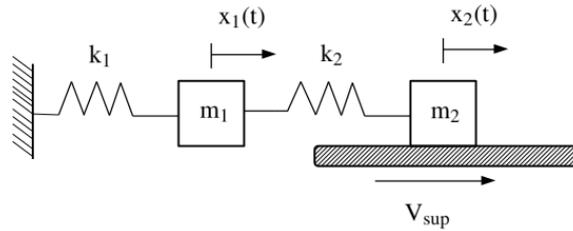


Figura 3.5: Ilustração do sistema massa-mola com dois graus de liberdade.

Considera-se que ambos os corpos são modelados como partículas de massa m_1 e m_2 e que quando as posições x_1 e x_2 são igual a zero, as força elásticas F_{e11} e F_{e12} nas molas são nulas.

A dinâmica do sistema é encontrada de maneira semelhante ao primeiro caso deste capítulo. Considera-se que sobre o corpo de massa m_1 não há ação de nenhuma força externa e que sobre o corpo de massa m_2 há uma força de atrito. Aplicando essas condições nas equações 3.8, obtém-se

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0, \quad (3.36)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) = F_{\text{at}}(t).$$

Reescreve-se o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{at}}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Determina-se como M a matriz de massas, como \ddot{X} o vetor das acelerações, como K a matriz de constantes da mola, como X o vetor de posições e como F o vetor relacionado ao forçamento, obtendo que

$$M\ddot{X} + KX = F. \quad (3.38)$$

As frequências naturais, ω_1 e ω_2 , e os modos de vibração, u_1 e u_2 associados ao sistema 3.5, são iguais aos do 3.1, visto que para o cálculo desses parâmetros considera-se somente a parte homogênea do mesmo.

Para este caso a solução usada anteriormente de fazer uma combinação linear entre a solução homogênea e particular não é valido, visto que o sistema é não linear. A não linearidade do

sistema é melhor explicada nas seções de definição da fase de stick-slip.

3.5 Definição da força de atrito

A força de atrito entre a superfície e o corpo de massa m_2 é modelada de maneira similar ao caso aplicado no capítulo anterior, utiliza-se o modelo de Coulomb e considera-se que os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o corpo e a superfície possuem o mesmo valor μ . Considera-se a força da gravidade g e sabe-se que o valor máximo em módulo da força de atrito vale,

$$|F_{\text{at}}| = \mu m_2 g. \quad (3.39)$$

Determina-se a velocidade relativa entre a velocidade da superfície V_{sup} e do corpo dois \dot{x}_2 como sendo $V_{\text{rel}} = V_{\text{sup}} - \dot{x}_2$ e constrói-se o gráfico 3.6, que apresenta o comportamento da força de atrito conforme a velocidade relativa.

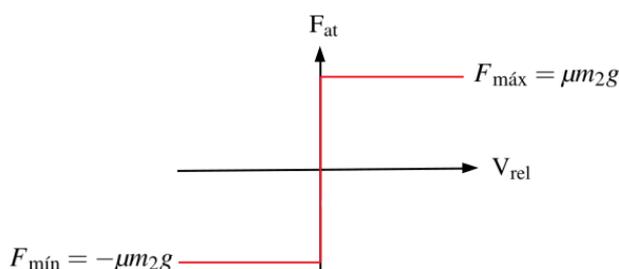


Figura 3.6: Força de atrito x velocidade relativa.

Observa-se no gráfico comportamento similar ao do caso apresentado no capítulo anterior, onde a força de atrito possui valor em módulo constante quando a velocidade relativa é diferente de zero e o seu sentido depende se a mesma é positiva ou negativa. Para o caso onde a velocidade relativa é nula a força de atrito depende da força que a mola de constante elástica k_2 exerce no segundo corpo.

3.6 Definição da fase de stick

A fase de stick ocorre quando o corpo de massa m_2 está colado com a superfície e pode ser redefinida por duas condições. A primeira delas está relacionada com a velocidade relativa entre a superfície e o segundo corpo, pois caso ela seja nula, garante-se então que o mesmo se move junto com a superfície. Assim, tem-se como primeira condição,

$$V_{\text{sup}} = \dot{x}_2(t). \quad (3.40)$$

A segunda condição para esta fase está relacionada com as posições aonde pode-se ocorrer a fase de stick, também conhecidas como lócus de stick. Para obter esse intervalo, aplica-se a condição de que o corpo se move com velocidade constante, logo sua aceleração \ddot{x}_2 é nula. Substituindo na equação 3.8 associada ao segundo e considerando-se os valores de máximo e mínimo que a força de atrito pode assumir, tem-se

$$\frac{-\mu m_2 g}{k_2} < (x_2(t) - x_1(t)) < \frac{\mu m_2 g}{k_2}. \quad (3.41)$$

Para este caso, verifica-se que o valor da força de atrito não é constante e o mesmo depende da força que a mola exerce sobre o corpo, podendo assumir qualquer valor no intervalo de $[-\mu m_2 g; \mu m_2 g]$.

3.7 Definição fase de slip

A fase de slip ocorre quando o corpo de massa m_2 desliza sobre a superfície, ou seja, o valor da velocidade relativa é diferente de zero. O valor em módulo da força de atrito nessa fase é constante e equivale a $\mu m_2 g$. Para definição do sentido da mesma, é necessário saber se a velocidade relativa é positiva ou negativa, caso ela seja positiva a força vale $\mu m_2 g$, caso contrário vale $-\mu m_2 g$. Dessa maneira, tem-se

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) = \text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x}_2(t)) \mu m_2 g. \quad (3.42)$$

Como foi visto no capítulo anterior, existem duas possíveis situações em que o corpo de massa m_2 pode se encontrar, stick ou slip. Durante as fases de slip, se a força de atrito mantiver o mesmo sentido, considera-se o sistema linear. A não linearidade existe devido a transição entre as fases.

3.8 Simulação computacional

Com a dinâmica do problema e as fases de stick-slip definidas, é possível construir uma rotina computacional para a integração numérica da equação da dinâmica através do método de Runge-Kutta.

Sendo assim, primeiramente, é necessário O coeficiente de atrito entre a superfície e o bloco de massa m_2 possui valores iguais caso o corpo esteja se movendo ou não e como foi visto no capítulo anterior existem três possíveis situações oem que o mesmo pode se encontrar. Considera-se o caso onde o corpo começa em fase de slip, transita para fase de stick e por final volta para a estar em slip. Define-se como t_1 o tempo que o corpo permanece na primeira fase de slip e como t_2 , o tempo em que o corpo permanece na segunda fase de slip. Se o o sentido da força de atrito se mantiver o mesmo nos dois intervalos de tempo t_1 e t_2 , o sistema é considerado linear, perdendo essa característica somente na fase de stick.o definir as variáveis das massas m_1 e m_2 , constantes elásticas das molas k_1 e k_2 , coeficiente de atrito μ , gravidade g , velocidade da superfície e posições, x_1 e x_2 , e velocidades, \dot{x}_1 e \dot{x}_2 iniciais do corpo.

O método de resolução aplicado consiste em a cada instante t , calcular uma solução e avançar para um próximo instante $t + \Delta t$. Para isso, define-se um intervalo de tempo, que delimita o instante inicial t_i e final t_f da simulação e o valor de incremento Δt .

Em cada instante é necessário determinar se o corpo de massa m_2 se encontra em stick ou em slip. Para a fase de stick, é feita a verificação se $|V_{\text{rel}}| < \text{Erro}_{\text{rel}}$ e se $\frac{-\mu m_2 g}{k_2} < (x_2(t) - x_1(t)) < \frac{\mu m_2 g}{k_2}$. Caso ambas condições sejam satisfeitas, o corpo está em stick e define-se $\dot{x}_2 = V_{\text{sup}}$ e $\ddot{x}_2 = 0$.

Percebe-se que a condição da velocidade relativa ser igual a zero tem que ser adaptada, visto que a condição $V_{\text{rel}} = 0$ nunca será atingida computacionalmente. Sendo assim, define a variável de erro relativo Erro_{rel} .

Caso contrário o corpo se encontra em slip e a condição que deve ser aplicada é de que $m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) = \text{sgn}(V_{\text{sup}} - \dot{x}_2(t)) \mu m_2 g$.

3.9 Análise energética

O estudo energético também é focado em entender como que o ocorre a transferência de energia entre os modos de vibração do sistema.

Para fazer a análise, observa-se a resposta do sistema durante três intervalos de tempo, definidos na figura 3.7.

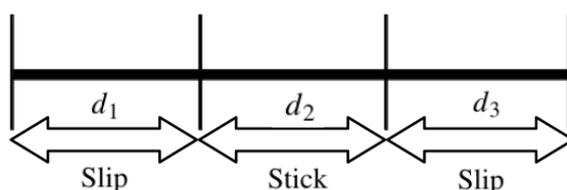
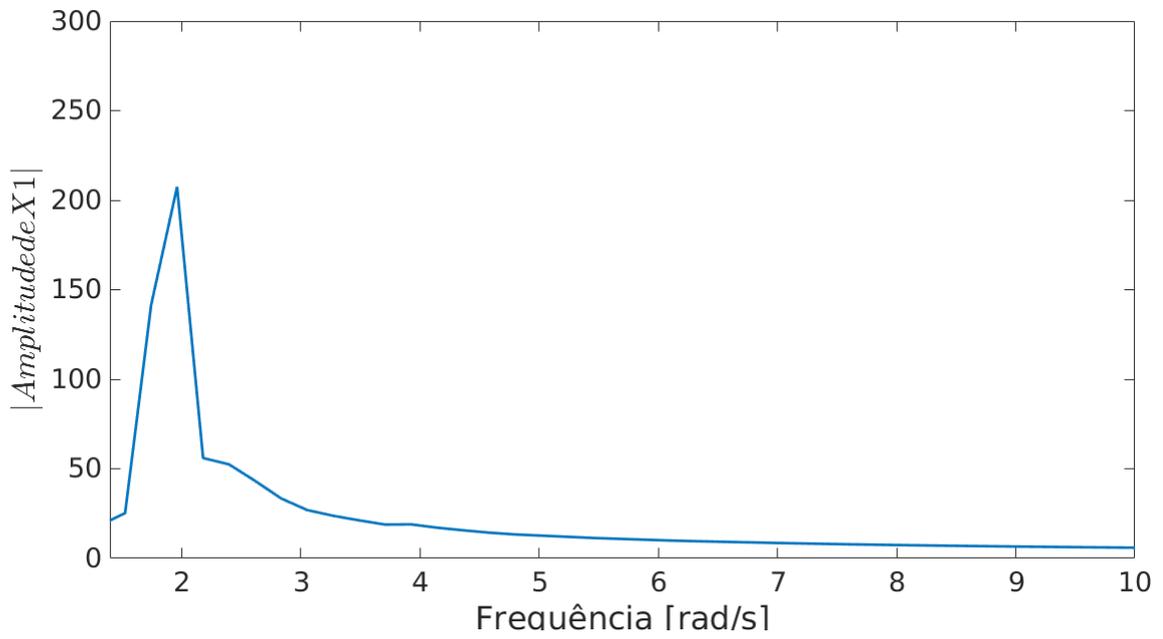


Figura 3.7: Intervalos de tempo onde faz-se as análises do sistema.

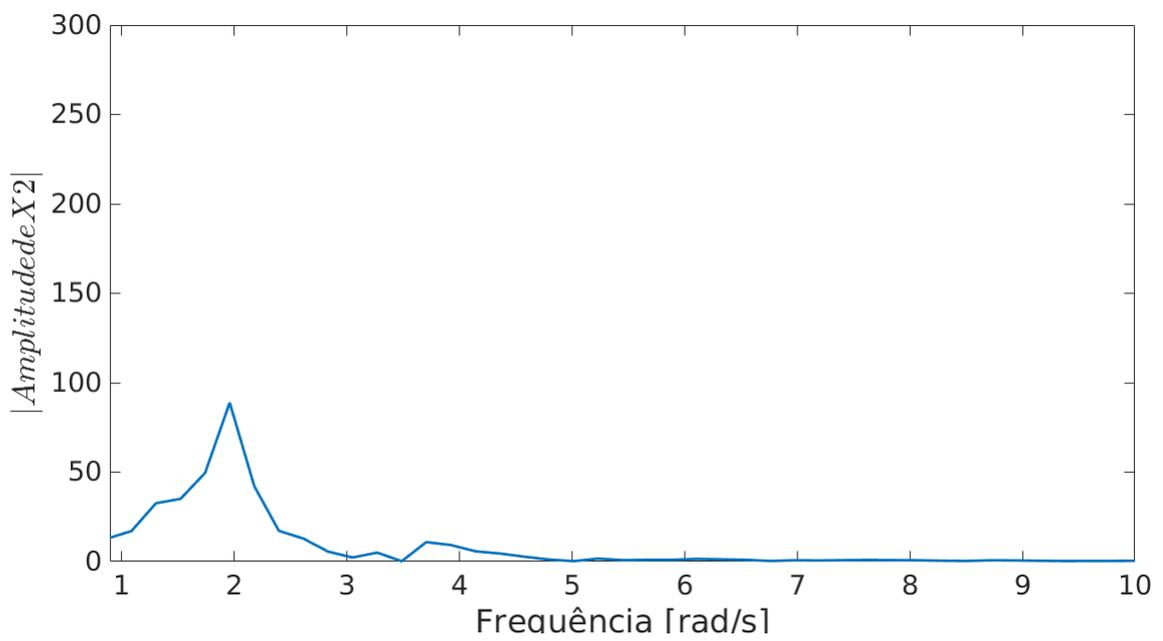
Para os intervalos d_1 e d_3 , considera-se que a força de atrito se mantém no mesmo sentido em ambas fases.

Define-se os seguintes valores para os parâmetros do sistema, $m_1 = 1$ [Kg], $m_2 = 1$ [Kg], $k_1 = 1 \frac{N}{m}$, $k_2 = 2 \frac{N}{m}$, $V_{\text{sup}} = 2 \frac{m}{s}$, $\mu = 0.5$ e $\text{Erro}_{\text{rel}} = 0,01$. Dessa forma, tem-se os mesmos valores utilizados no estudo energético feito para o sistema 3.1, então as frequências e modos de vibração do sistema serão os mesmos calculados anteriormente, visto que esses valores só dependem da solução homogênea que é a mesma.

Faz-se a integração numérica, utilizando a lógica já explicada, aplicando condições iniciais que são múltiplos de u_1 e aplica-se a transformada de Fourier, mudando o domínio do problema do tempo para frequência, nas posições x_1 e x_2 , para os intervalos de tempo d_1 e d_3 , obtendo-se os gráficos 3.8(a), 3.8(b), 3.9(a) e 3.9(b).

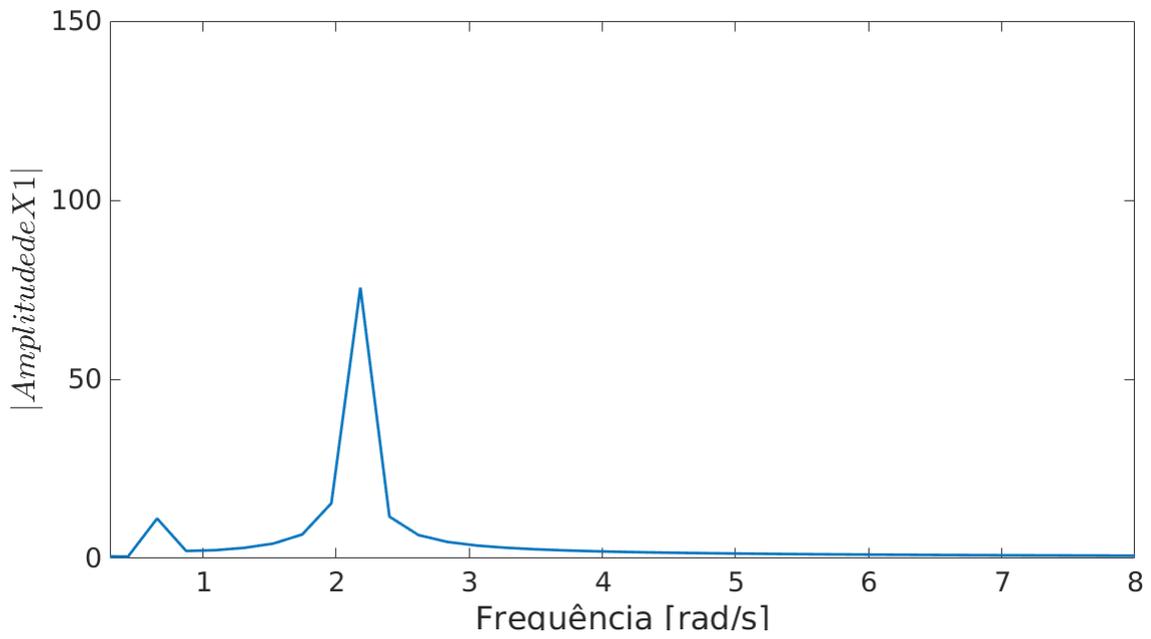


(a)

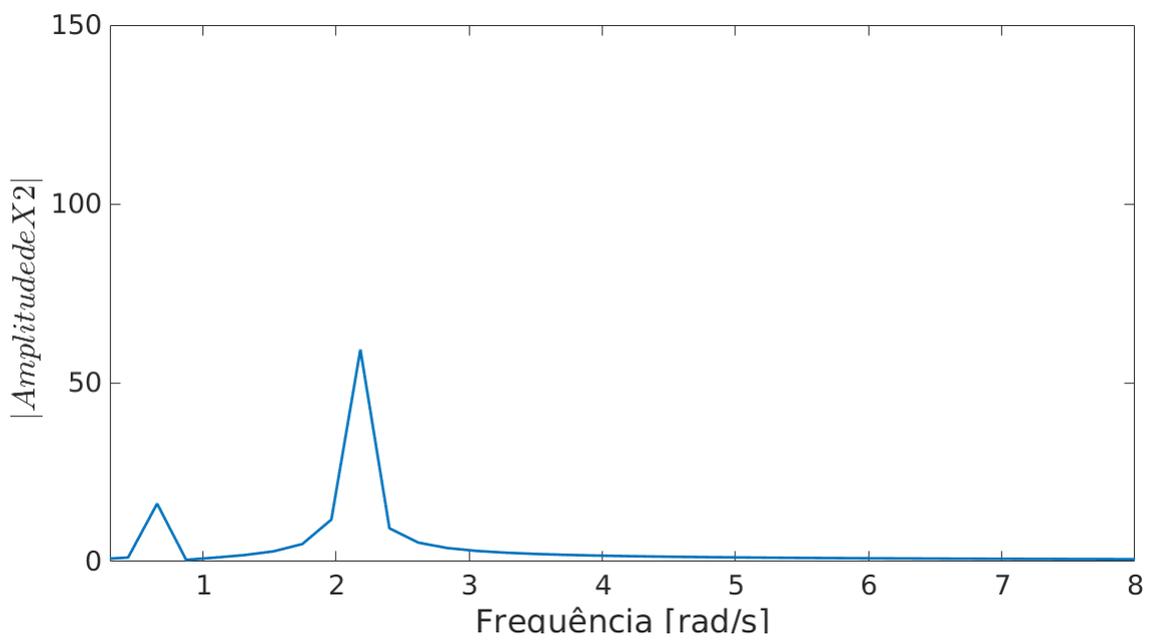


(b)

Figura 3.8: Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_1 e (b) gráfico da amplitude x frequência para a posição x_2 no intervalo d_1 .



(a)



(b)

Figura 3.9: (a) Gráfico da amplitude x frequência para a posição x_1 e (b) gráfico da amplitude x frequência para a posição x_2 no intervalo d_3 .

Observa-se nos gráficos 3.8(a), 3.8(b), 3.9(a) e 3.9(b) que a única frequência que possui amplitude diferente de zero é a frequência associada ao primeiro modo e isso já era previsto, pois as condições iniciais utilizadas na integração numérica são múltiplos de u_1 . Após intervalo de tempo d_2 , a frequência associada ao segundo modo de vibração, u_2 aparece com amplitude diferente de zero e isso ocorre pela transferência de energia entre os modos de vibração do sistema.

Capítulo 4

Conclusão

O trabalho teve como um dos estudos, sistemas lineares, matéria vista no curso de vibrações, onde foram analisados sistemas com um grau de liberdade e com múltiplos graus de liberdade. Para os sistemas com múltiplos graus, foi calculado a sua solução, suas frequências naturais, ω_1 e ω_2 , seus modos de vibração, u_1 e u_2 , também foi feito um estudo na influência das condições iniciais para a forma como o sistema irá vibrar e isso pode ser observado nos gráficos 3.2(a), 3.2(b), 3.3(a), 3.3(b), 3.4(a) e 3.4(b).

Foi estudado também sistemas com atrito seco e isso gerou ao sistema uma não linearidade, visto que ao considerar o atrito seco, tem-se o fenômeno de stick-slip. Foram analisados sistemas com um e múltiplos graus de liberdade.

Para o sistema de um grau de liberdade, o foco foi em entender o fenômeno de stick-slip e foram considerados dois modelos de atrito diferentes para o estudo, ilustrados nas figuras 2.2 e 2.8. Para cada um dos modelos, definiu-se quais as condições para cada uma das fases ocorrerem, uma rotina computacional para encontrar a solução do problema, as influências das condições iniciais de posição e velocidade e também foi feita uma análise energética que estudava se a força de atrito introduzia ou retirava energia do sistema, isso pode ser observado no diagrama de fase 2.7.

Para o sistema com múltiplos graus de liberdade, utilizou-se apenas o modelo de atrito ilustrado pela figura 3.6 e para ele, definiu-se as condições para cada uma das fases de stick e slip, uma rotina computacional para encontrar a solução para as posições, x_1 e x_2 e o objetivo principal do trabalho era analisar a transferência de energia entre os modos de vibração do sistema quando há a transição entre os modos de stick-slip.

A transição de energia entre os modos se dá devido a não linearidade do sistema nesse período, obteve-se os gráficos 3.8(a), 3.8(b), 3.9(a) e 3.9(b), e neles observa-se que os sinais dos corpos antes e depois do fenômeno de stick, possuem para o primeiro caso, somente uma frequência com amplitude diferente de zero e após o fenômeno de stick as duas frequências do sistema aparecem com amplitude diferente de zero.

Além disso, fez-se a integração das equações diferenciais pelo método de Runge-Kutta[1], utilizou-se a transformada de Fourier [5] para mudança do domínio do tempo para a frequência e para isso, escolheu-se a ferramenta Matlab. O relatório foi todo escrito em Latex e todos esses conteúdos foram novos conhecimentos adquiridos no trabalho.

Como próximos passos para o estudo, uma sugestão é de fazer uma análise para saber se a força de atrito introduz ou remove energia no caso do sistema de múltiplos graus de liberdade.

Uma outra sugestão é refazer as análises mudando a forma como a velocidade da superfície se comporta, não sendo constante e aplicando diferentes modelos para a mesma, assim como visto no trabalho.[3]

Finalmente, uma última sugestão seria modelar um sistema com múltiplos graus de liberdade, onde entre todos os corpos e superfícies, considerassem a existência de atrito seco.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Carvalho. *Handbook of numerical methods*.
- [2] R. LIMA. *Differential Equations in Matlab*.
- [3] R. Lima and R. Sampaio. Stick-mode duration of a dry-friction oscillator with an uncertain model. *Journal of Sound and Vibration*, 353:259–271, 2015.
- [4] D. P. RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE. *Engineering vibrations*. 2008.
- [5] SILVA. G. ANDRAD.E. SAMPAIO, R. *Notes in Applied Mathematics*. Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, 2012.