

## **6**

### **Elasto-plasticidade e criticalidade auto-organizada**

#### **Resultados experimentais**

##### **6.1**

##### **Introdução**

O capítulo anterior apresentou a formulação numérica do modelo geomecânico utilizado neste trabalho, bem como a sua implementação em elementos finitos.

Este capítulo tem um duplo propósito: primeiramente, mostrar que o modelo elasto-plástico em estudo é conduzido espontaneamente ao estado crítico auto-organizado, caracterizado pelo desenvolvimento de memória temporal e interações espaciais de longo alcance (i.é., sensibilidade em lei de potência às condições iniciais e formação de um padrão multifractal das descontinuidades).

Em seguida, pretende assinalar que o aludido estado crítico é robusto, quer dizer, é capaz de guardar o mesmo comportamento sob pequenas alterações nos parâmetros do modelo (p.ex., condições de contorno, amortecimento, etc).

##### **6.2**

##### **Criticalidade auto-organizada e modelos geomecânicos**

É fato bem estabelecido por estudos experimentais [133,134,135,136,137] e medições de campo [138,139,140,141] que os materiais geológicos da crosta terrestre apresentam uma distribuição (multi)fractal das descontinuidades – físsuras, fraturas, falhas. Apesar da extrema diversidade a que estão sujeitos, submetidos a diferentes condições de solicitação física e química, não deixa de ser intrigante o fato de que o valor usualmente encontrado para a dimensão fractal  $D_0$  destas estruturas pouco varia, sendo 1.60 - 1.70 um valor típico.

A explicação aventada para tal regularidade parece residir em que sistemas geológicos, solicitados *lentamente* por forças externas, supostamente dirigem-se

espontaneamente, durante sua evolução temporal, a um estado crítico, auto-organizando-se entre ordem e caos, estado este habitualmente referido como crítico auto-organizado [5,14,21,22,142], como já se teve a oportunidade de observar no capítulo 2.

Simulações numéricas realizadas em distintos modelos geomecânicos revelaram que os resultados mais plausíveis advinham daqueles que retratavam o contínuo geológico por intermédio de uma rede de ligações constituídas por resistências elétricas, barras ou vigas [143], sendo cada ligação (*bond*) descrita por suas características elásticas e de ruína. Em função da escolha das características de cada qual, bem como do estabelecimento de suas relações constitutivas, uma grande variedade de modelos foram propostos com o intuito de simular, mais ou menos detalhadamente, a ruptura de materiais existentes.

A introdução da desordem nestes modelos é feita, comumente, de diferentes formas, seja pela escolha de uma lei probabilística de ruptura das ligações, seja pela introdução da aleatoriedade nas propriedades mesmas do sistema, mantendo-se, todavia, uma lei de ruptura nos moldes determinísticos.

Entretanto, um grave inconveniente, comum a todos estes modelos, radica em que a física associada ao caráter plenamente tensorial das variáveis envolvidas nas simulações ficava irremediavelmente perdida [137]. Embora se reconheça, a bem da verdade, que a consideração da natureza tensorial das variáveis torne complexa a formulação e discretização dos problemas, trata-se, inquestionavelmente, de um ingrediente essencial na descrição correta da física do sistema em consideração.

Uma das primeiras tentativas de se trabalhar com modelos mais realistas, levando-se em conta, tanto o caráter tensorial das variáveis envolvidas, como a auto-semelhança de escala dos padrões de descontinuidades geológicas, foi realizada pelo grupo encabeçado pelo pesquisador H. Herrmann [144,145].

Com esta finalidade, utilizou-se o programa FLAC (Fast Lagrangian Analysis of Continua) [146,147], que vem a ser um algoritmo em diferenças finitas adequado para formulações de pequenas e grandes deformações em problemas bidimensionais da mecânica dos sólidos. Nele, as relações constitutivas, semelhantes às apresentadas no capítulo anterior, são resolvidas, utilizando-se um esquema de integração especial, destinado a prevenir o efeito de

*locking* dos elementos finitos durante solicitações isotrópicas em problemas de plasticidade [148].

Mais especificamente, uma peculiaridade de muitas funções de escoamento em problemas de plasticidade clássica reside em que elas impõem severas restrições às deformações volumétricas. Assim, a utilização de elementos finitos cujas funções de interpolação sejam de baixa ordem pode conduzir a restrições cinemáticas nos possíveis modos de deformação de um dado elemento, acarretando respostas caracterizadas pelo enrijecimento artificial do material.

A integração temporal no aludido programa, tal como no algoritmo de relaxação dinâmica utilizado nesta pesquisa, é feita explicitamente, não requerendo a formação da matriz de rigidez, hábito comum a todos os esquemas de integração implícitos.

Herrmann e seu grupo encontraram que a organização espacial das zonas de concentração de deformações plásticas (ou bandas de cisalhamento – *shear bands*) apresentava uma estruturação fractal, com dimensão  $D_0 = 1.70 \pm 0.1$ .

Aquele mesmo programa também foi utilizado por Gutierrez [149], tendo encontrado valores consistentes com os estabelecidos pelo grupo do referido pesquisador .

Entretanto, a importante questão da influência de diferentes condições de contorno na formação e na auto-similaridade do padrão espacial das descontinuidades não chegou a ser investigada pelos pesquisadores.

Particularmente, eles obtiveram seus resultados fundamentalmente de uma condição de contorno do tipo *cisalhamento puro*, ou seja, velocidades iguais aplicadas, tanto compressivamente, nos bordos superior e inferior, como extensionalmente, nas fronteiras laterais do corpo de prova ensaiado.

Esta tese se propõe estudar situações adicionais não cobertas pelas anteriores investigações, segundo o estabelecido no item 5.6.1.

### 6.3 Primeiro sinal de SOC: desenvolvimento de interações temporais de longo alcance

De modo a verificar que o modelo elasto-plástico de Mohr-Coulomb em estudo é espontaneamente conduzido a um estado crítico auto-organizado, desenvolvendo, por conseguinte, memória de longo prazo, comum a fenômenos relacionados ao *caos fraco*, lançou-se mão de 2 (dois) procedimentos.

O primeiro, que utiliza a técnica da *propagação do dano*, será objeto de apreciação no capítulo 7, ocasião em que será determinado o valor do parâmetro  $q$  de Tsallis.

O segundo, através do acompanhamento da evolução temporal da deformação plástica equivalente *média*  $\bar{\kappa}$ . Tal estatística é tomada unicamente sobre os elementos finitos porventura plastificados na rede, extraindo-se, pois, desta série temporal, o correspondente *expoente de Lyapunov efetivo*, i.é., calculado não apenas para a condição limite  $t \rightarrow +\infty$ , mas também avaliado ao longo de toda a evolução do sistema [150,151,152].

Em especial, o esquema numérico devido a Wolf [152] utilizado neste trabalho para a determinação do referido expoente, parte, inicialmente, da reconstrução do atrator no espaço (plano) de fase – neste caso, o estabelecido por  $\bar{\kappa}$  vs  $\bar{\kappa}$ . Como, no caso em apreço, o algoritmo de plastificação descrito no capítulo 5 avalia, em cada passo de tempo, ambas as deformações plásticas e suas respectivas taxas, o atrator para o sistema geomecânico é um dado acessível.

Como, de acordo com sua própria definição [1], os expoentes característicos de Lyapunov descrevem a expansão (ou retração) do atrator num espaço de fase multidimensional, ao longo de seus eixos principais (são, na verdade, os autovalores), é fácil perceber que apenas um único expoente é suficiente para retratar a variação do atrator do sistema elasto-plástico em estudo.

Efetivamente, a figura (6.1) ilustra o aspecto do seu atrator no plano de fase, podendo-se notar ser linear, ou seja, há apenas uma única direção possível de variação.

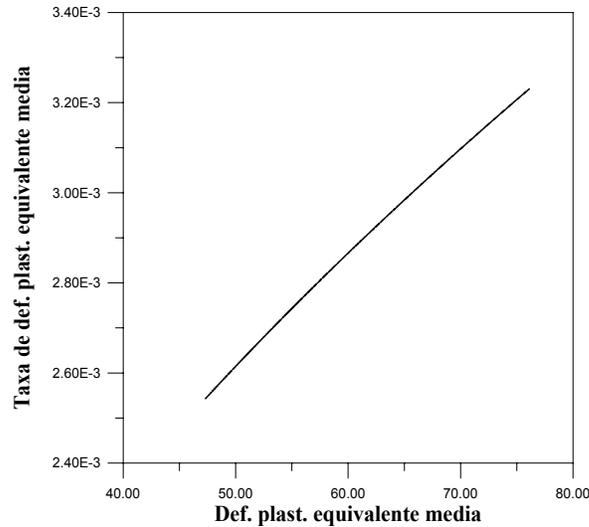


Figura 6.1 – Atrator do sistema elasto-plástico amortecido.

Assim, um único expoente de Lyapunov será suficiente para retratar o comportamento do sistema geomecânico, visto do plano de fase.

Ao leitor poderia parecer natural, em se tratando da evolução temporal de um sistema constituído por muitas unidades interagentes (*many-body system*), que, na caracterização do espaço de fase de tal sistema, fosse necessário lançar-se mão de uma série de expoentes característicos. No entanto, convém ressaltar que o sistema em análise é *amortecido*, o que faz com que a dimensão de imersão do atrator no espaço de fase seja, necessariamente, reduzida (unidimensional, neste caso).

Neste sentido, sistemas hamiltonianos – i.é., conservativos -, em virtude do teorema de Liouville, que condiciona a incompressibilidade de volumes no espaço de fase, devem ter o seu espectro de expoentes característicos agrupados em pares de valores positivos e negativos, razão pela qual, no estudo da sensibilidade de tais sistemas às condições iniciais, tal como propugnado no tópico 3.5, é suficiente analisar-se somente o maior deles.

Portanto, se o sistema geomecânico em estudo apresenta caos fraco, então, este segundo procedimento deverá fornecer, obrigatoriamente,  $\lambda \rightarrow 0$  para períodos de tempo muito grandes.

As figuras 6.2 a 6.7 exibem a série temporal (número de iterações) da deformação plástica equivalente média, ao passo que os correspondentes

expoentes de Lyapunov efetivos, para distintas condições iniciais e valores dos parâmetros de resistência  $c_m$ ,  $\phi_m$  e  $\psi_m$ , são ilustrados nas figuras 6.8 a 6.13.

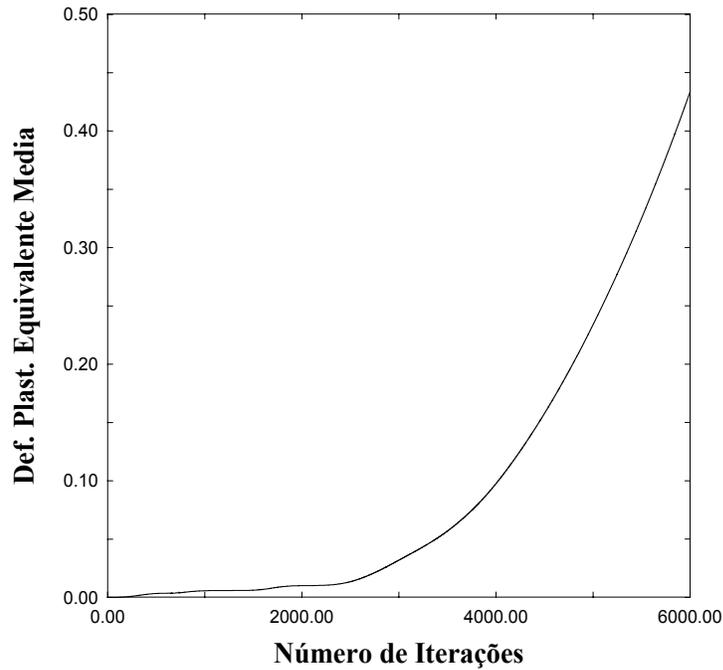


Figura 6.2 – Evolução temporal (número de iterações) da deformação plástica equivalente média (CC1, MPP). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001.

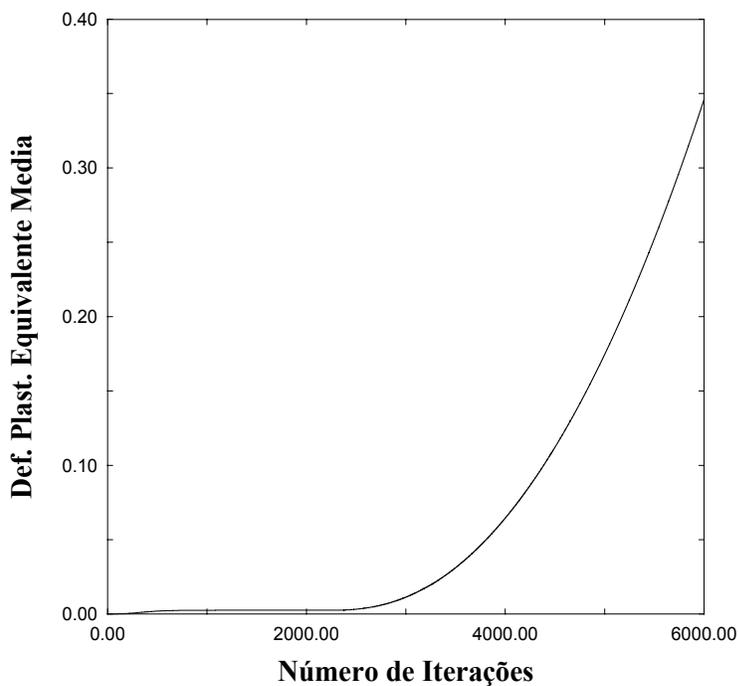


Figura 6.3 – Evolução temporal (número de iterações) da deformação plástica equivalente média (CC1, MPP). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.01.

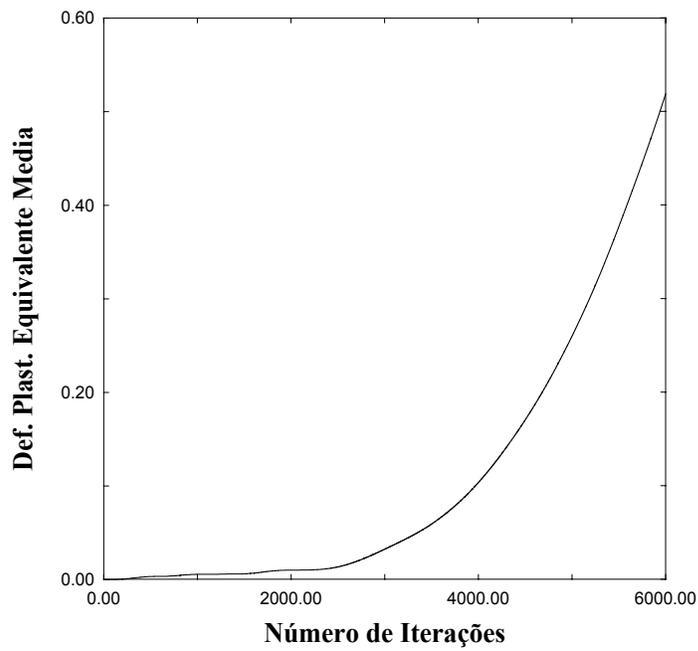


Figura 6.4 - Evolução temporal (número de iterações) da deformação plástica equivalente média (CC1, MPA). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001.

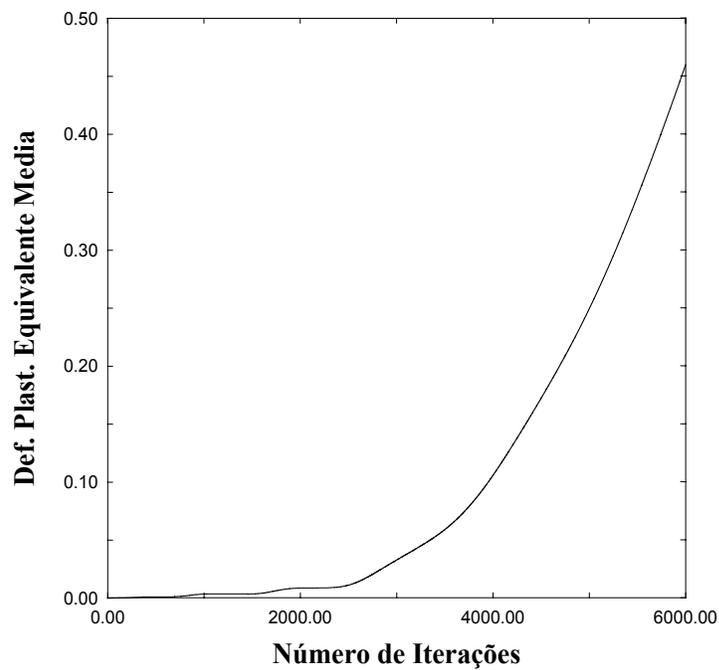


Figura 6.5 – Evolução temporal (número de iterações) da deformação plástica equivalente média (CC2, MPP). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001.

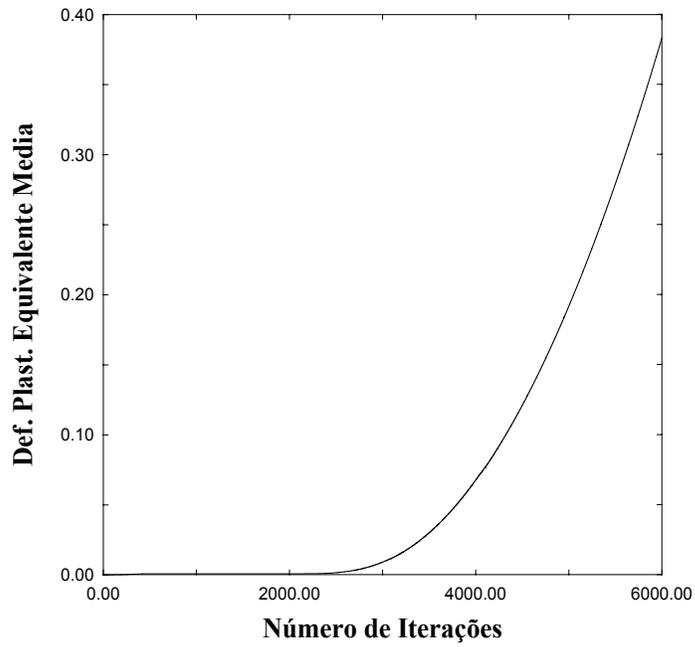


Figura 6.6 - Evolução temporal (número de iterações) da deformação plástica equivalente média (CC2, MPP). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.01.

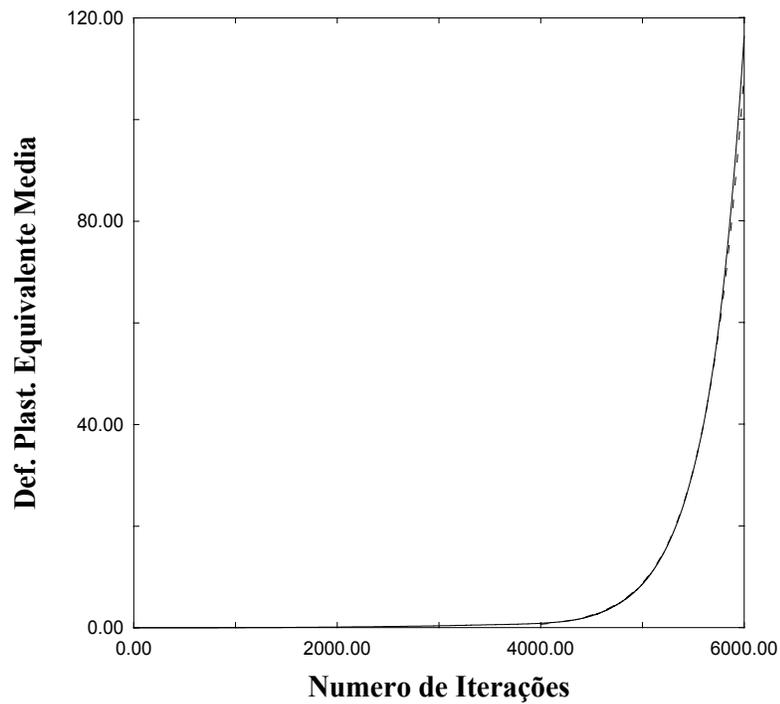


Figura 6.7 - Evolução temporal (número de iterações) da deformação plástica equivalente média (CC3, MPP). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001. A linha tracejada representa uma evolução em lei exponencial (observar a escala de valores no eixo das ordenadas).

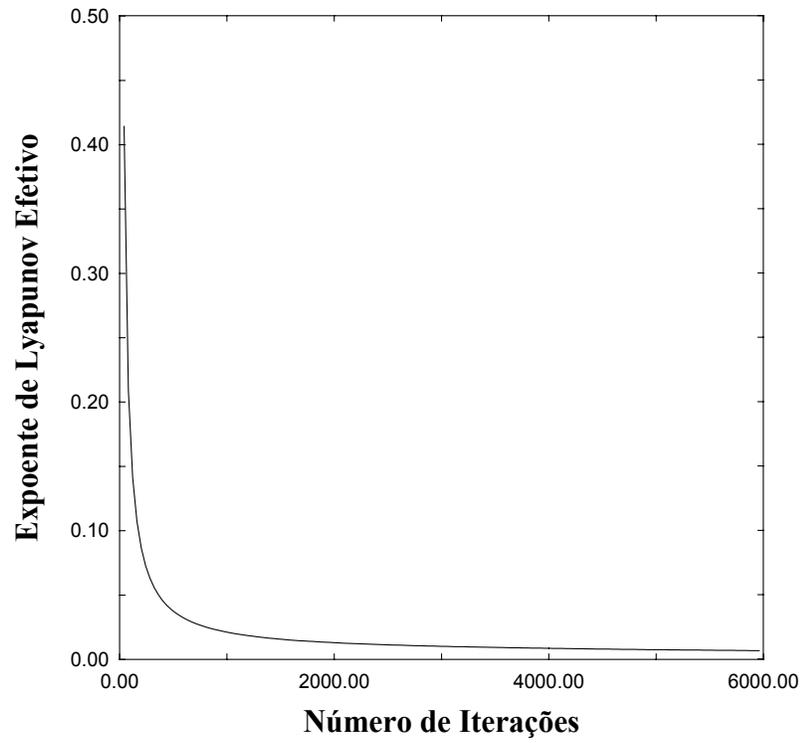


Figura 6.8 – Exponente de Lyapunov efetivo calculado da série temporal da figura 6.2.

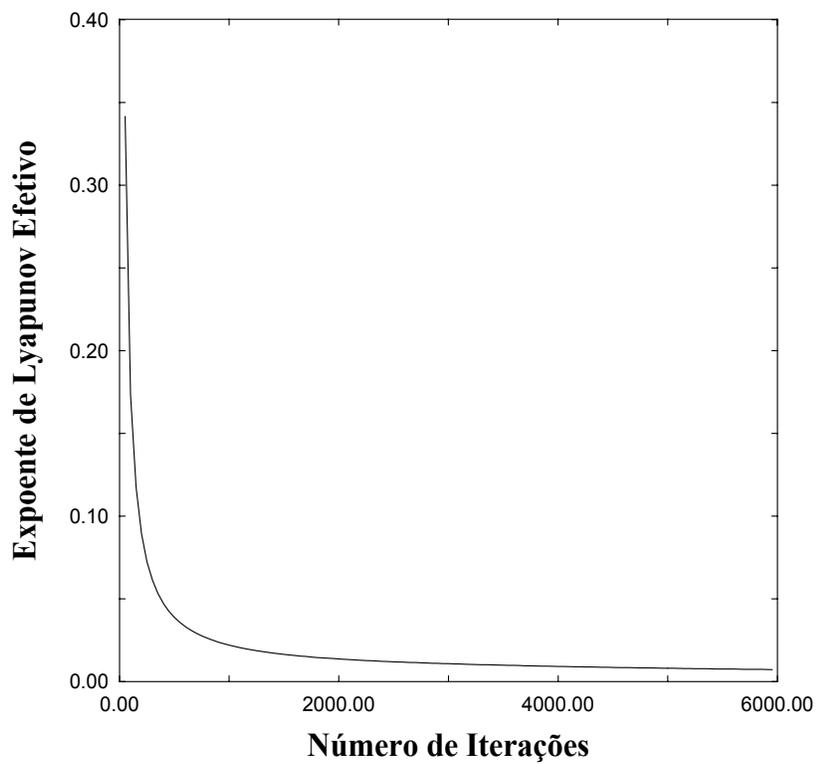


Figura 6.9 - Exponente de Lyapunov efetivo calculado da série temporal da figura 6.3.

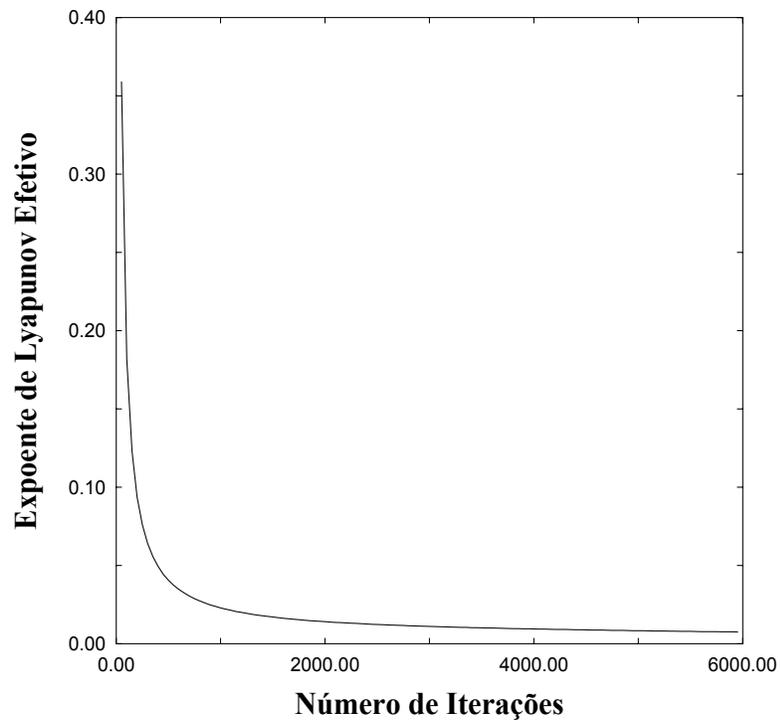


Figura 6.10 – Exponente de Lyapunov efetivo calculado da série temporal da figura 6.4.

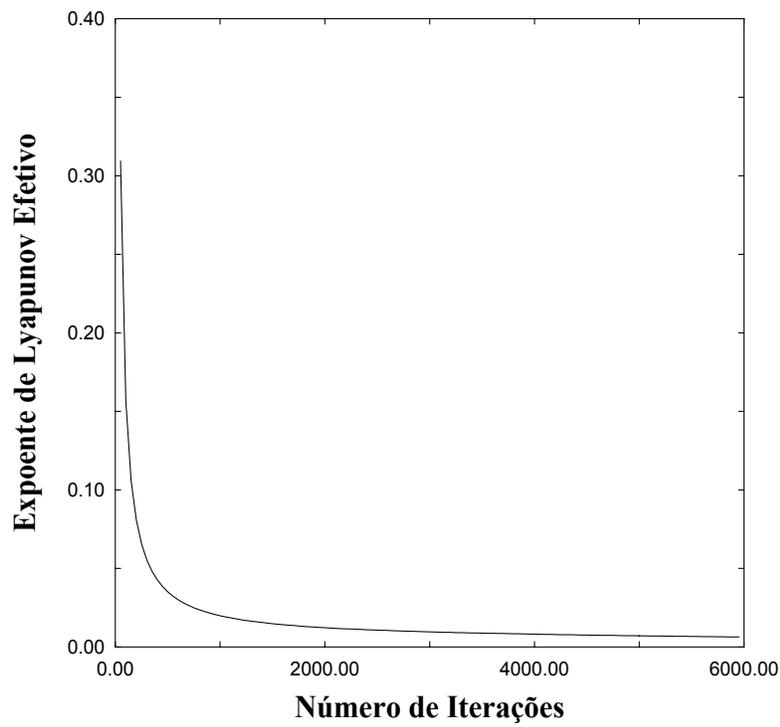


Figura 6.11 – Exponente de Lyapunov efetivo calculado da série temporal da figura 6.5.

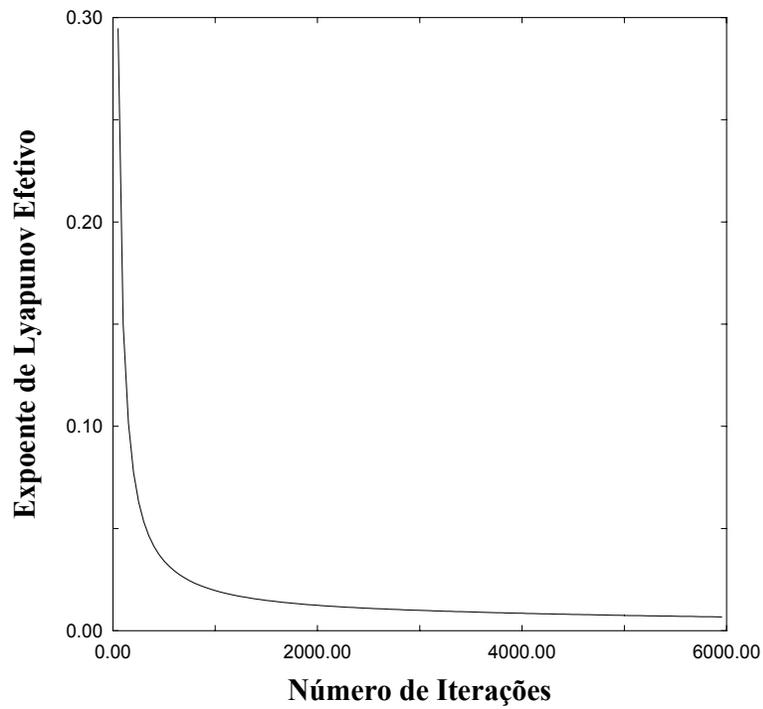


Figura 6.12 – Expoente de Lyapunov efetivo calculado da série temporal da figura 6.6.

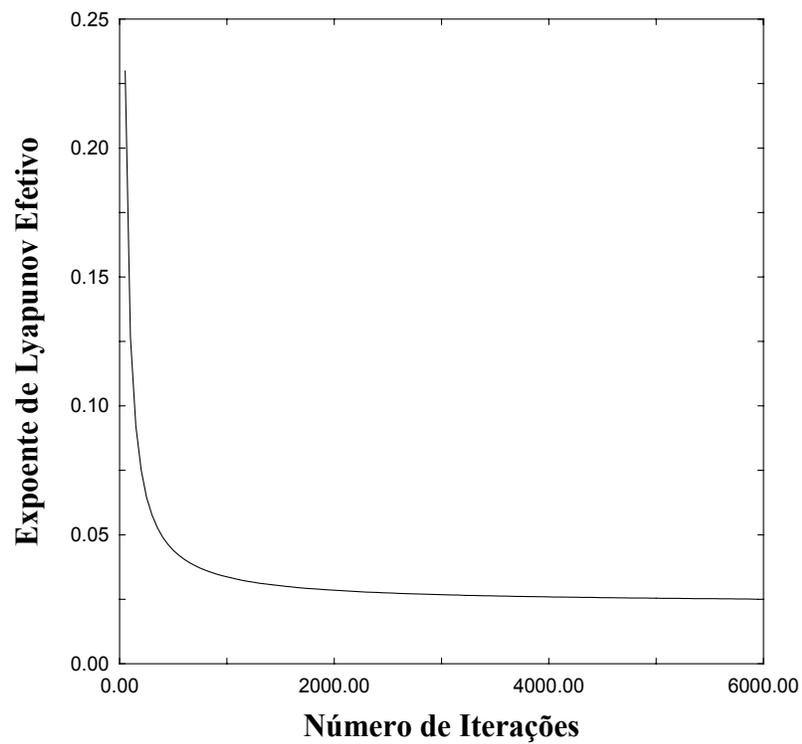


Figura 6.13 – Expoente de Lyapunov efetivo calculado da série temporal da figura 6.7.

Observe-se que os resultados concordam magnificamente com o que se deveria esperar. Efetivamente, as figuras sugerem que, *na faixa dos parâmetros utilizados nas análises numéricas desta tese*, o expoente característico de Lyapunov é um parâmetro muito robusto, tendendo invariavelmente ao valor nulo, independentemente das condições de contorno aplicadas, do comportamento atribuído aos parâmetros de resistência, e da magnitude do amortecimento utilizado.

O leitor não deverá considerar muito rigorosamente a afirmação do parágrafo precedente, pois é natural imaginar-se que tal robustez tenha sempre um limite de validade, não existindo, rigorosamente, nenhum sistema físico que não necessite, em algum momento de sua evolução, de um ajuste de parâmetros efetuado externamente.

Ademais, observa-se que, para a situação do material já rompido (figuras 6.7 e 6.13), a série temporal apresenta evolução em lei exponencial, e o decaimento do expoente característico de Lyapunov é nitidamente mais vagaroso.

Por fim, apesar do amolecimento catastrófico do material em deformação, o aludido expoente continuou a apresentar um comportamento consistente de tendência monotônica a zero, não se detectando, por conseguinte, a presença de caos forte no sistema, como [132] poderia fazer crer.

## 6.4 Segundo sinal de SOC: desenvolvimento de interações espaciais de longo alcance

A invariância de escala correspondente aos padrões espaciais de deformação plástica, obtidos nas simulações numéricas, foi determinada pela função multifractal  $f(\alpha)$  [153,154], utilizando-se, para tanto, o algoritmo de *contagem de caixas (box-counting)* [155,156,157].

Posteriormente, os resultados foram verificados por intermédio do algoritmo de Grassberger – Procaccia [158,159], sendo que, em todos os casos considerados, ambos os procedimentos forneceram resultados muito próximos.

As figuras 6.14 a 6.18 fornecem as isocurvas das deformações plásticas equivalentes após 6000 iterações, para distintas condições de contorno e valores dos parâmetros de resistência, tal como estabelecido no item 5.6.

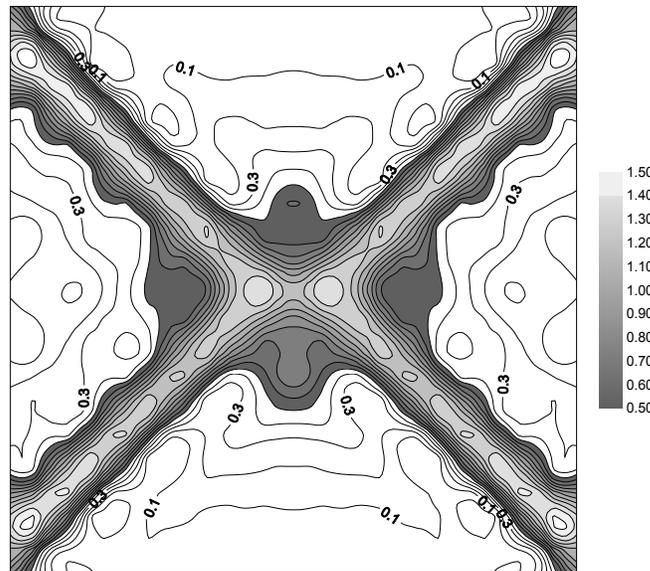


Figura 6.14 – Isocurvas de deformação plástica equivalente, mostrando-se as bandas de cisalhamento (área hachurada). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001 (CC1, MPP).

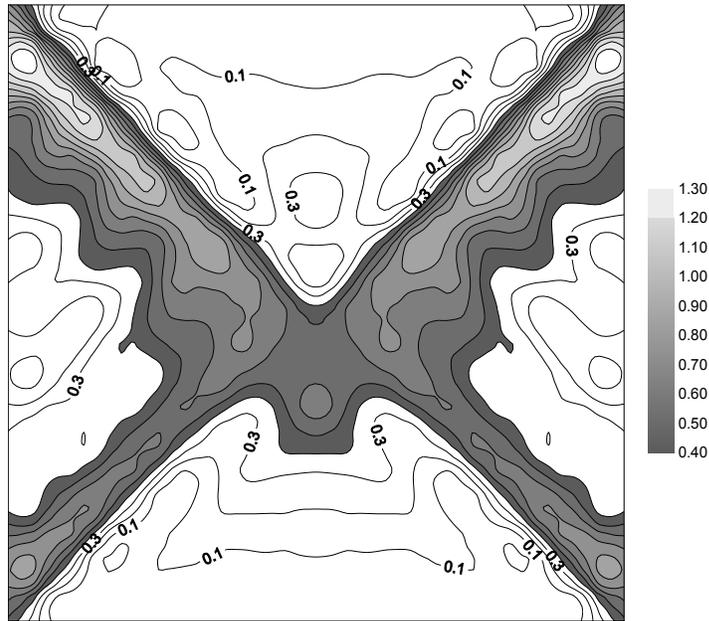


Figura 6.15 – Isocurvas de deformação plástica equivalente, mostrando-se as bandas de cisalhamento. Notar as distorções na área hachurada, fruto do super-amortecimento. O coeficiente de amortecimento é igual a 0.01 (CC1, MPP).

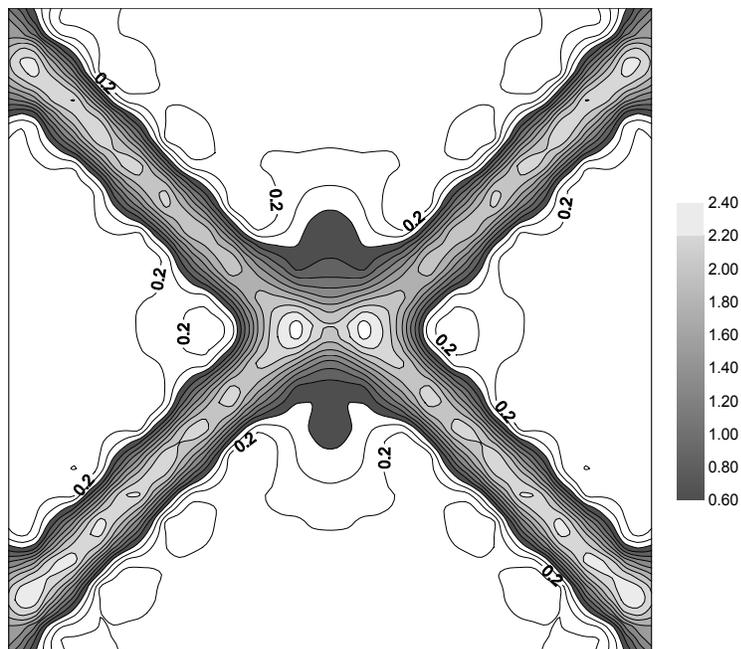


Figura 6.16 – Isocurvas de deformação plástica equivalente, mostrando-se as bandas de cisalhamento (área hachurada). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001 (CC1, MPA).

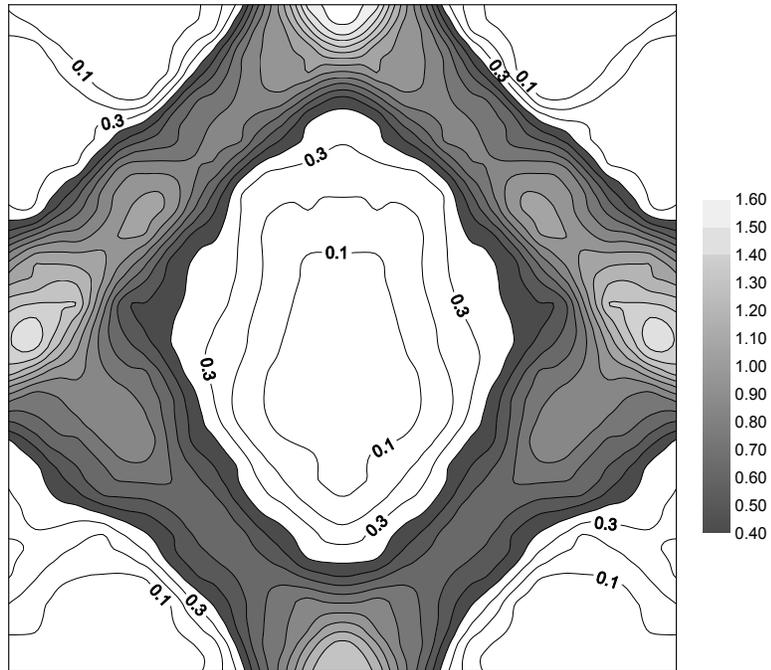


Figura 6.17 – Isocurvas de deformação plástica equivalente, mostrando-se as bandas de cisalhamento (área hachurada). O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001 (CC2, MPP).

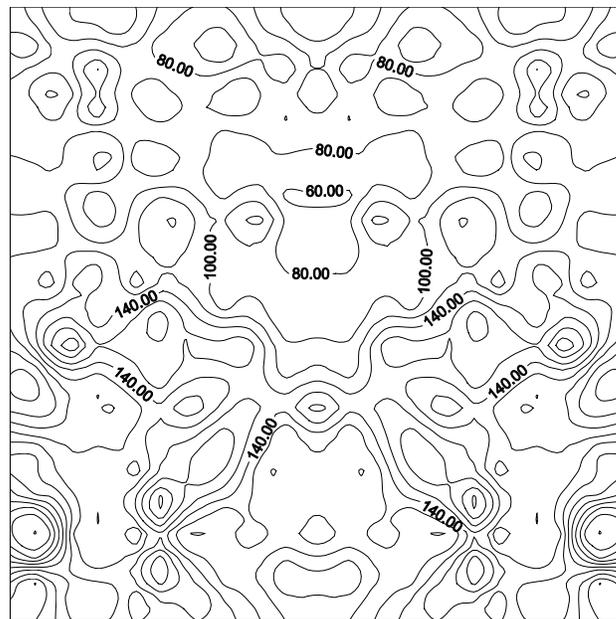


Figura 6.18 – Isocurvas de deformação plástica equivalente. Observar a ausência de padrão espacial, comparativamente às figuras anteriores. O coeficiente de amortecimento é igual a 0.001 (CC3, MPP).

Pode-se notar que a geometria dos padrões espaciais é função, naturalmente, das condições de contorno, da intensidade do amortecimento e dos valores dos parâmetros de resistência utilizados nas simulações.

Observe-se, ainda, a presença de zonas de concentração de deformações plásticas, em que o cisalhamento do material é levado a cabo de forma muito intensa.

Normalmente, nestas regiões de fraqueza e perturbação estrutural, o material rochoso encontra-se bastante alterado e esmigalhado (milonitizado), constituindo-se, por conseguinte, em objeto de preocupação dos engenheiros, mormente quando se trata de fundações de barragens ou estabilidade de encostas.

Estas *bandas de cisalhamento (shear bands)*, como são habitualmente conhecidas, estão relacionadas às propriedades plásticas do material, decorrentes do caráter não-associativo de sua lei de fluxo.

Note-se, igualmente, a ausência de padrão espacial, no caso do material já previamente rompido.

Portanto, se o modelo geomecânico sob investigação é auto-organizativo, então, necessariamente, estes padrões espaciais serão figuras fractais, apresentando correlações espaciais de longo alcance.

De modo a verificar se isto realmente está se passando, as dimensões fractais generalizadas  $D_0$  e  $D_2$  foram avaliadas para as regiões hachuradas das figuras 6.14, 6.16 e 6.17, o resultado mostrado nas figuras 6.19 a 6.24. As retas tracejadas são leis de potência ajustadas aos dados experimentais, tal como indicado no capítulo 1.

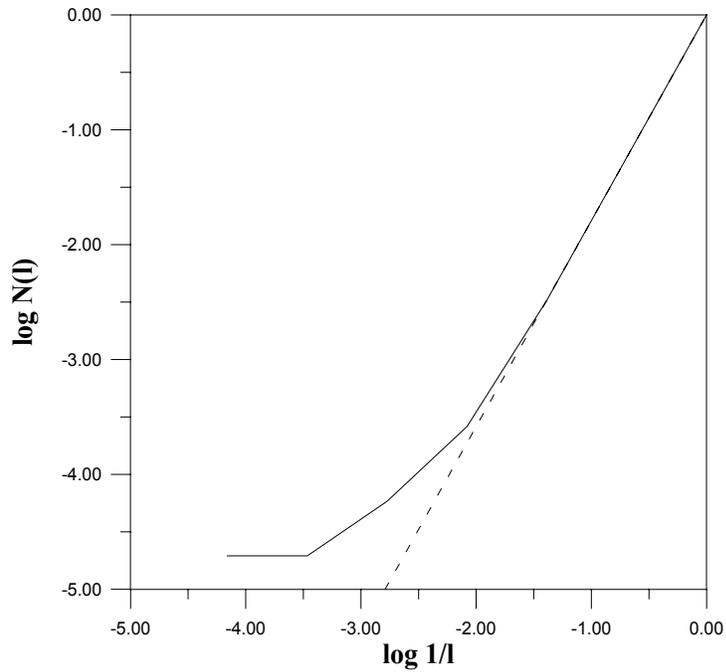


Figura 6.19 – Determinação da dimensão fractal  $D_0 = 1.79$  (expressão 1.1) das bandas de cisalhamento (área hachurada) da figura 6.14 (CC1, MPP).

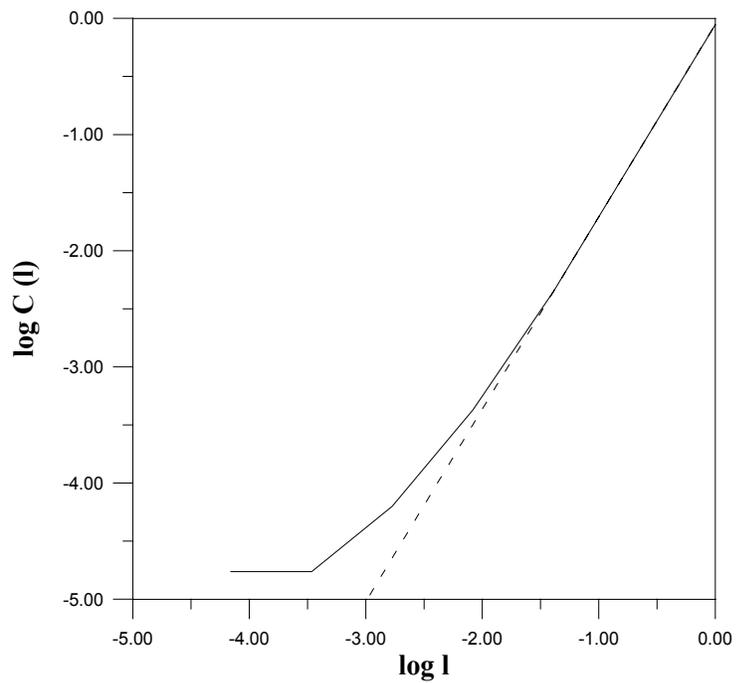


Figura 6.20 – Determinação da dimensão de correlação  $D_2 = 1.62$  (expressão 1.12) das bandas de cisalhamento (área hachurada) da figura 6.14 (CC1, MPP).

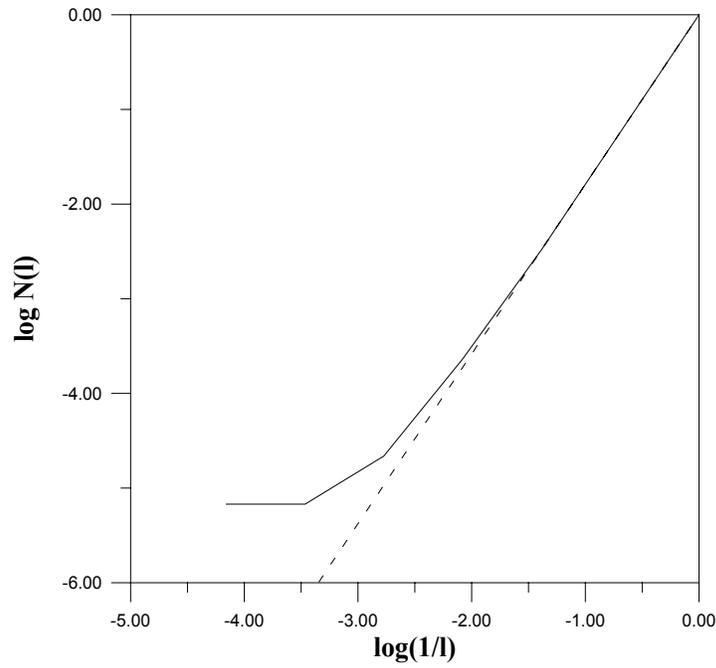


Figura 6.21 – Determinação da dimensão fractal  $D_0 = 1.79$  (expressão 1.1) das bandas de cisalhamento (área hachurada) da figura 6.16 (CC1, MPA).

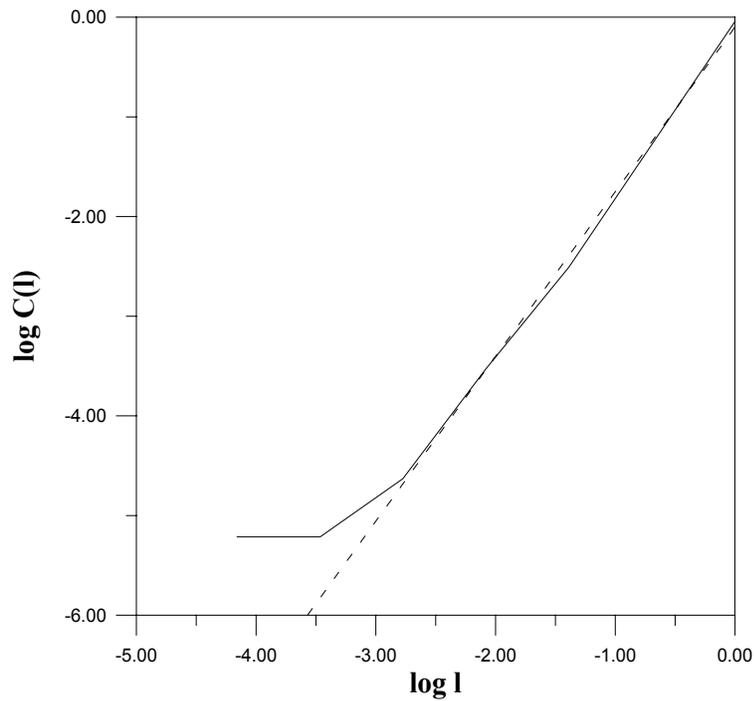


Figura 6.22 – Determinação da dimensão de correlação  $D_2 = 1.65$  (expressão 1.12) das bandas de cisalhamento (área hachurada) da figura 6.16 (CC1, MPA).

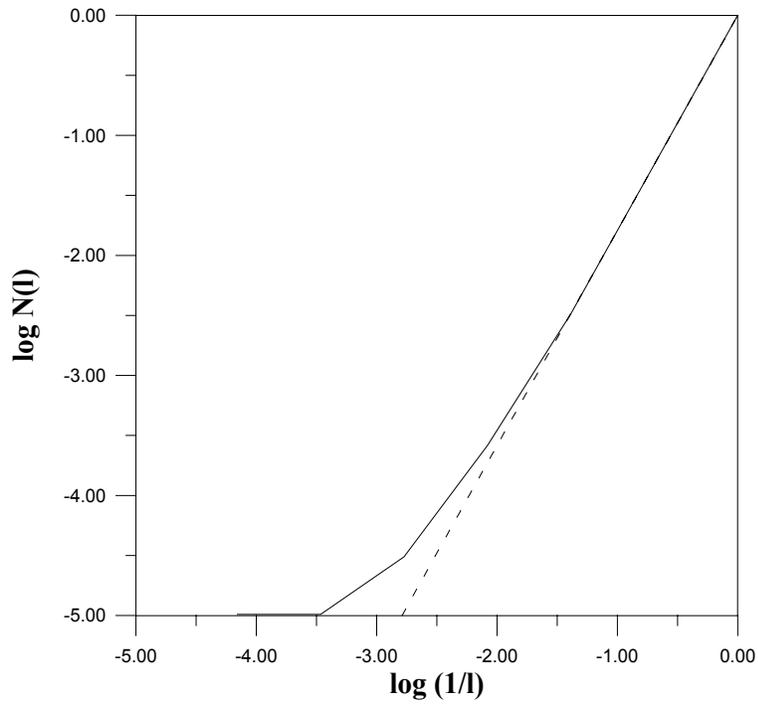


Figura 6.23 – Determinação da dimensão fractal  $D_0 = 1.79$  (expressão 1.1) das bandas de cisalhamento (área hachurada) da figura 6.17 (CC2, MPP).

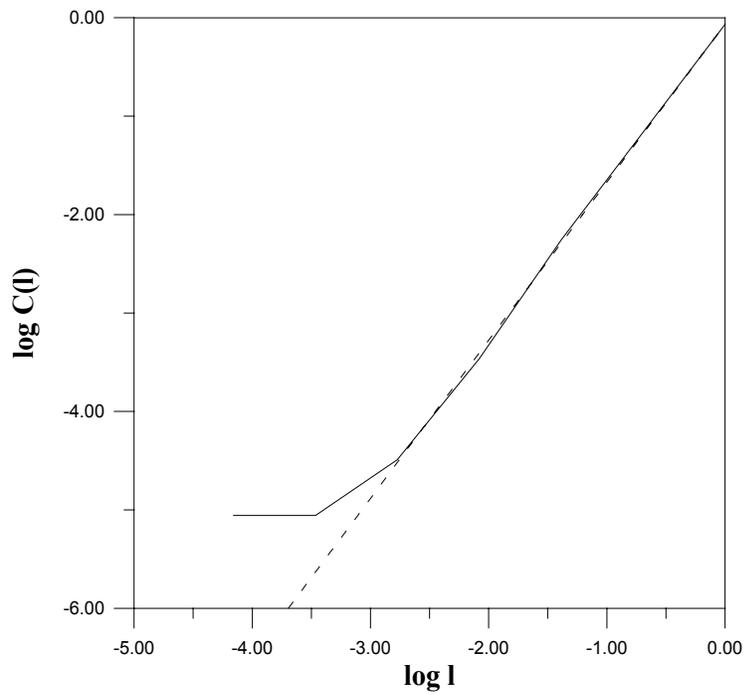


Figura 6.24 – Determinação da dimensão de correlação  $D_2 = 1.61$  (expressão 1.12) das bandas de cisalhamento (área hachurada) da figura 6.17 (CC2, MPP).

Pode-se notar que, em razão da finitude do sistema (apenas 400 elementos), o comportamento em lei de potência, esperado para objetos fractais, só se cumpre num reduzido trecho da curva.

O autor realizou simulações com o mesmo modelo numérico, porém com um número consideravelmente maior de elementos (3200), de modo a se tentar minimizar o aludido efeito, diagnosticado nos gráficos anteriores. O resultado, após 30.000 iterações, para a condição de contorno do tipo (CC1,MPP), está mostrado na figura (6.25).

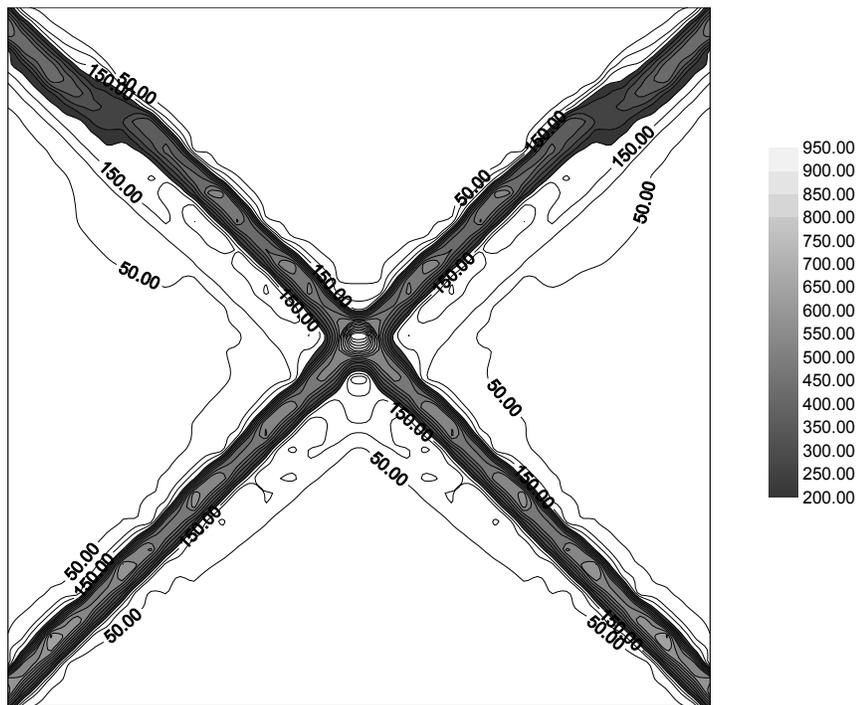


Figura 6.25 – Isocurvas de deformação plástica equivalente, mostrando-se as bandas de cisalhamento (área hachurada). O número de elementos da malha é de 3200, sendo o coeficiente de amortecimento igual a 0.001 (CC1, MPP).

A figura (6.26) apresenta o comportamento de escala das bandas de cisalhamento.

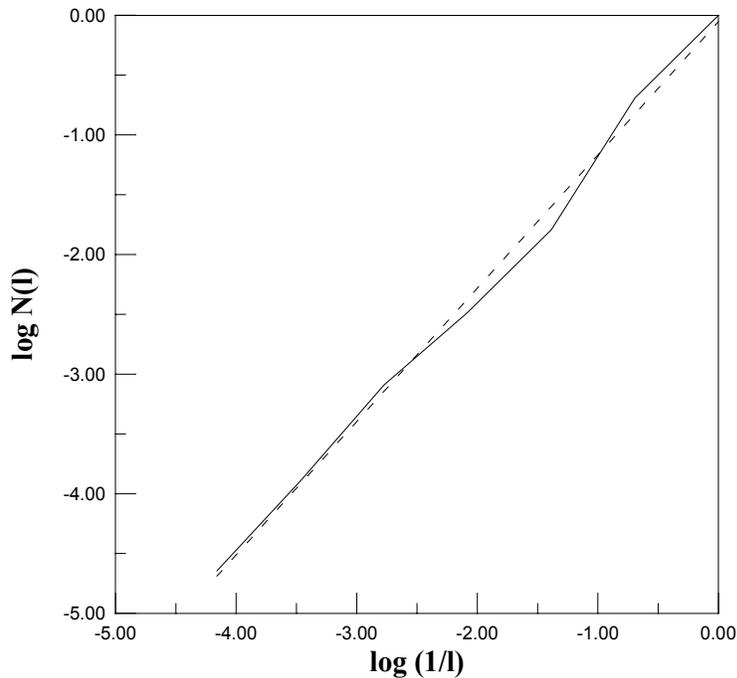


Figura 6.26 – Determinação da dimensão fractal  $D_0 = 1.11$  (expressão 1.1) das bandas de cisalhamento (área hachurada) da figura 6.25, para o caso de uma malha de 3200 elementos (CC1, MPP).

Embora ainda presente o aludido efeito de finitude, a lei de escala do sistema, calculada para a região hachurada, se estende, desta feita, por uma extensão bem maior.

O leitor não deverá estranhar o fato de, neste caso, a dimensão fractal ter adquirido um valor bem inferior à calculada para a figura (6.14). Como se verá no tópico (7.1), o modelo numérico elasto-plástico, baseado no chamado *contínuo clássico*, comumente apresenta padrões espaciais que dependem fortemente da discretização e orientação da malha de elementos finitos. Assim, as regiões cizalhadas da figura (6.25) apresentam-se muito mais estreitas que as da figura (6.14), acarretando, por conseguinte, um valor de dimensão fractal bem inferior.

Portanto, efetivamente, o sistema em estudo desenvolveu, ao longo de sua evolução, interações de longo alcance, tanto temporais, caracterizadas pela tendência assintótica a zero do expoente de Lyapunov do sistema, como espaciais, caracterizadas pela estruturação fractal no campo de deformações plásticas.

Uma vez que o comportamento entrópico não-extensivo tem sido reiteradamente utilizado como uma possível medida da complexidade de sistemas

auto-organizativos [160], o próximo capítulo tratará da determinação do índice entrópico de Tsallis.