

3. INSTRUMENTAL TEÓRICO

3.1. Descrição das variáveis utilizadas a longo do trabalho

Neste trabalho, utiliza-se os dados da pesquisa sobre Economia Informal Urbana (ECINF), de 1997, realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e que visa captar o papel e a dimensão do setor informal¹ na economia brasileira. Esta pesquisa apresenta resultados para cada uma das unidades da federação e também para as regiões metropolitanas de Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Vitória, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba e Porto Alegre, além do município de Goiânia.

A ECINF foi realizada com uma amostra probabilística de domicílios, obtida em dois estágios de seleção. Na primeira fase, procedeu-se a estratificação dos setores urbanos, considerados as unidades primárias, principalmente por sua posição geográfica; selecionando-os com probabilidades proporcionais ao total de domicílios ocupados existentes nestas unidades no Censo Demográfico de 1991. Adotou-se como unidades secundárias os domicílios que tinham moradores ocupados como trabalhadores por conta-própria ou como empregadores com até cinco empregados, que foram estratificados por grupo de atividade e selecionados com equiprobabilidade em cada um dos estratos. A segunda etapa do processo contou com a estratificação das unidades primárias dentro de cada estrato geográfico, utilizando a média da renda domiciliar de cada setor, convertida em salários mínimos de 1991². Nos setores selecionados foi realizada uma operação de listagem para identificar os domicílios que faziam parte do universo da pesquisa, isto é, aqueles que possuíam moradores ocupados como conta-própria e empregadores com até cinco empregados em atividades não-agrícolas. Além disso, os domicílios foram classificados em grupos de atividade, tomando-se o

¹ Não existe um consenso acerca da definição do setor informal, já que a natureza e composição deste setor dependem do nível de desenvolvimento da região e da estrutura da economia. Na ECINF considera-se pertencente ao setor informal “todas as unidades econômicas de propriedade de trabalhadores por conta-própria e de empregadores com até 5 empregados, moradores de áreas urbanas, sejam elas atividades principais dos seus proprietários ou atividades secundárias”. Porém, esta definição é um tanto limitada, visto que o caráter informal de uma atividade está ligado muito mais a divisão técnica-social do trabalho que ali se estabelece do que ao seu tamanho.

² Segundo a metodologia apresentada pelo IBGE, a utilização da variável renda na estratificação dos setores visou garantir a inclusão na amostra de proprietários do setor informal, provenientes de diversas classes de renda.

cuidado de manter a proporcionalidade na amostra entre os diversos grupos de atividade em cada setor.

A pesquisa procurou abranger todos os domicílios situados nas áreas urbanas selecionadas e o plano amostral foi aplicado de forma independente em cada área, ou seja, em cada região metropolitana e em cada município citado acima. Na determinação do tamanho da amostra de cada uma das áreas, estabeleceu-se como variável de dimensionamento o total de proprietários pertencentes ao setor informal, admitindo um erro de amostragem de 5%, com exceção da região Norte, onde o erro foi de 6%³. A amostra foi composta por 48.934 domicílios espalhados de forma equiproporcional ao longo das regiões, como demonstrado no anexo 1 do presente trabalho. Nestes domicílios, existiam 44.711 unidades econômicas pertencentes ao setor informal⁴.

A investigação das características do funcionamento destas unidades produtivas é feita através da busca de informações sobre os proprietários de negócios informais e de suas unidades produtivas. A pesquisa engloba uma série de variáveis que serão úteis ao longo do trabalho proposto. Em relação a atividade produtiva tem-se informação sobre: local e característica de funcionamento, verificando se o negócio tem caráter permanente, sazonal ou eventual; receita mensal, despesa mensal, investimentos e aquisições, valor do capital utilizado pelas firmas, utilização de crédito nos últimos 3 meses; etc. Além disso, a ECINF disponibiliza informações sobre o rendimento mensal e o nível de instrução das pessoas ocupadas no setor informal e, em relação ao proprietário do negócio, informações mais detalhadas, como idade com que começou a trabalhar e qual o seu trabalho principal.

Entretanto, para calcular uma das variáveis centrais do presente trabalho, o lucro antes da retirada dos custos do capital apresentado no gráfico 1 da seção 2.2, foi necessário utilizar não só os dados da ECINF, mas também os da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) realizada também pelo IBGE em 1997.

³ O erro de amostragem é medido pelo IBGE através do coeficiente de variação. Logo, um erro de amostragem de 5% é o mesmo que um coeficiente de variação de 5%.

⁴ Pode-se verificar como as unidades econômicas estão espalhadas nas regiões brasileiras no anexo 1.

Como na ECINF não há informação sobre o rendimento dos proprietários e sócios que trabalham no negócio, foi necessário estimar qual seria o salário de mercado pago, dado as suas características pessoais, como idade e nível educacional. Além disso, como geralmente outros indivíduos, principalmente parentes dos proprietários, ocupam-se como trabalhadores não-remunerados nestas pequenas empresas, para se obter o valor adicionado do capital, foi necessário excluir do lucro qual o possível rendimento destes trabalhadores. Para realizar a estimação destes custos de oportunidade, utilizou-se as informações da PNAD de 1997 sobre o rendimento dos trabalhadores e as suas características pessoais, e assim como da atividade principal que exercem.

Com estes dados, estimou-se uma regressão log-linear que relaciona o salário recebido pelos trabalhadores a certas características pessoais e da sua atividade. A relação estimada pode ser representada por:

$$E[\ln(Y) / \tilde{X}] = g(\tilde{X})$$

onde, por hipótese:

$$g(\tilde{X}) = \beta_0 + X_1\beta_1 + \dots + X_k\beta_k + \xi$$

A variável dependente na regressão (Y) é o rendimento recebido no trabalho principal e o vetor de variáveis explicativas x contém as características dos trabalhadores e de sua ocupação principal, como sexo, idade, idade ao quadrado, raça, se é migrante ou não, anos de estudo, idade em que começou a trabalhar e setor de atividade no qual exerce seu trabalho principal.

A regressão estimada para os proprietários que trabalham no negócio difere da estimada para os trabalhadores não-remunerados, no sentido que as variáveis explicativas utilizadas em cada uma delas são distintas. Isto ocorre porque a ECINF capta algumas características para os proprietários, como idade em que começou a trabalhar, que não estão disponíveis para os trabalhadores não-remunerados.

Com os coeficientes das regressões calcula-se um valor estimado para o salário de mercado dos proprietários que trabalham no negócio e para os trabalhadores não-remunerados, através da equação:

$$\ln Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + \dots + X_k\beta_k$$

Os parâmetros são os coeficientes obtidos nas regressões e o vetor de variáveis x contém as características dos proprietários e dos trabalhadores não-remunerados presentes na amostra da ECINF.

Após computar o logaritmo dos rendimentos, tira-se a exponencial destes valores, obtendo um valor de rendimento que é considerado o custo de oportunidade dos proprietários e sócios que trabalham no negócio e dos trabalhadores não-remunerados.

O instrumental teórico elaborado a seguir, que procura explicar por que as pequenas empresas brasileiras empregam níveis de capital tão diferentes e apresentam níveis de lucro distintos, baseia-se em duas variáveis: o lucro do capital e o valor do capital empregado pelas firmas. Descreve-se a seguir como foram obtidos os componentes destas duas variáveis.

- Receita total: valor recebido de clientes pela venda de produção própria, revenda de mercadorias e prestação de serviços, no mês de outubro de 1997, sem descontar as despesas no desenvolvimento da atividade.
- Gasto total: valor total das despesas que o empreendedor teve no mês de outubro de 1997, exclusivamente para o desenvolvimento de sua atividade econômica. Neste item, estão incluídos os gastos com a compra de mercadorias para revenda e de matérias-primas; com encargos sociais e com mão-de-obra (não incluiu a retirada de sócios e proprietários); com impostos e taxas pagos a prefeitura, estado e governo federal (não incluiu o imposto de renda); e com a manutenção de equipamentos, máquinas e instalações. Não foi incluído nenhum gasto com aluguel do capital⁵.
- Trabalhadores a domicílio: valor pago aos trabalhadores a domicílio, ou seja, aquelas pessoas que desenvolvem suas tarefas fora do local onde o negócio está estabelecido e não têm vínculo de emprego com o empreendimento.
- Custo de oportunidade dos empreendedores: remuneração dos proprietários e sócios que trabalham no negócio, calculada não só com base nos dados da ECINF, como visto acima.

- Custo de oportunidade dos trabalhadores não-remunerados: possível rendimento dos trabalhadores que atuam como não-remunerados no negócio, também calculado com base nos dados da PNAD de 1997.
- Custo total: valor do total de despesas no mês de outubro, inclui os gastos totais incorridos pela firma, o custo de oportunidade dos seus proprietários e dos trabalhadores não-remunerados e o valor pago a trabalhadores a domicílio. Não inclui os gastos com aluguel do capital.
- Lucro do capital: total de receitas obtidas no mês de outubro, menos o custo total neste mesmo mês. É o lucro das firmas antes de serem retirados os custos com capital. O ideal seria calcular o lucro de longo prazo destas firmas, porém os dados da ECINF permitem apenas o cálculo do lucro mensal.
- Valor do capital empregado pelas firmas: valor dos equipamentos e instalações utilizados na atividade. Investiga-se cinco grandes grupos: imóveis, barracas ou traller; ferramentas ou utensílios de trabalho; móveis e equipamentos; veículos utilizados no negócio e outros. Para calcular o valor total do capital empregado nas firmas, deve-se obter o valor dos equipamentos que são de propriedade das unidades produtivas e os que são de terceiros. Entretanto, os dados da ECINF fornecem apenas o valor do capital usado no processo produtivo, que pertence a empresa e o valor do capital alugado. Uma abordagem grosseira para recuperar o valor do capital de terceiros empregado no negócio seria supor que o preço de aluguel do capital é 1% do seu valor. Como poucas firmas usam capital alugado, menos de 7% da amostra, e o valor médio gasto com aluguel do capital não é muito alto, cerca de R\$331,00, a inclusão do valor do capital total não modifica os resultados das estimações⁵. Devido a isto, e a falta de um método mais adequado para recuperar este valor, o valor do capital de

⁵ Para calcular o valor agregado do capital, deveria-se incluir nos gastos totais a depreciação do capital utilizado pela firma; entretanto a ECINF não nos permite calcular o valor desta depreciação.

⁶ É interessante verificar que a inclusão do valor do capital de terceiros não altera muito a distribuição do valor total de capital. Com a inclusão do capital de terceiros, a média desta distribuição é R\$ 4.798,00 e o desvio-padrão de 19.433, enquanto, com a exclusão deste capital, a distribuição tem média de R\$4.898,00 e desvio padrão de 19.682, sendo o valor máximo e mínimo os mesmos em ambas as distribuições.

terceiros não foi incluído no valor total do capital empregado pelas firmas, sendo este apenas o valor de capital que pertence a unidade produtiva.

A tabela a seguir mostra algumas estatísticas básicas das principais variáveis descritas acima:

Tabela 1 - Estatísticas descritivas dos componentes do lucro e do capital

Variáveis	Número de observações	Média	Desvio-padrão	Máximo	Mínimo
Receita	43.812	1.505	10.214	1.400.000	0
Gastos Totais	27.876	1.262	11.607	1.302.200	0
Custo de oportunidade dos proprietários	44.711	353	209	1.255	19
Custo de oportunidade dos trabalhadores não-remunerados	2.623	225	170	21.639	28
Valor pago aos trabalhadores domésticos	671	316	734	8.000	0
Custo Total	44.711	1.227	9.158	1.303.840	0
Lucro	44.711	258	2.191	148.908	-68.646
Valor do capital	35.810	4.890	19.682	1.002.500	0

Fonte: ECINF, 1997.

Pela tabela 3, observa-se que o lucro médio das empresas no setor informal gira em torno de R\$ 258,00 e que o lucro apresenta certa dispersão, tendo valor máximo e mínimo extremos. Porém, esta dispersão pode ser considerada pequena quando comparada a dispersão do valor do capital. O custo total médio é de R\$1.227,00 e a receita média de R\$1.505,00, estas variáveis também apresentam um valor máximo muito alto. O valor médio do capital existente no negócio é R\$4.870,00, existindo firmas que não empregam capital no seu processo produtivo e outras que utilizam um valor muito alto de capital, chegando a mais de R\$1.000.000,00 em seu máximo. Além disso, observando-se o lucro mensal das pequenas empresas brasileiras, percebe-se que algumas apresentam lucro negativo, isto pode ser decorrente de algum choque exógeno sofrido no período, ou mesmo de uma sazonalidade característica da atividade.

A opção por usar como variável chave o lucro antes da retirada dos custos de capital deve-se ao fato de que as variáveis presentes na ECINF relacionadas a recebimento de crédito por parte do setor informal não permitem determinar se de fato as pequenas empresas brasileiras estão ou não restritas ao crédito.

O universo de empresas pertencentes ao setor informal que utilizam crédito ou financiamento para exercer suas atividades é muito pequeno, cerca de 5% do total da amostra. Além disso, a porcentagem de empresas que ainda possuem dívida que estejam pagando é também pequena, cerca de 15% da amostra total. Estes números indicam que crédito não é um problema para as pequenas empresas brasileiras. Entretanto, esta conclusão é precipitada, visto que existe um grande número de empresas que não respondem a estas perguntas. E estas perguntas não permitem separar aquelas empresas que realmente não necessitam de crédito para exercer suas atividades daquelas que não utilizam crédito pois não conseguem obtê-lo.

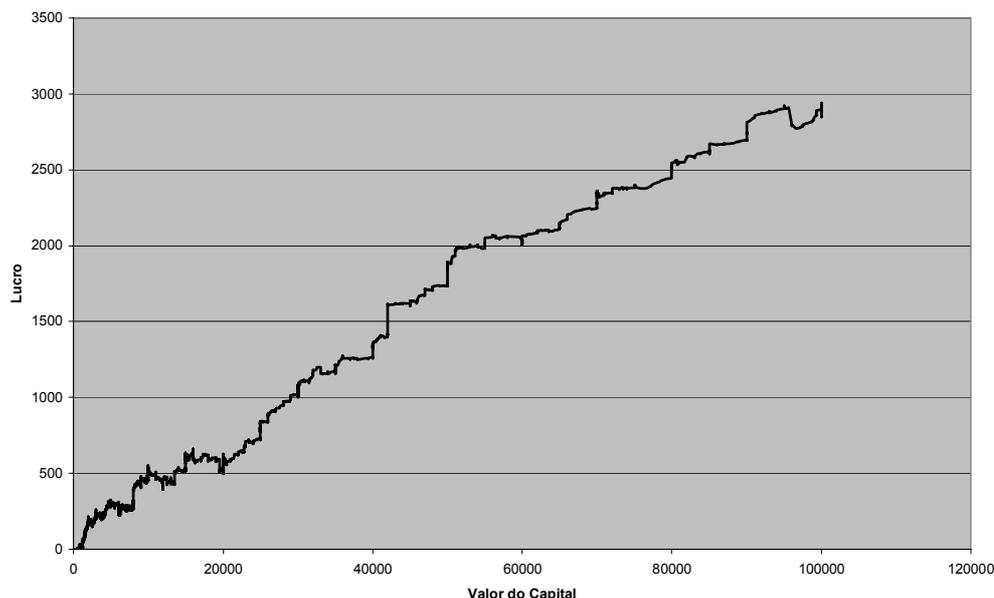
A abordagem que utiliza o lucro antes da retirada dos custos do capital como variável principal parece mais apropriada na medida em que permite identificar se de fato as imperfeições no mercado de crédito podem ser um dos responsáveis pela diversidade de lucro entre as pequenas empresas brasileiras, sendo responsável pela baixa lucratividade e produtividade de algumas empresas. Ela é uma abordagem inicial que procura relacionar o desempenho das pequenas empresas brasileiras às restrições creditícias.

3.2- Modelos Teóricos

As pequenas empresas geralmente são tomadores de preço, pois, devido ao seu pequeno porte, não conseguem ter influência significativa nos preços de mercado. Segundo a teoria microeconômica convencional, firmas tomadoras de preços que atuam nos mesmos mercados e utilizam a mesma tecnologia produtiva deveriam ter o mesmo nível de lucro. Como as firmas estão nos mesmos mercados e possuem a mesma função de produção, elas devem escolher a quantidade de fatores de produção necessária à maximização da função lucro, que também é comum a todas. Assim, as firmas deveriam ter o mesmo nível de lucro e utilizar o mesmo volume de capital no seu processo produtivo. No entanto, ao observar o gráfico abaixo, que mostra a curva de lucro antes da retirada dos custos do capital, percebe-se que isto não está ocorrendo. Este lucro difere entre as pequenas empresas brasileiras, sendo crescente entre elas. Além disso, estas pequenas

empresas possuem tamanhos diferentes.⁷

Gráfico I - Lucro das pequenas empresas brasileiras



Fonte: ECINF, 1997.

Esta diversidade do lucro entre as pequenas empresas pode ser explicada através de uma heterogeneidade produtiva, isto é, um fator que esteja afetando a tecnologia utilizada em cada uma delas, ou por restrições no mercado de crédito. Neste último caso, haveria uma violação de uma das principais hipóteses da teoria microeconômica, a de que os mercados no qual atuam as pequenas empresas são completos.

A capacidade empresarial dos proprietários das pequenas empresas pode estar relacionada a produtividade total dos fatores de produção, que afeta diretamente a função de produção utilizada pela firma, de modo que, quanto maior for a capacidade empresarial, maior será esta produtividade e maior o nível da função de produção. Assim, firmas atuando nos mesmos mercados poderiam empregar quantidades diferentes de insumos, obtendo níveis de lucro diferenciados. Esta heterogeneidade produtiva pode ocorrer tanto entre as empresas de um mesmo grupo como entre grupos de atividade distintos. A tabela

⁷ Neste gráfico, utiliza-se o lucro antes da retirada dos custos com aluguel do capital, isto é, o lucro que representaria o valor agregado do capital. Caso as firmas tivessem a mesma função de produção e atuassem nos mesmos mercados, o gráfico apresentada deveria ter apenas um ponto, visto que elas empregariam a mesma quantidade de capital e teriam o mesmo lucro, e consequentemente, como o preço do capital é o mesmo para todas, elas teriam o mesmo lucro antes da retirada dos custos com capital.

1 mostra a distribuição de tamanho das firmas por grupo de atividade. Todos os grupos possuem uma grande dispersão, sendo que a mediana está muito abaixo da média, o que sugere que as distribuições devem ser assimétricas à esquerda. Por outro lado, os grupos diferem em relação ao valor máximo de capital, em alguns grupos este valor está acima de R\$ 900.000,00 e outros apresentam um valor máximo de capital abaixo de R\$ 300.000,00. A dispersão entre o valor do capital empregado pelas empresas em um mesmo grupo é muito alta, principalmente na indústria de transformação e no setor de serviços técnicos e auxiliares que são aqueles onde se encontram as empresas que empregam o mais alto valor de capital.

Tabela 2 - Características da distribuição de tamanho das firmas por atividade

Grupos de Atividade	Número de observações	Mediana	Média	Desvio-padrão	Máximo	Mínimo
Ind. de transformação	4.576	310	4.703	24.002	955.000	0
Ind. de construção	4.597	100	784	8.616	422.120	0
Comércio	9.735	25	4.305	17.654	710.000	0
Serv. De alojamentos e alimentação	2.849	700	5.180	17.398	253.000	0
Serv. De transporte	3.530	8.000	12.471	18.792	405.100	0
Serv. De reparação, pessoais, domiciliares e de diversão	6.352	200	2.669	14.142	510.000	0
Serv. Técnicos e auxiliares	4.015	200	7.873	32.031	1.002.500	0
Outros serviços	152	0	4.597	9.217	64.500	0

Fonte: ECINF, 1997.

As imperfeições no mercado de crédito, por sua vez, constituem uma heterogeneidade econômica e não produtiva. Estas imperfeições fazem com que as pequenas empresas brasileiras percebam um preço diferenciado para o aluguel do capital, ou tenham um limite máximo de capital disponível. Estes dois tipos de restrição de crédito dependem de algumas características da empresa, como a capacidade do proprietário de fornecer garantias e colateral para o emprestador.⁸ Portanto, a evidência de que as pequenas empresas brasileiras apresentam níveis diversos de lucro pode ser explicada por uma heterogeneidade produtiva ou por uma heterogeneidade econômica.

⁸ A diferença entre restrições quantitativas e restrições relacionadas ao preço pago pelo capital já esteve presente em muitos trabalhos que estudaram a natureza das imperfeições creditícias, como Stiglitz e Weiss (1981), citados no primeiro capítulo.

Neste capítulo são construídos modelos que captam os efeitos das imperfeições no mercado de crédito e da heterogeneidade produtiva na maximização de lucro das firmas. Os quatro primeiros modelos têm como objetivo captar os dois tipos de restrições no mercado de crédito, em diferentes situações. Um quinto e último modelo leva em consideração a heterogeneidade produtiva existente entre as firmas.

Estes modelos estão baseados nas hipóteses clássicas da teoria microeconômica para a firma, ou seja, ela possui uma função de produção côncava, estritamente crescente e contínua⁹. Esta função de produção depende da quantidade utilizada de cada fator de produção e da tecnologia adotada, sendo representada por $f(\tilde{x}, z)$, onde \tilde{x} é o vetor de insumos, como trabalho e demais matérias primas, e z é o capital usado pela firma. Além disso, $f(0) = 0$, isto é, quando não há nenhum fator de produção, o nível de produto é nulo. Dado esta característica da função de produção, a função custo da firma será convexa, contínua e igual a zero, quando $y = 0$. Esta função terá o seguinte formato: $C(\tilde{w}, q, y) = \tilde{w} \cdot \tilde{x}(\tilde{w}, y) + q \cdot z(q, y)$, onde \tilde{w} representa o vetor com os preços dos insumos, q o preço de aluguel do capital e y o nível de produto. Para simplificar os cálculos, o preço do produto será normalizado para um.

3.2.1. Restrição quantitativa ao volume de capital

As imperfeições no mercado de crédito fazem com que a firma j não opere em seu projeto mais produtivo, pois ela não consegue alugar o capital necessário a implementação de tal projeto. Neste primeiro modelo, as restrições no mercado de crédito impõe um limite máximo para o gasto com aluguel de capital. Como o

⁹ Se as pequenas empresas têm baixa lucratividade porque não conseguem usufruir dos retornos crescentes de escala que possuem, então a sua função de produção é convexa. Mas, se elas têm retornos decrescentes de escala e mesmo assim não alcançam a lucratividade máxima, devido a inúmeras barreiras ao seu desenvolvimento, então a pequena empresa apresenta uma função de produção côncava. Logo, poderia-se adotar a hipótese de uma função de produção convexa ao invés de uma função de produção côncava, o que alteraria alguns resultados deste capítulo. No entanto, prefere-se manter a hipótese comumente adota na teoria microeconômica tradicional, uma função de produção côncava, captando apenas o efeito das imperfeições no mercado de crédito ou da heterogeneidade produtiva sobre a lucratividade das firmas. Além disso, poderia-se adotar uma função de produção linear. Neste caso, as firmas estariam obtendo lucro zero, independentemente do montante de capital utilizado. As restrições creditícias não seriam efetivas, pois a firma poderia utilizar qualquer valor de capital no processo produtivo, obtendo sempre a mesma produtividade marginal do capital e tendo a mesma eficiência.

preço do capital é determinado pelo mercado, podendo ser considerado constante, esta restrição se dá sobre a quantidade de capital que a firma j pode obter.

Neste contexto, o problema de maximização do lucro da firma j pode ser descrito como:

$$\text{Máx } y - \tilde{w}\tilde{x} - qz \quad \text{s.a} \quad \begin{array}{l} f(\tilde{x}, z) \geq y \\ qz \leq r_j \end{array}$$

onde r_j representa o limite de gastos com aluguel do capital que a firma j pode ter, este limite será uma função das características da firma j .

As firmas estarão restritas ao crédito se o aluguel do capital é exatamente igual a r_j , isto é, se o valor do capital empregado pela firma é igual a razão entre r_j e o preço de aluguel deste capital. Como o preço do capital é dado pelo mercado, temos uma restrição quantitativa ao volume de capital empregado pela firma. Se a firma conseguir aumentar r_j , o capital empregado no processo produtivo será maior.

Este problema é resolvido em duas etapas. Na primeira, soluciona-se o problema de maximização com relação ao vetor de insumos, \tilde{x} , encontrando as demandas ótimas para cada um dos insumos, condicionadas a escolha de z , $x_i^*(z)$, $i=1, \dots, n$. Estas demandas ao serem substituídas na função lucro maximizada, geram uma função que depende apenas de z , denominada de lucro do capital e que representa seu valor agregado.

A primeira etapa do problema pode ser descrita como:

$$L^* = \text{Máx}_{x_i \geq 0} y - \tilde{w}\tilde{x} \quad \text{s.a} \quad y \leq f(\tilde{x}, z)$$

Como a função de produção é estritamente crescente, a firma sempre obtém o maior nível de produto para dada quantidade de fatores de produção, portanto: $y = f(\tilde{x}, z)$. Logo, podemos descrever esta primeira etapa como:

$$L^* = \text{Máx } f(\tilde{x}, z) - \tilde{w}\tilde{x}$$

Resolvendo este problema de maximização, temos a seguinte condição:

$$f_{x_i} = w_i, i = 1, \dots, n$$

A solução deste problema fornece as demandas de cada um dos insumos, condicionadas ao volume de capital empregado pela firma. Com estas demandas, obtém-se o lucro do capital, representado por:

$$L^* = f(z, \tilde{x}(z)) - \tilde{w}\tilde{x}(z) = g(z) \quad (1)$$

Na segunda etapa do problema, maximiza-se $g(z)$ levando em consideração a restrição creditícia e os custos de aluguel do capital.

$$L^{**} = \underset{z \geq 0}{\text{Máx}} g(z) - qz \quad \text{s.a.} \quad qz \leq r_j$$

Como considera-se que existem imperfeições no mercado de crédito, tem-se que: $qz = r_j$, ou seja, a restrição é efetiva. Além disso, existe um valor máximo para r_j , a partir do qual a desigualdade $qz \leq r_j$ se torna estrita. A partir deste ponto, a firma passa a não sofrer mais restrição no mercado de crédito¹⁰.

A resolução deste problema de maximização nos fornece duas equações:

$$g_z = f_z = (1 + \lambda)q \quad (2)$$

onde λ é o preço-sombra (ou multiplicador de *lagrange*) do problema de maximização acima, sendo $\lambda = \frac{\partial L^{**}}{\partial r_j}$ e $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = f_z$, que representa a produtividade marginal do capital. E, a segunda:

$$z = \frac{r_j}{q} \quad (3)$$

Portanto, o valor da produtividade marginal do capital dado pela equação 2 varia entre as firmas, dependendo do limite de gastos de aluguel do capital. Assim, as firmas que atuam em um mercado de crédito imperfeito e utilizam a mesma tecnologia, operam com montantes diferentes de capital, tendo um lucro do capital diferenciado.

Para verificar como a produtividade marginal do capital se comporta entre as firmas com diferentes restrições creditícias, deve-se observar como esta

¹⁰ Para resolver o problema de maximização com desigualdade usando Kuhn-Tucker, deve-se obedecer a condição de Slater, que nos diz que a partir de certo momento a desigualdade não é mais uma igualdade, sendo positiva ou negativa.

produtividade varia com r_j . Derivando a equação 2, que representa a produtividade marginal do capital, em relação a r_j , tem-se:

$$\frac{\partial f_z}{\partial r_j} = f_{zz} \frac{\partial z}{\partial r_j}, \text{ onde } f_{zz} = \frac{\partial^2 f(z, x(z))}{\partial z^2}$$

Derivando a equação 3 em relação a r_j , obtém-se:

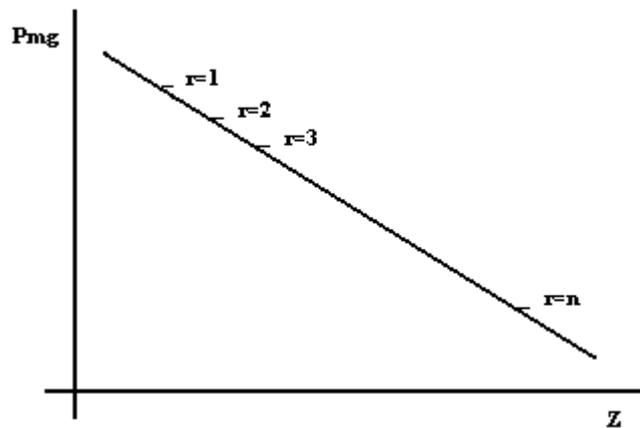
$$\frac{\partial z}{\partial r_j} = \frac{1}{q} > 0 \quad (4)$$

E portanto:

$$\frac{\partial f_z}{\partial r_j} = \frac{f_{zz}}{q}$$

Assim, a produtividade marginal do capital cai a medida que aumenta r_j , uma vez que considera-se que a função de produção é côncava. Isto ocorre porque a firma tem rendimentos decrescentes nos fatores de produção, logo, a medida que aumenta o valor do capital empregado no processo produtivo, cai sua produtividade marginal.

Como o valor do capital empregado (z) aumenta a medida que a restrição creditícia é flexibilizada e a sua produtividade marginal (Pmg) cai, a curva desta produtividade para firmas que enfrentam restrições quantitativas no mercado de crédito, empregando diferentes valores de capital, tem o seguinte formato:



Este gráfico representa também, como a lucratividade marginal do capital, ou seja, a derivada da curva do lucro do capital em relação ao valor do capital, varia entre as firmas que enfrentam diferentes restrições no mercado de crédito. Isto ocorre porque, quando se obtém a curva que relaciona o lucro do capital para estas firmas ao valor de capital empregado por elas e calcula-se a derivada ao longo desta curva, é captado o seguinte efeito:

$$\frac{\partial L^*}{\partial z} = g_z = f_z$$

Portanto, a lucratividade marginal do capital das firmas é exatamente igual a produtividade marginal do capital.

Ao observar as firmas que enfrentam restrições creditícias é de se esperar que a lucratividade marginal do capital seja maior para aquelas que são mais restritas, isto é, para as firmas que empregam menos capital. Estas não conseguem obter o volume de capital desejado, mesmo tendo uma produtividade marginal do capital alta quando comparadas às demais. Este resultado advém da hipótese de que as firmas possuem uma função de produção côncava. Caso fosse utilizada uma função de produção convexa, a curva que relaciona a produtividade marginal do capital ao valor do capital empregado por cada uma das firmas seria crescente.

O lucro médio do capital é dado por:

$$Lme = \frac{g(z)}{z}$$

Derivando esta expressão em relação a r_j , tem-se:

$$\frac{\partial Lme}{\partial r_j} = \frac{g_z z - g(z)}{qz^2}$$

O lucro médio do capital será decrescente em r_j , como o lucro marginal, se $g_z < \frac{g(z)}{z}$, ou seja, se a lucratividade marginal do capital for menor que o lucro médio. Então, relacionamos o lucro médio à lucratividade marginal, para determinar sobre quais condições a desigualdade acima se verifica.

$$Lme = Lmg \frac{1}{e}$$

onde:

$$e = \frac{g_z z}{g(z)} \quad (5)$$

e Lmg representa a lucratividade marginal do capital.

Portanto, o lucro médio será menor ou maior que a lucratividade marginal dependendo da elasticidade do lucro do capital em relação ao volume de capital. Caso esta elasticidade seja menor que um, o lucro médio é maior que o lucro marginal e então a curva que relaciona o lucro médio do capital ao valor do capital empregado pelas firmas é decrescente, como no caso da lucratividade marginal¹¹.

A hipótese de que a elasticidade do lucro do capital em relação ao capital é menor que um é bastante razoável, pois indica que variações percentuais no estoque de capital causam pequenas alterações percentuais no lucro do capital. Esta elasticidade pode também ser maior que um, isto é, o lucro do capital pode ser bastante sensível às variações no volume de capital empregado pela firma. Neste caso, o lucro médio será crescente em r_j e a curva para o lucro médio do capital de firmas com diferentes volumes de capital será crescente, e não decrescente como a curva apresentada para o lucro marginal.

¹¹ Considera-se que esta elasticidade é positiva, pois a lucratividade marginal do capital e o valor do capital são positivos, e o lucro antes da retirada dos custos com capital deve ser positivo, pois caso este lucro de longo prazo seja negativo, as firmas tenderão a sair do mercado.

Como neste modelo adota-se a hipótese de uma função de produção côncava, estritamente crescente, as funções de lucro do capital também são côncavas e crescentes, sendo a elasticidade do lucro do capital em relação ao valor do capital baixa e, conseqüentemente, o lucro médio é decrescente em relação a este valor.

3.2.2. Restrição creditícia afetando o preço do capital

Neste segundo modelo, a restrição de crédito não afeta o quanto a firma pode alugar de capital, mas incide sobre o preço de aluguel do capital, ou seja, cada firma percebe um preço diferenciado. O problema de maximização do lucro da firma é dado por:

$$\text{Máx } y - \tilde{w}\tilde{x} - q_j z \quad \text{s.a.} \quad y \leq f(\tilde{x}, z)$$

onde q_j representa o preço do aluguel do capital para a firma j . Obviamente, a escolha de q_j está relacionada às características da firma j . Como a função de produção é estritamente crescente e a firma sempre obtém o nível máximo de produto, dada a quantidade de insumos utilizadas e a tecnologia, tem-se que: $y = f(\tilde{x}, z)$.

Novamente, resolve-se o problema de maximização acima em dois passos. Primeiro, maximiza-se o lucro do capital em relação aos fatores de produção presentes no vetor \tilde{x} , obtendo-se as demandas ótimas de cada um destes insumos, condicionadas à z . Depois, maximiza-se o lucro do capital, levando-se em consideração seus custos de aluguel.

A primeira etapa deste problema pode ser descrita como:

$$L^* = \underset{x_i \geq 0}{\text{Máx}} f(\tilde{x}, z) - \tilde{w}\tilde{x}$$

Ao resolver este problema de maximização, encontra-se as demandas ótimas de cada um dos fatores, condicionadas a z , que devem satisfazer a seguinte condição: $f_{x_i} = w_i, i = 1, \dots, n$.

Substituindo as demandas ótimas na função objetivo do problema, encontra-se o lucro do capital que será representado por:

$$L^* = f(z, \tilde{x}(z)) - \tilde{w}\tilde{x}(z) = g(z) \quad (6)$$

Na segunda etapa, resolve-se o seguinte problema de maximização:

$$L^{**} = \underset{z \geq 0}{\text{Máx}} g(z) - q_j z$$

A solução deste problema de maximização nos dá a seguinte expressão:

$$g_z = f_z = q_j \quad (7)$$

O valor da produtividade marginal do capital será igual ao preço do aluguel do capital para a firma j . Como o preço cobrado pelo aluguel do capital é diferente para cada uma das firmas, a produtividade marginal do capital difere entre elas, como no primeiro modelo. Deve-se também verificar como o volume de capital empregado no processo produtivo varia entre as firmas com diferentes q_j . Para isso, deriva-se a equação 7 em relação a q_j :

$$f_{zz} \frac{\partial z}{\partial q_j} = 1$$

Logo: $\frac{\partial z}{\partial q_j} = \frac{1}{f_{zz}} < 0$, visto que a função de produção é côncava¹².

Esta expressão mostra que a quantidade utilizada de capital diminui a medida que seu preço aumenta.

Derivando também o lucro do capital em relação a q_j , tem-se que:

$$\frac{\partial g(z)}{\partial q_j} = g_z \frac{\partial z}{\partial q_j} < 0$$

Assim, o lucro do capital também diminui com o aumento do preço do aluguel do capital. Este resultado já era esperado, uma vez que o aumento do preço do capital diminui o valor do mesmo usado pela firma, o que causa uma queda no lucro do capital. Portanto, firmas que enfrentam preços de aluguel do capital maiores empregam um menor montante de capital, tendo por consequência um menor lucro do capital.

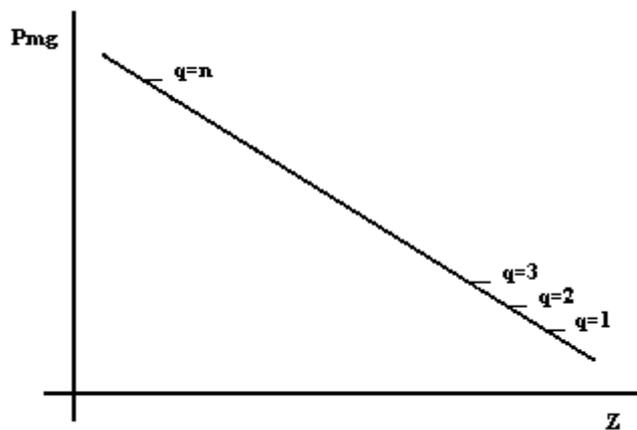
Derivando agora a equação 7 em relação a q_j , vê-se como a produtividade marginal varia entre as firmas que enfrentam preços de aluguel do capital diferenciados.

¹² Caso a função de produção fosse convexa, as firmas estariam tão restritas ao crédito que um aumento do preço do capital levaria ao aumento da demanda por capital.

$$\frac{\partial f_z}{\partial q_j} = 1$$

Assim, a produtividade marginal do capital varia exatamente na mesma proporção e na mesma direção de um aumento de q_j , isto ocorre porque o valor da produtividade marginal do capital se iguala ao preço de aluguel do capital para cada uma das firmas.

Como o valor empregado do capital cai para firmas que enfrentam preços



maiores de aluguel do capital e a produtividade marginal aumenta, temos uma relação decrescente entre o valor do capital (z) e a sua produtividade marginal (Pmg) para diferentes preços de aluguel do capital, como mostra o gráfico abaixo:

Como ocorria no modelo anterior, este gráfico também representa como a lucratividade marginal varia entre as firmas que observam diferentes preços para o aluguel do capital. Ao obter-se a derivada da curva de lucro do capital para estas firmas em relação ao valor do capital, observa-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial L^*}{\partial z} = f_z = q_j$$

Novamente, a lucratividade marginal do capital é igual a produtividade marginal do capital, sendo decrescente entre as firmas que sofrem restrições no mercado de crédito.

A variação no lucro médio do capital devido às alterações no preço de aluguel do capital é dada por:

$$\frac{\partial Lme}{\partial q_j} = \frac{\frac{\partial z}{\partial q_j} (g_z z - g(z))}{z^2} \quad (8)$$

Usando a equação 7, tem-se que:

$$\frac{\partial Lme}{\partial q_j} = \frac{\frac{\partial z}{\partial q_j} (q_j z - g(z))}{z^2} \quad (9)$$

Mas:

$$q_j z - g(z) = -L^{**},$$

que representa o oposto do lucro final da firma.

Considerando um determinado preço de capital, a firma sempre irá escolher um valor de capital que gere um lucro positivo ou no mínimo nulo. Assim, o termo entre parênteses na equação 9 não deve ser negativo, já que a firma vai escolher o valor de capital compatível com um lucro positivo. Como $\frac{\partial z}{\partial q_j} < 0$, o

lucro médio do capital varia de forma positiva com o preço do aluguel do capital. Como o valor do capital empregado pela firma diminui e o lucro médio do capital cresce quando há um aumento de q_j , a relação entre lucro médio do capital e o seu valor empregado pela firma será decrescente, como acontecia no caso do lucro marginal do capital. Logo, um gráfico que relacione o lucro médio do capital ao capital empregado pela firma terá o mesmo formato do gráfico apresentado anteriormente para o lucro marginal do capital.

Observa-se que neste caso as firmas evitam ter lucro negativo, e o lucro médio é decrescente em relação ao valor de capital empregado pelas firmas. Assim, as firmas irão operar somente na parte côncava da curva de lucro do capital, não situando-se nas partes convexas, como pode ocorrer no modelo

anterior. No presente modelo, a função lucro do capital é côncava e crescente, não havendo partes convexas.

Os dois modelos apresentados até aqui representam as situações nas quais existe alguma imperfeição no mercado de crédito no qual atuam as pequenas empresas brasileiras, o que faz com que o preço de aluguel do capital não seja o mesmo para todas as firmas ou que exista um limite máximo de capital que cada uma pode alugar. No entanto, o mercado de crédito no qual atuam as pequenas empresas brasileiras pode apresentar algumas peculiaridades, como o fato do fornecedor de capital ser também seu fornecedor de matérias-primas ou seu cliente, o que faz com que o preço pago pelo produto ou cobrado pelo insumo dependa do montante de capital emprestado para a firma. De fato, analisando os dados, percebe-se que 10% das pequenas empresas brasileiras tomam empréstimos com seus fornecedores e 10% tomam empréstimos com outras empresas e pessoas, incluindo seus clientes. Logo, a hipótese de que o mercado de crédito para as pequenas empresas brasileiras está relacionado ao mercado de insumo ou de produto é bastante razoável.

Esta idéia do mercado de crédito associado a outros mercados esteve presente em diversos trabalhos, principalmente naqueles que estudaram o mercado de crédito dos pequenos proprietários rurais em economias menos desenvolvidas.

Diversos estudos, como Braverman e Stiglitz (1982), pautam que uma característica notável nas economias agrárias menos desenvolvidas, que influencia diretamente as relações produtivas e a própria produção, é a ligação entre terra, trabalho, crédito e o mercado de produto. Segundo estes autores, nas agriculturas menos desenvolvidas, os donos da terra geralmente são os emprestadores para os seus arrendatários. Os proprietários podem assegurar o pagamento do empréstimo através de obrigações impostas no mercado de produto ou de insumo, exigindo, por exemplo, que parte da produção do arrendatário se destine ao pagamento dos empréstimos. Além disso, ao facilitar o acesso ao crédito de seus arrendatários, o proprietário pode incentivar o aumento da produtividade destes. Como geralmente o contrato entre o dono da terra e o arrendatário se dá através da divisão da produção, o dono da terra, a partir do controle do mercado de crédito, pode estar aumentando os seus lucros.

Por outro lado, Hoff e Stiglitz (1993) entendem este mecanismo que relaciona o mercado de crédito a outros mercados como um meio de amenizar os problemas de cumprimento dos contratos de empréstimos. Por exemplo, ao relacionar o mercado de produto ao de crédito, a produção pode servir como garantia para o empréstimo, como colocado no estudo anterior. Já Bell e Srinivasan (1989) estudam o caso em que o mercado de crédito está relacionado ao mercado de produção. Neste caso, o cliente para o qual o fazendeiro vende a sua produção estabelece em contrato um preço a ser pago por esta, geralmente mais baixo que o de mercado, em troca, o fazendeiro tem garantida uma parte dos empréstimos necessários a produção.

Diversos outros trabalhos também investigam esta relação, como Gangopadhyay e Sengupta (1986), que formulam um modelo para verificar o impacto da ligação entre o mercado de terras e o mercado de crédito sobre a taxa de juros; ou Bravernan e Snirivasan (1984), que estudam a ligação entre o mercado de terras, de trabalho e de crédito em um contexto no qual o pagamento pela terra arrendada se dá através da entrega de uma parte da produção; ou ainda Bell, Snirivasan e Udry (1997), citados no primeiro capítulo, que verificam o impacto da ligação entre o mercado de crédito e o mercado de produto sobre o volume de empréstimos que os pequenos proprietários conseguem obter.¹³ Com base nestes trabalhos, os modelos apresentados a seguir relacionam um mercado de crédito imperfeito ao mercado de insumo e de produto.

3.2.3. Mercado de crédito e mercado de insumos interligados

Neste novo modelo, o preço de um dos insumos utilizado pela firma está ligado ao valor máximo imposto para o aluguel do capital. Temos então uma restrição quantitativa sobre o capital, afetando não só o volume de capital usado pela firma, mas também o preço de um dos insumos. Isto ocorre porque o fornecedor de determinado insumo para a firma j é também o fornecedor de capital para esta firma, de modo que o preço cobrado pelo insumo se torna uma

¹³ Para uma revisão dos pontos mais importantes sobre a ligação entre o mercado de crédito e outros mercados, ver BARDHAN A., 1997, p. 30.

forma de garantia do empréstimo. Assim, quanto maior for o volume de capital fornecido, maior será o preço pago pelo insumo.¹⁴

O problema de maximização da firma j pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Máx } y - \tilde{w}_1 \tilde{x}_1 - w_2(r_j)x_2 - qz \quad \text{s.a.} \quad & f(\tilde{x}_1, x_2, z) \geq y \\ & qz \leq r_j \end{aligned}$$

Do mesmo modo que no primeiro modelo, r_j representa o limite máximo de gastos com aluguel de capital em que a firma pode incorrer. Como o preço de aluguel do capital é dado pelo mercado, este limite se torna uma restrição quantitativa ao montante de capital empregado pela firma j . Neste modelo, o preço do insumo x_2 está relacionado a restrição imposta ao aluguel do capital. Quanto maior o volume de capital empregado pela firma, maior será o preço cobrado pelo insumo x_2 , de modo que o preço deste insumo (w_2) tem uma relação positiva com r_j .

$$\frac{\partial w_2}{\partial r_j} > 0 \quad (10)$$

Este problema de maximização é resolvido em dois passos, exatamente como nos dois primeiros modelos. Primeiro, maximiza-se o lucro antes da retirada dos custos de aluguel do capital em relação aos insumos presentes no vetor x_1 e em relação a x_2 , obtendo-se as demandas ótimas de cada um deles, condicionadas ao volume de capital empregado pela firma.

Como a função de produção da firma é estritamente crescente, tem-se que $y = f(\tilde{x}_1, x_2, z)$, e a primeira etapa da solução do problema de maximização pode ser descrita como:

$$L^* = \underset{x_i \geq 0}{\text{Máx}} f(\tilde{x}_1, x_2, z) - w_2(r_j)x_2 - \tilde{w}_1 \tilde{x}_1$$

A resolução deste problema nos fornece as demandas ótimas de cada um dos insumos, condicionadas a z , que ao serem substituídas na função objetivo fornece o lucro do capital, que pode ser representado por:

¹⁴ As imperfeições no mercado de crédito poderiam se dar em relação ao preço de aluguel do capital. Neste caso, o preço do insumo x_2 estaria relacionado não ao gasto total com aluguel do capital, mas ao preço de aluguel do capital. Os resultados seriam iguais aos apresentados no segundo modelo, com a lucratividade marginal sendo decrescente em relação ao valores de capital, assim como o lucro médio.

$$L^{**} = f(\tilde{x}_1(z), x_2(z), z) - w_2(r_j)x_2(z) - \tilde{w}_1\tilde{x}_1(z) = g(z)$$

Na segunda etapa do problema, maximiza-se este lucro do capital levando em consideração os custos deste e a restrição creditícia. Tem-se então o seguinte problema:

$$L^{**} = \underset{z \geq 0}{\text{Máx}} g(z) - qz \quad \text{s.a.} \quad qz \leq r_j$$

A solução deste problema de maximização fornece as duas equações abaixo e mostra que existe um r máximo, a partir do qual a firma deixa de estar restrita ao crédito. Em outras palavras, existe um ponto a partir do qual os gastos com aluguel de capital da firma j é sempre menor que seu limite.

$$f_z = (1 + \lambda)q \quad (11)$$

Sendo que λ é o multiplicador de *lagrange* do problema de maximização acima, e portanto igual a $\frac{\partial L^{**}}{\partial r_j}$. A outra equação é a seguinte:

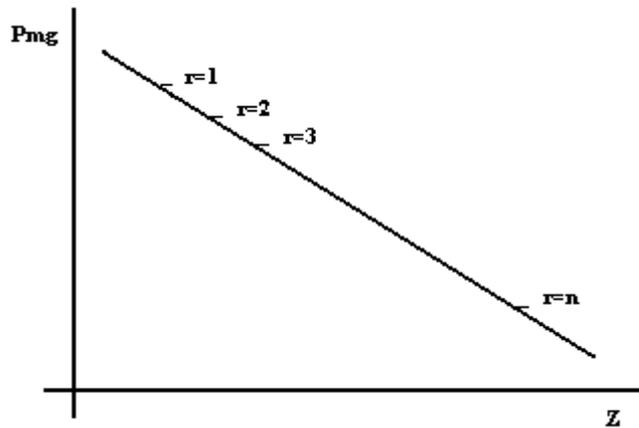
$$z = \frac{r_j}{q} \quad (12)$$

Novamente, tem-se que a produtividade marginal do capital, representada por f_z , não é constante entre as firmas, variando de acordo com o limite máximo imposto ao aluguel do capital. Assim, a lucratividade marginal e o lucro médio do capital também devem variar com o limite imposto ao valor de aluguel do capital. Além disso, a produtividade marginal do capital é representada pela equação 11, e sua derivada em relação a r_j é dada por:

$$\frac{\partial f_z}{\partial r_j} = \frac{f_{zz}}{q} < 0$$

Portanto, aumentos em r_j estão associados a uma menor produtividade marginal do capital. Este resultado era esperado, visto que a firma j opera com rendimentos marginais nos fatores de produção, assim, quando o volume de capital utilizado pela firma aumenta, sua produtividade marginal diminui. Como acontecia nos modelos anteriores, a lucratividade marginal do capital é igual a produtividade marginal do capital, sendo decrescente entre as firmas.

A produtividade marginal do capital (Pmg) é decrescente em r_j e o volume de capital empregado (z) é crescente, desde modo a relação entre produtividade



marginal do capital e o volume de capital será decrescente para firmas com diferentes níveis de restrições quantitativas ao capital, como representado pelo gráfico abaixo¹⁵.

Observando a relação entre o lucro médio do capital e r_j , tem-se:

$$\frac{\partial \left(\frac{g(z)}{z} \right)}{\partial r_j} = \frac{\partial g(z)}{\partial r_j} \frac{1}{z} - \frac{\partial z}{\partial r_j} \frac{L}{z^2} \quad (13)$$

Mas:

$$\frac{\partial g(z)}{\partial r_j} = g_z \frac{\partial z}{\partial r_j} - \frac{\partial w_2(r_j)}{\partial r_j} x_2(z)$$

¹⁵ Este resultado é condicional ao pressuposto de que as firmas utilizam uma função de produção côncava. Caso esta função de produção seja convexa, aumentos em r_j estarão associados a uma maior lucratividade do capital e a curva que relaciona a produtividade marginal ao valor do capital utilizado pelas firmas será crescente.

$$\frac{\partial z}{\partial r_j} = \frac{1}{q}$$

Logo:

$$\frac{\partial Lme}{\partial r_j} = \frac{g_z - \left(\frac{g(z)}{z}\right)}{p} - \frac{\partial w_2(r_j)}{\partial r_j} x_2(z) \quad (14)$$

Pela equação 10, sabe-se que o segundo termo da expressão acima é negativo. Portanto, para que o lucro médio decresça com o aumento de r_j , como ocorria com o lucro marginal, é necessário que o lucro médio seja maior que o lucro marginal, sendo que esta situação ocorre quando a elasticidade do lucro do capital em relação ao volume de capital é menor que um, como pode ser visto pela equação 5.

Neste caso, o lucro médio do capital decresce com o aumento do limite ao aluguel do capital e o capital empregado por cada uma das firmas cresce. Assim, o gráfico que relaciona o lucro médio do capital ao valor do capital empregado por cada uma das firmas é igual ao gráfico apresentado para a produtividade marginal do capital. Esta situação pode ocorrer quando a função lucro do capital é côncava e crescente, como supõe-se modelo.

No caso em que a elasticidade do lucro do capital em relação ao capital empregado for maior que um, o lucro médio varia de forma positiva com r_j , desde que a diferença entre o lucro médio e o lucro marginal do capital supere o componente negativo da equação 14.

3.2.4. Mercado de crédito e de produto interligados

Neste quarto modelo, o fornecedor de empréstimos para a firma j é o seu cliente, de modo que quanto maior o volume de capital utilizado pela firma, menor será o preço pago pelo seu produto. A restrição creditícia atua não só sobre a quantidade de capital empregada pela firma, mas também sobre o preço pago ao seu produto. Neste contexto, o problema de maximização de lucro para a firma j pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \text{Máx } p(r_j)y - \tilde{w}\tilde{x} - qz \quad \text{s.a} \quad & f(\tilde{x}, z) \geq y \\ & qz \leq r_j \end{aligned}$$

Onde $p(r_j)$ representa o preço do produto da firma j . Como já foi dito anteriormente, quanto maior for o valor de aluguel do capital para a firma, isto é, quanto maior for r_j , menor será o preço pago por seu produto, de modo que tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial p(r_j)}{\partial r_j} < 0 \quad (15)$$

Novamente, resolve-se o problema de maximização do lucro da firma em dois passos, considerando o fato de que $y = f(\tilde{x}, z)$, dado que a função de produção é estritamente crescente. Na primeira etapa, soluciona-se o seguinte problema:

$$L^* = \underset{x_i \geq 0}{\text{Máx}} p(r_j) f(\tilde{x}, z) - \tilde{w}\tilde{x}$$

A resolução deste problema fornece as demandas ótimas de cada um dos insumos, condicionadas ao volume de capital empregado pela firma, que ao serem substituídas na função objetivo fornece o lucro do capital, descrito abaixo:

$$L^* = p(r_j) f(z, \tilde{x}(z)) - \tilde{w}\tilde{x}(z) = g(z) \quad (16)$$

Na segunda etapa, maximiza-se a função $g(z)$ em relação a z , levando em consideração a restrição creditícia e os custos de aluguel do capital. Esta etapa do problema pode ser representada por:

$$L^{**} = \underset{z \geq 0}{\text{Máx}} g(z) - qz \quad \text{s.a.} \quad qz \leq r_j$$

A solução desta expressão gera duas equações, sendo a primeira:

$$g_z = p(r_j) f_z = (1 + \lambda)q \quad (17)$$

onde λ é o multiplicador de *lagrange* da função acima, e será igual a $\frac{\partial L^{**}}{\partial r_j}$.

E a segunda:

$$z = \frac{r_j}{q} \quad (18)$$

Mais uma vez, o valor da produtividade marginal do capital difere entre as firmas com diferentes limites para o aluguel de capital. Isto ocorre devido aos

rendimentos marginais decrescentes do capital, que fazem com que o volume de capital aumente com r_j e, conseqüentemente, a produtividade marginal do capital caia.

No presente modelo, a lucratividade marginal do capital é igual ao valor da produtividade marginal do capital, cuja a variação em relação a r_j é dada por:

$$\frac{\partial g_z}{\partial r_j} = p(r_j) \frac{f_{zz}}{q} + \frac{\partial p}{\partial r_j} f_z < 0$$

Como a função de produção apresenta retornos decrescentes nos fatores de produção, aumentos de r_j estão associados a uma elevação do volume de capital e, em decorrência, a uma queda da produtividade marginal do capital. Além disso, o preço do produto varia de forma negativa com r_j , assim sendo, a lucratividade marginal do capital decresce quando ocorrem aumentos em r_j ¹⁶

As variações no lucro médio do capital devido a alterações em r_j são dadas por:

$$\frac{\partial \left(\frac{g(z)}{z} \right)}{\partial r_j} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial r_j} - \frac{\partial z}{\partial r_j} \frac{g(z)}{z} \right)$$

Mas:

$$\frac{\partial g(z)}{\partial r_j} = \frac{\partial p(r_j)}{\partial r_j} f(\tilde{x}(z), z) + p(r_j) f_z \frac{\partial z}{\partial r_j}$$

$$g_z = p(r_j) f_z$$

Logo:

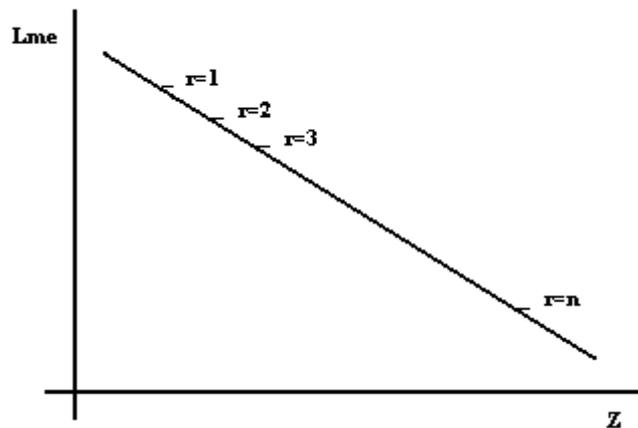
$$\frac{\partial \left(\frac{g(z)}{z} \right)}{\partial z} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial p(r_j)}{\partial r_j} f(z, x(z)) + \frac{\partial z}{\partial r_j} \left(g_z - \frac{g(z)}{z} \right) \right) \quad (19)$$

Sabemos pela equação 15 que o preço do produto varia de forma negativa com r_j , o que faz com que o primeiro termo da equação 19 seja negativo. Portanto, para que o lucro médio do capital varie de forma negativa com r_j é necessário que

¹⁶ Novamente, este resultado é condicional a hipótese de que a função de produção é côncava. No caso em que esta função for convexa, a lucratividade marginal do capital poderá variar de forma positiva com r_j .

este seja maior que o lucro marginal. Esta última condição ocorre quando a elasticidade do valor agregado do capital, em relação ao volume de capital, é menor que um, como pode ser visto pela equação 5.

Como o lucro médio varia de forma negativa com r_j e o volume de capital de



forma positiva, a relação entre o lucro médio e o volume de capital, para firmas que enfrentam diferentes restrições creditícias, é decrescente, como pode-se observar no gráfico abaixo.

3.2.5. Heterogeneidade produtiva

Este último modelo procura verificar como a heterogeneidade produtiva afeta o problema de maximização do lucro de determinada firma. Nele, cada firma tem um diferencial, como a capacidade empresarial do seu proprietário, que afeta a produtividade total dos fatores. Assim, cada firma apresenta uma produtividade total dos fatores específica, que influencia diretamente a sua função de produção.

O problema de maximização de lucro da firma j neste contexto é dado por:

$$\text{Máx } A_j f(\tilde{x}, z) - \tilde{w}\tilde{x} - qz,$$

onde A_j representa a produtividade total dos fatores para a firma j . Esta produtividade pode estar relacionada a capacidade dos proprietários da firma j em gerenciar o negócio.

Como nos demais modelos, o problema de maximização é solucionado em duas etapas. Inicialmente, maximiza-se o lucro antes da retirada dos custos do capital em relação aos insumos presentes no vetor x , encontrando as demandas ótimas destes insumos, condicionadas ao volume de capital empregado pela firma. Este problema de maximização pode ser representado por:

$$L^* = \text{Máx } A_j f(\tilde{x}, z) - \tilde{w}\tilde{x}$$

A solução deste fornece a seguinte equação:

$$A_j f_{x_i} = w_i, \quad i=1, \dots, n$$

A partir destas equações determina-se as demandas ótimas dos insumos, condicionadas ao volume de capital utilizado pela firma, que ao serem substituídas na função objetivo fornecem o lucro do capital, representado por:

$$L^* = A_j f(\tilde{x}(z), z) - \tilde{w}\tilde{x}(z) = A_j g(z) = h(z)$$

Na segunda etapa do problema, maximiza-se $h(z)$ em relação a z , levando em consideração o custo de aluguel do capital. Este problema pode ser definido como:

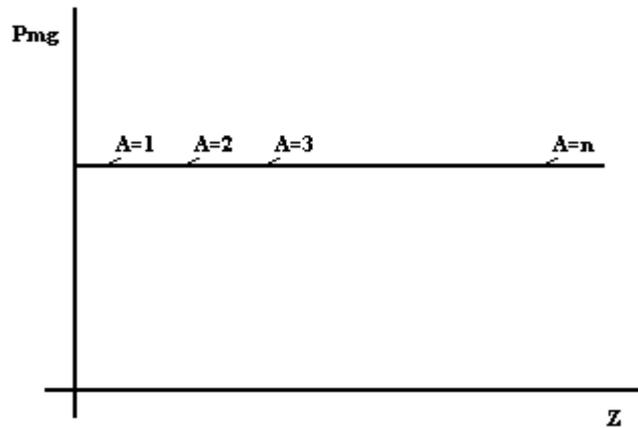
$$L^{**} = \text{Máx } h(z) - qz$$

A solução nos fornece a seguinte equação:

$$A_j g_z = A_j f_z = q \quad (20)$$

Neste modelo, a produtividade marginal do capital, representada por $A_j f_z$, se iguala ao preço do aluguel do capital. Como este preço é o mesmo para todas as firmas, a produtividade marginal do capital também é igual para todas, ao contrário do que ocorria nos modelos anteriores. Assim, a produtividade marginal do capital não se altera entre as firmas que possuem diferentes níveis de produtividade total dos fatores, portanto tem-se:

$$\frac{\partial(A_j f_z)}{\partial A_j} = 0$$



Pela equação 20 percebe-se também que aumentos na produtividade total dos fatores devem ser acompanhados por variações em z , de modo que a produtividade marginal do capital continue constante. Assim, A_j é dado por $\frac{f_z}{q}$, e pode ser entendido como uma função de z . Na prática, firmas que utilizam diferentes valores do capital sofrerão uma variação em f_z e em A , de modo que terão uma função de produção diferenciada.

Derivando a equação 20 em relação a A_j , nota-se como o valor de capital empregado pela firma varia com a produtividade total dos fatores.

$$\frac{\partial z}{\partial A_j} = -\frac{g_z}{A_j g_{zz}}$$

Como a função de produção é côncava, a firma que possui maior A_j , emprega um maior volume do capital.

As firmas que possuem diferentes produtividade total dos fatores empregam diferentes volumes de capital, mas têm a mesma produtividade marginal do capital. O gráfico abaixo representa a produtividade marginal do capital (Pmg) e o valor do capital (z) para firmas com diferentes produtividade total dos fatores.

No presente modelo, a produtividade total dos fatores varia com o valor do capital empregado pelas firmas, como foi visto na equação 20, e a lucratividade marginal do capital não é exatamente igual a produtividade marginal do capital, como ocorria nos modelos anteriores. Agora, ao calcular-se a derivada da curva que relaciona o lucro de capital das firmas, que apresentam diferentes níveis de produtividade total dos fatores, em relação ao valor do capital, obtém-se dois componentes, como pode ser visto na equação abaixo:

$$\frac{\partial L^*}{\partial z} = \frac{\partial A_j g(z)}{\partial z} = A_j f_z + \frac{\partial A_j}{\partial z} g(z) \quad (21)$$

O primeiro componente representa a produtividade marginal do capital, sendo constante para todas as firmas. O segundo está relacionado a como variações na produtividade total dos fatores afetam o volume de capital empregado pelas firmas. Este segundo termo capta o fato de que para cada valor de A, tem-se uma função de produção distinta. Assim, firmas que possuem uma produtividade total dos fatores maior, trabalham com uma função de produção em um patamar mais elevado.

Portanto, no presente modelo, a lucratividade marginal do capital não é constante entre as firmas que possuem diferentes níveis de produtividade total dos fatores, como acontece com a produtividade marginal do capital. Esta lucratividade pode ser crescente, decrescente ou nula, dependendo de como $\frac{\partial A_j}{\partial z} g(z)$ varia entre as firmas que empregam valores de capital distintos.

Como a produtividade total dos fatores varia com z, a lucratividade marginal do capital e o seu lucro médio podem ser crescentes, decrescentes ou constantes entre as firmas. O lucro médio do capital é dado por:

$$Lme = \frac{A_j(z)g(z)}{z} \quad (22)$$

Neste ponto, percebe-se que as alterações em z devem ser acompanhadas por mudanças em A, para que a produtividade marginal fique constante. Assim, firmas que empregam diferentes valores de capital devem apresentar diferentes níveis de produtividade total dos fatores. Derivando a equação 22, tem-se como o lucro médio do capital varia com o valor do capital:

$$\frac{\partial Lme}{\partial z} = \frac{1}{z^2} \left[\left(\frac{\partial A_j}{\partial z} g(z) + A_j(z) g_z \right) z - A_j(z) g(z) \right]$$

Calculando a elasticidade do lucro do capital em relação ao valor empregado de capital, percebe-se que o fato do lucro médio do capital ser crescente ou decrescente em relação ao valor do capital depende se esta elasticidade é menor ou maior que um, como pode ser visto pela equação abaixo:

$$\frac{\partial \ln(A_j(z)g(z))}{\partial \ln z} = \frac{\left(\frac{\partial A_j(z)}{\partial z} g(z) + A_j(z) g_z \right) z}{A_j(z)g(z)} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \ln(A_j(z)g(z))}{\partial \ln z} = \frac{\partial \ln A_j}{\partial \ln z} + \frac{\partial \ln g(z)}{\partial \ln z}$$

Neste último modelo, a elasticidade do lucro do capital em relação ao volume de capital têm dois componentes: a elasticidade da produtividade total dos fatores em relação ao valor do capital empregado pelas firmas e a elasticidade de $g(z)$ em relação ao valor do capital. Como ambas as elasticidades são positivas, para que o lucro médio seja decrescente em z , estas elasticidades devem ser menores que um. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente para que isto ocorra.

Uma outra forma de verificar como o lucro médio varia entre as firmas com diferentes níveis de capital é derivar o logaritmo da equação 22 com relação ao logaritmo de z , dado que tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \ln\left(\frac{A_j g(z)}{z}\right)}{\partial \ln z} = \frac{z^2}{A_j g(z)} \frac{\partial \left(\frac{A_j g(z)}{z}\right)}{\partial z} \quad (24)$$

As firmas geralmente operam com lucro do capital positivo ou no mínimo nulo, pois, caso a firma incorra em um lucro negativo, ela provavelmente sairá do mercado. Portanto, a derivada do lucro médio em relação ao valor do capital tem o mesmo sinal que a derivada do seu logaritmo em relação ao logaritmo do valor de capital.

A derivada do logaritmo do lucro médio em relação ao lucro marginal é dada por:

$$\frac{\partial \ln \left(\frac{A_j(z) g(z)}{z} \right)}{\partial \ln z} = \frac{\partial \ln A_j(z)}{\partial \ln z} + \frac{\partial \ln g(z)}{\partial \ln z} - \frac{\partial \ln z}{\partial \ln z} \quad (25)$$

Calculando o logaritmo da equação 20 e derivando o resultado em relação ao logaritmo de z , tem-se:

$$\frac{\partial \ln g_z}{\partial \ln z} = - \frac{\partial \ln A_j(z)}{\partial \ln z} \quad (26)$$

Substituindo a equação 26 na 25 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \left(\frac{A_j(z) g(z)}{z} \right)}{\partial \ln z} &= - \frac{\partial \ln g_z}{\partial \ln z} + \frac{\partial \ln g(z)}{\partial \ln z} - \frac{\partial \ln z}{\partial \ln z} \\ - \frac{\partial \ln \left(\frac{A_j(z) g(z)}{z} \right)}{\partial \ln z} &= \frac{\partial \ln \left(\frac{g_z z}{g(z)} \right)}{\partial \ln z} \end{aligned}$$

Mas:

$$\frac{g_z z}{g(z)} = \frac{\partial \ln g(z)}{\partial \ln z} \quad (27)$$

Logo:

$$- \frac{\partial \ln \left(\frac{A_j(z) g(z)}{z} \right)}{\partial \ln z} = \frac{\partial^2 \ln g(z)}{\partial \ln z^2} \quad (28)$$

Assim, o logaritmo do lucro médio do capital será decrescente em relação ao logaritmo do volume de capital, se existir uma “log-log” convexidade da função $g(z)$. Neste caso, as alterações no volume de capital provocam pequenas alterações em $g(z)$ e em g_z , de modo que a produtividade total dos fatores varia levemente, para que se mantenha constante a produtividade marginal do capital. Assim, o denominador do lucro médio varia mais que o seu numerador.

Por outro lado, se existir uma “log-log” concavidade da função $g(z)$, então o logaritmo do lucro médio do capital será crescente em relação ao logaritmo do volume de capital. Neste caso, alterações no estoque de capital provocam grandes variações em $g(z)$ e na produtividade total dos fatores, de modo que o lucro do

capital varia consideravelmente em consequência de alterações no valor do capital empregado pelas firmas.

Portanto, o lucro médio do capital pode crescer ou decrescer dependendo se a função $g(z)$ é “log-log” côncava ou “log-log” convexa. Uma função $g(z)$ “log-log” convexa é aquela em que a participação do capital no lucro do capital aumenta na medida em que emprega-se um valor de capital maior e a função $g(z)$ “log-log” côncava indica que a participação do capital no lucro do capital diminui a medida que o valor de capital empregado pelas firmas aumenta.

Como os dados utilizados neste trabalho permitem apenas a obtenção do lucro médio do capital ou da lucratividade marginal do capital das pequenas empresas brasileiras, é interessante observar que a partir do lucro médio das firmas pode-se recuperar o $A(z)$ e o $g(z)$ de cada uma das firmas. Para isso, entretanto, é necessário conhecer o preço de aluguel do capital.

Pela equação 20 tem-se:

$$A_j g_z = q$$

Mas:

$$h = A_j g(z)$$

Logo:

$$\frac{q}{h} = \frac{g_z}{g(z)}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por z , obtém-se:

$$\frac{q}{Lme} = \frac{g_z z}{g(z)}$$

Usando a equação 26, tem-se:

$$\frac{q}{Lme} = \frac{\ln g(z)}{\ln z}$$

Como o preço do capital e o lucro médio do capital podem ser determinados, pode-se calcular a integral de ambos os lados da equação, com relação ao logaritmo de z , encontrando-se o logaritmo de $g(z)$. A exponencial deste logaritmo fornece a função $g(z)$, que representa o valor agregado do capital,

um dos componentes do lucro do capital neste modelo. A partir de $g(z)$ podemos determinar A , que é o outro componente do lucro do capital, como pode ser visto abaixo:

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{A_j g(z)}{g(z)} = A_j$$

Porém, não é possível determinar o preço exato de aluguel do capital através dos dados disponíveis, portanto, na parte empírica do presente trabalho, utiliza-se valores aproximados do preço de aluguel do capital para a obtenção da distribuição do parâmetro $A(z)$, que representa os níveis de produtividade total dos fatores das empresas estudadas.

Todos os modelos apresentados neste capítulo tentam explicar como firmas tomadoras de preços e que atuam nos mesmos mercados, podem empregar valores de capital diferentes em seu processo produtivo e apresentar níveis de lucro diversos¹⁷.

Além disso, nos cinco modelos elaborados neste capítulo, percebe-se que existe uma diferença entre aqueles que consideram a existência de uma restrição no mercado de crédito no qual atuam as firmas e aqueles que consideram apenas a existência de uma heterogeneidade produtiva. No primeiro conjunto, a produtividade marginal do capital varia entre as firmas que empregam diferentes volumes de capital, enquanto no outro, ela permanece constante.

A tabela abaixo resume os principais resultados encontrados neste capítulo.

¹⁷ No caso de um modelo que considere a existência de uma heterogeneidade produtiva entre as firmas e também de uma restrição no mercado de crédito, o problema de maximização do lucro do capital é dado por:

$$L^* = A_j f(\tilde{x}(z), z) - \tilde{w}\tilde{x}(z) = A_j g(z) = h(z)$$

$$L^{**} = \text{Máx } h(z) - q_j z, \text{ cuja a solução é:}$$

$$h_z = A_j f_z = q_j$$

Neste caso, a produtividade marginal do capital varia entre as firmas, visto que ela se iguala ao preço do aluguel do capital, que difere entre elas. Além disso, a equação acima demonstra que variações na produtividade total dos fatores podem ser confundidas com variações no preço do aluguel de capital, ou seja, com mudanças no mercado de crédito. As variações no volume de capital podem ser causadas por alterações no preço de aluguel do capital ou variações da produtividade total dos fatores. O lucro médio do capital e sua lucratividade marginal também podem variar, tanto devido a mudanças do preço de capital quanto a alterações da produtividade total dos fatores. Apesar de aumentos do preço do capital geralmente estarem associados à queda da demanda, e aumentos da produtividade total dos fatores levarem a uma elevação da quantidade de capital empregada pelas firmas, ao observar a curva de lucro médio e de lucro marginal não consegue-se separar os dois efeitos.

Tabela 3 - Comportamento das principais variáveis dos modelos construídos

	Modelo com restrição no mercado de crédito, influenciando o preço de aluguel do capital	Modelos com restrição no mercado de crédito, influenciando o volume de capital empregado pelas firmas	Modelo com heterogeneidade produtiva
Produtividade Marginal do capital	Decrescente	Decrescente	Constante
Lucratividade Marginal do capital	Decrescente	Decrescente	Crescente, Decrescente ou Constante
Lucratividade média do Capital	Decrescente	Decrescente	Crescente, Decrescente ou Constante